

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.В. Мясников, Н.И. Глузов, В.В. Сергеев

ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ МЕТОДЫ ЛОКАЛЬНОГО ОПИСАНИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика и специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

САМАРА
Издательство Самарского университета
2023

УДК 004.932(075)

ББК А66я7

М994

Рецензенты: д-р техн. наук С. Б. Попов,
д-р техн. наук В. А. Фурсов

Мясников, Владислав Валерьевич

М994 Параллельно-рекурсивные методы локального описания цифровых изображений: учебное пособие / *В.В. Мясников, Н.И. Глумов, В.В. Сергеев.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 100 с.

ISBN 978-5-7883-1930-8

Содержит описание метода формирования локальных описаний (признаков) цифровых изображений, основанных на применении параллельно-рекурсивных фильтров с конечной импульсной характеристикой. Рассмотрены теоретические основы построения таких фильтров, приведен ряд параллельно-рекурсивно реализуемых конечных импульсных характеристик. Приведены алгоритмы синтеза и применения фильтров с полиномиальными базисами, которые представляют наибольший практический интерес. Большое внимание уделено примерам расчета фильтров для решения конкретных прикладных задач обработки, моделирования и распознавания на изображениях.

Предназначено для студентов факультета информатики, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика и специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем.

УДК 004.932(075)

ББК А66я7

ISBN 978-5-7883-1930-8

© Самарский университет, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1 Цифровые параллельно-рекурсивные фильтры с конечной импульсной характеристикой.....	6
1.1 Обработка изображений в скользящем окне.....	6
1.2 Принципы построения параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров	9
1.3 Рекурсивно реализуемые базисные функции	14
1.3.1 Прямоугольный базис	14
1.3.2 Косинусный базис	15
1.3.3 Базис комплексных дискретных экспонент	17
1.3.4 Вещественный базис Фурье.....	19
1.4 Секционирование импульсной характеристики КИХ-фильтров	24
2 Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры с полиномиальными импульсными характеристиками.....	27
2.1 Полиномиальные базисы и обобщенные моменты	27
2.2 Параллельно-рекурсивные алгоритмы вычисления обобщенных моментов	29
2.2.1 Вычисление обобщенных моментов для произвольного полиномиального базиса	29
2.2.2 Построение полиномиальных базисов с ускоренным вычислением обобщенных моментов.....	31
2.2.3 Полиномиальные базисы с минимальной вычислительной сложностью	33
2.3 Алгоритмы формирования МВС и МВС-подобных базисов	34
2.3.1 Алгоритм построения базиса МВС с обнулением на краю окна обработки	34
2.3.2 МВС-подобные базисы с модифицированной схемой рекурсии.....	39
2.4 Параллельно-рекурсивный алгоритм на основе полиномиальных базисов четных степеней	42
2.4.1 Семейство рекурсивных полиномиальных функций четных и нечетных степеней	42

2.4.2	Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления одномерных обобщенных моментов четных степеней.....	44
2.4.3	Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления двумерных обобщенных моментов четных степеней.....	49
2.5	Параллельно-рекурсивной алгоритм фильтрации сигналов при нечетной полиномиальной импульсной характеристике.....	51
2.5.1	Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления одномерных обобщенных моментов нечетных степеней.....	51
2.5.2	Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления двумерных обобщенных моментов нечетных степеней.....	56
2.6	Оценка качества полиномиальных базисов по различным критериям.....	58
3	Расчет и применение параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров в задачах обработки изображений.....	62
3.1	Общая схема расчета параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров.....	62
3.2	Среднеквадратичная аппроксимация импульсной характеристики.....	64
3.3	Среднеквадратичная аппроксимация частотной характеристики.....	66
3.4	Моделирование ЛПП-системы.....	71
3.5	Преобразование стационарных случайных процессов.....	74
3.6	Восстановление сигналов.....	78
3.7	Обнаружение объектов.....	81
3.8	Другие задачи локальной обработки изображений.....	83
3.8.1	Сглаживание изображений.....	84
3.8.2	Подчеркивание контуров.....	85
3.8.3	Выделение углов.....	87
3.9	Анализ эффективности параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров в задачах обработки изображений.....	89
	Заключение.....	92
	Библиографический список.....	94

