МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

Б.А.Лавров

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДЕЛЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Учебное пособие

Самара 1995

УДК 519.24:629.7.015

Планирование эксперимента при использовании моделей второго порядка: Учеб.пособие/Б.А.Лавров: Самар. госуд. аэрокосмич. ун-т. Самара, 1995. 46 с.
ISBN 5-230-16970-2

Рассмотрены принципы построения планов второго порядка. На их основе даются описания композиционных ортогональных, ротатабельных и планов типа B_k . Рассмотрены примеры применения этих планов и моделей второго порядка для оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Приводится программа обработки результатов эксперимента на ЭВМ.

Пособие предназначено для практического использования в учебной и научно-исследовательской работе студентами авиационных специальностей, а также может быть полезно инженерам и аспирантам. Подготовлено кафедрой прочности летательных аппаратов.

Ил. 3, табл. 10, библиогр.- 10 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева.

Рецензент - д.ф.-м.н. В.И.Астафьев

ISBN 5-230-16970-2

ВВЕДЕНИЕ

Создание более надежных и легких конструкций летательных аппаратов (ЛА) невозможно без экспериментальных исследований прочности их элементов.

С целью сокращения затрат и времени на проведение таких исследований необходимо использовать методы планирования эксперимента. Теория таких методов достаточно разработана, но в основном при практическом применении используются модели первого порядка. Однако с появлением новых конструкционных материалов, особенно композитов, с их сложной неоднородной структурой и нелинейной зависимостью характеристик разрушения от влияния внешних факторов появляется необходимость использования более информативных нелинейных моделей.

Одним из возможных вариантов является использование моделей второго порядка и на их основе построение и реализация композиционных планов.

I. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) содержит необходимую информацию для получения модели в виде неполного квадратичного уравнения.

Анализируя результаты ПФЭ типа 2^K в случае неадекватной модели можно принять решение о планировании эксперимента второго порядка для построения модели, имеющей вид

$$\eta = \beta_0 + \sum_{j=1,\dots}^{K} \beta_j x_j + \sum_{1\le j<\ell} \beta_{j\ell} x_j x_\ell + \sum_{j=1,2,\dots}^{K} \beta_{jj} x_j^2 , \qquad (I.I)$$

где η – теоретическая величина отклика, а β_j, $\beta_{j\ell}$, β_{jj} – теоретические значения коэффициентов и K – число факторов.

Число членов этой модели

$$C_{K+2}^{K} = \frac{(K+2)!}{K!\,2!} = \frac{(K+1)(K+2)}{2},$$

а число опытов для ее построения должно быть

$$N \geq \frac{(K+1)(K+2)}{2} . \qquad (I.2)$$

Кроме того, для получения раздельных оценок независимых переменных необходимо, чтобы число уровней варьирования факторов было на единицу больше степени полинома. Таким образом, для реализации плана второго порядка необходимо варьировать факторы не меньше чем на трех уровнях, т.е. использовать ПФЭ типа 3^K.

Опыты могут проводиться или на K-мерном гиперкубе $|X_j| \leq 1$ или на K-мерном гипершаре $\sum_{1}^{K} x_j^2 \leq 1$.

По результатам эксперимента определяют выборочные оценки коэффициентов модели и получают уравнение регрессии вида

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{K} b_j x_j + \sum_{1 \leq j < \ell} b_{j\ell} x_j x_\ell + \sum_{j=1}^{K} b_{jj} x_j^2. \qquad (I.3)$$

Расчет коэффициентов проводят методом наименьших квадратов (МНК) в общем случае по формуле

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \qquad (I.4)$$

Особенности обработки, связанные с характером дублирования, сохраняются и в этом случае.

Для рассмотрения структуры информационной матрицы $A = (X^T X)$ запишем матрицу X условий проведения эксперимента:

$$X = \left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc|ccccc} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{j1} & \dots & x_{K1} & (x_1 x_2)_1 & \dots & (x_j x_\ell)_1 & \dots & (x_{K-1} x_K)_1 & x_{11}^2 & \dots & x_{j1}^2 & \dots & x_{K1}^2 \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ x_{0i} & x_{1i} & \dots & x_{ji} & \dots & x_{Ki} & (x_1 x_2)_i & \dots & (x_j x_\ell)_i & \dots & (x_{K-1} x_K)_i & x_{1i}^2 & \dots & x_{ji}^2 & \dots & x_{Ki}^2 \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{jN} & \dots & x_{KN} & (x_1 x_2)_N & \dots & (x_j x_\ell)_N & \dots & (x_{K-1} x_K)_N & x_{1N}^2 & \dots & x_{jN}^2 & \dots & x_{KN}^2 \end{array}\right] \qquad (I.5)$$

Транспонируя ее, найдем матрицу **А** (I.6). Элементы матрицы часто называют моментами плана, а саму матрицу - матрицей моментов. Моменты могут быть четными и нечетными. Моменты, в которых хотя бы один сомножитель в нечетной степени, являются нечетными.

Например:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}; \ \sum_{i=1}^{N} (x_j x_\ell)_i; \ \sum_{i=1}^{N} (x_j^2 x_\ell)_i; \ \sum_{i=1}^{N} x_{ji}^3 .$$

$$
A=\left|\begin{array}{l|llll|l}
\sum X_0^2 & \sum X_0X_1 & \cdots & \sum X_0X_j & \cdots\; \sum X_0X_k & \sum X_0(X_1X_2) \\
\hline
\sum X_1X_0 & \sum X_1^2 & \cdots & \sum X_1X_j & \cdots\; \sum X_1X_k & \sum X_1^2X_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_jX_0 & \sum X_jX_1 & \cdots & \sum X_j^2 & \cdots\; \sum X_jX_k & \sum X_j(X_1X_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_kX_0 & \sum X_kX_1 & \cdots & \sum X_kX_j & \cdots\; \sum X_k^2 & \sum X_k(X_1X_2) \\
\hline
\sum (X_1X_2)X_0 & \sum X_1^2X_2 & \cdots & \sum (X_1X_2)X_j & \cdots\; \sum (X_1X_2)X_k & \sum X_1^2X_2^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum (X_jX_\ell)X_0 & \sum (X_jX_\ell)X_1 & \cdots & \sum X_j^2X_\ell & \cdots\; \sum (X_jX_\ell)X_k & \sum (X_jX_\ell)(X_1X_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum (X_{k-1}X_k)X_0 & \sum (X_{k-1}X_k)X_1 & & \sum (X_{k-1}X_k)X_j & \sum X_{k-1}X_k^2 & \sum (X_{k-1}X_k)(X_1X_2) \\
\hline
\sum X_1^2X_0 & \sum X_1^3 & \cdots & \sum X_1^2X_j & \cdots\; \sum X_1^2X_k & \sum X_1^3X_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_j^2X_0 & \sum X_j^2X_1 & \cdots & \sum X_j^3 & \cdots\; \sum X_j^2X_k & \sum X_j^2(X_1X_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_k^2X_0 & \sum X_k^2X_1 & \cdots & \sum X_k^2X_j & \cdots\; \sum X_k^3 & \sum X_k^2(X_1X_2) \\
\hline
\end{array}\right. \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \left.\begin{array}{lll|lllll}
\sum X_0(X_jX_\ell) & \cdots & \sum X_0(X_{k-1}X_k) & \sum X_0X_1^2 & \cdots & \sum X_0X_j^2 & \cdots & \sum X_0X_k^2 \\
\hline
\sum X_1(X_jX_\ell) & \cdots & \sum X_1(X_{k-1}X_k) & \sum X_1^3 & \cdots & \sum X_1X_j^2 & \cdots & \sum X_1X_k^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_j^2X_\ell & \cdots & \sum X_j(X_{k-1}X_k) & \sum X_jX_1^2 & \cdots & \sum X_j^3 & \cdots & \sum X_jX_k^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_k(X_jX_\ell) & \cdots & \sum X_{k-1}X_k^2 & \sum X_kX_1^2 & \cdots & \sum X_kX_j^2 & \cdots & \sum X_k^3 \\
\hline
\sum (X_1X_2)(X_jX_\ell) & & \sum (X_1X_2)(X_{k-1}X_k) & \sum X_1^3X_2 & \cdots & \sum (X_1X_2)X_j^2 & \cdots & \sum (X_1X_2)X_k^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_j^2X_\ell^2 & \cdots & \sum (X_jX_\ell)(X_{k-1}X_k) & \sum (X_jX_\ell)X_1^2 & \cdots & \sum X_j^3X_\ell & \cdots & \sum (X_jX_\ell)X_k^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum (X_{k-1}X_k)(X_jX_\ell) & \cdots & \sum X_{k-1}X_k^2 & \sum (X_{k-1}X_k)X_1^2 & \cdots & \sum (X_{k-1}X_k)X_j^2 & \cdots & \sum X_{k-1}X_k^3 \\
\hline
\sum X_1^2(X_jX_\ell) & \cdots & \sum X_1^2(X_{k-1}X_k) & \sum X_1^4 & \cdots & \sum X_1^2X_j^2 & \cdots & \sum X_1X_k^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_j^3X_\ell & \cdots & \sum X_j^2(X_{k-1}X_k) & \sum X_j^2X_1^2 & \cdots & \sum X_j^4 & \cdots & \sum X_j^2X_k^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum X_k^2(X_jX_\ell) & \cdots & \sum X_{k-1}X_k^3 & \sum X_k^2X_1^2 & \cdots & \sum X_k^2X_j^2 & \cdots & \sum X_k^4 \\
\hline
\end{array}\right| \qquad (I.6)
$$

Суммирование всюду по числу опытов от $i = I$ до $i = N$.

В четных моментах все сомножители имеют четную степень.

Для построения модели (I.3) реализация ПФЭ $3^К$ нерациональна ввиду большого числа опытов. Поэтому основное внимание здесь уделено симметричным композиционным планам. В этих планах в качестве ядра используют ПФЭ $2^К$ или ДФЭ $2^{К-m}$, добавляя еще несколько опытов в точках, специальным образом расположенных. Эти точки называют "звездными".

Обычно такие планы будут и центральными, поскольку все опыты располагаются симметрично относительно центра плана. Для трех факторов такой план представлен на рис. I.I.

План второго порядка (К = 3)

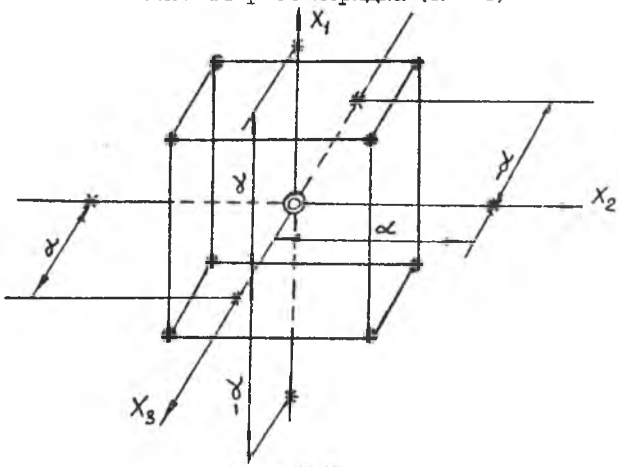

Рис. I.I

Ядро плана составляет ПФЭ $2^к$.

