

Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

Б.А.ЛАВРОВ

**ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА
ПРИ ИСПЫТАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАКОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие

Куйбышев 1989

УДК 519.24:629.7.015

Планирование эксперимента при испытании элементов авиаконструкций: Учеб.пособие /Б.А.Л а в р о в;
Куйбыш.авиационн-т. Куйбышев, 1989. 72 с.

Рассмотрены основы теории планирования эксперимента. Приведены примеры применения теории планирования эксперимента для определения характеристик прочности, пластичности и трещиностойкости конструкционных материалов с обработкой результатов на ЭВМ.

Пособие предназначено для практического использования в учебно-исследовательской и научно-исследовательской работе студентами авиационных специальностей, а также может быть полезно инженерам и аспирантам.

Табл. 25. Ил. 11. Библиогр.: 10 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета института

Рецензенты: доц. канд.физ.-мат.наук М.Н.О с и п о в,
канд. техн. наук Б.В.Л у п т а к о в



Куйбышевский авиационный институт, 1989

В В Е Д Е Н И Е

Современные летательные аппараты представляют сложную транспортную систему, работающую в широком диапазоне внешних воздействий.

С целью обеспечения прочностной надежности конструкции ЛА проводится комплекс теоретических и экспериментальных исследований. Несмотря на совершенствование методов расчета, экспериментальные исследования остаются одним из важнейших этапов создания ЛА. Существует развитая теория и техника проведения натуральных и лабораторных исследований прочности, часто весьма сложных.

Одним из путей повышения эффективности экспериментальных исследований является применение математических методов (математического моделирования). Математическое моделирование занимается анализом математических моделей. Под математической моделью подразумевается математическое описание реального явления, процесса, помогающее анализировать его и делать разумные предсказания.

В реальной ситуации действует множество переменных (факторов). Некоторые из них оказывают существенное влияние на само явление или процесс, другие - малое, несущественное. В результате выявления существенных факторов и отбрасывания несущественных происходит идеализация и схематизация реального физического явления.

После построения модели ее подвергают проверке, способности адекватно описывать исходную ситуацию. Считают, что модель адекватна, если результаты, полученные на основе этой модели, достаточно хорошо для целей рассматриваемой задачи отражают реальную физическую ситуацию. Схема такого моделирования представлена на рис. I.

При математическом моделировании применяется принцип схематизации и идеализации. Процесс математического моделирования включает в себя:

1. Детальный анализ с целью построения математической модели.
2. Математическую формулировку для заданной физической ситуации.

3. Синтез и описание результатов для достижения полного понимания процесса или для прогнозирования результатов в области, где отсутствуют экспериментальные данные.

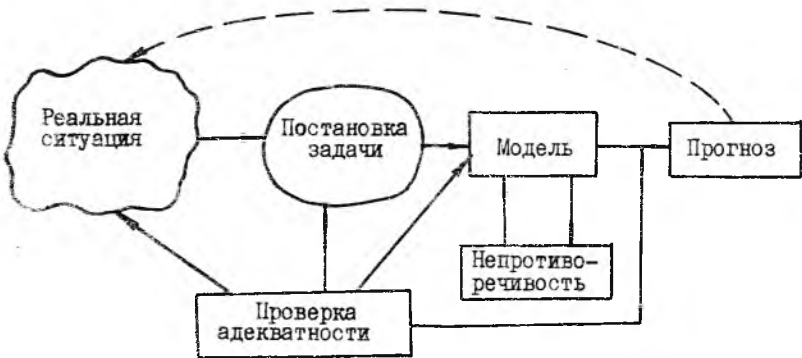


Рис. I

Преимущества работы с моделью:

1. В модели можно устанавливать точные соотношения между величинами (вести активный эксперимент).
2. Модель позволяет выделить нужные характеристики, отбросив многие несущественные.
3. Модель можно использовать для прогнозирования изменений в области, где отсутствуют экспериментальные данные.

Одной из разновидностей математического моделирования является теория планирования эксперимента.

Логически продуманная постановка исследований включает в себя выбор модели и выбор плана эксперимента, оптимального в определенном смысле для этой модели. Решение первой задачи (выбор модели) связано с глубоким знанием объекта исследования, а выбор плана эксперимента совершенно не зависит от объекта исследования. Выбор (построение) математической модели – это искусство, планирование – это главным образом уже техника.

В моделях происходит обмен между их всеобщностью, точностью и реалистичностью. Усиление одного свойства немедленно ведет к ослаблению других.

Планирование эксперимента само по себе не улучшает физический смысл модели, оно улучшает только ее статистические свойства. При выборе модели необходимо понять, что мы хотим от модели (цель),

какие требования должны к ней предъявлять. Главное при выборе модели – это предсказание результатов и направления дальнейших исследований с требуемой точностью.

При проведении эксперимента можно выделить хорошо и плохо организованные системы (диффузные). Исследования хорошо организованных систем ведутся вот уже более 200 лет. Считается, что в результате проведения эксперимента над такими системами можно получить функциональные связи, хорошо согласующиеся с опытными данными. Этим связям приписывается роль абсолютных законов. Применяется методология однофакторных экспериментов, т.е., последовательно изменяя независимые существенные переменные, получают набор данных, по которым находят функциональные связи от одного фактора, остальные считая как параметры.

В плохо организованных системах нельзя четко выделить влияние отдельных факторов, нельзя четко разграничить влияние переменных различной физической природы.

К таким системам возможны два подхода.

1. Применение идей многомерной математической статистики. Эта логически обоснованная формализация эмпирических методов (вариация одновременно возможно большого числа переменных) дает возможность получить многомерные зависимости.

2. Кибернетический подход, связанный с чисто логическим анализом управления диффузными системами.

Несмотря на то, что эти подходы различны, нередко одна и та же система изучается одновременно и независимо двумя методами.

К сожалению, механизм воздействия реальных условий эксплуатации (РУЭ) на прочность ЛА недостаточно известен. Во всяком случае, построить модели воздействия РУЭ только из теоретических соображений для каждого конкретного случая не удастся. Поэтому реальный путь – это построение эмпирических моделей по результатам экспериментальных исследований.

Целью настоящего пособия является развитие навыков практического применения методов планирования эксперимента при неполном знании механизмов внешнего воздействия на прочность конструктивных материалов, применяемых при создании летательных аппаратов.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Планирование эксперимента - это процедура выбора числа и условий проведения отдельных опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

1.2. Объект исследования представляется в виде "черного ящика"

При рассмотрении такой модели различают входы - факторы (x_1, x_2, \dots, x_k), т.е. все способы воздействия на поведение объекта исследования, и выходы - численные характеристики целей исследования y_1, y_2, \dots, y_m (параметры, критерии, целевые функции, функции отклика).

Уравнение, связывающее входы - факторы с выходами, является математической моделью эксперимента и в общем виде записывается как:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (1.1)$$

Факторы в пределах эксперимента могут принимать только одно значение, которое называется уровнем. Каждый фактор имеет определенное число уровней. Фиксированный набор уровней факторов определяет условия проведения одного из возможных опытов. Количество всех возможных экспериментов будет равно числу всех уровней, возведенному в степень числа факторов, т.е. $N = p^k$, где N - число всех опытов, p - число уровней, k - число факторов.

Объект исследования должен удовлетворять требованиям воспроизводимости результатов, т.е. при повторении эксперимента разброс результатов не должен превышать некоторую заранее заданную величину. Объект должен быть управляемым, т.е. допускать активное вмешательство в процесс выбора уровней факторов.

1.3. Функции отклика. Они могут быть физическими, технико-экономическими, физико-механическими и т.д. Функция отклика должна выражаться количественно одним числом, быть универсальной, статистически эффективной и однозначной, т.е. одной совокупности сочетаний факторов с точностью до погрешности эксперимента должно соответствовать одно значение функции отклика. Кроме того, она должна быть простой, легко вычисляемой и иметь физический смысл.

1.4. Фактор. Фактором называется переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение (уровень) и характеризующая воздействие на объект исследования. Факторы могут быть внешние (нагрузки, условия эксплуатации и т.д.) и внутренние (конструктивные, технологические и т.д.). Различают коли-

ественные и качественные факторы, простые и сложные. К факторам предъявляются следующие требования: управляемость, т.е. выбор, установка и поддержание нужного значения уровня фактора в течение опыта; операционность, т.е. определенная последовательность действий, с помощью которых устанавливается нужный уровень; максимально возможная точность измерений уровней фактора; однозначность факторов.

Обычно на объект воздействует сразу множество факторов (совокупность). В этом случае факторы должны быть совместимы и независимы. Это значит, что все их комбинации должны быть безопасно осуществимы и возможно установление фактора на любом уровне независимо от уровней других факторов.

1.5. Математическая модель. Под моделью эксперимента понимают вид функции отклика (I.I). Выбрать модель – значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение. Численные значения констант (коэффициентов) этого уравнения определяют после проведения эксперимента.

Выбранная модель должна быть адекватной и простой.

Под адекватностью понимают способность модели предсказывать результаты эксперимента в некоторой области с требуемой точностью. Адекватность модели проверяется после реализации опытов.

2. ВЫБОР МОДЕЛИ

При подготовке эксперимента уместно задать вопрос: когда возможно планирование эксперимента.

Планирование локального эксперимента, безусловно, возможно во всех тех случаях, когда еще перед началом исследования можно сформулировать предварительные знания в виде математической модели.

Модель – это весьма многозначное понятие, т.е. перевод нашего так называемого „реального мира“ на язык математики, что позволяет нам получить более точное представление о его наиболее существенных свойствах и, как мы надеемся, в некотором смысле предсказать будущие события.

Модель можно заставить отражать действительность, однако она не есть сама действительность.

Для описания одного и того же реального явления можно предложить несколько моделей.

2.1. Некоторые подходы к созданию моделей

2.1.1. Эскизная модель, заданная дифференциальными уравнениями для описания отдельных явлений, происходящих в сложной системе. Здесь путь построения модели таков: вначале предлагают некоторые логически обоснованные постулаты. Исходя из них, записывают дифференциальные уравнения, которые затем интегрируют. Полученные таким образом функциональные зависимости сопоставляют с реальными явлениями, пользуясь обычными статистическими критериями.

Дифференциальные уравнения легче поддаются осмыслению, чем записи в интегральной форме.

2.1.2. Программная модель - совокупность программ, написанная для ЭВМ.

Эти две модели носят познавательный характер.

2.1.3. Комбинированная модель, представленная дифференциальными уравнениями.

Такие модели создаются, чтобы лучше понять структуру той или иной диффузной системы, для предсказания поведения этой системы в изменяющихся условиях или для того, чтобы в каком-то смысле управлять системой. Например, экология, эпидемии и т.д. из-за сложности могут не иметь никакого познавательного значения.

2.1.4. Локально-интегральная модель (полиномиальная). В такую модель можно включить множество независимых переменных и систему представлять в виде "черного ящика". Исследователь ищет связь между выходным параметром и множеством входных параметров (независимых переменных), почти ничего не зная о механизме явлений, протекающих в системе.

В практическом отношении эта модель может оказаться очень полезной в планировании эксперимента. С позиции статистики эта модель очень удобна, т.к. мы можем улучшать аппроксимацию, повышая порядок полинома, и при этом наша аппроксимирующая функция остается линейной по параметрам, что облегчает все последующие статистические процедуры.

При анализе явлений необходимо пользоваться статистическими методами. При использовании этих методов будем применять следующую терминологию и классификацию.

2.2. Терминология и классификация моделей

Д е т е р м и н и р о в а н н ы е модели – в них каждая переменная или параметр могут принимать определенное фиксированное значение или ряд фиксированных значений в любых заданных условиях.

С т а т и с т и ч е с к и е или вероятностные – в них допускается неопределенность: переменные или параметры, используемые для описания связей между входом и выходом, а также структура элементов и ограничений точно не известны.

Три типа моделей:

- модели явлений переноса, основанные на физико-химических принципах;
- модели баланса популяций, базирующиеся на балансе популяций;
- эмпирические модели, используемые для подгонки экспериментальных данных.

Примеры: 1. Модели переноса – феноменологические уравнения непрерывности, описывающие сохранение массы, импульса и энергии.

2. Распределение по времени пребывания, по возрасту – модели популяций.

Преимущества работы с моделью:

1. В модели можно устанавливать точные соотношения между величинами и преобразовывать их математически; в реальных процессах эти соотношения выполняются лишь приближенно.

2. Модель позволяет выделить нужные характеристики процесса, отбросив многие запутанные и несущественные черты, не требующие строгого анализа.

3. Модель можно использовать для прогнозирования поведения в области, где отсутствуют экспериментальные данные.

Предполагая, что измеренные значения переменных содержат лишь случайную ошибку, а систематическая ошибка отсутствует, исследователь на основе конечного числа измерений ставит перед собой цель определить:

- тенденцию измерений группироваться относительно некоторого центрального значения данной переменной;
- рассеяние измеренных значений относительно этого центра;
- достоверность этих оценок.

2.3. Эмпирические модели

Многие явления и процессы нельзя описать (из-за их сложности) моделями первых двух типов. В этом случае применяются эмпирические модели. Типичный пример - подгонка экспериментальных данных с помощью каких-то функций, чтобы можно было предсказать, как влияет изменение независимых переменных на ход явления или процесса.

Ведущим принципом, которым следует руководствоваться при сборе данных и построении моделей, является статистика.

Модели могут быть линейными и нелинейными.

Линейные модели обычно берутся в виде алгебраических полиномов вида:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_j. \quad (2.1)$$

Нелинейные модели могут быть нелинейны как по независимым переменным (факторам), так и по параметрам модели (коэффициентам).
Например:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_3 \ln X_3. \quad (2.2)$$

Эта модель нелинейна по независимым переменным.

Модель $\eta = \beta_0 + \beta_1 \beta_2 X_1 + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3$ нелинейна по коэффициентам (параметрам модели);

модель $\eta = e^{\beta_1 X_1} + e^{\beta_2 X_2}$ нелинейна по независимым параметрам и коэффициентам.

Выбор полинома для модели дает ряд преимуществ, так как можно любую функцию разложить в степенной ряд. Вычисление коэффициентов полинома проводится по результатам эксперимента. Эксперимент содержит конечное число опытов. Поэтому мы получаем не действительные („истинные“) значения коэффициентов, а их выборочные (статистические) оценки. Их точность и надежность зависят от свойств выборки. Величину выборочных оценок в статистике принято обозначать латинскими буквами (не β , а b). Тогда модель (2.1) будет иметь вид:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j X_j; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.3)$$

Оценки коэффициентов можно найти по формуле

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ji} Y_i}{N}; \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad (2.4)$$

где N - число экспериментов, а y_i - результат в i -ом эксперименте.

Коэффициент при независимых переменных указывает на силу влияния фактора. Чем больше величина коэффициента, тем больше влияние фактора (эффект).

Часто встречается, что эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. В этом случае говорят, что имеет место эффект взаимодействия факторов. Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценить эффект взаимодействия. В этом случае модель будет иметь вид:

$$y = \sum_{j=0}^k \beta_j X_j + \sum_{j < e}^{\epsilon_k} \beta_{je} X_j X_e + \sum_{j < e < q} \beta_{jeq} X_j X_e X_q + \dots \quad (2.5)$$

Полное число всех возможных эффектов, включая нулевой, линейные и т.д., равно числу опытов полного факторного эксперимента.

Число взаимодействий порядка m определяется по формуле

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!} \quad (2.6)$$

3. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ (ПФЭ) ТИПА 2^k

Для планирования ПФЭ необходимо выбрать локальную область факторного пространства.

Выбор этой области связан с тщательным анализом априорной информации об исследуемом объекте.

Процедура выбора области включает в себя выбор основного уровня и интервалов варьирования факторов.