ВВЕДЕНИЕ

Технологии искусственного интеллекта (далее – ИИ) все больше проникают во все сферы современной цифровой экономики. Ядром этих технологий по праву считаются методы машинного обучения и распознавания образов. Наряду с популярными их направлениями развития, связанными с искусственными нейронными сетями и глубоким обучением, существуют и массово используются проверенные классические подходы. Одним из них, принятым де-факто стандартом в теории распознавания, является подход, предполагающий поэтапное решение задач: вначале анализируемый объект описывается неким набором числовых характеристик – вектором признаков, – а далее решение о классе объекта принимается на основе анализа этого вектора признаков. В то время как вопросы принятия решения или классификации могут рассматриваться в отрыве от прикладной области, вопросы построения признаков, наоборот, являются в значительной степени предметом той прикладной области, где строится/внедряется соответствующая система на базе ИИ.

Настоящее учебное пособие предназначено для изучения студентами вопросов построения эффективных в вычислительном плане линейных локальных признаков цифровых сигналов и изображений. Вопросы построения таких признаков, учитывая значительные потребности ИИ-решений в вычислительных ресурсах, становятся все более актуальными в задачах компьютерного зрения.

Изложение ведется в единой терминологии и обозначениях, что упрощает процесс знакомства с материалом. Отдельные разделы пособия содержат оригинальный материал, являющийся результатом научных исследований авторов.

1 ЦИФРОВЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ С КОНЕЧНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

1.1 Обработка изображений в скользящем окне

В основе многих процедур обработки и анализа цифровых сигналов лежит операция линейной обработки «скользящим окном». Как известно, ее смысл состоит в том, что некоторая ограниченная двумерная область – «окно обработки» последовательно (например, в порядке построчной развертки) занимает все возможные положения в плоскости изображения, и для каждого положения окна по значениям лежащих в нем входных отсчетов вычисляется значение одного отсчета выходного изображения.

Пространственно-инвариантная (не зависящая от координат) обработка такого вида описывается общим соотношением:

$$g(n_1, n_2) = G \left[\left\{ f(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \right\}, (m_1, m_2) \in D \right], \quad (1.1)$$

где $f(n_1, n_2)$, $g(n_1, n_2)$ – двумерные последовательности отсчетов входного и выходного изображения соответственно; G – оператор преобразования, D – конечное множество отсчетов, заданное относительно начала координат и определяющее форму и размеры окна обработки (рисунок 1.1).



Рисунок 1.1 – Схема обработки изображения в скользящем окне

Наибольший интерес представляет преобразование дискретизированного сигнала ЛПП-системой с конечной импульсной характеристикой – КИХ-фильтром [16,25]. Как известно, значения сигнала на выходе КИХ-фильтра являются результатом цифровой свертки входного сигнала с импульсной характеристикой фильтра и могут быть найдены взвешенным суммированием входных отсчетов в пределах окна обработки. Однако такое вычисление свертки («прямая» реализация КИХ-фильтра) имеет практический смысл лишь для малых размеров окна, то есть для короткой импульсной характеристики, поскольку объем вычислений здесь пропорционален числу ненулевых отсчетов последней. Для больших окон (в задачах фильтрации и восстановления сигналов, корреляционного обнаружения объектов, синтеза изображений рельефа по радиоголограммам и т.д.) прямое вычисление свертки оказывается чрезмерно трудоемким. Известные многочисленные алгоритмы быстрой свертки для КИХ-фильтров общего вида также далеко не всегда решают проблему сложности обработки данных даже при использовании алгоритмов, основанных на быстрых спектральных преобразованиях. В этой ситуации представляется перспективным применение алгоритмов, воплощающих идею параллельной рекурсивной реализации КИХ-фильтров [30, 31, 36, 37] позволяющей резко снизить вычислительные затраты при обработке изображений.