Условия проведения опытов соответствуют вершинам куба, которыми задаются интервалы варьирования факторов. Недостающие опыты для реализации плана второго порядка проводятся в звездных точках (на рис. I.I обозначены ✱) с координатами ($\pm\alpha$, 0, 0), (0, $\pm\alpha$, 0), (0, 0, $\pm\alpha$). Звездные точки расширяют область эксперимента. Опыты в центре плана служат для реализации принятого критерия оптимальности (на рис. I.I обозначено ◎). В зависимости от их числа план эксперимента можно сделать почти ортогональным или униформным.

Общее число опытов при $к$ факторах (опыты не дублируются) равно

$$N = 2^к + 2к + n_o , \tag{I.7}$$

где 2^k - число опытов в ядре плана; $2k$ - число звездных точек;
n_0 - число опытов в центре плана.
Матрица планирования такого плана представлена в таблице I.I

Таблица I.I

Матрица планирования композиционного плана

Число опытов	$X_1 \dots X_2 \dots X_j \dots X_k$	Примечание
$N_1 = 2^k$	± 1	Ядро плана
$n_\alpha = 2k$	$\begin{matrix} \pm\alpha \dots & & & 0 \\ & \pm\alpha \dots & & \\ & & \pm\alpha \dots & \\ 0 & & & \pm\alpha \end{matrix}$	Звездные точки
n_0	$0 \dots 0 \dots 0$	Опыты в центре плана

В таблице I.I α - величина звездного плеча.
Запишем матрицу условий эксперимента (независимых переменных)

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
X_0 & X_1 \dots X_j \dots X_k & X_1X_2 \dots X_jX_l \dots X_{k-1}X_k & X_1^2 \dots X_j^2 \dots X_k^2 \\
\hline
1 & \pm 1 & \pm 1 & 1 \\
\hline
1 & \begin{matrix} \pm\alpha & & 0 \\ & \pm\alpha & \\ 0 & & \pm\alpha \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} \alpha^2 & & 0 \\ & \alpha^2 & \\ 0 & & \alpha^2 \end{matrix} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad X = \text{(I:8)}
$$

Составим информационную матрицу

$$X^{T}X = \left|\begin{array}{c|c|c|c} N & 0 & 0 & \sum X_1^2 \ldots \sum X_j^2 \ldots \sum X_k^2 \\ \hline 0 & \begin{matrix}\sum X_1^2 & & 0\\ & \sum X_j^2 & \\ 0 & & \sum X_k^2\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}\sum X_1^2 X_2^2 & & 0 \\ & \sum X_1^2 X_2^2 & \\ 0 & & \sum X_{k-1}^2 X_k^2\end{matrix} & 0 \\ \hline \begin{matrix}\sum X_1^2\\ \sum X_j^2 \\ \sum X_k^2\end{matrix} & 0 & 0 & \begin{matrix}\sum X_1^4 \ldots \sum X_1^2 X_j^2 \ldots \sum X_1^2 X_k^2 \\ \sum X_j^2 X_1^2 \ldots \sum X_j^4 \ldots \sum X_j^2 X_k^2 \\ \sum X_k^2 X_1^2 \quad \sum X_k^2 X_j^2 \quad \sum X_k^4\end{matrix}\end{array}\right| \qquad (I.9)$$

Суммирование всюду от i =I до $i = N$.

В (I.9) все нечетные моменты равны нулю, а четные не равны нулю. Обозначим их

$$\lambda_2 = N^{-1}\sum_{1}^{N} x_{ji}^2 ,$$
$$\lambda_3 = N^{-1}\sum_{1}^{N} (x_j x_l)_i , \qquad (I.I0)$$
$$\lambda_4 = N^{-1}\sum_{1}^{N} x_{ji}^4 .$$

В случае дублирования опытов условие (I.I0) примет вид:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i}\sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji}^2 ,$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_3 &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i} \sum_{i=1}^{N} n_i \left(x_j^2 x_l^2\right)_i , \\
\lambda_4 &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i} \sum_{i=1}^{N} n_i \, x_{ji}^4 .
\end{aligned}
\qquad (\mathrm{I.II})
$$

Нормированная информационная матрица $M = \frac{1}{N} A$ будет блочно-диагональной

$$
M = \frac{1}{N}
\left|
\begin{array}{c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots \lambda_2 \\
\hline
0 & \begin{array}{ccc} \lambda_2 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_2 \end{array} & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \begin{array}{ccc} \lambda_3 & & 0 \\ & \lambda_3 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{array} & 0 \\
\hline
\begin{array}{c} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{array} & 0 & 0 & \begin{array}{c} \lambda_4 \ldots \lambda_3 \ldots \lambda_3 \\ \lambda_3 \ldots \lambda_4 \ldots \lambda_3 \\ \lambda_3 \ldots \lambda_3 \ldots \lambda_4 \end{array}
\end{array}
\right|
\qquad (\mathrm{I.I2})
$$

Любые симметричные планы имеют матрицу типа (I.I2), в которой все нечетные моменты равны нулю.

Свойства симметричных центральных композиционных планов зависят от величины звездного плеча α и числа опытов n_0 в центре плана.

Для определения величин α и n_0 необходимо выдвинуть еще какой-либо критерий оптимальности плана. Например, ортогональность плана либо его рототабельность и т.д.

Необходимо заметить, что ни ортогональные, ни рототабельные композиционные планы не являются оптимальными в том смысле, что при таком планировании нарушается принцип оптимального использования факторного пространства (см. рис. I.I). Однако считается, что рототабельные планы второго порядка обладают большей оптимальностью, так как позволяют минимизировать смещение оценок коэффициентов уравнения (I.3).

Найдем обратную матрицу M^{-1}:

$$M^{-1} = \frac{1}{N}\left|\begin{array}{c|c|c|c}
a & 0\ldots0\ldots0 & 0\ldots0\ldots0 & -b\ldots -b\ldots -b \\ \hline
0 & \begin{matrix} 1/\lambda_3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_3 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & \begin{matrix} 1/\lambda_3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_3 \end{matrix} & 0 \\ \hline
\begin{matrix} -q \\ \vdots \\ -q \\ \vdots \\ -q \end{matrix} & 0 & 0 & \begin{matrix} c-d\ldots -d\ldots -d \\ \ldots\ldots\ldots \\ -d\ldots c-d\ldots -d \\ \ldots\ldots\ldots \\ -d\ldots -d\ldots c-d \end{matrix}
\end{array}\right| \qquad (I.13)$$

где

$$\alpha = \frac{\kappa\lambda_2^2}{\lambda_4 - \lambda_3 + \kappa\lambda_3 - \kappa\lambda_2^2} + 1 ,$$

$$q = \frac{\lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_3 + k\lambda_3 - k\lambda_2^2} \quad ,$$

$$c = \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} \quad , \qquad (I.I4)$$

$$d = \frac{\lambda_3 - \lambda_2^2}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3 + k\lambda_3 - k\lambda_2^2)} \quad .$$

Для проверки правильности вычислений коэффициентов a , q , c , d полезны формулы:

$$a - qk\lambda_2 = 1 \quad ,$$
$$q + (dk - c)\lambda_2 = 0 \quad , \qquad (I.I5)$$
$$q\lambda_2 + [d(k-1) - c] + d\lambda_4 = 0 \quad .$$

Оценки коэффициентов регрессии вычисляются по формулам:

$$b_0 = \frac{a}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - \frac{q}{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i \quad ,$$

$$b_j = \frac{1}{N\lambda_2}\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i \quad , \qquad (I.I6)$$

$$b_{jl} = \frac{1}{N\lambda_3}\sum_{i=1}^{N} (x_j x_l)_i y_i \quad ,$$

$$b_{jj} = \frac{c}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i - \frac{d}{N}\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i - \frac{q}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \quad .$$

В случае дублирования опытов вместо N берется $\sum_{i=1}^{N} n_i$, а под знаком сумм вводится n_i и вместо y_i берется $\bar{y}_i$ – среднее значение результата в строке i . Тогда оценки коэффициентов будут:

$$b_0 = \frac{a}{\sum_{i=1}^{N} n_i}\sum_{i=1}^{N} n_i \bar{y}_i - \frac{q}{\sum_{i=1}^{N} n_i}\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji}^2 \bar{y}_i \quad ,$$

$$b_j = \frac{1}{\lambda_2 \sum_{i=1}^{N} n_i}\sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji} \bar{y}_i \quad ,$$

$$b_{jl} = \frac{1}{\lambda_3 \sum_{i=1}^{N} n_i} \sum_{i=1}^{N} n_i (x_j x_l)_i \bar{y}_i \quad ,$$

$$b_{jj} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} n_i} \left(c \sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji}^2 \bar{y}_i - d \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji}^2 \bar{y}_i - q \sum_{i=1}^{N} n_i \bar{y}_i \right)$$

Оценки коэффициентов определяются с дисперсиями и ковариациями:

$$S_{b_0}^2 = \frac{a}{N} S_y^2 \quad , \qquad S_{b_j}^2 = \frac{1}{\lambda_2 N} S_y^2 \quad ,$$

$$S_{b_{jl}}^2 = \frac{1}{\lambda_3 N} S_y^2 \quad , \quad S_{b_{jj}}^2 = \frac{c-d}{N} S_y^2 \quad , \tag{1.17}$$

$$cov\, b_0 b_{jj} = -\frac{q}{N} S_y^2 \quad , \quad cov\, b_{jj} b_{ll} = -\frac{d}{N} S_y^2 \quad .$$

В формулах (1.17) в случае дублирования нужно делить не на N , а на $\sum_{i=1}^{N} n_i$.

2. КОМПОЗИЦИОННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В ортогональных планах второго порядка все вектор-столбцы должны быть ортогональны между собой. Это упрощает вычислительные процедуры и, главное, дает возможность оценивать коэффициенты регрессии независимо друг от друга. В ортогональных планах скалярные произведения всех вектор-столбцов факторов равны нулю. Следовательно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности вектор-столбцов x_{oi} и x_{ji}^2 , а также x_{ji}^2 и x_{li}^2 при $j \neq l$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{oi} x_{ji}^2 = 0 \quad и \quad \sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 x_{li}^2 = 0 \; .$$

Для этого вначале преобразуем модель (1.3) к виду

$$y = (b_0 + \lambda_2 \sum_{j=1}^{K} b_{jj}) + \sum_{j=1}^{K} b_j x_j + \sum_{1 \le j < l}^{K} b_{jl} x_j x_l + \sum_{j=1}^{K} b_{jj} (x_j^2 - \lambda_2), \tag{2.1}$$

где $\lambda_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2$ есть средний квадрат значений любого фактора.

Обозначим $x_j^2 - \lambda_2 = x_j'$, а новый свободный член $b_0 + \lambda_2 \sum_{j=1}^{K} b_{jj} = b_0'$.