3.1. Выбор основного уровня

Основной уровень - это точка многомерного факторного пространства, задаваемая комбинацией уровней факторов и являющаяся центром области экспериментов. При установлении основного (нулевого) уровня необходимо рассматривать различные ситуации, анализируя априорную информацию. При отсутствии априорной информации выбор основного уровня произволен.

3.2. Выбор интервалов варьирования факторов

При использовании модели вида

$$\eta = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + \sum_{1 \leq j < \ell} \beta_{j\ell} x_j x_\ell + \sum_{1 \leq j < \ell < m} \beta_{j\ell m} x_j x_\ell x_m + \dots \quad (3.1)$$

для сокращения числа опытов каждый фактор достаточно варьировать на двух уровнях - верхнем и нижнем. Интервал варьирования - это некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание - нижний уровень фактора. Интервал варьирования может быть широким, узким и средним. Минимальная величина интервала варьирования должна быть больше ошибок воспроизведения уровней факторов в опыте, иначе верхний и нижний уровни факторов будут неразличимы. При увеличении интервалов варьирования увеличивается точность определения коэффициентов уравнения (2.1). Однако необходимо иметь в виду, что при чрезмерном увеличении интервалов затрудняется возможность применения моделей типа (2.1) и может измениться физическое содержание исследуемого объекта.

Для упрощения записи условий проведения эксперимента и обработки полученных экспериментальных данных удобно масштаб изменения факторов выбирать так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний -1, а основной - нулю. Это можно всегда сделать с помощью преобразования

$$X_j = \frac{x_j - x_{j0}}{J_j}, \quad (3.2)$$

где X_j - кодированное значение фактора; x_j - натуральное значение фактора; x_{j0} - натуральное значение основного уровня; J_j - интервал варьирования; j - номер фактора.

3.3. ПФЭ типа 2^k

При двух уровнях каждого фактора получается полный факторный эксперимент типа 2^k . Для этого случая общее число опытов N , необходимых для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов, равно 2^k (k - число факторов). Условия эксперимента представляются в виде таблицы - матрицы планирования. Для двух факторов такая матрица приведена в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Матрица планирования ПФЭ 2^2

№ опыта	X_1	X_2	Y
1	-I	-I	Y_1
2	+I	-I	Y_2
3	-I	+I	Y_3
4	+I	+I	Y_4

В этой таблице X_1 и X_2 - факторы, а Y - функция отклика. Каждая строка матрицы называется вектор-строкой, и значения X_j в ней соответствуют величинам всех K факторов при данном опыте. Соответственно, каждый столбец называется вектор-столбцом, а значения X_j в нем соответствуют величинам j -го фактора в каждом из N опытов. Для упрощения записи единицы в вектор-столбцах опускают и в матрице оставляют лишь знаки, соответствующие верхнему или нижнему значениям уровней.

Для построения матриц большей размерности можно использовать прием, основанный на правиле чередования знаков. В первом столбце знаки меняются поочередно, во втором столбце они чередуются через два, в третьем - через четыре, в четвертом - через восемь и т.д. по степеням двойки. Существуют и другие приемы.

Для удобства определения коэффициента β_0 уравнения (3.1) в матрицу планирования вводят вектор-столбец фиктивного фактора X_0 , который во всех опытах принимает значение +I.

- 3.3.1. Свойства ПФЭ типа 2^K . Матрицы планирования таких экспериментов обладают следующими свойствами:
- симметричность относительно основного уровня ($\sum_{i=1}^N X_{ji} = 0$, где j - номер фактора, а i - номер строки);
 - свойство нормировки ($\sum_{i=1}^N X_{ji}^2 = N$);
 - свойство ортогональности ($\sum_{i=1}^N X_{ji} X_{li} = 0$, где $j \neq l$ и $j, l = 0, 1, 2, \dots, K$);
 - свойство рототабельности (дисперсия отклика, т.е. точность модели одинакова на равных расстояниях от основного уровня, не зависит от направления).

3.4. Определение коэффициентов уравнения функции отклика

Так как эксперимент содержит конечное число опытов, то можно получить только выборочные оценки для коэффициентов уравнения (3.1). Тогда модель эксперимента будет иметь вид

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{1 \leq j < \ell} b_{j\ell} x_j x_\ell + \sum_{1 \leq j < \ell < m} b_{j\ell m} x_j x_\ell x_m + \dots \quad (3.2)$$

Оценки коэффициентов уравнения (3.2), используя метод наименьших квадратов, можно определять по формулам

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} y_i}{N}; \quad j = 0, 1, 2, \dots, k \quad (3.3)$$

для основных факторов и

$$b_{j\ell} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{\ell i} y_i}{N}; \quad \ell, j = 1, 2, \dots, k; \quad j \neq \ell \quad (3.4)$$

$$b_{j\ell m} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{\ell i} x_{mi} y_i}{N}; \quad j \neq \ell \neq m \text{ и } j, \ell, m = 1, 2, \dots, k$$

для эффектов взаимодействия первого порядка, второго порядка и т.д. (т.е. парного взаимодействия, тройного и т.д.).

4. ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ (ДФЭ)

При росте числа факторов количество опытов при полном факторном эксперименте быстро растет. При использовании линейной модели для определения оценок коэффициентов b_j необходим всего лишь $k + 1$ эксперимент.

В ПФЭ типа 2^k количество экспериментов значительно превосходит число коэффициентов линейной модели. Следовательно, ПФЭ при линейных задачах обладает большой избыточностью экспериментов.

Существенно сократить объем экспериментов позволяет использование так называемых дробных реплик. Смысл их заключается в том, что при эксперименте используют лишь часть матрицы (ее реплику), т.е. по изменению функции отклика в части факторного пространства судят о ее поведении во всем обследуемом факторном пространстве. Таким образом, можно использовать дробные реплики полных факторных экспериментов. Использование реплик сокращает число опытов в 2^m раз, где $m = 1, 2, 3, \dots$. Полуреплика обозначается

2^{k-1} , четвертьреплика 2^{k-2} и т.д. до 2^{k-m} . Такие эксперименты называются дробными факторными экспериментами (ДФЭ). В ДФЭ по сравнению с ПФЭ часть информации теряется и уменьшается разрешающая способность. Под разрешающей способностью понимается количество коэффициентов, оценки которых можно получить с помощью данного плана. В модели ПФЭ используются полиномы неполных высших порядков, в которые кроме линейных членов входят различные эффекты взаимодействия. ПФЭ позволяет получить независимые оценки коэффициентов при всех членах полинома. При использовании ДФЭ оценка части коэффициентов получается совместной или смешанной. Так для ДФЭ типа 2^{3-1} оценки $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ смешаны с оценками коэффициентов при парном взаимодействии. Обычно при исследовании большинства физических процессов можно пренебречь взаимодействием высших порядков.

Минимальное количество испытаний в матрице ДФЭ $N_{гр}$ определяется неравенством

$$N_{гр} = 2^{k-m} > k + 1. \quad (4.1)$$

С увеличением числа факторов выигрыш от использования дробных реплик быстро возрастает. ДФЭ сохраняет все свойства ПФЭ.

4.1. Определяющий контраст и генерирующие соотношения

Символическое обозначение произведения вектор-столбцов реплик, равное +I или -I, называется определяющим контрастом. Контраст помогает определять смешанные эффекты. Для этого достаточно помножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту. Так, если $I = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, то для X_1 имеем $X_1 = X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 = X_2 \cdot X_3$, так как $X_j^2 = I$. Для X_2 и X_3 соответственно $X_2 = X_1 \cdot X_3$ и $X_3 = X_1 \cdot X_2$.

Это означает, что коэффициенты β_j линейного уравнения будут оценками

$$\beta_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}, \quad \beta_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}, \quad \beta_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется генерирующим соотношением.

Определяющий контраст позволяет изучить всю систему смешивания, не рассматривая матрицу планирования ДФЭ. Эффективность дробной реплики (с точки зрения оптимальности системы смешивания) оценивается ее разрешающей способностью, определяемой количеством

факторов в определяющем контрасте.

С ростом числа факторов усложняется система смешивания и возрастает дробность применяемых реплик.

Такие реплики характеризуются обобщающими определяющими контрастами, получаемыми перемножением между собой исходных определяющих контрастов.

5. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Необходимо тщательно подготовиться к проведению эксперимента. Знать, как реализовать матрицу планирования, как подсчитать ошибки и классифицировать их. Но прежде всего необходимо формализовать сведения об объекте исследования. Для этого составляется анкета априорной информации.

5.1. Априорная информация.

Анкета для сбора априорной информации

Она начинается с постановки задачи и выбора функции отклика. В анкету должно входить:

1. Краткое описание объекта исследования.
2. Формулировка цели исследования.
3. Выбор функции отклика.

Все возможные отклики включить в таблицу.

В качестве примера в таблице 5.1 приведены возможные функции отклика при прочностных экспериментах.

5.1.1. Выбор факторов.

1. Составить список всех „подозреваемых“ факторов.
2. Список факторов, включаемых в реальный эксперимент.

Список возможных факторов при прочностных испытаниях представлен в таблице 5.2.

Выясняют, существует ли возможность установления значения факторов на любом заданном уровне. Заданные значения уровней должны сохраняться в течение опыта.

5.1.2. Число опытов. Количество всех опытов равняется числу всех уровней, возведенному в степень числа факторов, т.е.

$$N = \rho^k, \quad (5.1)$$

где N - число всех опытов, ρ - число уровней, k - число факторов.

Таблица 5.1

Таблица функций отклика

Вид нагружения, разгрузка	Отклики	Размерность	Область определения	Показат. точности измерен.	Примечание
Однократное, статическое, вязкое	$\sigma - \epsilon$ ψ δ	МПа-I I-I мм			Показатель точности и область определения устанавливаются при проведении предварительного эксперимента с учетом точности имеющейся регистрирующей аппаратуры
Однократное, статическое или динамическое, хрупкое	$K_{1c} (K_c)$ $G_{1c} (G_c)$ $J_{1c} (J_c)$ δ_c	н/м ^{3/2} кДж/м ² кДж/м ² мм			
Длительное, статическое нагружение	$\sigma - \tau$ $d\epsilon/d\tau - \tau$	МПа м/с ⁻¹			
Циклическое нагружение	$\sigma - N$ $\Delta\epsilon - N$ $\sigma - \Delta\epsilon$ $d\epsilon/dN - \Delta K$	МПа-I I-I МПа-I мм/I-н/м ^{3/2}			

Таблица 5.2

Таблица факторов

№ п/п	Название фактора	Размерность	Область определен.	Показат. точности измерен.	Примечание
1.	Технологический (сварка, предварительная деформация, штамповка, термообработка)				
2.	Эксплуатационный а) условия эксплуатации (вакуум, температура, облучение) б) нагрузка (статическая, динамическая, случайная, программная)				
3.	Масштабный (размеры образца и т.д.)				

Желаемое число опытов, ограничения на число опытов. Ограничения на число опытов связаны с условиями проведения, возможностями оборудования и числом испытываемых образцов.

Затем следует установить желаемый срок проведения исследования.

Для этого устанавливают примерную длительность одного опыта. Далее устанавливают возможную стоимость и затраты труда при проведении одного опыта.

5.1.3. Выбирают число уровней для одного фактора. Для проведения исследований по данной методике принимают два уровня для каждого фактора: один - верхний, другой - нижний.

Например, такой фактор, как вакуум, может иметь уровни, лежащие в интервале степени разряжения $760 - 1 \cdot 10^{-9}$ мм рт.ст. и т.д.

5.1.4. С целью упрощения записи условий проведения эксперимента в матрице планирования и облегчения обработки результатов эксперимента факторы кодируют (см. 3.2).

Затем выясняют возможность проведения параллельных (повторных) опытов и измерений. Устанавливают необходимое число таких опытов. Минимальное число параллельных опытов равно двум.

После этого намечают стратегию проведения опытов (например, по одному в день, непрерывное ведение эксперимента и т.д.).

5.1.5. Учет априорной информации. Условия и результаты, достигнутые при проведении подобных исследований. Устанавливают возможное взаимодействие факторов. Например, по предварительным данным, возможно совместное влияние вакуума и температуры, вакуума и облучения (см., например, „Космические исследования на Украине“, вып. 6, 1975 г., стр. 21 и др.) и т.д.

5.1.6. Составляют матрицу планирования. Для трех факторов матрица планирования 2^3 с учетом всех возможных взаимодействий приведена в таблице 5.3.

Для построения матриц большей размерности можно воспользоваться правилом чередования знаков (см. (3.3)).

При ограничении числа опытов применяют дробный факторный эксперимент (ДФЭ).

Таблица 5.3

Матрица планирования 2^3

№ п/п	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$	Y
1	+	-	-	+	+	-	-	+	Y_1
2	+	-	+	+	-	-	+	-	Y_2
3	+	+	-	+	-	+	-	-	Y_3
4	+	+	+	+	+	+	+	+	Y_4
5	+	-	-	-	+	+	+	-	Y_5
6	+	-	+	-	-	-	+	+	Y_6
7	+	+	-	-	-	-	+	+	Y_7
8	+	+	+	-	+	-	-	-	Y_8

5.2. Реализация плана эксперимента

Необходимо тщательно подготовиться. Собрать и опробовать (протарировать) установку, проверить и также прокалибровать измерительную и контролируемую аппаратуру и приборы. Подготовить образцы, материалы. Составить специальный журнал. Журнал оформляют в соответствии с методикой и планом эксперимента. Должна быть ясной последовательность действий (проведения эксперимента). На его первой странице записать цели исследования, функции отклика с их размерностью. На второй странице описать факторы, их уровни и интервалы варьирования, единицы измерения (см.табл.5.4).

Таблица 5.4

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	У р о в н и			Интервал варьирования, Δ	Размерность
	-I	0	+I		
x_1					
x_2					
\vdots					
x_k					

Заносят матрицу планирования в журнал. В нее наряду с кодированными значениями факторов включают и натуральные. Заносится дата проведения и фамилия исполнителя. Отводятся страницы для расчетов и анализа экспериментов.

В качестве примера в табл. 5.5 приведен фрагмент матрицы планирования ПФЭ типа 2^5 . Также целесообразно оставить место для столбцов, в которых отмечают даты проведения и фамилии экспериментаторов, проводивших отдельные опыты.

После реализации всего плана можно переходить к обработке полученных данных.

При обработке обычно проводят статистический анализ полученных данных.

5.3. Проверка гипотез

При статистическом анализе нужна вероятностная модель, а для нее функция распределения. Практически это значит, что должна наблюдаться устойчивость частот. Это трудно установить. Поэтому выдвигаются гипотезы, и их статистически проверяют. Вводится понятие генеральной совокупности (совокупность всех мыслимых, но реально не существующих).

Как выдвигать гипотезы? Интуитивно. В повседневной жизни человеку все время приходится принимать решения при неполном знании, основываясь на догадках.

Обычно при рассмотрении результатов математического моделирования (эксперимента) выдвигают две конкурирующие гипотезы:

H_0 - нуль-гипотеза, и H_1 - конкурирующая.

Например, $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

При этом возможны ошибки:

- ошибка I рода α - нулевая гипотеза отклоняется, когда она верна;
- ошибка II рода β - нулевая гипотеза не отклоняется, когда она ложна.

Последствия этих ошибок разные.

Вероятность α отвергнуть нулевую гипотезу - H_0 , когда она верна, называется уровнем значимости критерия. Вероятность β принять нуль-гипотезу, когда она ложна, называется мощностью критерия.