При рекурсивном формировании результата обработки при каждом положении окна используются не только отсчеты входного изображения (из множества D), но и вычисленные до данного шага отсчеты обработанного изображения.

Известные рекурсивные алгоритмы реализуют вычисление локальных спектров изображения, статистических характеристик (средней яркости, дисперсии, гистограммы и т.д.), фильтрацию (линейную и нелинейную) с целью подавления шумов, устранения

частотных искажений, выделения контуров и т.д. [18, 20, 24, 35, 37, 40]. Линейные рекурсивные фильтры в общем случае являются фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтрами). Широкое использование двумерных БИХ-фильтров затрудняется необходимостью решения проблемы их устойчивости [16, 28]. Однако существует класс заведомо устойчивых КИХ-фильтров, также допускающих рекурсивную реализацию [30, 31].

Наиболее простую структуру имеют рекурсивные КИХ-фильтры с импульсной характеристикой, разделимой по координатам. Применение такого фильтра может быть сведено к обработке изображения одномерными рекурсивными КИХ-фильтрами (путем организации рекурсивной обработки каждого столбца изображения по отдельности и построчной рекурсивной обработки результатов фильтрации в столбцах). Вычислительная сложность рекурсивных КИХ-фильтров не зависит от размеров окна обработки D (которое задает область ненулевых отсчетов импульсной характеристики фильтра), а определяется только сложностью рекурсий.

К сожалению, для области D произвольной формы нельзя организовать разделимую рекурсивную фильтрацию. Однако на практике обычно ограничиваются прямоугольными областями:

$$D: \quad -M_1^- \leq m_1 \leq M_1^+; \quad -M_2^- \leq m_2 \leq M_2^+, \quad (1.2)$$

где $M_1^-, M_1^+, M_2^-, M_2^+$ – параметры, задающие границы окна по координатам ($M_1^- + M_1^+ \geq 0$, $0 \leq k \leq K$, $0 \leq l \leq K$). Во многих алгоритмах обработки изображений удобно использовать прямоугольное окно, симметричное относительно центрального элемента:

$$D: \quad -M_1 \leq m_1 \leq M_1, \quad -M_2 \leq m_2 \leq M_2. \quad (1.3)$$

1.2 Принципы построения параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров

Рассмотрим сначала более простой и наглядный случай обработки одномерных сигналов. Преобразование КИХ-фильтром бесконечной последовательности отсчетов входного сигнала $f(n)$ в выходную последовательность $g(n)$, как известно, описывается соотношением «конечной свертки»:

$$g(n) = \sum_{m=-M^-}^{M^+} h(m) f(n-m), \quad (1.4)$$

где $h(m)$ – импульсная характеристика фильтра, равная нулю вне интервала $[-M^-, M^+]$ длиной $N=M^-+M^++1$, величины

M^- , M^+ задают размер окна обработки и его положение относительно формируемого выходного отсчета. Параллельно-рекурсивный КИХ-фильтр представляется в виде K параллельных звеньев и, следовательно,

$$h(m) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(m), \quad (1.5)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k y_k(n), \quad (1.6)$$

$$y_k(n) = \sum_{m=-M^-}^{M^+} h_k(m) f(n-m), \quad (1.7)$$

где a_k – коэффициенты, $h_k(m)$ – линейно независимые базисные функции (конечные ядра) разложения $h(m)$ в ряд (1.5), то есть им-

пульсные характеристики параллельных КИХ-звеньев, $y_k(n)$ – сигналы на выходах звеньев ($0 \leq k \leq K-1$). Причем к каждому звену предъявляется требование эффективной рекурсивной реализации, то есть описания достаточно простым разностным уравнением. Последнее означает, что передаточная функция (z -преобразование импульсной характеристики) звена

$$H_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m)z^{-m} \quad (1.8)$$

должна записываться в дробно-рациональной форме, как отношение полиномов от комплексной переменной z , состоящих из небольшого числа слагаемых [25,29].