Тогда модель (I.16) примет вид

$$y = b_0' + \sum_{j=1}^{K} b_j x_j + \sum_{1 \le j < l}^{K} b_{jl} x_j x_l + \sum_{j=1}^{K} b_{jj} x_j' . \qquad (2.2)$$

В ортогональных планах информационная матрица M имеет диагональный вид. Для этого необходимо принять

$$\lambda_3 = \lambda_2^2 , \qquad (2.3)$$

что и является условием ортогональности.

Перепишем (2.3) в соответствии с (I.10):

$$N \sum_{i=1}^{N} (x_j^2 x_l^2)_i = (\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2)^2 . \qquad (2.4)$$

Из рассмотрения матрицы условий (I.8) видно, что

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = 2^K + 2\alpha^2 , \qquad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^{N} (x_j^2 x_l^2)_i = 2^K .$$

Подставляя (I.7) и (I.22) в (2.6), получим

$$(2^K + 2K + n_0) 2^K = (2^K + 2\alpha^2)^2 .$$

Отсюда

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{(2^K + 2K + n_0) 2^K} - 2^K}{2} . \qquad (2.7)$$

В таблице 2.I представлены значения α^2 для планов с разными K и n_0 .

Таблица 2.I

Значения α^2

K			n_0
2	3	4	
1,000	1,477	2,000	1
1,160	1,650	2,164	2
1,317	1,831	2,390	3
1,475	2,000	2,580	4
1,606	2,164	2,770	5
1,742	2,325	2,950	6

Так как не накладывается ограничений на число опытов n_0 то можно принять n_0 = I. В качестве примера ниже приведена матрица планирования ортогонального композиционного плана для K = 3 (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Матрица планирования ортогонального плана

<table>
<tr><th rowspan="2">этап плана</th><th rowspan="2">i</th><th colspan="10">j</th><th rowspan="2">y_i</th></tr>
<tr><th>X_0</th><th>X_1</th><th>X_2</th><th>X_3</th><th>X_1'</th><th>X_2'</th><th>X_3'</th><th>X_1X_2</th><th>X_1X_3</th><th>X_2X_3</th></tr>
<tr><td rowspan="8">ПФЭ 2^k ($k=3$)</td><td>1</td><td rowspan="8">1</td><td colspan="3" rowspan="8">±1</td><td colspan="3" rowspan="8">0,2697</td><td colspan="3" rowspan="8">±1</td><td>y_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>y_2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>y_3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>y_4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>y_5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>y_6</td></tr>
<tr><td>7</td><td>y_7</td></tr>
<tr><td>8</td><td>y_8</td></tr>
<tr><td rowspan="6">n_α опыты в звездных точках</td><td>9</td><td rowspan="6">1</td><td rowspan="2">±1,2154</td><td colspan="2" rowspan="2">0</td><td rowspan="2">0,7467</td><td rowspan="2">-0,7303</td><td rowspan="4">-0,7303</td><td colspan="3" rowspan="6">0</td><td>y_9</td></tr>
<tr><td>10</td><td>y_{10}</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="2">±1,2154</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="4">-0,7303</td><td rowspan="2">0,7467</td><td>y_{11}</td></tr>
<tr><td>12</td><td>y_{12}</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">±1,2154</td><td rowspan="2">-0,7303</td><td rowspan="2">0,7467</td><td>y_{13}</td></tr>
<tr><td>14</td><td>y_{14}</td></tr>
<tr><td>n_0</td><td>15</td><td>1</td><td colspan="3">0</td><td>-0,7303</td><td>-0,7303</td><td>-0,7303</td><td colspan="3">0</td><td>y_{15}</td></tr>
</table>

В этой матрице значения преобразованной переменной определяется по формуле

$$x_j' = x_j^2 - \sqrt{\frac{2^K}{N}} = x_j^2 - 0{,}7303.$$

Оценки коэффициентов модели (2.2) определяются независимо друг от друга по формулам

$$b_0' = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} y_i \ , \qquad b_j = \Big(\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i \ ,$$

$$b_{jl} = \Big[\sum_{i=1}^{N}(x_j x_l)_i^2\Big]^{-1}\sum_{i=1}^{N}(x_j x_l)_i y_i \ , \tag{2.8}$$

$$b_{jj} = \Big(\sum_{i=1}^{N}(x_{ji}')^2\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}' y_i \ .$$

В случае дублирования оценки коэффициентов будут

$$b_0' = \Big(\sum_{i=1}^{N} n_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{N} n_i \bar{y}_i \ , \qquad b_j = \Big(\sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji}^2\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji} \bar{y}_i \ ,$$

$$b_{jl} = \Big[\sum_{i=1}^{N} n_i (x_j x_l)_i^2\Big]^{-1}\sum_{i=1}^{N} n_i (x_j x_l)_i \bar{y}_i \ ,$$

$$b_{jj} = \Big[\sum_{i=1}^{N} n_i (x_{ji}')^2\Big]^{-1}\sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji}' \bar{y}_i \ .$$

Дисперсии оценок коэффициентов находятся по формулам

$$S_{b_0'}^2 = N^{-1} S_y^2 \ , \qquad S_{b_j}^2 = \Big(\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2\Big)^{-1} S_y^2 \ ,$$

$$S_{b_{jl}}^2 = \Big[\sum_{i=1}^{N}(x_j x_l)_i^2\Big]^{-1} S_y^2 \ , \quad S_{b_{jj}}^2 = \Big[\sum_{i=1}^{N}(x_{ji}')^2\Big]^{-1} S_y^2 \ . \tag{2.9}$$

При дублировании опытов знаменатели формул (2.9) совпадают со знаменателями коэффициентов.

Значимость коэффициентов модели определяется обычным способом.

При переходе к уравнению (I.I8) значение b_0 рассчитывают по формуле

$$b_0 = b_0' - \lambda_2 \sum_{j=1}^{K} b_{jj} \ , \tag{2.I0}$$

а дисперсия $S_{b_0}^2$ определяется по закону накопления ошибок:

$$S_{b_0}^2 = S_{b_0'}^2 + \lambda_2^2 \sum_{j=1}^{K} S_{b_{jj}}^2 \ . \tag{2.II}$$

2.1. Исследование влияния среды и степени предварительной деформации на критерий механики разрушения K_c

Многие детали и элементы конструкции в авиации и космической технике получают с помощью холодной штамповки.

Для исследования влияния степени деформирования и среды эксплуатации на характеристики трещиностойкости новых легких сплавов 01420, 01421 и 01983 были проведены эксперименты* с использованием композиционных ортогональных планов. Выбранные факторы и их уровни указаны в таблице 2.3 для сплава 01420.

Таблица 2.3

Характеристики факторов

Наименование фактора	Обозначение	Размерн.	Точн.	Уровни факторов				
				-1,215	-1	0	+1	+1,215
X_1 - давление	P	Па	30%	$1{,}33\cdot10^3$	$6{,}6\cdot10^3$	11,6	$2\cdot10^4$	$1{,}01\cdot10^5$
X_2 - температура	T	K	± 2K	233	301,9	343	383,1	393
X_3 - степень предварит. деформации			±0,4%	2	2,5	5	7,5	8

Матрица планирования представлена в таблице 2.2.

Для такого плана число экспериментов $N = 2^K + 2K + n_0$, и при $K=3$ $N = 15$, если в центре плана $n_0 = 1$.

Согласно /9/ K_c определяется по формуле

$$K_c = \frac{P_c}{t\sqrt{b}} Y_1, \qquad (2.12)$$

где P_c - критическое значение силы в момент страгивания трещины; t, b - толщина и ширина образца соответственно; Y_1 - поправочная функция. Ее значения даны в /9/.

Для определения P_c плоские образцы с боковой трещиной испытывались на трехточечный изгиб с помощью промышленной установки ИМАШ-20-75.

При проведении эксперимента автоматически строилась диаграмма зависимости нагрузки (силы P) от прогиба образца v.

---
* Эксперименты и обработка результатов проведены инженером Б.В.Курилкиным.

По этому графику в зависимости от типа диаграммы $P-V$ определялась величина P_c и по формуле (2.I2) оценка K_c.

Согласно матрицы планирования (табл. 2.2) прежде был реализован план 2^3 с целью получения линейной модели

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{K} b_j x_j .$$

После обработки результатов эксперимента были получены следующие оценки коэффициентов:

$b_0 = 69,I7$ $\quad b_1 = -3,025$ $\quad b_2 = -9,I43$

$b_3 = 0,555$ $\quad b_{12} = -0,565$ $\quad b_{13} = -I,593$

$b_{23} = -I,598$ $\quad b_{123} = -I,22I$

Статистически незначимыми оказались коэффициенты b_3, b_{12} и b_{123}. Была проверена гипотеза об адекватности линейной части модели

$$y = 69,17 - 3,025 x_1 - 9,143 x_2 \qquad (2.I3)$$

Модель оказалась неадекватной. На нелинейность модели также косвенно указывает величина коэффициентов b_{13} и b_{23}. Поэтому дополнительно были проведены опыты в звездных точках (опыты 9...I4) и в центре плана (n_0 =4).

Обработка результатов эксперимента проводилась по формулам (2.8)...(2.II), и были получены следующие оценки коэффициентов:

$b_0 = 69,32$ $\quad b_1 = -2,742$ $\quad b_2 = -I0,06$ $\quad b_3 = I,05I$

$b_{12} = -0,475$ $\quad b_{13} = -I,59$ $\quad b_{23} = -I,49$ $\quad b_{11} = 3,679$

$b_{22} = -6,442$ $\quad b_{33} = 3,523$

Статистически незначимы оказались опять-таки коэффициенты b_3 и b_{12}.

Окончательно нелинейная модель имеет вид

$$y = \; = 69,32 - 2,742 x_1 - 10,06 x_2 - 1,5 x_1 x_3 - 1,49 x_2 x_3 + \\ + 3,68 x_1^2 - 6,44 x_2^2 + 3,52 x_3^2 . \qquad (2.I4)$$

Из рассмотрения эмпирических моделей (2.I3) и (2.I4) видно, что более информативно влияние степени предварительной деформации, вакуума и температуры описывается моделями второго порядка.