Нельзя минимизировать обе ошибки. Приходится поддержать значение вероятности ошибки первого рода α на заданном уровне и

Таблица 5.5

Матрица планирования и результаты эксперимента МА21

№ опыта в матрице	X ₁		X ₂		X ₃		X ₄		X ₅		№ повтор. опыта	Случайный порядок реализации	y, $\frac{K \cdot L}{M^2}$	y _i	S _i ²
	копир.	натур. знач. мм	копир.	натур. знач. мм	копир.	натур. знач.	копир.	натур. знач. Па	копир.	натур. знач. К					
1	+	10	+	40	+	0,7	+	10 ⁵	+	293	1	I53	8,17	7,75	0,24
											2	I14	5,96		
											3	I52	7,53		
											4	5	8,18		
											5	20	8,87		
2	-	4	+	40	+	0,7	+	10 ⁵	+	293	6	73	8,18	7,7	0,219
											7	44	8,51		
											8	55	5,87		
											9	8	8,02		
											10	52	7,91		
3	+	10	-	15	+	0,7	+	10 ⁵	+	293	11	36	7,93	7,69	0,258
											12	40	8,13		
											13	58	9,01		
											14	I13	5,93		
											15	I2	7,43		

обеспечить минимум ошибки II-го рода. Вся трудность в выборе заданного уровня (границы) ошибок первого рода.

5.4. Ошибки измерений.

Ошибки параллельных (повторных) опытов

Ошибка опыта является суммарной величиной, результатом многих ошибок: ошибок измерения факторов, измерения результатов и т.д.

Ошибки различают систематические и случайные. Систематические ошибки действуют регулярно в одном направлении. Их можно изучить и определить количественно.

Случайные ошибки появляются нерегулярно, причины их неизвестны, и их невозможно учесть заранее.

Систематические и случайные состоят из множества элементарных ошибок.

Параллельные опыты не дают полностью совпадающих результатов из-за существующей ошибки (ошибки воспроизводимости).

Отклонение от среднего значения результата \bar{y} свидетельствует об изменчивости повторных экспериментов. Для оценки такой изменчивости обычно пользуются дисперсией S^2 , которая вычисляется по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (y_q - \bar{y})^2, \quad (5.2)$$

где n - число опытов, y_q - результат отдельного опыта, а $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_1^n y_q$.

Корень квадратный из дисперсии называется средним квадратическим отклонением (СКО), стандартом или квадратичной ошибкой.

Оценки среднего и дисперсии являются достаточными, если принять, что результаты n опытов имеют нормальное распределение.

Наличие резко отклоняющихся результатов (грубых наблюдений) показывает на нарушение этого предположения. Такие результаты необходимо исключить.

Для исключения грубых результатов существуют правила (статистики), например, критерий Стьюдента:

$$t_{\text{экс}} = \frac{y_i - \bar{y}}{S} \geq t_T, \quad (5.3)$$

где t_T берется из таблиц (см.табл.5.6) при заданном уровне значимости α (обычно $\alpha = 0,05$).

При вычислении среднего \bar{y} и стандарта S результаты сомнительного i -го опыта не учитываются.

Если $t_{\text{экс}} \geq t_T$, то опыт i считается браком.

В случае невыполнения условия (5.3) результат i -го опыта включается в расчет, а среднее и дисперсия пересчитываются с учетом всех опытов.

Таблица 5.6

Значение t -критерия Стьюдента при $\alpha = 0,05$

Число степеней свободы	Значения t -критерия	Число степеней свободы	Значения t -критерия	Число степеней свободы	Значения t -критерия
I	12,71	II	2,201	21	2,080
2	4,303	I2	2,179	22	2,074
3	3,182	I3	2,160	23	2,069
4	2,776	I4	2,145	24	2,064
5	2,571	I5	2,131	25	2,060
6	2,447	I6	2,120	26	2,056
7	2,365	I7	2,110	27	2,052
8	2,306	I8	2,101	28	2,048
9	2,262	I9	2,093	29	2,045
10	2,228	20	2,086	30	2,042

Возможно также применение критерия типа χ . В этом случае результаты n -повторных опытов располагаются в порядке возрастания, т.е. y_1, y_2, \dots, y_n . Проверяется гипотеза $H_0: y_1$ (или y_n) принадлежит данной выборке, а его отличие от остальных членов выборки - случайное.

Для проверки гипотезы H_0 служат следующие критерии:

$$\chi_{\min} = \frac{\bar{y} - y_1}{S\sqrt{n-1/n}}; \quad \chi_{\max} = \frac{y_n - \bar{y}}{S\sqrt{n-1/n}} \quad (5.4)$$

Здесь \bar{y} и S - среднее и стандарт соответственно, а n - число повторных опытов. Критическое значение $\chi_{\min}(\chi_{\max})$ берут из таблиц (см. табл. 5.7) при уровне значимости α и числе степеней свободы $f = n - 2$.

Если $|\chi_{\min}(\chi_{\max})| > \chi_{T, \alpha, f}$, то гипотеза H_0 отвергается, и следует отбросить данное экстремальное значение выборки.

5.5. Дисперсия функции отклика

Дисперсия функции отклика S_y^2 или дисперсия воспроизводимости может быть известна и до начала исследования по ранее проведенным опытам, но обычно ее оценивают в процессе эксперимента.

Таблица 5.7

Значение $\nu_{max}(\nu_{min})$ для уровня значимости $\alpha = 0,05$

Число степеней свободы, f	Значение ν -критерия	Число степеней свободы, f	Значение ν -критерия	Число степеней свободы, f	Значение ν -критерия
1	1,412	9	2,343	17	2,600
2	1,689	10	2,387	18	2,623
3	1,869	11	2,426	19	2,644
4	1,996	12	2,461	20	2,644
5	2,093	13	2,493	21	2,683
6	2,172	14	2,523	22	2,701
7	2,237	15	2,551	23	2,717
8	2,294	16	2,557		

Имея дисперсии S_i^2 в каждой строке матрицы (см. формулу (5.2)), дисперсию воспроизводимости определяют из выражения

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i S_i^2}{\sum_{i=1}^N f_i}, \quad (5.5)$$

где f_i - число степеней свободы-определяется как разность между числом опытов и числом констант (средних, коэффициентов и пр.), подсчитанных по результатам тех же опытов. Так как для определения S_i^2 требуется подсчитать \bar{y}_i , то $f_i = n_i - 1$.

Тогда

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^{n_i} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)}, \quad (5.6)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$; $q = 1, 2, \dots, n_i$.

В случае равномерного дублирования (повторения) опытов формула (5.6) принимает вид

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)}. \quad (5.7)$$

Формулами (5.5), (5.6) и (5.7) можно пользоваться, если дисперсии однородны, т.е. различные значения отклика определяются с одинаковой точностью.

5.6. Проверка однородности дисперсий

Для проверки однородности дисперсий пользуются различными статистическими критериями.

При неравномерном дублировании однородность ряда дисперсий проверяют по критерию Бартлета. Для проверки однородности вычисляют величину

$$B = \frac{1}{c} \left(f \cdot \lg S_y^2 - \sum_1^N f_i \lg S_i^2 \right), \quad (5.8)$$

где $c = 0,4343 \left[1 + \frac{1}{3(N-1)} \left(\sum_1^N \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f} \right) \right]$, а $f = \sum_1^N f_i$.

Значение величины B сопоставляют с критерием χ_T^2 , величину которого берут из таблиц (см./8/ табл.4) при уровне значимости α и количестве степеней свободы $N-1$.

Если $B \leq \chi_T^2(\alpha, N-1)$, то ряд дисперсий считается однородным.

Необходимо помнить, что этот критерий базируется на нормальном распределении и требует тщательного анализа результатов (см.54).

В случае равномерного дублирования проверку однородности дисперсий проводят по критерию Кохрена, определяя величину

$$G_p = \frac{S_{\max}^2}{\sum_1^N S_i^2}, \quad (5.9)$$

(S_{\max}^2 - наибольшая в ряду дисперсия), которую сравнивают со значением $G_T(\alpha, f, N)$, взятым из таблиц (см./8/ табл.8).

Если $G_p \leq G_T$, то ряд дисперсий считается однородным.

В случае неоднородности дисперсий может оказаться полезным изменение масштаба для функции отклика. Для этого вводится некоторая математическая операция от функции отклика (логарифмирование, извлечение квадратного корня и пр.).

При большом количестве факторов и дублированных (повторных) опытов статистическую обработку данных необходимо проводить с использованием ЭВМ.

На рис.5.1 приведен один из возможных вариантов блок-схемы программы МПТ обработки данных на ЭВМ.

В программе МПТ определяются средние - \bar{y}_i и дисперсии - S_i^2 по строкам матрицы планирования находится максимальная диспер-

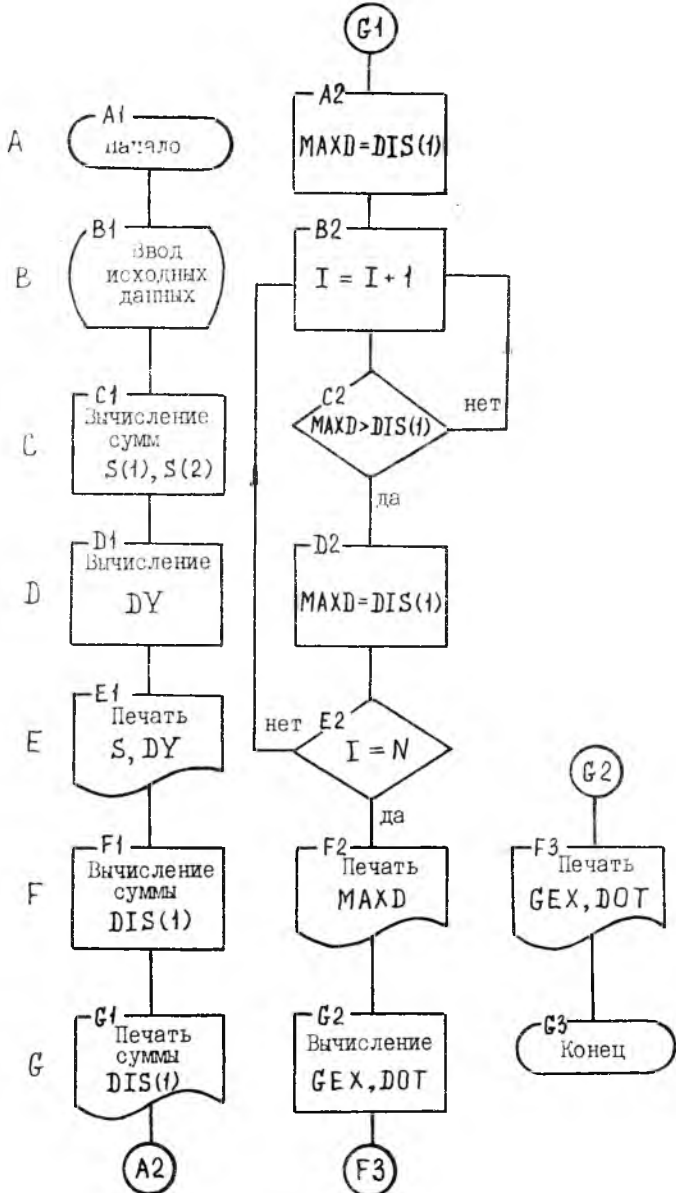


Рис.5.1. Блок-схема программы MIT

сия - $S_{i \max}^2$, $\sum_1^N S_i^2$, экспериментальное (расчетное) значение критерия Кохрена - G_p , дисперсия функции отклика - S_y^2 .

Идентификаторы:

DY, DYS - S_i^2 - дисперсия в строке i ;
 SUM - $\sum_1^N S_i^2$ - сумма дисперсий;
 MAXD - $S_{i \max}^2$ - максимальная дисперсия;
 GEX - G_p - экспериментальное (расчетное) значение критерия Кохрена;
 DOT - S_y^2 - дисперсия функции отклика (дисперсия воспроизводимости).

6. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

После проведения эксперимента и сбора опытных данных желательно получить из них всю информацию и сделать соответствующие выводы. Это возможно сделать, применяя статистическую обработку результатов эксперимента.

Для вычисления коэффициентов (параметров) функции отклика наиболее широкое применение нашел метод наименьших квадратов (МНК).

6.1. Метод наименьших квадратов (МНК)

Рассмотрим МНК для ПФЭ типа 2^2 .

Линейная модель такого эксперимента

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2. \quad (6.1)$$

В i -ом опыте полученное значение функции отклика y_i является случайной величиной, отличающейся от значения y на величину некоторой ненаблюдаемой случайной ошибки ξ . Следовательно, для опыта i можно записать

$$y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \xi \quad (6.2)$$

или

$$y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i} = \xi. \quad (6.3)$$

Иногда ненаблюдаемую ошибку ξ называют невязкой.

Для получения оценок коэффициентов b_0 ; b_1 ; b_2 будем минимизировать функцию - $\Phi = \sum_1^N \xi_i^2$ или

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [(y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i})]^2, \quad (6.4)$$

т.е. квадрат случайной ненаблюдаемой ошибки минимален.

Уравнение (6.1) называют уравнением регрессии. Таким образом, мы минимизируем квадрат разности между экспериментальным и вычисленным по уравнению регрессии значениями y в i -й экспериментальной точке.

В разделе 2 мы ввели в матрицу-столбец фиктивный фактор X_0 . С учетом этого функция (6.4) принимает вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [(y_i - b_0 X_{0i} - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i})]^2. \quad (6.5)$$

Приравняв нулю частные производные по всем неизвестным коэффициентам, получим так называемую систему нормальных уравнений МНК, т.е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_2} = 0 \quad (6.6)$$

или после несложных преобразований

$$\begin{cases} b_0 \sum_{i=1}^N X_{0i}^2 + b_1 \sum_{i=1}^N X_{0i} X_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^N X_{0i} X_{2i} = \sum_{i=1}^N X_{0i} y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^N X_{0i} X_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^N X_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^N X_{1i} X_{2i} = \sum_{i=1}^N X_{1i} y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^N X_{0i} X_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^N X_{1i} X_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^N X_{2i}^2 = \sum_{i=1}^N X_{2i} y_i \end{cases} \quad (6.7)$$

Решение системы дает оценки коэффициентов модели (6.1). МНК обладает замечательным свойством делать определенной любую систему уравнений. Использование этого метода приводит к равенству числа уравнений числу неизвестных коэффициентов. Полученные по МНК оценки коэффициентов обладают в статистическом смысле оптимальными свойствами: состоятельностью, несмещенностью, эффективностью и достаточностью. Оценка состоятельна, если при увеличении объема выборки она приближается к истинному значению коэффициента; не смещена, если ее математическое ожидание равно оцениваемому значению коэффициента; эффективна, если оценка характеризуется минимальной дисперсией; достаточна, если включает максимум информации о коэффициенте.

Термин «нормальные уравнения» допускает геометрическое истолкование (рис.6.1). Наблюдение y_i можно рассматривать как компоненты вектора \mathbf{Y} с основанием в начале координат в пространстве наблюдений; требуется выбрать такие b_K (из пространства параметров), которые определяют значения \hat{y}_i , реализующие минимум Φ . По компонентам \hat{y}_i можно восстановить некоторый вектор $\hat{\mathbf{Y}}$ в пространстве наблюдений; различный выбор параметров b_K образует

плоскость оценок β_k . Нужно найти такую оценку \hat{Y} , которая дает наименьшее расстояние от конца вектора Y до поверхности оценок β_k . Нормальные уравнения - это уравнения, которые определяют \hat{Y} так, что вектор $E = (Y - \hat{Y})$ проходит через конец вектора Y и перпендикулярен (нормален) к поверхности, образованной всеми возможными значениями оценок β_k . Эта нормаль и является вектором, который реализует минимум Φ .