Исходя из сказанного, определим общий вид импульсных характеристик рекурсивно реализуемых КИХ-звеньев. Интервал, ограничивающий ненулевые отсчеты конечной импульсной характеристики, можно задать через «прямоугольный импульс»:

$$\Pi(m) = u(m-\gamma) - u(m-\delta), \quad (1.9)$$

где

$$u(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m \geq 0 \\ 0 & \text{при } m < 0 \end{cases}$$

– функция единичного скачка, γ, δ – целые константы, определяющие положение импульса на оси аргумента ($\gamma < \delta$). Последовательность (1.9) имеет z -преобразование, которое может быть представлено в дробно-рациональной форме:

$$H_{\Pi}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Pi(m)z^{-m} = z^{-\gamma} + z^{-\gamma+1} + \dots + z^{-\delta-1} = \frac{z^{-\gamma} - z^{-\delta}}{1 - z^{-1}}. \quad (1.10)$$

Известны трансформации произвольной последовательности, не увеличивающие ее длину и сохраняющие дробно-рациональность z -преобразования: умножение на коэффициент, целую положительную степень аргумента и экспоненту [25,29]. Применяя их к функции (1.9), получаем, что последовательность

$$\Pi(m) = Sm^\alpha \beta^{-m} \Pi(m) \quad (1.11)$$

при целом неотрицательном α и произвольных S, β также будет иметь конечную длину и дробно-рациональное z -преобразование. Учтем далее, что каждая базисная функция $h_k(m)$ может быть составлена из нескольких последовательностей вида (1.11), и, введя необходимую индексацию постоянных, запишем:

$$h_k(m) = \sum_{l=0}^{L_k-1} S_{lk} m^{\alpha_{lk}} \beta_{lk}^{-m} \left[u(m - \gamma_{lk}) - u(m - \delta_{lk}) \right], \quad (1.12)$$

где $L_k, \alpha_{lk}, \gamma_{lk}, \delta_{lk}$ – целочисленные ($L_k \geq 1, \alpha_{lk} \geq 0, -M^- \leq \gamma_{lk} \leq \delta_{lk} \leq M^+$), а S_{lk}, β_{lk} – произвольные вещественные или комплексные константы. Подстановка выражения (1.12) в (1.8) с учетом (1.9), (1.10) и свойств z -преобразования [25,29] дает:

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{L_k-1} S_{lk} (-1)^{\alpha_{lk}} \underbrace{z \frac{d}{dz} \left\{ z \frac{d}{dz} \left\{ \dots z \frac{d}{dz} \left\{ \frac{(\beta_{lk} z)^{-\gamma_{lk}} - (\beta_{lk} z)^{-\delta_{lk}}}{1 - (\beta_{lk} z)^{-1}} \right\} \dots \right\} \right\}}_{\alpha_{lk} \text{ раз}} \quad (1.13)$$

Формулы (1.12), (1.13) могут использоваться для конструирования различных базисов разложения (1.5) и получения передаточных функций рекурсивных звеньев. Так, при надлежащих зна-

чениях параметров из (1.12) следует базис комплексных дискретных экспоненциальных функций, базис Фурье в вещественной форме, косинусный базис и т.д. Выбор конкретных параметров в (1.12), (1.13) следует производить из соображений простоты получающихся КИХ-звеньев (очевидно, в частности, что L_k и α_{jk} должны быть невелики) и достаточности малого числа слагаемых в разложении (1.5) для качественного решения определенной задачи обработки сигналов. Некоторые базисы для представления импульсных характеристик параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров будут детально рассмотрены ниже.