3. КОМПОЗИЦИОННЫЕ РОТОТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рототабельные планы инвариантны к ортогональному вращению координат, т.е. полученные результаты имеют одинаковую точность во всех направлениях на равных расстояниях от центра плана. В этом случае дисперсия отклика зависит только от радиуса сферы с центром в центре плана:

$$S_y^2 = A + B\cdot r^2 + C\cdot r^4 , \tag{3.1}$$

где

$$r^2 = \sum_{j=1}^{K} x_j^2 \quad \text{и} \quad r^4 = \sum_{j=1}^{K} x_j^4 + 2\sum_{1\le j<\ell}^{K} x_j^2 x_\ell^2 . \tag{3.2}$$

Для рототабельного плана должно выполняться следующее соотношение:

$$2S_{b_{jj}}^2 = S_{b_{j\ell}} + 2\operatorname{cov} b_{jj}\, b_{\ell\ell} \tag{3.3}$$

или

$$\lambda_4 = 3\lambda_3 \tag{3.4}$$

Это и есть условие рототабельности плана. Перепишем его в соответствии с (I.10):

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^4 = 3\sum_{i=1}^{N} (x_j^2 x_\ell^2)_i . \tag{3.5}$$

Из матрицы (I.8) видно, что

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^4 = N + 2\alpha^4 , \quad \sum_{i=1}^{N} (x_j^2 x_\ell^2)_i = 2^K . \tag{3.6}$$

Подставив (3.6) в (3.5), получим величину звездного плеча

$$\alpha = \sqrt[4]{2^K} . \tag{3.7}$$

Число опытов в центре рототабельного плана определяется безразмерным моментом λ_3^* :

$$\lambda_3^* = \frac{\lambda_3}{\lambda_2^2} . \tag{3.8}$$

Используя (I.10), (2.5) и (3.7), получим число опытов в центре плана:

$$n_0 = \lambda_3^* (2^K + 4\sqrt{2^K} + 4) - 2^K - 2K . \tag{3.9}$$

Величина λ_3^* влияет на критерий оптимальности плана. В зависимости от значения λ_3^* план эксперимента можно сделать почти ортогональным или униформным (дисперсия предсказания примерно одинакова во всех точках шара с центром в центре плана и радиусом $r = \sqrt{\lambda_2}$).

Для обеспечения униформности величину λ_3^* необходимо брать в виде положительного корня уравнения

$$\lambda_3^{*2}(2k+4) - \lambda_3^*(k+3) - (k-1) = 0 \quad , \qquad (3.10)$$

а число опытов в центре плана n_0 должно соответствовать этому значению λ_3^* .

Для ротатабельных планов условием ортогональности является (2.3), т.е. $\lambda_3^* = 1$.

Тогда число опытов в центре плана будет

$$n_0 = 4\sqrt{2^k} - 2k + 4. \qquad (3.11)$$

Определение числа опытов в центре плана по формулам (3.9) и (3.11) может дать дробное значение n_0 . В этом случае округление до ближайшего целого числа несколько нарушает условия униформности или ортогональности.

Характеристики наиболее распространенных симметричных ротатабельных композиционных планов приведены в /5/.

Расчет коэффициентов и оценки их дисперсий проводят по тем же формулам (2.8)...(2.11), что и для ортогональных планов. Кроме того, в работах /1,5/ приведены вспомогательные таблицы и формулы для расчета коэффициентов моделей и их дисперсий.

Число степеней свободы дисперсии адекватности определяется по формуле

$$f_{ag} = N - \frac{(k+2)(k+1)}{2} - (n_0 - 1). \qquad (3.12)$$

Тогда дисперсия адекватности равна

$$S_{ag}^2 = \frac{SS_{общ} - SS_0}{f_{ag}} \quad , \qquad (3.13)$$

где $SS_{общ} = \sum_{i=1}^{N} (\bar{y}_{gi} - \hat{y}_i)^2$ - общая остаточная сумма квадратов, а $SS_0 = \sum_{q=1}^{n_0} (y_{0q} - \bar{y}_0)^2$ - остаточная сумма квадратов в центре плана.

В этом случае погрешность опыта можно определить по экспериментам в центре плана

$$S_0^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{q=1}^{n_0} (y_{0q} - \bar{y}_0)^2, \qquad (3.14)$$

а адекватность модели-по критерию Фишера

$$F = \frac{S_{ag}^2}{S_0^2}. \qquad (3.15)$$

При использовании любых неортогональных планов после определении значимости коэффициентов исключать из модели без пересчета остальных можно только статистически незначимые оценки b_j и b_{jl}. Исключение любого из коэффициентов b_0, b_{jj} требует пересчета остальных в данной группе.

4. ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКИЕ К D -ОПТИМАЛЬНЫМ

В теории эксперимента рассматриваются различные критерии оптимальности, которые определяются главным образом строением и свойствами информационной матрицы $M=\frac{1}{N}(X^TX)$ или M^{-1}. Одним из наиболее сильных критериев является критерий D -оптимальности. D -оптимальными являются планы, имеющие максимальное значение определителя матрицы M или минимальное - матрицы M^{-1}. Для таких планов Кифером /10/ было введено понятие непрерывного плана. В этом случае рассматривается некоторая непрерывная функция, определяющая частоту наблюдений в точках плана между нулем и единицей. По сути дела непрерывный план определяет непрерывное распределение "экспериментальных усилий", принимаемых за единицу, по исследуемой области факторного пространства. Однако при некоторых ограничениях почти всегда можно составить непрерывные D -оптимальные планы с конечным числом точек, но приходится назначать очень большое число опытов. Для построения планов с разумным числом опытов были решены задачи аппроксимации непрерывных D -оптимальных планов планами, содержащими приемлемое число опытов и в то же время незначительно отличающимися от непрерывных планов по D -оптимальности.

4.1. Композиционные планы второго порядка типа B_k

Анализ непрерывных симметричных планов второго порядка показал, что максимальное значение определителя матрицы M достигается в том случае, когда моменты плана соответственно равны:

$$\lambda_2=\frac{k+3}{(k+1)(k+2)}\left[1+(k-1)\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right] \quad при \quad k=1 \qquad (4.1)$$

$$\lambda_3=\frac{2k+1+\sqrt[4]{4k^2+12k+17}}{4(k+2)}\lambda_2, \quad k>1 \qquad (4.2)$$

$$\lambda_4=\lambda_2 \qquad (4.3)$$

Последнее условие выполняется тогда, когда план содержит только точки с координатами 0 и $\pm$ I.

Так были составлены симметричные композиционные планы типа B_K , состоящие из ядра и звездных точек с $\alpha = \pm$ I,0 и не содержащие опытов в центре плана. Характеристики таких планов приведены в таблице 4.I.

Таблица 4.I

Композиционные планы типа B_K

№ плана	K	Ядро плана	N_1	2K	N	$\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$	
						B_K	D-опт.
1	2	2^2	4	4	8	1,48	1,45
2	3	2^3	8	6	14	1,47	1,45
3	4	2^4	16	8	24	1,48	1,43
4	5	2^5	32	10	42	1,48	1,40
5	5	2^{5-1} $1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$	16	10	26	1,51	1,40
6	6	2^6	64	12	76	1,53	1,38
7	6	2^{6-1} $1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$	32	12	44	1,48	1,38

Из таблицы 4.I видно, что планы B_K мало отличаются от идеальных D -оптимальных ($\lvert\tilde{M}^{-1}\rvert$ - приведенный определитель).

После реализации плана типа B_K расчет коэффициентов модели

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{K} b_j x_j + \sum_{1 \le j < l} b_{jl} x_j x_l + \sum_{j=1}^{K} b_{jj} x_j^2 \qquad (4.4)$$

проводят по формулам

$$b_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} n_i} \left(a \sum_{i=1}^{N} n_i \bar{y}_i - q \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji}^2 \bar{y}_i \right),$$

$$b_j = \left(\lambda_2 \sum_{i=1}^{N} n_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji} y_i , \qquad (4.5)$$

$$b_{jl} = \left(\lambda_3 \sum_{i=1}^{N} n_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} n_i (x_j x_l)_i y_i ,$$

$$b_{jj} = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right)^{-1} \left[c \sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji}^2 \bar{y}_i - d \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} n_i x_{ji} y_i - q \sum_{i=1}^{N} n_i \bar{y}_i \right],$$

а расчет дисперсий коэффициентов и их ковариаций - по формулам

$$S^2_{b_0}=\frac{a}{\sum\limits_{i=1}^{N}n_i}S_y^2\ , \quad S^2_{b_j}=(\lambda_2\sum_{i=1}^{N}n_i)^{-1}S_y^2\ ,$$

$$S^2_{b_{jl}}=(\lambda_3\sum_{i=1}^{N}n_i)^{-1}S_y^2\ , \quad S^2_{b_{jj}}=(\sum_{i=1}^{N}n_i)^{-1}[(c-d)S_y^2]\ , \qquad (4.6)$$

$$cov\, b_0 b_{jj}=-q(\sum_{i=1}^{N}n_i)^{-1}S_y^2\ , \quad cov\, b_{jj}b_{ll}=-d(\sum_{i=1}^{N}n_i)^{-1}S_y^2\ ,$$

где

$$a=\frac{k\lambda_2^2}{\lambda_4-\lambda_3+k\lambda_3-k\lambda_2^2}+1\ ,$$

$$q=\frac{\lambda_2}{\lambda_4-\lambda_3+k\lambda_3-k\lambda_2^2}\ , \qquad (4.7)$$

$$c=\frac{1}{\lambda_4-\lambda_3}\ ,$$

$$d=\frac{\lambda_3-\lambda_2^2}{(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3+k\lambda_3-k\lambda_2^2)}$$

Проверку правильности вычислений величин a , q , c , d можно проводить по формулам

$$a-qk\lambda_2=1\ ,$$

$$q+(dk-c)\lambda_2=0\ , \qquad (4.8)$$

$$q\lambda_2+[d(k-1)-c]\lambda_3+d\lambda_4=0\ .$$

Планы B_k неортогональны, и для оценок b_0 и b_{jj} ковариации $cov\, b_0 b_{jj}$ и $cov\, b_{jj} b_{ll}$ не равны нулю. Поэтому после проверки статистической значимости этих коэффициентов исключение незначимых коэффициентов требует пересчета b_0 , b_{jj}, их дисперсий и ковариаций. Статистически незначимые коэффициенты b_j и b_{jl} можно исключать из модели без пересчета остальных.

Проверку адекватности модели проводят по методике, описанной в /6/ (раздел 6.2.3), т.е. обычным порядком.

4.2. Использование плана типа B_K для оценки влияния внешних факторов на критерий K_c углепластика КМУ-4

Согласно методическим рекомендациям /7/ критерии трещиностойкости композитов аналогичны критериям обычных конструкционных материалов.

Анализ экспериментальных данных по определению характеристик вязкости разрушения углепластиков показывает на нелинейную зависимость критерия K_{Ic} от условий эксплуатации.

Использование композиционных ортогональных и рототабельных планов невыгодно из-за большого числа опытов, а также трудно технически реализовать опыт в звездных точках ($\alpha = \pm 2$). В связи с этим предлагается в исследованиях вязкости разрушения углепластиков использовать планы типа B_K. Эти планы мало отличаются от идеальных D -оптимальных, технически более сбалансированы ($\alpha = \pm 1$) и требуют меньшего числа опытов по сравнению с другими композиционными планами (ортогональными, рототабельными и т.д.).

Для углепластика КМУ-4 исследовалось влияние геометрии образца, вакуума и температуры на величину коэффициента интенсивности напряжений K_{Ic} *.

Композит КМУ-4 представляет собой слоистый углепластик со схемой укладки пакета $(0^{\circ}-90^{\circ})\, n$. Образцы (рис. 4.I) изготавливались толщиной 5 и II мм при ширине I2 и 20 мм с трещиной в виде пропила.