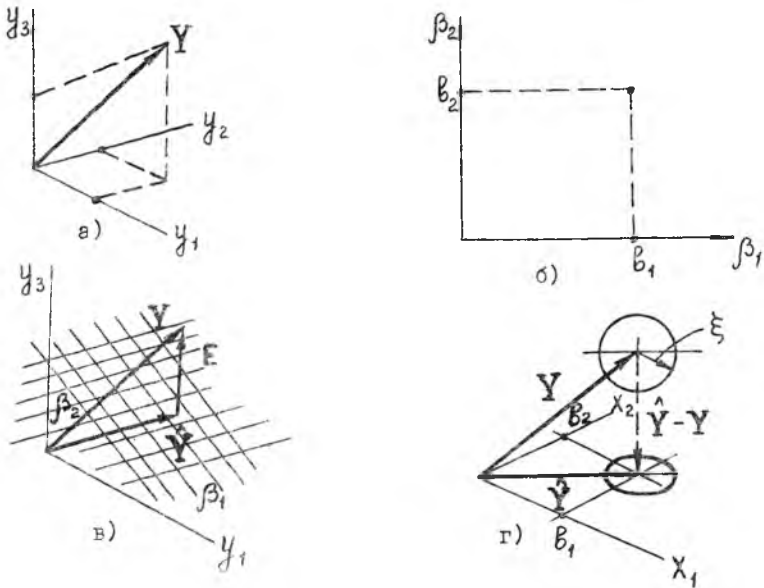


Рис.6.1. Геометрическая интерпретация

На рис.6.1 показано: а - пространство наблюдений (три наблюдения); б - пространство параметров; в - вектор E в пространстве наблюдений.

На рис.6.1г изображен вектор ненаблюдаемых ошибок ξ , равный разности между вектором истинных значений и вектором наблюдений. С некоторой заданной вероятностью конец вектора истинных значений попадает внутрь сферы радиуса ξ , описанной вокруг конца вектора наблюдений. Компоненты вектора \hat{Y} по осям X_1 и X_2 равны соответственно β_1 и β_2 . Так как в МНК вектор \hat{Y} является нор-

мальной проекцией вектора \mathbf{Y} , то проекции всевозможных векторов ξ на плоскость X_1, X_2 образуют наименьший возможный круг. Его проекции на оси X_1 и X_2 дают соответственно доверительные пределы для β_1 и β_2 .

Для ПФЭ типа 2^K некоторые члены уравнений системы (6.7) будут равны нулю вследствие основных свойств ПФЭ. Так все суммы, в которые входят произведения разных факторов, равны нулю из-за свойства ортогональности ПФЭ, т.е.

$$\sum_1^N X_i X_j = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Кроме того, благодаря свойству нормировки $\sum_{i=1}^N X_{ki}^2 = N$. Тогда система (6.7) с учетом вышесказанного распадается на независимые уравнения, и оценка каждого коэффициента определяется независимо от другого по формуле

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ji} Y_i, \quad j = 0, I, \dots, K. \quad (6.8)$$

Оценки коэффициентов в случае использования модели типа

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq j \leq k} b_j X_j + \sum_{1 \leq j \leq \ell \leq k} b_{j\ell} X_j X_\ell + \sum_{1 \leq j \leq \ell \leq m \leq k} b_{j\ell m} X_j X_\ell X_m + \dots \quad (6.9)$$

учитывающей эффекты взаимодействия факторов (парного, тройного и т.д.), определяются аналогично, например

$$b_{j\ell} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ji} X_{\ell i} Y_i, \quad j \neq \ell \text{ и } j, \ell = 1, 2, \dots, K \quad (6.10)$$

$$b_{j\ell m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ji} X_{\ell i} X_{mi} Y_i, \quad j \neq \ell \neq m \text{ и } j, \ell, m = 1, 2, \dots, K.$$

Таким образом, для подсчета любого b_j столбцу Y_i следует присписать знак столбца X_j , сложить значения отклика с этими знаками и результат разделить на число опытов матрицы планирования.

Используя формулы (6.8) и (6.10), можно построить алгоритм и процедуру вычисления коэффициентов функции отклика (программу) для ЭВМ.

Блок-схема одного из возможных вариантов программы МНК (программа ВМ) показана на рис.6.2.

Программа ВМ составлена для модели ПФЭ типа 2^5 и позволяет вычислить значения 32 коэффициентов: $b_0; b_{12} \dots b_{45}; b_{123} \dots b_{345}; b_{1234} \dots b_{2345}; b_{12345}$.

Вначале по программе организуется матрица планирования, а затем проводятся вычисления коэффициентов.

Программа легко изменяется, если число факторов будет больше или меньше 5.

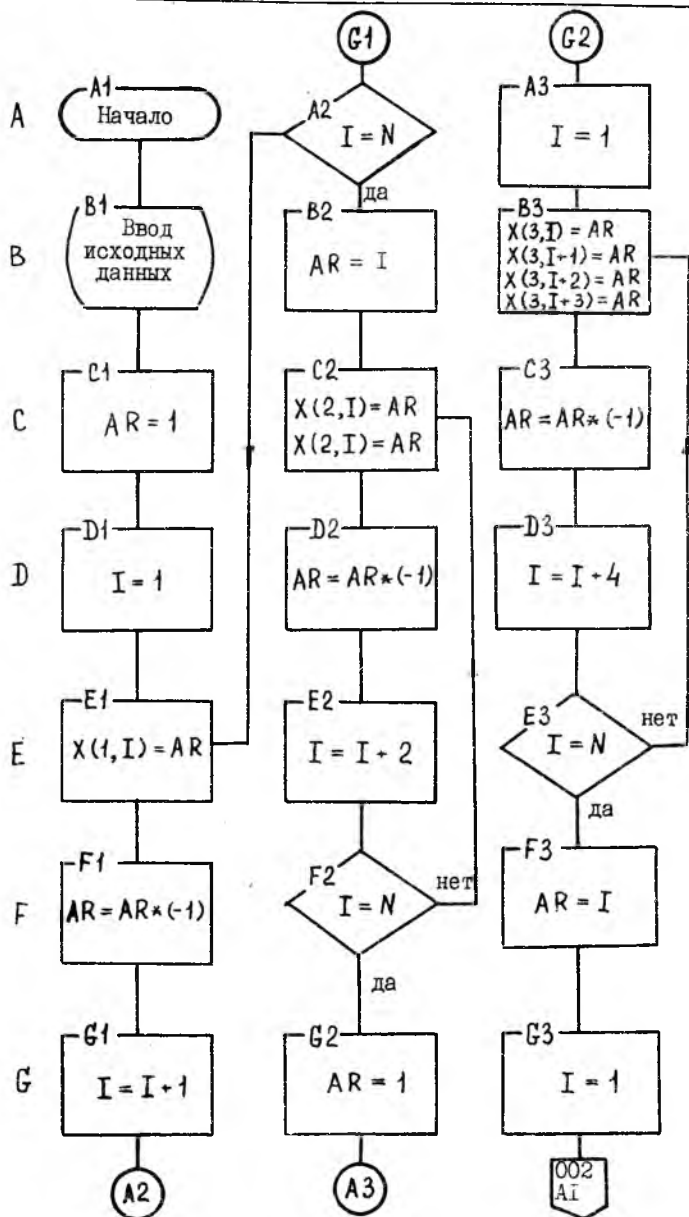


Рис. 6.2

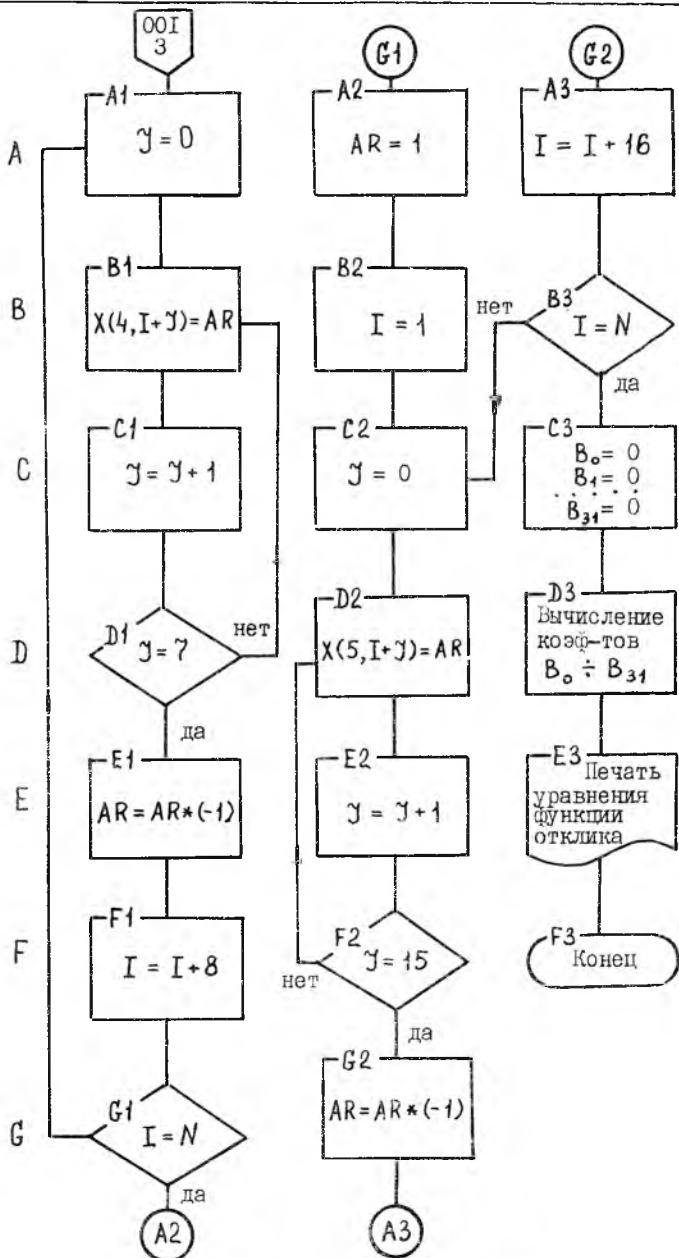


Рис. 6.2. Блок-схема программы ВТМ

Идентификаторы:

$Y - y$ - функция отклика
 $X - x_i$ - факторы
 $B_0 - b_0$
 $B_1 - b_1$
 $B_2 - b_2$

 $B_{31} - b_{12345}$

} коэффициенты

6.2. Регрессионный анализ. Матричный подход

Метод построения и анализа функции отклика называется регрессионным анализом, а эмпирическая функция отклика - уравнением регрессии или регрессией.

В регрессионном анализе проверяются гипотезы о пригодности модели (адекватности), значимости коэффициентов и др.

Регрессионный анализ, используя статистические методы, базируется на трех предположениях (постулатах):

1. Параметр функции отклика y - случайная величина с нормальным распределением.
2. Дисперсия S_y^2 не зависит от абсолютной величины y (дисперсии однородны).
3. Значения факторов - неслучайные величины, т.е. факторы X_i измеряются с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении отклика y .
4. Факторы не коррелированы (нет взаимосвязи между ними).

6.2.1. Матричный подход. При планировании эксперимента и регрессионном анализе удобно использовать матричную форму записи. Система нормальных уравнений в матричном виде будет:

$$XB = Y, \quad (6.11)$$

где X - матрица условий эксперимента,

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_k \\ x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{kN} \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

(N x K)

B - матрица неизвестных коэффициентов:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}, \quad [(K+1) \times 1] \quad (6.13)$$

Y - матрица результатов опытов:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Умножив обе части (6.11) на \mathbf{X}^T , получим систему нормальных уравнений МНК в матричной форме:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (6.15)$$

Матрица \mathbf{X}^T имеет вид:

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{K1} & x_{K2} & \dots & x_{KN} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Матрицу $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ обозначим **A**, и она имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{K1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{K2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{KN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{K1} & x_{K2} & \dots & x_{KN} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum x_{0i}^2 & \sum x_{0i} x_{1i} & \dots & \sum x_{0i} x_{Ki} \\ \sum x_{1i} x_{0i} & \sum x_{1i}^2 & \dots & \sum x_{1i} x_{Ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_{Ki} x_{0i} & \sum x_{Ki} x_{1i} & \dots & \sum x_{Ki}^2 \end{bmatrix} \quad (6.17) \end{aligned}$$

Матрица $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ называется информационной матрицей Фишера (иногда ее еще называют матрицей моментов плана).

Матрица $\mathbf{M} = 1/N(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ - приведенной (к одному наблюдению) информационной матрицей.

Умножим обе части равенства (6.17) слева на обратную матрицу $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$, получим:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{B} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (6.18)$$

Но $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = \mathbf{E}$ - единичная матрица. Следовательно,

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (6.19)$$

В общем случае обратная матрица \mathbf{A}^{-1} имеет следующую структуру:

$$A^{-1} = (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0K} \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{K0} & C_{K1} & \dots & C_{KK} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Найдем матрицу $(X^T Y)$:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{K1} & x_{K2} & \dots & x_{KN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_{0i} y_i \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N x_{Ki} y_i \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Таким образом:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0K} \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{K0} & C_{K1} & \dots & C_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_{0i} y_i \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N x_{Ki} y_i \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Откуда

$$b_j = \sum_{j=0}^K (C_{ij} \sum_{i=1}^N x_{ji} y_i). \quad (6.23)$$

При ортогональном планировании информационная матрица имеет следующий вид:

$$A = X^T X = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_{0i}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^N x_{Ki}^2 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Все статистические свойства коэффициентов, а следовательно и уравнения регрессии, определяет обратная матрица A^{-1} , умноженная на оценку дисперсии S_y^2 . Матрицу $C = A^{-1} \cdot S_y^2$ называют матрицей дисперсий - ковариацией или ковариационной. Нормированная ковариационная матрица - это $M^{-1} \cdot S_y^2$.
Матрица $C = A^{-1} \cdot S_y^2 = (X^T X)^{-1} \cdot S_y^2$ имеет вид:

$$A^{-1} \cdot S_y^2 = (X^T X)^{-1} \cdot S_y^2 = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k0} & c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{bmatrix} \cdot S_y^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} S_{b_0}^2 & cov b_0 b_1 & \dots & cov b_0 b_k \\ cov b_0 b_1 & S_{b_1}^2 & \dots & cov b_1 b_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cov b_k b_0 & cov b_k b_1 & \dots & S_{b_k}^2 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Отсюда получаются соотношения для оценок дисперсий коэффициентов регрессии ($S_{b_i}^2$), их ковариаций ($cov b_i b_j$) и коэффициентов корреляции между ними ($r_{b_i b_j}$):

$$S_{b_i}^2 = c_{ii} S_y^2$$

$$cov b_i b_j = c_{ij} S_y^2$$

$$r_{b_i b_j} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} \cdot c_{jj}}}$$

При ортогональном планировании матрица дисперсий-ковариаций имеет вид:

$$(X^T X)^{-1} \cdot S_y^2 = \begin{bmatrix} S_{b_0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{b_1}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_{b_k}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{S_y^2}{\sum_{i=1}^N x_{0i}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{S_y^2}{\sum_{i=1}^N x_{1i}^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{S_y^2}{\sum_{i=1}^N x_{ki}^2} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Следовательно, дисперсии оценок коэффициентов регрессии рассчитываются по формуле

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{\sum_{i=1}^N X_{ji}^2} \quad (6.27)$$

или, с учетом условия нормировки, по формуле

$$S_{b_j}^2 = 1/N S_y^2. \quad (6.28)$$

Все же ковариации равны нулю, что еще раз подтверждает независимость рассчитанных коэффициентов регрессии.

Формулы (6.11)...(6.28) справедливы при проведении опытов без повторений.