Представленные выше результаты легко обобщаются на двумерный случай. Для двумерного сигнала (изображения), заданного отсчетами $f(n_1, n_2)$ на бесконечном квадратном растре, результат обработки КИХ-фильтром выражается через двумерную свертку:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} h(m_1, m_2) f(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \quad (1.14)$$

где $h(m_1, m_2)$ – импульсная характеристика двумерного фильтра, D – конечная область ее ненулевых значений. Как и в одномерном случае, для быстрого параллельно-рекурсивного вычисления свертки (1.14) необходимо, чтобы импульсная характеристика фильтра имела представление в виде суммы

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(m_1, m_2), \quad (1.15)$$

при небольших K , а базисные функции этого разложения соответствовали импульсным характеристикам рекурсивных КИХ-звеньев. При выполнении (1.15) выходной сигнал фильтра будет формироваться из сигналов с выходов параллельных звеньев:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k y_k(n_1, n_2), \quad (1.16)$$

где

$$y_k(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} h_k(m_1, m_2) f(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (1.17)$$

Поскольку для области D произвольной формы нельзя предложить удобную общую формулу для двумерных рекурсивных базисных импульсных характеристик $h_k(m_1, m_2)$, то обычно рассматриваются прямоугольные области вида (1.2) и разделимые звенья [6, 16, 36, 37]:

$$h_k(m_1, m_2) = h_k^{(1)}(m_1) h_k^{(2)}(m_2). \quad (1.18)$$

При этом для каждого сомножителя в (1.18) можно воспользоваться «одномерной» общей формулой (1.12). Реализация разделимого звена заключается в последовательной (каскадной) обработке двумерного сигнала сначала по одной, а затем по другой координате:

$$y_k(n_1, n_2) = \sum_{m_1 = -M_1^-}^{M_1^+} h_k^{(1)}(m_1) \left[\sum_{m_2 = -M_2^-}^{M_2^+} h_k^{(2)}(m_2) f(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \right]. \quad (1.19)$$

Значения $y_k(n_1, n_2)$ можно интерпретировать как линейные локальные признаки изображения, которые используются при решении различных задач обработки изображений. Поскольку вычисление этих признаков можно производить путем последовательной обработки по каждой из координат, то целесообразно рассматривать построение базисов и алгоритмы обработки в одномерном варианте, а затем обобщать результаты на двумерный случай.

1.3 Рекурсивно реализуемые базисные функции

Задача конструирования базиса для разложения (1.5) импульсной характеристики КИХ-фильтра решается эвристически с учетом удобства программной или аппаратной реализации фильтра, эффективного «покрытия» рассматриваемого множества процедур обработки сигналов и т.д. Это решение удобно разбить на два этапа. На первом определяется класс базисных функций, строится алгоритм и оценивается сложность их рекурсивного вычисления. На втором этапе из множества функций данного класса выбираются K базисных функций, обеспечивающих требуемое качество и простоту обработки. Здесь мы остановимся на первом этапе решения задачи. Второй, требующий привлечения показателей эффективности обработки сигналов, будет рассмотрен ниже.

Опишем несколько видов одномерных рекурсивно реализуемых базисных функций с указанием их соответствия общей модели (1.12) и выводом разностных уравнений.

1.3.1 Прямоугольный базис

Семейство прямоугольных ядер [36,37] состоит из функций

$$h_k(m) = u(m - \gamma_k) - u(m - \delta_k) \quad (1.20)$$

и соответствует случаю, когда в (1.12)

$$\begin{aligned} L_k = S_{0k} = \beta_{0k} = 1, \quad \alpha_{0k} = 0, \\ \gamma_{0k} = \gamma_k, \quad \delta_{0k} = \delta_k, \quad -M^- \leq \gamma_k < \delta_k \leq M^+ \end{aligned}$$

Передаточная функция (1.10) записывается в виде:

$$H_k(z) = \frac{z^{-\gamma_k} - z^{-\delta_k}}{1 - z^{-1}}. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует простое разностное уравнение, описывающее процесс рекурсивного вычисления свертки (1.7):

$$y_k(n) = y_k(n-1) + f(n-\gamma_k) - f(n-\delta_k). \quad (1.22)$$

Здесь и везде ниже при записи разностных уравнений не оговариваются начальные условия, то есть все преобразуемые последовательности считаются неограниченными по аргументу и принимающими нулевые значения в «минус бесконечности».