Образец для испытания на изгиб

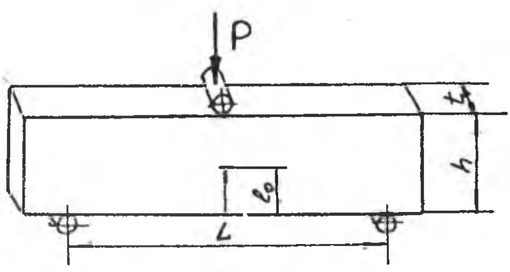

Рис. 4.I

Исследования проводились на промышленной установке ИМАШ-20-75. При нагружении образца автоматически строился график зависимости прогиба образца от нагрузки. По этому графику согласно /7/

* Исследования проводились в НТЦ "Наука" СГАУ.

определяется критическая нагрузка, а по ее величине K_{IC} по формуле

$$K_{IC}=\frac{3P_c L}{2th^2}\sqrt{\ell_o}\,Y(\lambda) , \qquad (4.9)$$

где P_c – критическая нагрузка, ℓ_o – длина трещины, L – длина образца, $Y(\lambda)$ –тарировочная функция (ее значения в /7/).

Уровни факторов и их кодировка приведены в таблице 4.2

Таблица 4.2

Уровни и кодировка факторов

Уровни	Факторы				
	Толщина образца t мм	Ширина образца h мм	Относит. длина трещины	Вакуум $\lg P$ Па	Температ. К
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Основной уровень X_{io}	8	I6	0,35	I,04	333
Интервал варьиров. ΔX_i	3	4	0,I0	–3,96	40
Верхний уровень +I	II	20	0,45	–2,92	373
Нижний уровень –I	5	I2	0,25	5,0	293

Вначале был проведен дробный факторный эксперимент ДФЭ 2^{5-I} с определяющим контрастом $1 \equiv X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$, состоящий из I6 опытов. Матрица планирования этого эксперимента указана в таблице 4.3 (опыты I...I6).

После обработки результатов были получены следующие коэффициенты модели:

b_0 = 57,I5 b_1 = –4,628 b_2 = 2,247 b_3 = –I,928
b_4 = I,670 b_5 = –4,406 b_{13} = 2,054 b_{15} = 4,228
b_{23} = 2,I8I b_{25} = 2,50 b_{34} = –0,9I5 b_{45} = –2,470

Незначимыми оказались коэффициенты b_{12}, b_{14}, b_{24} и b_{35}.

Линейная модель

$$y = 57{,}15 - 4{,}628x_1 + 2{,}247x_2 - 1{,}928x_3 + 1{,}67x_4 - 4{,}406x_5 \qquad (4.10)$$

оказалась неадекватной. Кроме того, некоторые коэффициенты при парных взаимодействиях оказались значительно больше, чем коэффициенты при линейных эффектах. Например, b_{15} больше b_3 и b_4. Это косвенно указывает на нелинейную зависимость.

Поэтому было принято решение, используя план типа B_5, получить модель второго порядка.

Так как уже было выполнено ядро плана (ДФЭ 2^{5-I}), то оставалось реализовать опыты в звездных точках. Они указаны в таблице 4.3 (опыты I7...26).

После обработки результатов по программе EXP (см. раздел 5) были получены следующие оценки коэффициентов модели:

$b_0 = 30,20$	$b_1 = -4,6I3$	$b_2 = 2,324$	$b_3 = -I,803$
$b_4 = I,462$	$b_5 = 4,3II$	$b_{13} = 2,088$	$b_{15} = 4,I7I$
$b_{23} = 2,2I5$	$b_{25} = 2,443$	$b_{34} = -0,824$	$b_{45} = -2,254$
$b_{11} = 8,542$	$b_{22} = -I,8I6$	$b_{33} = II,7$	$b_{44} = 3,I29$
$b_{55} = 6,286$			

Как и в случае ДФЭ 2^{5-I}, статистически незначимыми оказались коэффициенты b_{12}, b_{14}, b_{24} и b_{35}. Кроме того, как и в первом случае оценка коэффициента b_{34} оказалась наименьшей.

Окончательно модель второго порядка имеет вид (модель адекватна)

$$y = 30,2 - 4,613x_1 + 2,324x_2 - 1,803x_3 + 1,464x_4 + 4,311x_5 + 2,088x_1x_3 + 4,171x_1x_5 + 2,215x_2x_3 + 2,443x_2x_5 - 0,824x_3x_4 - 2,254x_4x_5 + 8,542x_1^2 - 1,816x_2^2 + 11,7x_3^2 + 3,129x_4^2 + 6,286x_5^2 \qquad (4.II)$$

Как видно из (4.II), влияние квадратичных членов на величину коэффициента интенсивности напряжений значительно. Наибольшее влияние оказывает относительная длина трещины и толщина образца. Поэтому нельзя утверждать, что полученная эмпирическая модель является зависимостью для критического значения коэффициента интенсивности напряжений K_{IC}. Очевидно, механизм разрушения композитов гораздо сложнее, чем металлических сплавов, и формула (4.9) дает лишь приближенную оценку K_c.

Таблица 4.3

КОМПОЗИЦИОННЫЙ ПЛАН ТИПА

N экспер	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_1X_5	X_2X_3	X_2X_4	X_2X_5	X_3X_4	X_3X_5	X_4X_5	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	$\bar{Y}_i$	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1																						58,1	
2																						70,37	
3																						52,67	Ядро
4																						42,58	плана
5																						54,42	ДФЭ
6																						58,68	2^{5-1}
7	1	±1					±1										1					48,40	с
8																						82,56	$1 \equiv X_1X_2X_3X_4X_5$
9																						53,05	
10																						57,76	
11																						47,45	
12																						60,43	
13																						55,42	
14																						66,80	
15																						50,08	
16																						53,55	

Продолжение таблицы 4.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
17		+1															+1					33,60	
18		−1			0												+1					43,49	
19			+1															+1		0		30,67	
20			−1															+1				25,71	
21				+1							0								+1			39,24	Звездные
22				−1															+1			44,20	точки
23			0		+1															+1		34,67	
24					−1													0		+1		31,60	
25						+1															+1	31,72	
26						−1															+1	40,85	

5. ПРОГРАММА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

5.I. Общая характеристика программного обеспечения

Программное обеспечение предназначено для обработки и анализа результатов с целью получения моделей второго порядка. При этом применен модульный принцип. Каждый блок выполняется в отдельной подпрограмме.

Программное обеспечение содержит головную программу EXP и подпрограммы *KOP* , *STAT* , *COFF* , *MOD* .

Блок-схема программы EXP приведена на рис. 5.I.

С помощью этой программы можно обрабатывать результаты экспериментов при использовании ортогональных и ротатабельных центральных композиционных планов (ОЦКП и РЦКП), а также планов типа B_K .

Язык программирования-ФОРТРАН-4. Программа реализована в системе *EC DOS* и не использует никаких специализированных библиотек в составе операционной системы.

Головная программа EXP осуществляет следующие операции: описание входящих в программу переменных, массивов и целых, открытие входного и выходного потоков информации (файлы для чтения *motr* , *KOK* ; файлы для записи результатов *rez* , необходимых для отладки).

Затем следует оператор считывания информации, позволяющий выбрать вид плана эксперимента и его характеристик. Характеристики плана записываются в файл результатов. После этого следует вызов подпрограмм *KOP* , *STAT* , *COFF* , *MOD* .

В подпрограмме *KOP* производится расчет числа опытов и величины звездного плеча для конкретного плана и ввода данных.

Статистическая обработка результатов производится подпрограммой *STAT* . Вначале считывается двумерный массив Y - значений результатов эксперимента из *KOK* , определяется среднее и дисперсия в каждой строке матрицы планирования. В следующей части подпрограммы производится отбраковка "грубых" значений по критерию Романовского. Значения забракованных Y_i вносятся в файл результатов. Затем проводится проверка однородности дисперсий с помощью критерия Кохрена СХТ и расчет дисперсии воспроизводимости.

Блок-схема EXP

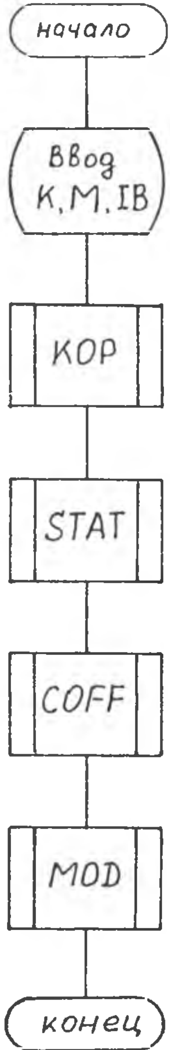

Рис. 5.I

Подпрограмма $COFF$ производит расчет оценок коэффициентов модели и проверку их значимости.

Расчет оценок коэффициентов модели для планов, рассмотренных в разделах 2,3,4, имеет свои особенности. Поэтому на основании зависимостей (2.8), (2.9), (4.5) и (4.6) предлагаются формулы, позволяющие получать оценки коэффициентов для ОЦКП, РЦКП и планов типа B_K . Вычисления по этим формулам упрощаются благодаря введению заранее подсчитанных констант. Оценки коэффициентов модели и их дисперсии определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
& b_0 = c_1 \sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i - c_2 \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} (x_{ji}^2 - c_3) \bar{y}_i , \\
& b_j = c_4 \sum_{i=1}^{N} x_{ji} \bar{y}_i , \\
& b_{jl} = c_5 \sum_{i=1}^{N} (x_j x_l)_i \bar{y}_i , \\
& b_{jj} = c_6 \sum_{i=1}^{N} (x_{ji}^2 - c_3) \bar{y}_i - c_7 \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 \bar{y}_i - c_8 \sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i ,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

и

$$
\begin{aligned}
& S_{b_0}^2 = c_1 S_y^2 + c_3^2 c_6 K S_y^2 , \qquad S_{b_j}^2 = c_4 S_y^2 , \\
& S_{b_{jl}}^2 = c_5 S_y^2 , \qquad S_{b_{jj}}^2 = (c_6 + c_7) S_y^2 ,
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

где i = I,2... N ; j = I,2... K , а c_1, $c_2 \dots c_8$ - вспомогательные константы.

Соответствие этих констант константам, приведенным в /I/, сведены в таблице 5.I.

В начале подпрограммы происходит считывание двумерного массива XY из $matz$, величины критерия Стьюдента CT и констант c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 , c_6 , c_7 , c_8 .