В случае дублирования опытов условия эксперимента следует задавать матрицей X и квадратной диагональной матрицей P "весов" измерений, под которыми понимают число дублей:

$$P = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n_N \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

а результаты - матрицей средних значений отклика для каждого i -го опыта:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_N \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Тогда для расчета коэффициентов регрессии можно пользоваться формулой:

$$B = (X^T P X)^{-1} (X^T P \bar{Y}), \quad (6.31)$$

а ковариационная матрица примет вид:

$$(X^T P X)^{-1} \cdot S_y^2 = \begin{bmatrix} S_{b_0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{b_1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{b_k}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_y^2}{n_1 \sum_{i=1}^N X_{0i}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{S_y^2}{n_2 \sum_{i=1}^N X_{1i}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{S_y^2}{n_N \sum_{i=1}^N X_{ki}^2} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

При одинаковом числе дублей, равном n , дисперсия оценок коэффициентов вычисляется по формуле

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{n \sum_{i=1}^N X_{ji}^2} \quad (6.33)$$

или с учетом условия нормировки

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{n \cdot N}. \quad (6.34)$$

Дисперсию $S_{\bar{y}}^2 = \frac{S_y^2}{n}$ часто называют дисперсией среднего.

6.2.2. Проверка значимости коэффициентов. Проверку статистической значимости коэффициентов проводят или по t -критерию Стьюдента, или сравнением абсолютной величины коэффициента с его доверительным интервалом, рассчитываемым по формуле

$$\Delta b_j = t_{\alpha; f} \cdot S_{b_j}. \quad (6.35)$$

Здесь $t_{\alpha; f}$ - табличное значение (см. табл. 5.6) критерия Стьюдента в зависимости от выбранного уровня значимости α и числа степеней f при определении дисперсии S_y^2 ; $S_{b_j} = \sqrt{S_{b_j}^2}$ - С.К.О. в определении коэффициента b_j .

Коэффициент считается значимым, когда его абсолютная величина больше или равна доверительному интервалу, т.е.

$$|b_j| \geq \Delta b_j \quad (6.36)$$

или

$$|b_j| \geq t_{\alpha; f} \cdot S_{b_j}. \quad (6.37)$$

При проверке значимости по t -критерию вычисляют его расчетное значение по формуле

$$t_p = \frac{|b_j|}{S_{b_j}}. \quad (6.38)$$

Коэффициент значим, если $t_p = t_{T(\alpha; f)}$.

Статистическая незначимость коэффициента интерпретируется как отсутствие влияния соответствующего фактора. В случае линейной модели можно считать, что данный фактор на отклик не влияет и статистически незначимые коэффициенты могут быть исключены.

6.2.3. Проверка адекватности модели. Адекватность модели - это ее соответствие набору экспериментальных данных. Проверка адекватности - это проверка пригодности эмпирической модели.

Пригодность модели можно оценить по среднему разбросу относительно линии регрессии. Для этого подходит остаточная сумма квадратов, отнесенная на число степеней свободы. Число степеней свободы - это разность между числом опытов и числом независимых коэффициентов (констант), которые уже вычислены по результатам этих опытов. Для ПФЭ типа 2^k число степеней свободы $f = N(k + 1)$.

Остаточная сумма квадратов, деленная на число степеней свобо-

ды, называется дисперсией адекватности - S_{ag}^2

$$S_{ag}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y_i^2}{f} \quad (6.39)$$

Гипотезу об адекватности модели обычно проверяют по F-критерию (критерий Фишера). Для этого вычисляют его расчетное значение по формуле

$$F_P = \frac{S_{ag}^2}{S_y^2} \quad (6.40)$$

и сравнивают с табличным $F_T(\alpha; f_1; f_2)$ при уровне значимости α и числе степеней свободы f_1 для знаменателя и $f_2 = N - K'$ для числителя (K' - число оставленных коэффициентов).

Если $F_P \leq F_T$, то гипотеза об адекватности модели не отвергается.

Таким образом, критерий F , представляющий собой отношение дисперсии адекватности и дисперсии отклика, отвечает на вопрос, во сколько раз модель предсказывает хуже по сравнению с опытом.

Дублирование опытов должно учитываться в регрессионном анализе.

В случае равномерного дублирования дисперсия адекватности определяется по формуле

$$S_{ag}^2 = \frac{n \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N - K'} \quad (6.41)$$

В матричном виде числитель (6.41) имеет вид

$$n \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 = \bar{Y}^T P \bar{Y} - \mathbf{B}^T X^T P \bar{Y} \quad (6.42)$$

Из формулы (6.41) видно, что повторные опыты налагают более жесткие условия на адекватность модели, т.к. F-критерий увеличивается в n раз.

В случае неравномерного дублирования дисперсия адекватности имеет вид

$$S_{ag}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N - K'} \quad (6.43)$$

Учет различных вариантов дублирования удобно представить в таблице (см. табл. 6.1).

В таблице 6.1 даны остаточные суммы квадратов, которые получены в результате вложения общей остаточной суммы квадратов:

$$SS_{ост} = \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^{n_i} (y_{iq} - \hat{y}_i)^2 \quad (6.44)$$

Таблица 6.1

Варианты дублирования и суммы квадратов

Источник рассеяния	Характер дублирования опытов	Сумма квадратов	Число степеней свободы
Ошибка эксперимента	Неравномерный	$\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^{n_i} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2$	$\sum_{i=1}^N (n_i - 1)$
	Равномерный	$\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2$	$N(n-1)$
	Дублирование в одной точке $i = I$	$\sum_{q=1}^{n_1} (y_{1q} - \bar{y}_1)^2$	$n_1 - 1$
	Дублирование в отдельной серии из L опытов	$\sum_{e=1}^L (y_e - \bar{y})^2$	$L - 1$
Неадекватность модели	Неравномерный	$\sum_{i=1}^N n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$	$N - k'$
	Равномерный	$n \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$	$N - k'$
	Дублирование в одной точке $i = I$	$n_1 (\bar{y}_1 - \hat{y}_1)^2 + \sum_{i=2}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$	$N - k'$
	Дублирование в отдельной серии из L опытов	$\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$	$N - k'$

Для этого представим (6.44) в виде:

$$SS_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^{n_i} [(y_{iq} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \hat{y}_i)]^2 \quad (6.45)$$

или

$$SS_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^{n_i} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^{n_i} (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i) \sum_{q=1}^{n_i} (y_{iq} - \bar{y}_i).$$

$$\text{Сумма } \sum_{q=1}^{n_i} (y_{iq} - \bar{y}_i) = 0.$$

Тогда

$$SS_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^{n_i} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^N n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2. \quad (6.46)$$

С величиной $SS_{\text{ост}}$ связано число степеней свободы $f_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^N n_i - k'$, где k' - число коэффициентов, входящих в уравнение регрессий.

В формуле (6.46) первое слагаемое характеризует ненаблюдаемую

ошибку, связанную с рассеянием опытных данных около линии регрессии, и представляет собой дисперсию воспроизводимости S_y^2 с числом степеней свободы $f_{\text{воспр}} = \sum_{i=1}^N (n_i - 1)$. Второе слагаемое характеризует некорректность модели (неадекватность) или $S_{\text{аг}}^2$ с числом степеней $f_{\text{аг}} = N - k'$.

Таким образом:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^{n_i} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)} \quad (6.47)$$

и

$$S_{\text{аг}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2)}{N - k'} \quad (6.48)$$

что позволяет проверить гипотезу об адекватности модели с помощью критерия F .

6.2.4. Критерии оптимальности планов. Величина $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + \dots + b_k x_{ki}$, рассчитанная для i -й точки факторного пространства, по закону сложения ошибок должна иметь дисперсию:

$$S_{\hat{y}_i}^2 = \sum_{0 \leq j \leq k} \left(\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial b_j} \right)^2 S_{b_j}^2 + \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} \left(\frac{\partial^2 \hat{y}_i}{\partial b_i \partial b_j} \right) \text{cov } b_i b_j. \quad (6.49)$$

Но $\left(\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial b_j} \right)^2 = x_{ji}^2$ и $S_{b_j}^2 = 1/N S_y^2$, а $\text{cov } b_i b_j = 0$.

Тогда можно записать:

$$S_{\hat{y}_i}^2 = S_{b_j}^2 \sum_{j=0}^k x_{ji}^2 = \frac{S_y^2}{N} (1 + x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + \dots + x_{ki}^2)$$

или

$$S_{\hat{y}_i}^2 = 1/N S_y^2 (1 + \rho_i^2),$$

где

$$\rho_i^2 = x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + \dots + x_{ki}^2.$$

Таким образом, дисперсия предсказанного уравнением регрессии значения \hat{y}_i зависит от экспериментальной ситуации (S_y^2 / N) и радиуса (ρ_i) сферы (гиперсферы) с центром в нулевом уровне. Следовательно, в любом направлении при равном ρ_i^2 полученное уравнение предсказывает с одинаковой точностью ($S_{\hat{y}_i}^2$ - одинакова). Планы, для которых это условие выполняется, называются рототабельными.

В общем случае можно составлять различные планы эксперимента, имеющие нужные экспериментатору свойства.

Для оценки и сравнения планов используют математические критерии их оптимальности, которые связывают со строением ковариационной матрицы или с организацией и порядком проведения опытов.

Выбор критерия и способ проведения эксперимента осуществляют, исходя из конкретного содержания решаемой задачи.

Например, сравнивая критерии между собой, можно отметить, что величина определителя ковариантной матрицы $M^{-1}(D)$ - оптимальность) связана с оценкой уравнения регрессии и ее необходимо использовать, когда решаются интерполяционные (описательные) задачи. В этом случае важно не изучение влияния каждого фактора в отдельности, а получение минимальной обобщенной дисперсии коэффициентов, что обеспечит достаточные предсказательные свойства модели внутри области эксперимента.

Выбор наиболее подходящего критерия очень трудная задача и требует большого искусства.

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

После получения математической модели (функции отклика) проводят анализ полученных результатов и принимают решения о дальнейших исследованиях. Решения могут быть как формализованные, так и принятые на интуитивном уровне.

Для принятия решений необходимо раскрыть смысл внутренних связей и зависимостей на основе математической модели (интерпретировать результаты).

Другими словами, перевод модели с абстрактного математического языка на язык экспериментатора называется интерпретацией модели.

Это сложный неоднозначный и неформализованный процесс. Его обычно проводят в несколько этапов.

Во-первых, математическую модель можно представить графически в виде поверхности отклика. Графическое представление, обладая наглядностью, может облегчить анализ результатов и принятия решений о дальнейших исследованиях.

Во-вторых, на основе математической модели можно оценить степень влияния отдельных факторов и их взаимодействий на значение функции отклика.

Степень влияния фактора определяется величиной и знаком соответствующего коэффициента функции отклика. Обычно чем больше коэффициент, тем существеннее влияние фактора.

Для моделей, содержащих эффекты взаимодействия, влияние

какого-либо фактора можно оценить лишь на основе выборки из математической модели тех коэффициентов, которые содержат индексы, относящиеся к оцениваемому фактору. Остальные коэффициенты (кроме b_0) нужно отбросить.

Если необходимо уравнение регрессии для натуральных значений, то его можно получить, используя формулы кодирования факторов. При этом коэффициенты модели изменятся. Векторы-столбцы натуральных переменных в матрице планирования не будут ортогональными, и коэффициенты определяются зависимо друг от друга.

Такой прием допустим при постановке задачи получения интерполяционной формулы для натуральных значений переменных.

7.1. Графическая интерпретация функции отклика

В ПФЭ типа 2^K нередко используются модели вида

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^K b_j X_j + \sum_{1 \leq i < j} b_{ij} X_i X_j + \sum_{1 \leq i < j < k} b_{ijk} X_i X_j X_k + \dots \quad (7.1)$$

Возникновение нелинейных членов в (7.1) объясняется свойствами многомерного пространства.

Графически математическую модель можно представить в виде поверхности отклика. При $K = 2$ поверхность отклика представляет собой гиперболический параболоид, имеющий форму седла (рис. 7.1а). Эта поверхность образуется множеством пересекающихся прямых, причем точки факторного пространства, соответствующие уровням варьирования факторов, лежат на попарно пересекающихся прямых.

При пересечении поверхности отклика плоскостями, параллельными осям X_1 , X_2 , получим совокупность гипербол (линии равного отклика рис. 7.1б).

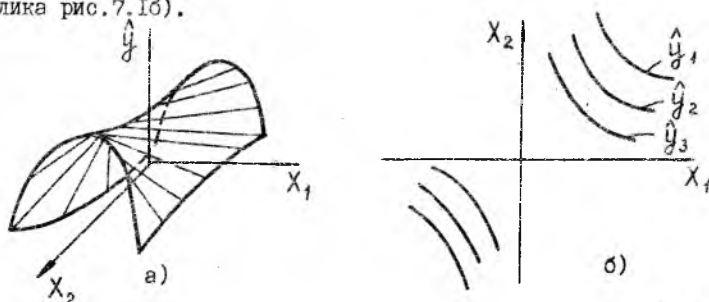


Рис. 7.1. Поверхность отклика ПФЭ 2^2 ($b_{12} \neq 0$)

Если эффекты взаимодействия отсутствуют ($b_{12} = 0$), то функция отклика представляет плоскость (рис.7.2а), а линии равного отклика – прямые (рис.7.2б).

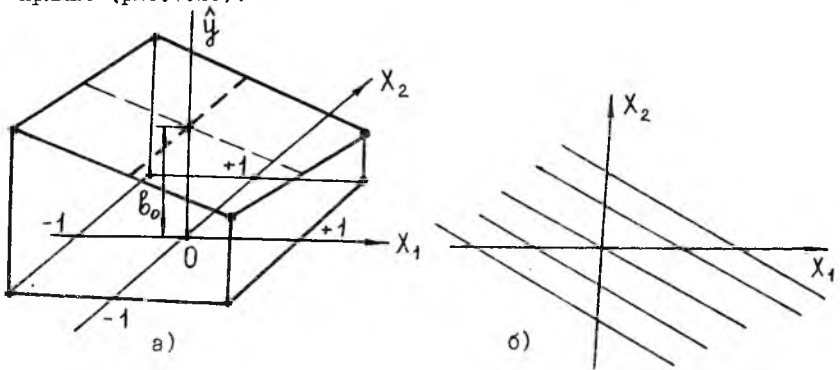


Рис.7.2. Геометрическая интерпретация ПФЭ 2^2 ($b_{12} = 0$)

При $k \geq 3$ геометрическая интерпретация затруднительна. В этом случае, если эффекты взаимодействия не равны нулю, то поверхность отклика называют гиперповерхностью, а в случае линейной модели – гиперплоскостью.

7.2. Принятие решений после построения модели

Решения зависят от числа факторов, цели исследования (достижения оптимума, построения интерполяционной формулы) и т.д. Имеется множество решений как следствие сочетания экспериментальных ситуаций с возможными действиями исследователя. Без использования ЭВМ весьма затруднительно выделить типичные решения. Практически невозможно рассмотреть все ситуации.

Поэтому рассмотрим лишь ситуации, различающиеся по адекватности и неадекватности модели, значимости и незначимости коэффициентов модели.

Для линейной адекватной модели (ЛАМ) в случае решения экстремальной задачи возможны ситуации: 1) все коэффициенты регрессии значимы; 2) часть коэффициентов значима, а часть незначима; 3) все коэффициенты незначимы. В каждой ситуации область экстремума может быть далекой, близкой или положение ее неизвестно (неопределенная ситуация).

Если экстремум близок при значимых коэффициентах, то возможны три решения: окончание исследования, переход к планам второго порядка и движение по градиенту.

При неопределенной ситуации или удаленном оптимуме решение одно - движение по градиенту.