Для получения очередного значения последовательности $y_k(n)$ по формуле (1.22) нужно выполнить всего две арифметические операции: сложение и вычитание. Крайняя простота формирования локальных линейных признаков, сводящегося здесь к рекурсивному суммированию отсчетов изображения в скользящих прямоугольных окнах, является несомненным, но, возможно, единственным достоинством ядер этого семейства.

1.3.2 Косинусный базис

В работах [6,18] при анализе сигналов на скользящем интервале было предложено использовать семейство ядер косинусного базиса. В [31] показано, что для наиболее быстрого рекурсивного вычисления свертки (1.7) такие ядра следует брать в нетрадиционной «разнормированной» форме:

$$h_k(m) = \frac{\cos\left\{\frac{\pi\left(2(m+M^-)+1\right)j_k}{2N}\right\}}{\cos\left(\frac{\pi}{2N}j_k\right)} \left[u(m+M^-) - u(m-M^+-1) \right], \quad (1.23)$$

где j_k – целочисленный индекс ядра ($0 \leq j_k \leq N-1$, $j_p \neq j_q$ при $p \neq q$).

Функции (1.23) получаются из общей формулы (1.12) при

$$\begin{aligned}
 L_k &= 2, & \alpha_{0k} &= \alpha_{1k} = 0, \\
 S_{0k} &= \frac{\exp\left[i \frac{\pi(1+2M^-)j_k}{2N}\right]}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2N} j_k\right)}, & S_{1k} &= \frac{\exp\left[-i \frac{\pi(1+2M^-)j_k}{2N}\right]}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2N} j_k\right)}, \\
 \beta_{0k} &= \exp\left(-i \frac{\pi}{N} j_k\right), & \beta_{1k} &= \exp\left(i \frac{\pi}{N} j_k\right), \\
 \gamma_{0k} &= \gamma_{1k} = -M^-, & \delta_{0k} &= \delta_{1k} = M^+ + 1.
 \end{aligned}$$

Подставив эти параметры в (1.13), находим выражение для передаточной функции формирующего цифрового фильтра:

$$H_k(z) = \frac{\left[z^{M^-} - (-1)^{j_k} z^{-M^+ - 1} \right] (1 - z^{-1})}{1 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{N} j_k\right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (1.24)$$

Как видно из выражения (1.23), значение индекса $j_k = 0$ порождает прямоугольное ядро, для которого свертка (1.7) рекурсивно вычисляется с помощью простейшего алгоритма вида (1.22). Ненулевые значения индекса требуют построения рекурсивного вычислительного процесса, исходя непосредственно из передаточной функции (1.24). Легко показать, что получение любых $y_k(n)$ здесь может быть описано следующей системой разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 f_1(n) = f(n+M^-) - f(n-M^+ - 1), \\
 f_2(n) = f(n+M^-) + f(n-M^+ - 1), \\
 f_3(n) = f_1(n) - f_1(n-1), \\
 f_4(n) = f_2(n) - f_2(n-1), \\
 y_k(n) = y_k(n-1) + f_1(n), \quad \text{при } j_k = 0, \\
 y_k(n) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{N} j_k\right) y_k(n-1) - y_k(n-2) + f_3(n), \\
 \qquad \qquad \qquad \text{при } j_k \neq 0 \text{ и кратных } 2, \\
 y_k(n) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{N} j_k\right) y_k(n-1) - y_k(n-2) + f_4(n), \\
 \qquad \qquad \qquad \text{при } j_k \neq 0 \text{ не кратных } 2.
 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

При использовании системы (1.25) для вычисления K значений одномерных сверток (1.7) с косинусными ядрами (в том числе и с ядром при $j_k = 0$), число операций сложения и умножения равно соответственно $(2K+3)$ и $(K-1)$. Иными словами, при $K \gg 1$ на одном шаге вычислительные затраты в среднем составляют примерно по два сложения и одному умножению на каждую свертку.