Перед циклом вычисления оценок коэффициентов модели установлен оператор, производящий пересылку на нужную часть программы в случае пересчета коэффициентов. Этот оператор использует целочисленную переменную L , принимающую значения 0,I,2 (0 - первоначальный расчет коэффициентов или для ОЦКП; I - соответствие РЦКП или B_K и коэффициент b_0 равен нулю - необходим пересчет только b_{jj} ; 2 - соответствие РЦКП или B_K

Таблица 5.1

Константы для расчета оценок коэффициентов

Константы в программе	Константы в работе /1/		
	ОЦКП	РЦКП	B_k
C_1	a_1	c_1	c_1
C_2	$\frac{a_1}{a_2}a_4$	c_2	c_2
C_3	$\frac{a_1}{a_2}$	0	0
C_4	a_2	c_3	c_3
C_5	a_3	c_4	c_4
C_6	a_4	c_5	c_5
C_7	0	c_6	c_6
C_8	0	c_2	c_2

и необходим пересчет коэффициентов b_0 и b_{jj}. После расчета оценок коэффициентов модели определяются доверительные интервалы и проводится проверка значимости коэффициентов с обнулением незначимых коэффициентов. При этом оценки коэффициентов записываются в файле результатов до и после проверки их значимости.

Подпрограмма *MOD* является завершающей. В ней проводится проверка адекватности эмпирической модели после ее построения с использованием критерия Фишера *FT* и его расчетного значения *FR*. В файл результатов кроме вывода об адекватности записываются предсказанные значения функции отклика *YPR(I)*, число степеней свободы и критерии *FT* и *FR*.

5.1.1. Учитываемые ограничения. Программа рассчитана на обработку эксперимента, который содержит не более семи факторов ($K \leq 7$) и число дублированных опытов не более пяти ($n_i \leq 5$) при использовании ОЦКП, РЦКП и планов типа B_K.

5.2. Описание программных единиц

Описание программных единиц и список идентификаторов даются в таблицах 5.2 и 5.3 соответственно.

Текст программы EXP и всех подпрограмм приведены в Приложении. Там же для плана B_5 даются результаты обработки данных, полученных при проведении эксперимента по исследованию влияния внешних факторов на критерий K_{Ic} углепластика КМУ-4 (см. раздел 4).

Таблица 5.2

Описание программных единиц

№№ пп	Назв. назнач.	Тип	Входн. парам.		Выходн. парам.		Вызываем. подпрогр.
			Наимен.	Тип	Наимен.	Тип	
I	2	3	4	5	6	7	8
I	EXP - Головная программа	программа	K M IB	INTEGER " "	—	—	KOP STAT COFF MOD
2	KOP - число опытов и α	подпрогр.	K IB	INTEGER "	N ALFA	INTEGER REAL	—
3	STAT - Стат. обработка	подпрогр.	N M Y(IJ) TTAB CXT	INTEGER " REAL " "	YSR(I) DY	REAL REAL	—
4	COFF - Вычисление оценок коэфф. и проверка их значимости	подпрогр.	IB K N M YSR(I) XY(I,KU) DY	INTEGER " " " REAL INTEGER REAL	BO BI(K) BIJ(K,K) BII(K,K)	REAL " " "	—
5	MOD - Проверка адекватности и модели	подпрогр.	K N M YX(I,KU) YSR(I) BO BI(K) BIJ(K,K) BII(K,K)	INTEGER " " " REAL " " " "	—	—	—

Таблица 5.3

Описание идентификаторов

N п/п	Идентификатор	Обозначен	Размерн	Тип	Примечание
1	2	3	4	5	6
1	K	K	–	INTEGER	Количество факторов
2	N	N	–		Кол. опытов в матрице плана
3	M	M	–		Кол. дублей в строке
4	IB	JB	–		Параметр типа плана
5	ALFA	α	–	REAL	Звездное плечо
6	NJ	N	–	INTEGER	Число опытов в ядре плана
7	Y(IJ)	y_{ij}	–	REAL	Значения результатов
8	I	i	–	INTEGER	Номер строки матрицы
9	J	J	–		Номер дубля
10	KU	k_u	–		Номер фактора
11	YSP(I)	$\bar{y}_i$	–	REAL	Среднее дублир. опытов
12	DY	S_y	–		Дисперсия воспроизводим.
13	OT(IJ)	$y_j - \bar{y}_i$	–		Отклонение от среднего
14	MAXOT(IJ)	–	–		Максим. отклонение
15	XY(I,KU)	$x_j \bar{y}_i$	–	INTEGER	Произв. кодир. фактора на $\bar{y}_i$
16	ST(I)	S_i	–	REAL	Средн. квадр. отклон. в стр. i
17	DISPY(I)	S_i^2	–	REAL	Дисперсия дублей
18	TEXP	$t_{эксп}$	–		Эксп. знач. крит. Стьюдента
19	TTAB	$t_т$	–		Табл. знач. крит. Стьюдента
20	CXT	$G_т$	–		Табл. критер. Кохрена
21	B0,BI,BIJ	$b_0, b_j \ldots$	–		Оценки коэффициенов
22	CT	t	–		Критерий Стьюдента
23	C1...C8	$C_1 \ldots C_8$	–		Вспомогательные константы
24	MKL(K)	$b_{ii}=0$	–	INTEGER	Параметр, если $b_{ii} = 0$
25	mm1	f_1	–		Число степеней свободы
26	mm2	f_2	–		— " —
27	L	L	–		Параметр для пересчета

Библиографический список

I. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях. М.: Статистика, 1974. 192 с.

2. Голикова Т.И., Микешина Н.Г. Свойства D - оптимальных планов и методы их построения// Новые идеи в планировании эксперимента. М.: Наука, 1969, с.21-58.

3. Новик Ф.С. Математические методы планирования эксперимента в металловедении. Раздел П. Планы второго порядка. М.: МИСиС, 1970. 79 с.

4. Андрукович П.Ф., Голикова Т.И., Костина С.Г. Планы второго порядка на гиперкубе, близкие к D - оптимальным// Новые идеи в планировании эксперимента. М.: Наука, 1969, с. 140-153.

5. Евдокимов Ю.А., Колесников В.И., Тетерин А.И. Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа. М.: Наука, 1980. 227 с.

6. Лавров Б.А. Планирование эксперимента при испытании элементов авиаконструкций: Учеб. пособие/ Куйбыш. авиац. ин-т. Куйбышев, 1988. 79 с.

7. Расчеты и испытания на прочность. Методы испытания композитов с полимерной матрицей. Методы определения характеристик трещиностойкости при статическом растяжении и изгибе: Метод. рекомендации МР-65-82; М.: изд. стандартов, 1982. 31 с.

8. Зайцев Г.П., Полилов А.Н. Методы оценки трещиностойкости волокнистых композитов с полимерной матрицей// Заводская лаборатория. 1984. Т.50. №II, с.60-66.

9. ГОСТ 25.506-85. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. М.: ГОССТАНДАРТ СССР, 1985. 61 с.

10. Kiefer Y. Optimum experimental designs // J. Royal Statist. Soc. 1959. v. B21. p. 272-319.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТЕКСТ ПРОГРАММ
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ДЛЯ ПЛАНА B_K

Программа EXP

```
C************************************************************
C       Программа EXP предназначена для проведения          *
C       эксперимента,его статистической обработки           *
C       и получения математической модели второго           *
C       порядка с помощью (ОЦКП,РЦКП,Вк планов)              *
C************************************************************
      DIMENSION Y(163,5),YSR(163),XY(163,8),BI(7),BII(7)
      DIMENSION BIJ(9,9)
      open (5,file='con')
      open (6,file='rez.exp')
      open (8,file='matr')
990   WRITE(5,5)
5     FORMAT(5X,'Введите колличество факторов K='/
     1       5X,'Введите колличество повторов M=')
      READ(5,*)K,M
      WRITE(5,6)
6     FORMAT(5X,'С каким планом вы желаете работать?'/
     1       5X,'с ОЦКП(IB=1),с РЦКП(IB=3),с Вк(IB=2)'/
     2       5X,'Введите параметр IB=')
      READ(5,*)IB
C************************************************************
C       Вызов подпрограммы расчета числа опытов             *
C************************************************************
      CALL KOP(K,N,ALFA,IB,NJ)
      IF(IB.LT.1.AND.IB.GT.3)GO TO 4
      IF(K.GT.7)GO TO 4
      IF(M.GT.5)GO TO 4
      GO TO 10
4     WRITE(5,9)
9     FORMAT(5X,'Ошибка ввода')
      GO TO 990
10    CONTINUE
      IF(IB-2)11,13,15
11    WRITE(6,12)
12    FORMAT(3X,'*** Для ОЦКП получены следующие результаты ***')
      GO TO 18
13    WRITE(6,14)
14    FORMAT(3X,'**** Для Вк получены следующие результаты ****')
      GO TO 18
15    WRITE(6,16)
16    FORMAT(3X,'*** Для РЦКП получены следующие результаты ***')
18    CONTINUE
      WRITE(6,20)K,N,M,ALFA
20    FORMAT(//5X,'Колличество факторов ................ K=',I2/
     1         5X,'Колличество экспериментов ........... N=',I3/
     2         5X,'Колличество повторов ................ M=',I2/
     3         5X,'Звездное плечо ................ ALFA=',E12.5)
C************************************************************
C      Вызов подпрограммы статистической обработки          *
C              результатов эксперманта                      *
C************************************************************
      CALL STAT(TTAB,CXT,N,M,Y,YSR,DY)
C************************************************************
C      Вызов подпрограммы расчета коэффициентов             *
C               уравнения регрессии                         *
C************************************************************
```

Продолжение

```
      CALL COFF(IB,K,N,M,YSR,XY,BO,BI,BIJ,BII,DY)
C**********************************************************
C      Вызов подпрограммы проверки адеватности          *
C             математической  модели                     *
C**********************************************************
      CALL MOD(K,N,M,YSR,XY,BO,BI,BIJ,BII,DY)
      STOP
      END
```

Подпрограмма KOP

```
C*********************************************************
c  Подпрограмма KOP предназначена для вычисления        *
c  колличества опытов N и звездного плеча ALFA          *
C*********************************************************
      SUBROUTINE KOP(K,N,ALFA,IB,NJ)
      IF(IB.EQ.1)GO TO 100
      IF(IB.EQ.2)GO TO 110
      IF(IB.LT.1.AND.IB.GT.3)GO TO 115
      IF(K.GT.7)GO TO 115
C*********************************************************
c       Табличные значения для РЦКП                      *
C*********************************************************
      IF(K.EQ.2)N=13
      IF(K.EQ.3)N=20
      IF(K.EQ.4)N=31
      IF(K.EQ.5)N=52
      IF(K.EQ.6)N=91
      IF(K.EQ.6)N=163
      ALFA=2.**(K/4.)
      GO TO 115
C*********************************************************
c      Табличные значения для ОЦКП                       *
C*********************************************************
100   N=2**K+2*K+1
      IF(K.EQ.2)NJ=4
      IF(K.EQ.3)NJ=8
      IF(K.EQ.4)NJ=16
      IF(K.EQ.5)NJ=16
      IF(K.EQ.6)NJ=32
      IF(K.EQ.7)NJ=64
      ALFA=SQRT((SQRT(1.*NJ*N)-NJ)/2.)
      GO TO 115
C*********************************************************
c     Табличные значения для планов типа Bk              *
C*********************************************************
110   IF(K.EQ.2)N=8
      IF(K.EQ.3)N=14
      IF(K.EQ.4)N=24
      IF(K.EQ.5)N=26
      IF(K.EQ.6)N=44
      IF(K.EQ.7)N=78
      ALFA=1.0
115   RETURN
      END
```