В случае, когда часть коэффициентов значима, а часть нет, выбираются решения, которые приводят к получению значимых коэффициентов. В этом случае важно выдвинуть гипотезы, объясняющие незначимость коэффициентов (неудачный выбор интервалов варьирования, большая ошибка опыта и др.). При этом возможны решения: 1) расширение интервалов варьирования для незначимых факторов; 2) перенос центра плана; 3) уменьшение ошибки опыта (увеличение числа параллельных опытов в одной или нескольких точках плана).

Любые из этих решений требуют постановки новой серии опытов.

В случае, когда все коэффициенты незначимы (кроме b_0), решения должны быть направлены на увеличение точности эксперимента и расширение интервалов варьирования факторов.

Для линейной неадекватной модели (ЛНМ) решения должны быть направлены на получение адекватной модели.

Возможные решения: 1) изменение интервалов варьирования; 2) перенос центра плана; 3) преобразование переменных; 4) включение эффектов взаимодействия; 5) построение плана второго порядка. Все эти решения также требуют постановки новых серий опытов.

При решении интерполяционной задачи исследования заканчиваются получением адекватной модели. В случае неадекватной модели возможны следующие решения: 1) включение эффектов взаимодействия; 2) изменение интервалов варьирования; 3) преобразование переменных; 4) построение плана второго порядка. Все указанные решения связаны с необходимостью проведения новых опытов.

8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЧНОСТИ И ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В Куйбышевском авиационном институте в течение ряда лет на образцах из различных материалов проводились исследования влияния условий эксплуатации, геометрии, технологии на характеристики проч-

ности, пластичности и трещиностойкости.

В основном применялись образцы из алюминиевых и магниевых сплавов в виде пластин с трещиной.

8.1. Исследование влияния вакуума и температуры на характеристики прочности и пластичности конструкционных сплавов

8.1.1. В данном примере объектом исследования являются механические характеристики материалов (σ_B и $\sigma_{0,2}$).

Целью исследования является получение математической зависимости между характеристиками материалов и внешними факторами (вакуумом и температурой) на примере сплава В95АТ.

8.1.2. Учет априорной информации. Предварительные исследования влияния глубины вакуума на механические характеристики материалов показали, что при уменьшении давления от нормального (760 мм рт.ст.) до 13,3 Па величина $\sigma_{0,2}$ возрастает, а затем стабилизируется. С увеличением температуры $\sigma_{0,2}$ также растет. Таким образом, за факторы (независимые переменные) принимаем давление и температуру, а за функцию отклика - механические характеристики материала (σ_B и $\sigma_{0,2}$).

8.1.3. Факторы и область их определения приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1

Список факторов

№ п/п	Название	Размерность	Область определения	Показатель точности	Примечание
1	Давление	Па	$1,01 \cdot 10^5 +$ $1,33 \cdot 10^{-3}$		X_1
2	Температура	К	293 + 423		X_2

Область определения фактора X_1 выбрана исходя из априорной информации, фактора X_2 из возможности экспериментальной установки и цели эксперимента (влияние повышенных температур). Так как эксперимент типа 2^2 , то число опытов равно четырем. Параллельные опыты решено проводить также четыре при каждом сочетании уровней факторов.

В таблице 8.2 дана кодировка факторов. В этой таблице за нижний уровень принято нормальное давление $1,01 \cdot 10^5$ Па (760 мм рт.ст.), а за верхний вакуум $1,33 \cdot 10^{-3}$ Па ($1 \cdot 10^{-5}$ мм рт.ст.). Для фактора температуры соответственно 293 К (20° С) и 423 К (150° С).

Таблица 8.2

Кодировка факторов

Фактор	Уровни			Примечание
	нижний - I	нулевой 0	верхний + I	
X_1	$1,01 \cdot 10^5$ Па (760 мм рт.ст.)	-	$1,33 \cdot 10^{-3}$ Па ($1 \cdot 10^{-5}$ мм рт.ст.)	
X_2	293 К (20° С)	-	423 К (150° С)	

8.1.4. Составляем матрицу планирования (таблица 8.3).

Таблица 8.3

Матрица планирования и результаты эксперимента (сплав В95АТ)

Номер опыта в матрице	X_0	X_1		X_2		Отклик		\bar{S}_i^2
		код	натур. значение Па	код	натур. значен. К	σ _{0,2} МПа		
						повт	ср. рез.	
1	+	-	$1,01 \cdot 10^5$	-	293	507 507 487 473	494	276,0
2	+	+	$1,33 \cdot 10^{-3}$	-	293	514 497 507 503	505	54,0
3	+	-	$1,01 \cdot 10^5$	+	423	451 437 446 447	445	35,0
4	+	+	$1,33 \cdot 10^{-3}$	+	423	502 486 494 494	494	43,0

8.1.5. Обработка результатов. По результатам эксперимента вычисляют среднее значение \bar{y}_i и оценку дисперсии \bar{S}_i^2 по формулам раздела 5.

$$1. \bar{S}_i^2 = \frac{\sum_1^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{n-1}, \text{ где } n = 4, \text{ а } \bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_1^n y_i.$$

2. Однородность дисперсий проверяем по критерию Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S_{max}^2}{\sum_1^n \bar{S}_i^2} = \frac{276,0}{405,0} = 0,681$$

$$G_{табл} = 0,684 \text{ при уровне значимости } \alpha = 0,05.$$

Так как $G_{расч} < G_{табл}$, то гипотезу об однородности дисперсий не отвергаем и вычисляем дисперсию воспроизводимости $S_{\{y\}}^2$:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^N (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)} = \frac{1}{N} \sum_1^n \bar{S}_i^2,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$ и $q = 1, 2, 3, 4$; N - число опытов или число строк матрицы планирования:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{4} (276,0 + 54,0 + 35,0 + 43,0) = 101,0.$$

3. По формулам раздела 6 вычисляем оценки коэффициентов функции отклика. Они равны:

$$b_0 = 484,5; \quad b_1 = 15,0; \quad b_2 = -15,0; \quad b_{12} = 9,5,$$

и функция отклика имеет вид:

$$Y = 484,5 + 15,0 X_1 - 15,0 X_2 + 9,5 X_1 X_2. \quad (8.1)$$

Знак „плюс“ для X_1 показывает, что с увеличением степени вакуума Y ($\sigma_{0,2}$) растет, а с увеличением температуры (знак „минус“ при X_2) - падает.

4. Проверяем адекватность модели по критерию Фишера:

$$F_{расч} = \frac{S_{adj}^2}{S_{\{y\}}^2} < F_{табл},$$

где S_{adj}^2 - остаточная дисперсия:

$$S_{adj}^2 = \frac{1}{f} \sum_1^N (\hat{y}_i - \hat{y}_i)^2.$$

Здесь f - число степеней свободы, равное $N - (k+1) = 4 - (2+1) = 1$; \hat{y}_i - значение функции отклика по уравнению (8.1) в i -ом опыте.

$$S_{adj}^2 = \sum_1^N \Delta y^2 = 361 \quad \text{и} \quad F_{расч} = \frac{361}{101} = 3,57.$$

$$F_{\text{табл}} = 7,7 \quad \text{при } \alpha = 0,05.$$

5. Проверяем значимость коэффициентов b_j и b_{12} . Для этого вычисляем доверительный интервал

$$\Delta b_j = \pm t \cdot S \{b_j\},$$

где t - критерий Стьюдента; а S_{b_j} - среднеквадратичное отклонение:

$$S_{b_j} = \sqrt{\frac{1}{N} S_{\{y\}}^2} = \sqrt{\frac{101,0}{4}} = 5,02,$$

$$t = 2,776 \quad \text{при } \alpha = 0,05.$$

$$\text{Тогда } \Delta b_j = 2,776 \cdot 5,02 = 13,9.$$

Так как $\Delta b_j > b_{12}$, то коэффициент b_{12} незначим и им можно пренебречь.

Тогда окончательная зависимость Y ($\sigma_{0,2}$) будет иметь вид:

$$Y = 484,5 + 15,0 X_1 - 15,0 X_2.$$

Следовательно, взаимное влияние вакуума и температуры незначимо.

8.2. Исследование влияния вакуума, температуры и скорости нагружения на прочность углепластика КМУ-4л

Целью данных исследований является определение изменений характеристик разрушения (предельного напряжения) при моделировании воздействия вакуума и температуры в лабораторных условиях.

Исследования проводились с использованием метода планирования эксперимента. За входные величины - факторы были приняты: давление (вакуум), температура и скорость деформирования. В качестве отклика была принята величина предельного напряжения, определяемая по разрушающей силе.

После кодировки факторов (табл.8.4) составлена матрица планирования (табл.8.5), в соответствии с которой и проводился эксперимент.

Плоские образцы, форма и размеры которых были выбраны по ГОСТу, испытывались при растяжении на промышленной установке ИМАШ-20-75.

Образцы тщательно осматривались и отбирались с ровной поверхностью, без вздутий, сколов, трещин и т.д. Отобранные образцы

обмерялись с точностью до 0,01 мм. Затем определялась площадь сечения, и перед испытанием образцы маркировались.

Таблица 8.4

Кодировка факторов

Факторы	У р о в н и		Размерность	Примечание
	нижний -I	верхний +I		
X_1	$6,6 \cdot 10^{-4}$	$1,01 \cdot 10^5$	Па	Давление
X_2	293	393	К	Температура
X_3	2	3	мм·с ⁻¹	Скорость деформации

Эксперименты проводились как при нормальном давлении ($1,01 \cdot 10^5$ Па), так и в вакууме ($6,6 \cdot 10^{-4}$).

Нагрев образцов осуществлялся радиационным методом со скоростью не более 10 К/мин^{-1} , и при достижении заданной температуры давалась выдержка 10 мин, а затем образец нагружался до разрушения. Поддержание и контроль температуры поверхности образца проводился термопарой, которая тарировалась непосредственно перед экспериментом в диапазоне температур 293К ... 473К ($20^\circ \text{ С} \dots 200^\circ \text{ С}$).

С помощью двухкоординатного самописца регистрировались значения удлинения образца и величина приложенной нагрузки. Результаты эксперимента приведены в табл.8.5.

8.2.1. Статистическая обработка результатов проводилась в соответствии с /I/. В каждой строке матрицы планирования вычислялась дисперсия и среднее значение. Затем проверялась однородность дисперсий по критерию Кохрена:

$$G_p = \frac{S_{i \max}^2}{\sum S_i^2} = \frac{1175,9}{2981,77} = 0,394;$$

$$G_T = 0,5157 \text{ при уровне значимости } \alpha = 0,05.$$

Так как $G_T > G_p$, то гипотеза об однородности дисперсий не отвергается, и находим оценку дисперсии эксперимента (функции отклика):

$$S_y^2 = \frac{\sum S_i^2}{N} = \frac{2981,77}{8} = 372,7.$$

Функция отклика (модель эксперимента) принималась в виде неполного полинома: z

$$y = b_0 + \sum_i b_i X_i + \sum_{i < j} b_{ij} X_i X_j + b_{123} X_1 X_2 X_3.$$

Таблица 8.5

Матрица планирования и результаты эксперимента

№ опыта	X_1		X_2		X_3		Случ. поря-док реал. опи-тов	Начелн. площадь сечения $F_0, \text{мм}^2$	Разрушаю-щая нагрузка, P_{bf}	Функция отклика (предел. напряж.) $\bar{\sigma}_t, \text{МПа}$	Среднее значение пределн. напряж. $\bar{\sigma}_t, \text{МПа}$	S_t^2
	код. натур.	код. Па	код. натур.	код. К	натур.	мм.с-т						
1	+	-	$6,6 \cdot 10^{-4}$	-	293К	+	3	10,75 10,40 11,32	2511,36 1765,80 2530,98	233,58 169,81 223,57	208,95	1175,90
2	+	-	$6,6 \cdot 10^{-4}$	+	393	-	2	9,73 9,64 10,19	1393,02 1510,74 1196,82	143,13 156,76 117,43	139,11	399,00
3	+	+	$1,01 \cdot 10^5$	-	293	-	4 20 3	10,73 10,52 10,77	2668,32 2001,24 2354,40	248,68 190,22 218,57	219,16	433,06
4	+	+	$1,01 \cdot 10^5$	+	393	+	7 4 14	9,97 9,82 9,75	1275,30 1510,74 1549,98	127,92 153,82 159,02	146,95	277,45
5	+	-	$6,6 \cdot 10^{-4}$	-	293	-	19 17 9	10,30 9,86 10,98	2511,36 2236,68 2354,40	243,78 226,81 214,35	228,28	218,26
6	+	-	$6,6 \cdot 10^{-4}$	+	393	+	15 21 12	10,22 9,68 9,71	1314,54 1559,79 1451,88	128,61 161,67 149,50	146,66	272,25
7	+	+	$1,01 \cdot 10^5$	-	293	+	5 6 11	9,96 10,78 10,44	1962,00 2020,86 2158,20	196,98 187,76 206,70	197,18	89,50
8	+	+	$1,01 \cdot 10^5$	+	393	-	23 19 18	9,80 9,98 9,84	1510,74 1648,08 1412,64	154,12 165,10 143,52	154,21	116,35

После проведения вычислений получены следующие оценки коэффициентов b_j :

$$\begin{aligned} b_0 &= 180,0 & b_{12} &= 4,54 \\ b_1 &= -0,69 & b_{13} &= -2,18 \\ b_2 &= -33,33 & b_{23} &= 5,2 \\ b_3 &= -5,13 & b_{123} &= -1,52. \end{aligned}$$

Оценка дисперсии коэффициентов

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{N} = \frac{372,7}{8} = 46,59.$$

Доверительный интервал

$$\Delta b_j = \pm t \cdot S_{b_j}.$$

Статистика $t = 2,12$ и $\Delta b_j = 14,48$. Так как коэффициенты $b_1, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}$ и b_{123} меньше доверительного интервала Δb_j , то они незначимы. Таким образом, модель эксперимента будет

$$y = 180 - 33,33 X_2.$$

Для проверки адекватности модели по остаточной сумме квадратов (табл.8.6) определяем дисперсию адекватности $S_{аг}^2$ и, используя критерий Фишера, проверяем адекватность модели (ее непротиворечие экспериментальным данным):

$$F_p = \frac{S_{аг}^2}{S_y^2} = \frac{219}{372} = 0,588.$$

Табличное значение $F_T = 3,84$.

Таблица 8.6

Расчет остаточной суммы квадратов

№№ п/п	\bar{G}_i	\hat{G}_i	$\Delta G_i = \hat{G}_i - \bar{G}_i$	ΔG_i^2
1	208,95	213,33	- 4,38	25,54
2	139,11	146,67	- 7,56	57,15
3	219,16	213,33	5,83	33,99
4	146,95	146,67	0,28	0,080
5	228,28	213,33	14,94	223,2
6	146,66	146,67	- 0,01	0,0001
7	197,18	213,33	-16,15	260,82
8	154,21	146,67	7,54	56,85

$$\Sigma = 657,63$$

Так как $F_p < F_T$, то гипотеза об адекватности модели принимается. Анализ полученных данных показывает, что из всех факторов воздействия температура оказывает наибольшее влияние на величину предельного напряжения. С увеличением температуры величина предельного напряжения уменьшается. Так при изменении температуры до 393 К предельное напряжение уменьшается до 30 %.

Если сравнивать степень влияния факторов по величине коэффициента, то за температурой следует скорость нагружения (b_3), а затем взаимодействие температуры и скорости нагружения (b_{23}).

8.3. Оценка влияния вакуума и температуры на скорость роста усталостных трещин

В данном примере объектом исследования является скорость роста усталостной трещины.

Целью исследования является получение математической зависимости между скоростью роста усталостной трещины и многочисленными факторами (внешними и внутренними), которые на нее влияют. Таким образом, в качестве функции отклика принимаем скорость роста усталостной трещины (dl/dN).

8.3.1. Учет априорной информации. Внешними факторами, влияющими на скорость роста трещины, являются нагрузка и среда: вакуум, температура, радиация, т.е. условия эксплуатации.