1.3.3 Базис комплексных дискретных экспонент

Базис комплексных дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), рассматриваемый на N -точечном окне, состоит из N ортогональных функций одинаковой протяженности, которые мы запишем в обобщенном (по сравнению с [1,24,36,37]) виде:

$$h_k(m) = \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{N} j_k m + \phi_k\right)\right] \left[u(m+M^-) - u(m-M^+ - 1) \right], \quad (1.26)$$

где j_k – индекс функции (целочисленная «частота»), $0 \leq j_k \leq N-1$,

$j_k \neq j_q$ при $p \neq q$, ϕ_k – ее фаза, вещественная постоянная. Выражение (1.26) соответствует общей формуле (1.12) при

$$L_k = 1, S_{0k} = \exp(i\phi_k), \alpha_{ok} = 0, \beta_{ok} = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}j_k\right),$$

$$\gamma_{ok} = -M^-, \delta_{ok} = M^+ + 1.$$

После подстановки этих параметров в (1.13) получаем передаточную функцию звена фильтра:

$$H_k(z) = \exp\left[i\left(-\frac{2\pi}{N}j_k M^- + \phi_k\right)\right] \frac{z^{M^-} - z^{-M^+ - 1}}{1 - \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j_k\right)z^{-1}}, \quad (1.27)$$

Положим $\phi_k = \frac{2\pi}{N}j_k M^-$. Тогда выражение (1.27) максимально упрощается:

$$H_k(z) = \frac{z^{M^-} - z^{-M^+ - 1}}{1 - \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j_k\right)z^{-1}}, \quad (1.28)$$

и функции базиса ДЭФ приобретают вид

$$h_k(m) = \exp\left[i\frac{2\pi}{N}j_k(m + M^-)\right] \left[u(m + M^-) - u(m - M^+ - 1) \right], \quad (1.29)$$

Звену с передаточной функцией (1.28), осуществляющему преобразование (1.7), соответствует разностное уравнение:

$$y_k(n) = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j_k\right)y_k(n-1) + f(n + M^-) - f(n - M^+ - 1), \quad (1.30)$$

Заметим, что в уравнении (1.30) имеется комплексный множитель, из-за которого и последовательность $y_k(n)$ оказывается

комплекснозначной (исключение составляет только случай $j_k = 0$, когда базисная функция (1.29) является прямоугольной, и формула (1.30) совпадает с (1.22)). При использовании в разложении импульсной характеристики произвольного набора из K базисных функций полный сигнал на выходе фильтра также будет принимать комплексные значения. Отсюда можно заключить, что применение базиса ДЭФ в параллельно-рекурсивных КИХ-фильтрах является естественным при обработке именно комплексных сигналов.

Для сигналов, принимающих вещественные значения, следует рассматривать только вещественную часть импульсной характеристики фильтра с базисом ДЭФ. Однако можно показать, что такая модификация процедуры обработки, по существу, означает переход к базису Фурье в вещественной форме, для которого достижения более простая реализация рекурсии.

1.3.4 Вещественный базис Фурье

Вещественный базис Фурье формируется из взятых отдельно вещественных и мнимых частей функций базиса ДЭФ (1.26), то есть включает в себя базисные функции двух видов:

$$h_k^{\cos}(m) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k m + \phi_k\right) \left[u(m + M^-) - u(m - M^+ - 1) \right], \quad (1.31)$$

$$h_k^{\sin}(m) = \sin\left(\frac{2\pi}{N} j'_k m + \phi'_k\right) \left[u(m + M^-) - u(m - M^+ - 1) \right], \quad (1.32)$$