Подпрограмма STAT

```
C*****************************************************************
C    Подпрограмма STAT предназначенна для статисти-      *
C    ческой обработки результатов эксперимента           *
C*****************************************************************
      SUBROUTINE STAT(ttab,cxt,N,M,Y,YSR,DY)
      REAL TTAB,CXT,S,S1,SR,D,R,TEXP,SUMDY,A,CXR,DY
      DIMENSION Y(5,163),YSR(163),SUMY(163),OT(5,163),L(163)
      DIMENSION MAXOT(163),SUMY1(163),YSR1(163),ST(163),
     1          DISPY(163)
c       Вычисление среднего значения функции отклика
      OPEN (9,file='kok')
c     WRITE(5,30)
c30   FORMAT(5X,'Введите матрицу значений Y(I,J)=')
      READ(9,*)((Y(I,J),I=1,M),J=1,N)
      IF(M.EQ.1)GO TO 982
      mm1=M-2
      mm2=M-1
      WRITE(5,35)mm1
35    FORMAT(5X,'Введите табличное значение Критерия Стьюдента'/
     1       5X,'при(alfa=0.05 f1=',I2,')TTAB=')
      READ(5,*)TTAB
      WRITE(5,40)mm2,N
40    FORMAT(5X,'Введите табличное значение Критерия Кохрена'/
     1       5X,'при(alfa=0.05 f=',I2,'N=',I3,')CXT=')
      READ(5,*)CXT
982   CONTINUE
      WRITE(6,406)((Y(I,J),I=1,m),J=1,n)
406   FORMAT(//15X,'Результаты  эксперимента'//
     1         5(1PE12.5,3X))
      DO 408 I=1,N
      S=0.
      DO 407 J=1,M
      S=S+Y(J,I)
407   CONTINUE
      SUMY(I)=S
      YSR(I)=SUMY(I)/M
408   CONTINUE
      IF(M.EQ.1)GO TO 466
c       Вычисление дисперсий повторов
      DO 411 I=1,N
      D=0.
      DO 410 J=1,M
      D=D+(Y(J,I)-YSR(I))**2.
410   CONTINUE
      DISPY(I)=D/(M-1)
411   CONTINUE
c       Исключение грубых результатов с помощью критерия
c       Романовского
      DO 415 I=1,N
      DO 414 J=1,M
      OT(j,i)=ABS(Y(J,I)-YSR(I))
414   CONTINUE
415   CONTINUE
      DO 418 I=1,N
      L(I)=1
      MAXOT(I)=OT(1,I)
```

Продолжение

```
      DO 416 J=2,M
      IF(MAXOT(I).GT.OT(J,I))GO TO 416
      MAXOT(I)=OT(J,I)
      L(I)=J
416   CONTINUE
418   CONTINUE
      DO 422 I=1,N
      S1=0.
      DO 420 J=1,M
      IF(J.EQ.L(I))GO TO 420
      S1=S1+Y(J,I)
420   CONTINUE
      SUMY1(I)=S1
      YSR1(I)=SUMY1(I)/(M-1)
422   CONTINUE
      DO 426 I=1,N
      SR=0.
      DO 424 J=1,M
      IF(L(I).EQ.J)GO TO 424
      R=(Y(J,I)-YSR1(I))**2.
      SR=SR+R
424   CONTINUE
      ST(I)=SQRT(SR/(M-2))
426   CONTINUE
      WRITE(6,427)
427   FORMAT(//15X,'Значения забракованных опытов'/
     &          18X,'(исключенны из расчетов)')
      WRITE(6,428)
428   FORMAT(/5X,'номер',4X,'номер',4X,'Значение функции'/
     &         5X,'опыта',4X,'дубля',8X,'отклика')
      DO 432 I=1,N
      DO 430 J=1,M
      IF(J.NE.L(I))GO TO 430
      TEXP=ABS((Y(J,I)-YSR1(I))/ST(I))
      IF(TEXP.LT.TTAB)GO TO 432
      WRITE(6,429)I,J,Y(j,i)
429   FORMAT(6X,I3,6X,I2,9X,E12.5)
      YSR(I)=YSR1(I)
      DISPY(I)=ST(I)*ST(I)
      Y(J,I)=0.
      GO TO 432
430   CONTINUE
432   CONTINUE
      WRITE(6,434)
434   FORMAT(//15X,'Статистическая обработка результатов'/
     &          24X,'эксперимента'//
     &          5X,'номер',4X,'среднее значение',4x,'дисперсия'/
     &          5x,'опыта',5x,'функции отклика',5x,'повторов')
      DO 438 I=1,N
      WRITE(6,435)I,YSR(I),DISPY(I)
435   FORMAT(6X,I3,7X,E12.5,4X,E12.5)
438   CONTINUE
c       Проверка однозначности дисперсий с помощью
c       Критерия Кохрена
      S=0.
```

Продолжение

```
      DO 440 I=1,N
      S=S+DISPY(I)
440   CONTINUE
      SUMDY=S
      A=DISPY(1)
      DO 445 I=2,N
      IF(A.LT.DISPY(I))A=DISPY(I)
445   CONTINUE
      CXR=A/SUMDY
      IF(CXT.GE.CXR)GO TO 455
      WRITE(6,450)
450   FORMAT(//5X,'ДИСПЕРСИИ НЕ ОДНОРОДНЫ')
      GO TO 460
455   WRITE(6,456)
456   FORMAT(//5X,'ДИСПЕРСИИ ОДНОРОДНЫ')
460   CONTINUE
c       Расчет дисперсии воспроизводимости
      DY=SUMDY/N
      WRITE(6,465) DY
465   FORMAT(/5X,'ДИСПЕРСИЯ ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ'/
     &        5X,'ЭКСПЕРИМЕНТА .......................DY=',E12.5)
      goto 475
466   continue
      WRITE(5,467)
467   FORMAT(5X,'Введите дисперсию опыта DY=')
      READ(5,*)DY
475   RETURN
      END
```

Подпрограмма COFF

```
C*******************************************************
C  Подпрограмма COFF предназначена для вычисления     *
C  коэффициентов фукции отклика и проверки их         *
C  значимости с помощью Критерия Стьюдента            *
C*******************************************************
      SUBROUTINE COFF (IB,K,N,M,YSR,XY,B0,BI,BIJ,BII,DY)
      REAL NUM
      DIMENSION XY(163,5),YSR(163),BI(7),BIJ(9,9),BII(7),MKL(7)
c     WRITE(5,45)
c45   FORMAT(5X,'Введите матрицу значений XY(I,KU)')
      READ(8,*)((XY(I,KU),KU=1,K),I=1,N)
      mm1=N*(M-1)
      WRITE(5,500) mm1
500   FORMAT(5X,'Введите Критерий Стьюдента при уровне',
    1        5x,'значимости A=0.05'/5x,' и числе степеней',
    2        5x,'свободы f=',I3)
      READ(5,*)CT
      WRITE(5,501)
501   FORMAT(5X,'Введите константы C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8=')
      READ(5,*)C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8
      DO 502 KU=1,K
      MKL(KU)=0
502   CONTINUE
```

Продолжение

```
      L=0
      CU=0.
      DO 510 I=1,N
      CU=CU+YSR(I)
510   CONTINUE
511   CONTINUE
      CRU=0.
      RU=0.
      DO 520 KU=1,K
      IF(MKL(KU).EQ.1)GO TO 520
      DO 515 I=1,N
      RU=RU+XY(I,KU)*XY(I,KU)*YSR(I)
      CRU=CRU+(XY(I,KU)*XY(I,KU)-C3)*YSR(I)
515   CONTINUE
520   CONTINUE
      IF(L.EQ.1)GO TO 561
      BO=C1*CU-C2*CRU
      IF(L.EQ.2)GO TO 561
      DO 540 KU=1,K
      TIP=0.
      DO 535 I=1,N
      TIP=TIP+XY(I,KU)*YSR(I)
535   CONTINUE
      BI(KU)=C4*TIP
540   CONTINUE
      MU=K-1
      DO 560 KU=1,MU
      DO 555 J=2,K
      IF(J.LE.KU)GO TO 555
      NUM=0.
      DO 545 I=1,N
      NUM=NUM+XY(I,KU)*XY(I,J)*YSR(I)
545   CONTINUE
      BIJ(KU,J)=C5*NUM
555   CONTINUE
560   CONTINUE
561   CONTINUE
      DO 570 KU=1,K
      IF(MKL(KU).EQ.1)GO TO 570
      GUM=0.
      DO 565 I=1,N
      GUM=GUM+(XY(I,KU)*XY(I,KU)-C3)*YSR(I)
565   CONTINUE
      BII(KU)=C6*GUM+C7*RU-C8*CU
570   CONTINUE
      DYSR=DY/M
      SKOBO=SQRT(C1*DYSR+C3*C3*C6*K*DYSR)
      SKOBII=SQRT((C6+C7)*DYSR)
      DINBO=CT*SKOBO
      DINBII=CT*SKOBII
      SKOBIJ=SQRT(C5*DYSR)
      SKOBI=SQRT(C4*DYSR)
      DINBIJ=CT*SKOBIJ
      DINBI=SKOBI*CT
      WRITE(6,760)
```

Продолжение

```
760   FORMAT(//15X,'КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА'//
     1      6X,'коэффициент',5x,'значение',5x,'довер. интервал'/
     2      5x,'(обозначение)',5x,'коэфф.',7x,'коэффициента'/)
663   WRITE(6,764)BO,DINBO
764   FORMAT(10X,'BO',4X,'....',E12.5,2X,E12.5)
      DO 670 KU=1,K
      WRITE(6,775)KU,BI(KU),DINBI
775   FORMAT(10X,'B',I1,4X,'....',E12.5,2X,E12.5)
670   CONTINUE
      DO 675 KU=1,MU
      DO 673 J=2,K
      IF(J.LE.KU)GO TO 673
      WRITE(6,672)KU,J,BIJ(KU,J),DINBIJ
672   FORMAT(10X,'B',I1,I1,3X,'....',E12.5,2X,E12.5)
673   CONTINUE
675   CONTINUE
      DO 680 KU=1,K
      WRITE(6,682)KU,KU,BII(KU),DINBII
682   FORMAT(10X,'B',I1,I1,3X,'....',E12.5,2X,E12.5)
680   CONTINUE
      IF(L.GT.0)GO TO 600
      DO 585 KU=1,K
      IF(DINBI.GT.ABS(BI(KU)))BI(KU)=0.
585   CONTINUE
      DO 595 KU=1,MU
      DO 590 J=2,K
      IF(J.LE.KU)GO TO 590
      IF(DINBIJ.GT.ABS(BIJ(KU,J)))BIJ(KU,J)=0.
590   CONTINUE
595   CONTINUE
600   CONTINUE
      IF(DINBO.GT.ABS(BO))BO=0.
      DO 605 KU=1,K
      IF(DINBII.GT.ABS(BII(KU)))BII(KU)=0.
605   CONTINUE
      IF(L.GT.0)GO TO 650
      IF(IB.EQ.1)GO TO 650
      L=1
      IF(BO.EQ.0)GO TO 615
      L=2
      KL=0
      DO 610 KU=1,K
      MKL(KU)=1
      IF(BII(KU).EQ.0)GO TO 610
      KL=KL+1
      MKL(KU)=MKL(KU)-1
610   CONTINUE
      IF(KL.EQ.K)GO TO 650
615   WRITE(5,620)KL
620   FORMAT(5X,'Для пересчета коэффициентов функции отклика'/
     15x,'введите нов. значения конст. C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8'/
     2       5X,'(число коэффициентов bii в модели=',I2)
      READ(5,*)C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8
      GO TO 511
650   WRITE(6,655)
```