Внутренние факторы — геометрические, технологические, металлургические.

Предварительные исследования показали, что в некоторых материалах (АМГ6БМ и др.) направление проката не влияет на скорость роста трещин. В других, например МА18, при совпадении направления трещины и проката скорость роста трещины увеличивается. Поэтому все исследования следует проводить на образцах, в которых направление проката и направление развития трещины совпадают. Толщина образца в диапазоне 3,5 + 7 мм незначительно влияет на скорость роста трещин, и все исследования можно проводить при "средней" толщине 5 мм.

При анализе различных режимов нагружения было установлено, что наиболее "опасным" является отнулевой цикл. Поэтому все испытания необходимо проводить при этом режиме нагружения. Влияние частоты на скорость роста трещины в диапазоне 2 + 20 герц незначи-

тельно. Поэтому частоту как фактор можно не учитывать и все испытания проводить при "средней" частоте - 10 герц.

Предварительные исследования влияния глубины вакуума на скорость роста трещин показали, что уменьшение давления с атмосферного до 13,3 Па приводит к монотонному снижению скорости роста трещины, а при давлении ниже 10^{-2} Па скорость трещины стабилизируется. Поэтому изменение глубины вакуума до значения 10^{-2} Па необходимо учитывать. Предварительные данные показывают, что температура влияет на скорость роста усталостных трещин. Таким образом, анализ априорной информации показывает, что из рассмотренных факторов необходимо учесть:

1. Фактор нагружения (коэффициент интенсивности напряжения в цикле - K_{max});
2. Давление среды (вакуум) p ;
3. Температуру T .

Список факторов, включаемых в эксперимент, приведен в таблице 8.7.

Таблица 8.7

Список факторов

Номер фактора	Название	Размерность	Область определен.	Точность	Примечание
1	Коэффициент интенсивности напряжения	Мн/м ^{3/2}	9 + 26	± 5 %	
2	Давление	Па	$10^{-2} + 10^5$	± 30 %	
3	Температура	К	293+423	± 4°	

Модель эксперимента принята в виде

$$\eta = \beta_0 \cdot K^{\beta_1} p^{\beta_2} T^{\beta_3} \quad (8.2)$$

или в логарифмических координатах

$$\lg \eta = \lg \beta_0 + \beta_1 \lg K + \beta_2 \lg p + \beta_3 \lg T. \quad (8.3)$$

Тогда функция отклика y (оценка $\lg \eta$) с учетом взаимодействия будет иметь вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \sum_{1 \leq i < j} b_{ij} x_i x_j + b_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (8.4)$$

8.3.2. Кодировка факторов. Так как никаких ограничений на выбор основного (нулевого) уровня нет, то его можно задать для

каждого фактора в виде:

$$\begin{aligned} \lg K_o &= \frac{\lg K_B + \lg K_H}{2} \\ \lg P_o &= \frac{\lg P_B + \lg P_H}{2} \\ \lg T_o &= \frac{\lg T_B + \lg T_H}{2} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Здесь индексы "о", "в" и "н" относятся к основному, верхнему и нижнему уровням.

Кодированные значения факторов будут иметь вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\lg K - \lg K_o}{(\lg K_B - \lg K_H)/2} \\ X_2 &= \frac{\lg P - \lg P_o}{(\lg P_B - \lg P_H)/2} \\ X_3 &= \frac{\lg T - \lg T_o}{(\lg T_B - \lg T_H)/2} \end{aligned} \quad (8.6)$$

и представлены в таблице 8.8.

Таблица 8.8

Кодировка факторов

Уровень факторов	Нижний уровень фактора (-1)		Нулевой уровень фактора (0)		Верхний уровень фактора (+1)	
X_1	$\lg K_H$	0,954	$\lg K_o$	1,184	$\lg K_B$	1,415
X_2	$\lg P_H$	-2	$\lg P_o$	1,5	$\lg P_B$	5
X_3	$\lg T_H$	2,467	$\lg T_o$	2,547	$\lg T_B$	2,626

8.3.3. Составляем матрицу планирования (таблица 8.9).

8.3.4. Обработка результатов. Вычисляем оценку дисперсии среднего в каждой строке матрицы (таблица 8.10).

Проверяем однородность дисперсий с помощью критерия Кохрена:

$$G_F = \frac{\bar{S}_{\max}^2}{\sum_i \bar{S}_i^2} = \frac{2,907 \cdot 10^{-2}}{6,461 \cdot 10^{-2}} = 0,4499.$$

Табличное значение критерия Кохрена $G_T = 0,679$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$, числа степеней свободы $f_1 = n - 1 = 1$ и $f_2 = N = 8$.

Так как $G_T > G_F$, то гипотеза об однородности дисперсий принимается, и находим общую дисперсию среднего:

$$S_y^2 = \frac{\sum_i \bar{S}_i^2}{N} = 8,076 \cdot 10^{-3}.$$

Таблица 8.9

Матрице планирования и результаты эксперимента

№ опыта	Случайн. порядок реализ.	X ₀		X ₁		X ₂		X ₃		Результат эксперимента * y _i	Среднее значение ȳ _i
		+	-	кодир. знач.	натур. знач.	кодир. знач.	натур. знач.	кодир. знач.	натур. знач.		
1	4 16	+	-	-	9	-	10 ⁻²	-	293	- 5,071 - 4,730	- 4,901
2	12 2	+	+	-	26	-	10 ⁻²	-	293	- 3,226 - 2,899	- 3,063
3	3 7	+	-	+	9	+	10 ⁵	-	293	- 4,375 - 4,380	- 4,377
4	14 15	+	+	+	26	+	10 ⁵	-	293	- 3,146 - 3,032	- 3,088
5	8 9	+	-	-	9	-	10 ⁻²	+	423	- 4,724 - 4,693	- 4,708
6	13 1	+	+	-	26	-	10 ⁻²	+	423	- 3,018 - 2,926	- 2,972
7	11 15	+	-	+	9	+	10 ⁵	+	423	- 4,364 - 4,285	- 4,324
8	6	+	+	+	26	+	10 ⁵	+	423	- 2,965 - 3,046	- 3,005

Определяем оценки коэффициентов функции отклика

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i X_{0i}}{N} = -3,751; & \beta_1 &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i X_{1i}}{N} = 0,7765; \\ \beta_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i X_{2i}}{N} = 0,1234; & \beta_3 &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i X_{3i}}{N} = -0,00105; \\ \beta_{12} &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i X_{1i} X_{2i}}{N} = -0,1423; & \beta_{13} &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i X_{1i} X_{3i}}{N} = -0,0127; \\ \beta_{23} &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i X_{2i} X_{3i}}{N} = -0,0366; & \beta_{123} &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i X_{1i} X_{2i} X_{3i}}{N} = 0,0380. \end{aligned}$$

Проверяем значимость коэффициентов. Для этого вычисляем дисперсию коэффициентов

$$S_{\beta_j}^2 = \frac{S_y^2}{N} = \frac{8,076 \cdot 10^{-3}}{8} = 1,0095 \cdot 10^{-3}$$

и доверительный интервал

$$\Delta \beta_j = \pm t \cdot S_{\beta_j} = \pm 2,306 \cdot 3,177 \cdot 10^{-2} = \pm 0,07327,$$

где t - критерий Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $N(n-1) = 8$, а S_{β_j} - среднеквадратическое отклонение.

Таблица 8.10

Значения дисперсий

№	\bar{S}_i^2	№	\bar{S}_i^2
1	$2,907 \cdot 10^{-2}$	5	$3,4025 \cdot 10^{-4}$
2	$2,673 \cdot 10^{-2}$	6	$2,1160 \cdot 10^{-3}$
3	$6,250 \cdot 10^{-6}$	7	$1,5602 \cdot 10^{-3}$
4	$3,249 \cdot 10^{-3}$	8	$1,6402 \cdot 10^{-3}$

Из сравнения значений коэффициентов и доверительного интервала видно, что коэффициенты β_3 , β_{13} , β_{23} и β_{123} незначимы. После отбрасывания незначимых коэффициентов функция отклика имеет вид

$$y = -3,751 + 0,7765 X_1 + 0,1234 X_2 - 0,1423 X_1 X_2. \quad (8.7)$$

Вычисляем остаточную сумму квадратов (см. табл. 8.II) (квадрат разницы между экспериментальным значением \bar{y}_i и предсказанным \hat{y}_i по функции отклика) и дисперсию адекватности.

Таблица 8.II

Остаточная сумма квадратов

№	\bar{y}_i	\hat{y}_i	$\Delta y_i^2 = (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$
1	- 4,901	- 4,793	$1,1621 \cdot 10^{-2}$
2	- 3,063	- 2,956	$1,1535 \cdot 10^{-2}$
3	- 4,377	- 4,262	$1,3271 \cdot 10^{-2}$
4	- 3,088	- 2,993	$8,9492 \cdot 10^{-3}$
5	- 4,708	- 4,793	$7,2590 \cdot 10^{-3}$
6	- 2,972	- 2,956	$2,6896 \cdot 10^{-4}$
7	- 4,324	- 4,262	$3,8688 \cdot 10^{-3}$
8	- 3,005	- 2,993	$1,3456 \cdot 10^{-4}$

Дисперсия адекватности:

$$S_{ag}^2 = \frac{\sum (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N - (k+1)} = \frac{\sum \Delta y_i^2}{N - (k+1)} = \frac{5,6908 \cdot 10^{-2}}{8 - (3+1)} = 1,8969 \cdot 10^{-2}$$

По критерию Фишера проверяем адекватность модели:

$$F_p = \frac{S_{ag}^2}{S_y^2} = \frac{1,8969 \cdot 10^{-2}}{8,076 \cdot 10^{-3}} = 2,349$$

Табличное значение $F_{табл} = 4,1$ для $\alpha = 0,05$ и $f_1 = 8$, а $f_2 = N - (k+1) = 4$.

Так как $F_p < F_{табл}$, то гипотеза об адекватности модели (8.7) принимается.

Таким образом, мы получили математическую зависимость между скоростью роста усталостных трещин и выбранными факторами.

8.4. Исследование трещиностойкости конструкционных материалов

Целью исследования является получение зависимости трещиностойкости материала от геометрии образца с трещиной и внешних факторов (вакуум и температура), т.е. это задача интерполяции.

8.4.1. Априорная информация. В механике разрушения рассматриваются тела (конструкции) с дефектами, как правило, в виде трещин.

Для оценки трещиностойкости таких тел используются различные критерии (константы) – силовые, деформационные, энергетические. В случае хрупкого разрушения, т.е. при малых пластических деформациях в устье трещины (в рамках линейной механики разрушения – ЛМР), в основном применяется силовой критерий – коэффициент интенсивности напряжений K_{IC} , когда начинается нестабильное разрушение за счет запаса упругой энергии. В условиях развитой пластической деформации при разрушении критерий K_{IC} неприменим и используются деформационный или энергетические критерии. В качестве энергетического критерия вязкости разрушения применяется джей-интеграл (J_c) Черепанова–Райса, экспериментальное определение величины которого наиболее разработано [10].

При нестабильном разрушении (момент страгивания трещины), когда изменениями энтальпии тела ΔH и кинетической энергией ΔK можно пренебречь, получим следующее энергетическое уравнение:

$$\Delta \dot{A} = \Delta \dot{U} + \Delta \dot{Y}, \quad (8.8)$$

где $\Delta \dot{A}$ – приращение работы внешних сил; $\Delta \dot{U}$ – изменение упругой энергии; $\Delta \dot{Y}$ – энергия, расходуемая на нестабильное разрушение.

Расходиться может только потенциальная энергия \dot{E} . Поэтому $-\Delta \dot{Y} = \Delta \dot{E}$ и $\dot{U} - \dot{A} = \dot{E}$. Энергия, расходуемая на продвижение трещины, может быть представлена криволинейным интегралом по пути, окружающему вершину трещины (рис.8.1), в линейно- и нелинейно-упругом теле в виде

$$\dot{J} = \int_{\Gamma} \left[U_{\varepsilon_{ij}} dx_2 - \sigma_{ij} \left(\frac{du_i}{dx_i} \right) n_i ds \right], \quad (8.9)$$

где Γ – путь по контуру, окружающему трещину; пределы интегрирования лежат на берегах трещины.

Джей-интеграл характеризует скорость уменьшения потенциальной энергии с ростом длины трещины, т.е. $\dot{J} = -\frac{d\dot{E}}{d\ell}$ в условиях плоской задачи.

Все величины, входящие в уравнение (8.9), отнесены к слою единичной толщины.

Доказано, что джей-интеграл не зависит от Γ , а это значит, что он характеризует и состояние концевой зоны трещины.

Первый член подынтегрального выражения – плотность внутренней энергии $U_{\varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij} \int \sigma_{ke} d\varepsilon_{ke}$; второй член – удельная работа внеш-

них сил; σ_{ij} и u_i - составляющие тензора напряжений и вектора смещений на поверхности тела; n_i - направляющие косинусы; $dx_2 = n_i ds$, где ds - элемент контура Γ .

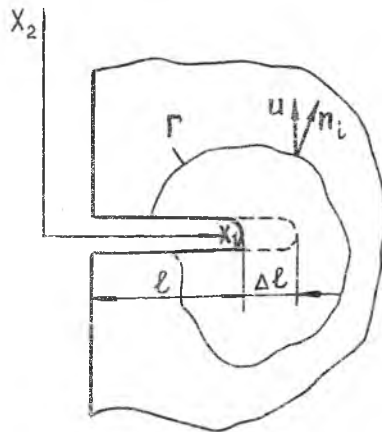


Рис.8.1. К определению J -интеграла

В нелинейной механике разрушения (НЛМР) пользуются независимостью выбора контура Γ , и в качестве критерияльного значения J , характеризующего разрушение, используют критическое значение, т.е. J_c .

Отмечено, что значение J_c зависит от внутренних и внешних факторов (геометрии тела и трещин, давления, температуры и т.д.). Критическое значение J , соответствующее началу разрушения, обозначается J_{IC} .

С целью оптимизации применяются методы теории планирования эксперимента.

В связи с обработкой большого количества данных необходимо использовать ЭВМ.

8.4.2. Экспериментальное определение величины J_c . Величина джей-интеграла J определяется с использованием диаграммы разрушения (нагрузка-смещение) (рис.8.2а) специально подготовленных образцов по формуле:

$$J = \left[\frac{\alpha_i}{W} P_k \cdot q_k - \left(\frac{\alpha_i}{W} - \frac{2}{B} \right) A_k \right] \frac{1}{W-l} \quad (8.10)$$

Здесь $\alpha_i = \varphi' \left(\frac{\ell}{W} \right) \varphi \left(\frac{\ell}{W} \right)$ - коэффициент, зависящий от функции податливости $\varphi \left(\frac{\ell}{W} \right)$ и ее производной φ' ; W , B , ℓ - ширина, толщина образца и длина трещины соответственно; P_K , q_K - конечные величины нагрузки и перемещения; A_K - площадь под диаграммой разрушения.

Значения функции податливости и ее производной определяются заранее для данного материала и образца и должны быть известны.

Критическое значение J_c равно величине джей-интеграла в момент старта трещины в процессе нагружения. Как правило, этот момент трудно определить, особенно для пластичных материалов. Поэтому согласно рекомендациям /10/ предлагается для определения момента стартирования трещины (старта) использовать не менее четырех образцов с одинаковой длиной трещины.

Образцы из этой серии поочередно нагружаются до различных уровней нагрузки (рис.8.2б), а затем разгружаются. В каждом образце фиксируется фронт трещины, после чего образец доламывается и на поверхности разрушения (излома) измеряется длина трещины ℓ и величина ее подрастания $\Delta \ell$. Измерения проводятся на инструментальном микроскопе БМИ-1 с точностью до 0,005 мм (рис.8.2в).

С использованием кривых сопротивления разрушению (J_R -кривые) определяется критическое значение J_c . Известно, что на начальном участке J_R -кривая описывается зависимостью

$$J_R = 2 \sigma_T \cdot \Delta \ell, \quad (8.11)$$

где σ_T - предел текучести материала. На участке подрастания трещины возможна аппроксимация J_R -кривой уравнением

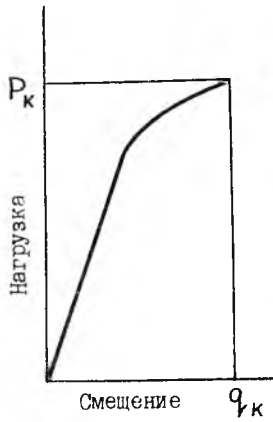
$$J_R = a_0 + a_1 \cdot \Delta \ell. \quad (8.12)$$

Коэффициенты этого уравнения находятся методом наименьших квадратов (МНК) по результатам эксперимента. Точка пересечения прямой (8.12) с зависимостью (8.11) определяет величину J_c (рис.8.2г).

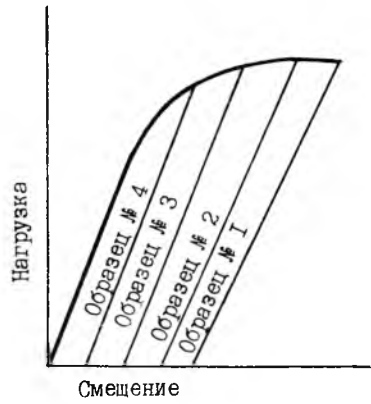
По экспериментальным данным коэффициенты уравнения (8.12) МНК находят по формулам

$$a_0 = \frac{\sum_1^N J_{Ri} \sum_1^N (\Delta \ell_i)^2 - \sum_1^N J_{Ri} \cdot \Delta \ell_i \sum_1^N \Delta \ell_i}{N \sum_1^N (\Delta \ell_i)^2 - \left(\sum_1^N \Delta \ell_i \right)^2} \quad (8.13)$$

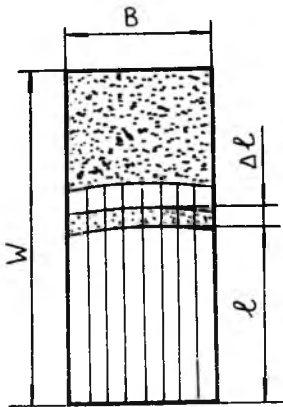
$$a_1 = \frac{N \sum_1^N J_{Ri} \Delta \ell_i - \sum_1^N J_{Ri} \sum_1^N \Delta \ell_i}{N \sum_1^N \Delta \ell_i^2 - \left(\sum_1^N \Delta \ell_i \right)^2}, \quad (8.14)$$



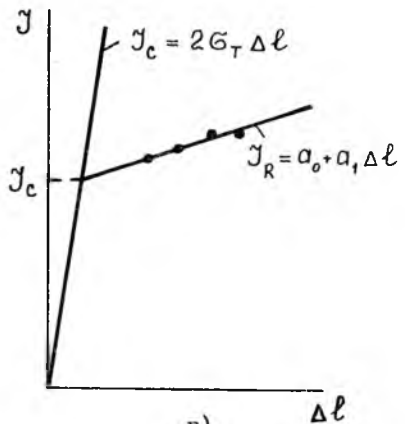
а)



б)



в)



г)

Рис. 8.2. Определение величины G_c с помощью G_R -кривых

где N - количество образцов, испытываемых для определения J_R -кривой (рис.8.26); J_{Ri} и Δl_i - значения величины J_R и подрастание трещины Δl для каждого образца.

Величина J_c , как точка пересечения, найдется по формуле:

$$J_c = \frac{2\sigma_T \cdot a_0}{2\sigma_T - a_1} \quad (8.15)$$

Используя формулы (8.13), (8.14), (8.15) и блок-схему вычисления J_c (рис.8.3), можно составить и реализовать программу J_c .

Рекомендуемые идентификаторы программы J_c :

X - Δl_i
 YR - J_{Ri}
 SGMТ - σ_T
 AØ - a_0
 A1 - a_1
 DGC - J_c .

Для тестирования программы J_c были взяты результаты экспериментального определения величины J_c материала АМГ6.

Фрагмент матрицы планирования для этого материала приведен в таблице 8.12. Для первого опыта ручной счет дал величину

$$J_c = 28,55 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2}, \text{ а вычисленное значение по программе}$$

$$J_c - J_c = 28,59 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2}, \text{ т.е. программа работоспособна.}$$

8.4.2.1. Образцы для испытаний. При испытаниях на трехточечный изгиб применяются плоские образцы с боковой трещиной. Для этого в середине боковой стороны образца делается надрез с радиусом в вершине 0,4 мм, из которого вырастает усталостная трещина (рис.8.4).

8.4.2.2. Экспериментальная установка. Испытания проводятся на промышленной установке ИМАШ-20-75 с помощью специального приспособления для нагружения при трехточечном изгибе (рис.8.5).

Образец 1 устанавливается между опорами 2 и нагружающим роликом 3. Нагружающий ролик жестко закреплен на тяге 4, соединяющей сильфонные вводы 5 вакуумной камеры 6. Один из сильфонных вводов связан с нагружающей системой установки. Опоры 2 жестко прикреплены к дну вакуумной камеры.

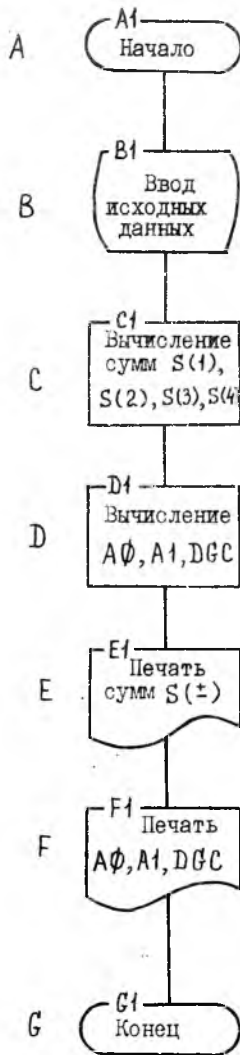


Рис. 8.3. Блок-схема программы JC

Таблица 8.12

Слав АМГ6. Фрагмент матрицы планирования
и результаты эксперимента

№ п/п	X ₁		X ₂		X ₃		X ₄		X ₅		№ новт. опыт.	№ новт. опыт.	Δf, мм	J _к , И.К. М.С.	J _с	J _с	S _i		
	код.	наглр. значен.	код.	наглр. значен.	код.	наглр. значен.	код.	наглр. значен.	код.	наглр. значен.									
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
I	+	10 мм	+	40 мм	+	0,7	+	10 ⁵ Па	-	293 К	I	40	253	0,89	35,33	28,59			
													250	0,651	34,0				251
I	+	10 мм	+	40 мм	+	0,7	+	10 ⁵ Па	-	293 К	2	3	254	0,775	35,01	28,39	0,02		
													252	0,561	32,12				
2	-		+		+		+		-		3	9							

При нагружении образца на штатном двухкоординатном самописце установки автоматически строится график зависимости прогиба образца от нагрузки (диаграмма разрушения). Датчики усилия и перемещения (тензодатчики) наклеены соответственно на динамометре 7 и упругой пластине малой жесткости 8. Перед испытанием датчики тарируются. Измерение температуры осуществляется термпарой, приваренной к образцу вблизи трещины.

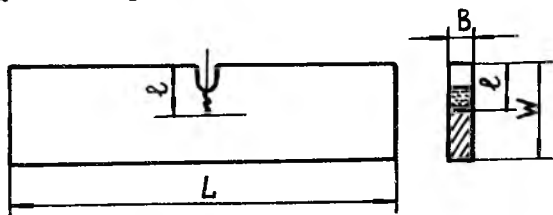


Рис.8.4. Образец

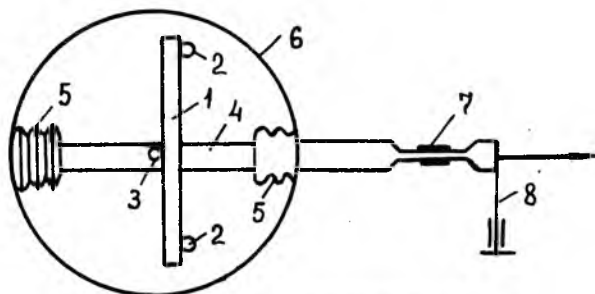


Рис.8.5. Схема нагружения образца

В установке имеется специальная система нагрева (до 423 К) и регистрации температуры.

На этой установке были испытаны образцы из АМг6; Д16АТ; В95АТ; МА2-1; МА18; МА21.

8.4.3. Планирование эксперимента. Согласно методам планирования эксперимента по определенному плану изменяются сразу все независимые величины (факторы), определяющие условия эксперимента.

Модель эксперимента (функция отклика) была принята вида

$$y = Y_c = b_0 + \sum_1^5 b_j \chi_j + \sum_{i < j} b_{ij} \chi_i \chi_j + \dots + b_{12345} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_5, \quad (8.16)$$

где χ_j - факторы (переменные), влияние которых необходимо оценить,

а $\beta_j, \beta_{ij}, \beta_{ijk}$ и т.д. - коэффициенты, определяющие степень влияния не только отдельных факторов, но и их совместное воздействие (двойное, тройное и т.д.).

Для оценки коэффициентов уравнения (8.16) был проведен полный факторный эксперимент (ПФЭ) типа 2^k , где k - число факторов.

8.4.3.1. Факторы. В эксперименте типа 2^k каждый фактор принимает одно из двух значений, называемых верхним и нижним уровнями. В таблице 8.13 представлены факторы и их характеристики.

Таблица 8.13

Факторы

№ п/п	Название	Размерность	Область определения	Точность	Примечание
1	Толщина образца	мм	4...10	0,01	X_1
2	Ширина образца	"	15...40	0,01	X_2
3	Относительная длина трещины	б.р.	0,3...0,7	0,001	X_3
4	Логарифм давления	Па	-3...+5	1 %	X_4
5	Температура	К	293...423	1	X_5

Для упрощения записи условий проведения эксперимента и проведения обработки результатов эксперимента используются кодированные значения факторов. В таблице 8.14 приведены кодированные значения факторов.

Таблица 8.14

Кодировка факторов

Факторы	У р о в н и			Интервал	Размерность
	- I	0	+ I		
X_1	4	7	10	3	мм
X_2	15	27,5	40	12,5	"
X_3	0,3	0,5	0,7	0,2	б.р.
X_4	-3	1	5	4	Па
X_5	293	358	423	65	К

8.4.3.2. Матрица планирования. Для ПФЭ 2^5 матрица планирования строилась по следующему правилу: в первом столбце (X_1) знаки уровней чередовались через один, во втором (X_2) через два, в третьем (X_3) через четыре, в четвертом (X_4) через восемь, в пятом (X_5) - через шестнадцать, т.е. по степеням цифры два (2^0 , 2^1 , 2^2 и т.д.). Матрица планирования приведена в распечатке программы ВМ. Количество экспериментов (без повторных опытов) $N = \rho^k$, где ρ - количество уровней. Для нашего случая $N = 32$, т.е. матрица планирования содержит пять столбцов и 32 строки.

8.4.4. Обработка результатов эксперимента. Обработка результатов эксперимента проводилась на ЭВМ с исполнением программ МТ и ВМ (см. разделы 5 и 6).

После определения по программе МТ значений \bar{y}_i и S_i^2 вычислялось расчетное значение критерия Кохрена G_p и проводилось его сравнение с табличным. Таким образом, проверялась однородность дисперсий.

Далее ЭВМ вычисляла 32 коэффициента уравнения (8.16).

После определения значимости коэффициентов остаточная сумма квадратов вычислялась вручную.

После исключения незначимых коэффициентов и проверки адекватности модели уравнения регрессии получились в виде:

АМГ6М

$$J_c = 27,628 + 1,3255 X_4 - 0,4948 X_5; \quad (8.17)$$

ДИ6АТ

$$J_c = 24,558 + 1,3569 X_4 + 0,4022 X_5; \quad (8.18)$$

В95АТ

$$J_c = 17,29 + 0,6087 X_4 + 1,1844 X_5; \quad (8.19)$$

МА2-1

$$J_c = 7,196 + 0,6712 X_4 + 1,1528 X_5 + 0,1478 X_4 X_5; \quad (8.20)$$

МА1В

$$J_c = 19,144 + 1,635 X_4 + 3,097 X_5 + 0,138 X_4 X_5; \quad (8.21)$$

МА21

$$J_c = 5,766 + 0,5172 X_4 + 0,8916 X_5 + 0,2834 X_4 X_5. \quad (8.22)$$

8.4.5. Анализ уравнений регрессии (8.17)...(8.22) показывает:

1. Значение критерия - \mathcal{J}_c при данных интервалах варьирования факторов не зависит от геометрии образца и трещины, а следовательно, может быть принято в качестве критического - \mathcal{J}_{Tc} для материала.

2. На величину \mathcal{J}_c оказывают влияние не только вакуум и температура, но и их взаимодействие (коэффициент β_{45} значим).

3. Получены интерполяционные зависимости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - М.: Наука, 1986. - 280 с.

2. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. - М.: Мир, 1973. - 957 с.

3. Зажигаев Л.С., Кишьян А.А., Романиков Ю.И. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента. - М.: Атомиздат, 1978. - 231 с.

4. Евдокимов Ю.А., Колесников В.И., Тетерин А.И. Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа. - М.: Наука, 1980. - 228 с.

5. Новик Ф.С., Арсов Я.Б. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов. - М.: Машиностроение, София: Техника, 1980. - 304 с.

6. Математическое моделирование. Сборник. Перевод с англ. Гукало Ю.П. - М.: Мир, 1979. - 277 с.

7. Монтгомери Д.Н. Планирование эксперимента и анализ данных. - Л.: Судостроение, 1980. - 383 с.

8. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике. - М.: Финансы и статистика, 1982. - 272 с.

9. ФОРТРАН ЕС ЭВМ/З.С.Брич, Д.В.Кашелевич, С.Ю.Котин. - М.: Статистика, 1968. - 264 с.

10. Расчеты и испытания на прочность. Определение характеристик вязкости разрушения (трещиностойкости) при статическом нагружении. - М.: Госстандарт, 1983. - 51 с.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
Введение	3
I. Общие положения и понятия	6
2. Выбор модели	7
3. Полный факторный эксперимент (ПФЭ) типа 2^k	II
4. Дробный факторный эксперимент (ДФЭ)	I4
5. Проведение эксперимента	I6
6. Обработка результатов эксперимента	27
7. Обсуждение результатов	44
8. Применение методов теории планирования эксперимента при исследовании влияния различных факторов на характеристики прочности и трещиностойкости конструкционных материалов.	47
Литература	7I

Л а в р о в Борис Александрович

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА
ПРИ ИСПЫТАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАКОНСТРУКЦИЙ

Редактор Л.М.К а р п о в а

Свод.тем.пл. № I2I

Подписано в печать 29.II.89 г. ЕО 00363.Формат 60x84^I/I6.
Бумага оберточная белая. Офсетная печать. Усл.п.л.4, I8.
Усл.кр.-от.43,05. Уч.-изд.л. 4, I. Т. 300 экз. Заказ № 6980.
Цена I5 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
443086 Куйбышев, Московское шоссе, 34.

Тип.им.В.П.Мяги Куйбышевского полиграфического
объединения, 443099. г. Куйбышев, ул.Венцека, 60.