Продолжение

```
655   FORMAT(//15X,'ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ МОДЕЛИ'/
     1        12X,'(незначимые коэффициенты равны нулю)')
      WRITE(6,656)BO
656   FORMAT(10X,'BO',4X,'......',E12.5)
      DO 658 KU=1,K
      WRITE(6,657)KU,BI(KU)
657   FORMAT(10X,'B',I1,4X,'......',E12.5)
658   CONTINUE
      DO 662 KU=1,MU
      DO 660 J=2,K
      IF(J.LE.KU)GO TO 660
      WRITE(6,559)KU,J,BIJ(KU,J)
559   FORMAT(10X,'B',I1,I1,3X,'......',E12.5)
660   CONTINUE
662   CONTINUE
      DO 665 KU=1,K
      WRITE(6,664)KU,KU,BII(KU)
664   FORMAT(10X,'B',I1,I1,3X,'......',E12.5)
665   CONTINUE
      RETURN
      END
```

Подпрограмма MOD

```
C*****************************************************
C   Подпрограмма MOD предназначена для проверки        *
C      адекватности математической модели              *
C*****************************************************
      SUBROUTINE MOD(K,N,M,YSR,XY,BO,BI,BIJ,BII,DY)
      DIMENSION XY(163,5),YSR(163),YPR(163),BI(7),BIJ(9,9),BII(7)
c       Расчет числа степеней свободы f1,f2
      IF(BO.NE.O.)LN=1
      DO 905 KU=1,K
      IF(BI(KU).NE.O.)LN=LN+1
      IF(BII(KU).NE.O.)LN=LN+1
905   CONTINUE
      MU=K-1
      DO 915 KU=1,MU
      DO 910 J=2,K
      IF(J.LE.KU)GO TO 910
      IF(BIJ(KU,J).NE.O.)LN=LN+1
910   CONTINUE
915   CONTINUE
      mm1=(M-1)*N
      mm2=N-LN
      WRITE(6,916)LN,mm1,mm2
916   FORMAT(/5X,'Число оставленных(значимых)'/
     1        5x,'коэффициентов ...................... K=',I2/
     2        5X,'Число степеней свободы в'/
     3        5x,'знаменателе ........................ f1=',I3/
     4        5X,'Число степеней свободы в'/
     5        5x,'числителе .......................... f2=',I3)
c       Проверка адекватности математической модели
      SS=0.
```

Продолжение

```
      DO 929 I=1,N
      YRS=0.
      YRN=0.
      YRM=0.
      DO 925 KU=1,MU
      YRN=YRN+BII(KU)*XY(I,KU)*XY(I,KU)
      YRM=YRM+BI(KU)*XY(I,KU)
      DO 920 J=2,K
      IF(J.LE.KU)GO TO 920
      YRS=YRS+BIJ(KU,J)*XY(I,KU)*XY(I,J)
920   CONTINUE
925   CONTINUE
      YPR(I)=B0+YRN+YRM+YRS+BII(K)*XY(I,K)*XY(I,K)+BI(K)*XY(I,K)
      SS=SS+(YPR(I)-YSR(I))**2.
929   CONTINUE
      UM=M
      SSAD=UM*SS/mm2
      FR=SSAD/DY
      WRITE(6,931)
931   FORMAT(//15X,'Проверка адекватности модели'//
     1          5x,'номер',6x,'среднее',6x,'предсказанное'/
     2          5x,'опыта',7x,'опыта',10x,'значение')
      DO 933 I=1,N
      WRITE(6,932)I,YSR(I),YPR(I)
932   FORMAT(6X,I3,6X,E12.5,2X,E12.5)
933   CONTINUE
      WRITE(5,935)mm1,mm2
935   FORMAT(5X,'Введите табличное значение Критерия Фишера'/
     1    10x,'(alfa=0.05  f1(знам)=',I3,'f2(числ)=',I3,')FT=')
      READ(5,*)FT
      WRITE(6,936)FR,FT
936   FORMAT(/5X,'Критерий Фишера расчетный .................',
     1         '...',E12.5/
     2         5X,'Табличный Критерий Фишера .................',
     3         '...',E12.5)
      IF(FR.LE.FT)GO TO 950
      WRITE(6,940)
940   FORMAT(5X,'ГИПОТЕЗА ОБ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ НЕ ПРИНИМАЕТСЯ')
      GO TO 960
950   WRITE(6,955)
955   FORMAT(5X,'************** МОДЕЛЬ  АДЕКВАТНА *************')
960   RETURN
      END
```

```
**** Для Вк получены следующие результаты ****

   Колличество факторов ................ K= 5
   Колличество экспериментов ........... N= 26
   Колличество повторов ................ M= 5
   Звездное плечо .................. ALFA=  .10000E+01
```

Значения забракованных опытов
(исключены из расчетов)

номер опыта	номер дубля	Значение функции отклика
1	5	.69230E+02
5	2	.60890E+02
7	5	.31200E+02
8	1	.89940E+02
11	5	.60230E+02
16	5	.32330E+02
18	3	.40140E+02
19	5	.21000E+02
20	4	.29020E+02
21	5	.42300E+02

Статистическая обработка результатов
эксперимента

номер опыта	среднее значение функции отклика	дисперсия повторов
1	.58103E+02	.45876E+00
2	.70372E+02	.13296E+02
3	.52674E+02	.96449E+01
4	.42580E+02	.31304E+01
5	.54420E+02	.93567E+00
6	.58680E+02	.69093E+01
7	.48403E+02	.94180E+01
8	.82565E+02	.22080E+01
9	.53058E+02	.69584E+01
10	.57760E+02	.10915E+01
11	.47447E+02	.22856E+01
12	.60434E+02	.28678E+02
13	.55420E+02	.88665E+00
14	.66804E+02	.20577E+02
15	.50084E+02	.28685E+02
16	.53550E+02	.11553E+01
17	.33600E+02	.32702E+01
18	.43493E+02	.88369E+00
19	.30667E+02	.42481E+01
20	.25710E+02	.45287E+00
21	.39245E+02	.79557E+00
22	.44200E+02	.26054E+01
23	.34668E+02	.15599E+01
24	.31600E+02	.11483E+01
25	.31726E+02	.63689E+01
26	.40854E+02	.27009E+01

ДИСПЕРСИИ НЕ ОДНОРОДНЫ

ДИСПЕРСИЯ ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ
ЭКСПЕРИМЕНТА ....DY= .61674E+01

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА

коэффициент (обозначение)		значение коэфф.	довер. интервал коэффициента
B0	....	.30201E+02	.87116E+00
B1	....	-.46131E+01	.51310E+00
B2	....	.23245E+01	.51310E+00
B3	....	-.18031E+01	.51310E+00
B4	....	.14616E+01	.51310E+00
B5	....	-.43113E+01	.51310E+00
B12	....	.49409E+00	.54421E+00
B13	....	.20880E+01	.54421E+00
B14	....	-.50372E+00	.54421E+00
B15	....	.41713E+01	.54421E+00
B23	....	.22147E+01	.54421E+00
B24	....	-.38584E+00	.54421E+00
B25	....	.24428E+01	.54421E+00
B34	....	-.82378E+00	.54421E+00
B35	....	.44828E+00	.54421E+00
B45	....	-.22540E+01	.54421E+00
B11	....	.85418E+01	.13942E+01
B22	....	-.18157E+01	.13942E+01
B33	....	.11718E+02	.13942E+01
B44	....	.31295E+01	.13942E+01
B55	....	.62855E+01	.13942E+01

ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ МОДЕЛИ
(незначимые коэффициенты равны нулю)

B0	......	.30201E+02
B1	......	-.46131E+01
B2	......	.23245E+01
B3	......	-.18031E+01
B4	......	.14616E+01
B5	......	-.43113E+01
B12	......	.00000E+00
B13	......	.20880E+01
B14	......	.00000E+00
B15	......	.41713E+01
B23	......	.22147E+01
B24	......	.00000E+00
B25	......	.24428E+01
B34	......	-.82378E+00
B35	......	.00000E+00
B45	......	-.22540E+01
B11	......	.85418E+01
B22	......	-.18157E+01
B33	......	.11718E+02
B44	......	.31295E+01
B55	......	.62855E+01

Число оставленных(значимых) коэффициентов .... K=17

Число степеней свободы в знаменателе .... f1=104

Число степеней свободы в числителе .... f2= 9

Проверка адекватности модели

номер опыта	среднее опыта	предсказанное значение
1	.58103E+02	.58958E+02
2	.70372E+02	.72253E+02
3	.52674E+02	.54668E+02
4	.42580E+02	.41701E+02
5	.54420E+02	.55508E+02
6	.58680E+02	.60666E+02
7	.48403E+02	.50501E+02
8	.82565E+02	.81919E+02
9	.53058E+02	.53077E+02
10	.57760E+02	.58898E+02
11	.47447E+02	.48226E+02
12	.60434E+02	.62277E+02
13	.55420E+02	.55543E+02
14	.66804E+02	.68175E+02
15	.50084E+02	.51096E+02
16	.53550E+02	.55498E+02
17	.33600E+02	.34130E+02
18	.43493E+02	.43356E+02
19	.30667E+02	.30710E+02
20	.25710E+02	.26061E+02
21	.39245E+02	.40116E+02
22	.44200E+02	.43722E+02
23	.34668E+02	.34792E+02
24	.31600E+02	.31869E+02
25	.31726E+02	.32175E+02
26	.40854E+02	.40798E+02

Критерий Фишера расчетный .... .29435E+01
Табличный Критерий Фишера .... .29700E+01

************** МОДЕЛЬ АДЕКВАТНА *************

СОДЕРЖАНИЕ

Л а в р о в Борис Александрович

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДЕЛЕЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

Редактор Л.М.Карпова

Подписано в печать 9.03.95.
Формат 60x84 I/I6.
Бумага офсетная. Оперативная печать.
Усл.печ.л. 2,79. Усл.кр.-отт. 2,9.
Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 200 экз.
Арт.С 5/95.
Заказ 138.

Самарский государственный
аэрокосмический университет
им. акад. С.П.Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского аэрокосмического
университета. 443001, г.Самара, ул. Ульяновская, I8.