где, как и раньше, j_k, j'_k – целочисленные индексы, не повторяющиеся для функций каждого вида:

$$j_\rho \neq j_q, \quad j'_\rho \neq j'_q, \quad \text{при } \rho \neq q,$$

$\phi_k, \phi'_{k'}$ – фазы, принимающие равные значения для каждой пары функций (1.31) и (1.32) с одинаковыми индексами:

$$\phi_k = \phi'_{k'}, \text{ при } j_k = j'_{k'}.$$

Пусть для функции (1.32) с индексом $j'_{k'} = \frac{N}{2}$ выполняется условие

$$\phi'_{k'} \neq \pi r, \quad (1.33)$$

для любых целых r . Тогда базис является ортогональным и полным на N -точечном окне, если он включает в себя функции (1.31) и (1.32) со всеми значениями индексов из интервалов

$$0 \leq j_k < \frac{N}{2}, \quad 0 < j'_{k'} \leq \frac{N}{2}.$$

Выражения (1.31) и (1.32) можно получить из общей формулы (1.12), если в ней положить

$$\begin{aligned} L_k &= L_{k'} = 2, \quad \alpha_{0k} = \alpha_{1k} = \alpha_{0k'} = \alpha_{1k'} = 0, \\ S_{0k} &= 0.5 \exp(i\phi_k), \quad S_{1k} = 0.5 \exp(-i\phi_k), \\ S_{0k'} &= 0.5 \exp\left[i\left(\phi'_{k'} - \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad S_{1k'} = 0.5 \exp\left[-i\left(\phi'_{k'} - \frac{\pi}{2}\right)\right], \\ \beta_{0k} &= \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}j_k\right), \quad \beta_{1k} = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j_k\right), \\ \beta_{0k'} &= \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}j'_{k'}\right), \quad \beta_{1k'} = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j'_{k'}\right), \\ \gamma_{0k} &= \gamma_{1k} = \gamma_{0k'} = \gamma_{1k'} = -M^-, \quad \delta_{0k} = \delta_{1k} = \delta_{0k'} = \delta_{1k'} = M^+ + 1. \end{aligned}$$

Подставив эти параметры в формулу (1.13) и приведя в ней дробно рациональные слагаемые к общему знаменателю, получаем

выражения для передаточных функций КИХ-звеньев двух типов:

$$H_k^{\cos}(z) = \left(z^{M^-} - z^{-M^+ - 1} \right) \times \frac{\cos\left(-\frac{2\pi}{N} j_k M^- + \phi_k \right) - \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k (-M^- - 1) + \phi_k \right) z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k \right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (1.34)$$

$$H_{k'}^{\sin}(z) = \left(z^{M^-} - z^{-M^+ - 1} \right) \times \frac{\sin\left(-\frac{2\pi}{N} j_{k'} M^- + \phi_{k'} \right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{N} j_{k'} (M^- - 1) + \phi_{k'} \right) z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_{k'} \right) z^{-1} + z^{-2}}. \quad (1.35)$$

Если взять конкретные значения фаз (удовлетворяющие условию (1.33)):

$$\phi_k = -\frac{2\pi}{N} j_k (M - 0.5), \quad \phi_{k'} = -\frac{2\pi}{N} j_{k'} (M - 0.5),$$

то передаточные функции (1.34) и (1.35) упрощаются:

$$H_k^{\cos}(z) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k \right) \frac{\left(z^{M^-} - z^{-M^+ - 1} \right) \left(1 - z^{-1} \right)}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k \right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (1.36)$$

$$H_{k'}^{\sin}(z) = \sin\left(\frac{2\pi}{N} j_{k'} \right) \frac{\left(z^{M^-} - z^{-M^+ - 1} \right) \left(1 + z^{-1} \right)}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_{k'} \right) z^{-1} + z^{-2}}. \quad (1.37)$$

Отбросив в формулах (1.36), (1.37) постоянные для каждой функции коэффициенты, приходим к еще более простым выражениям:

$$H_k^{\cos}(z) = \frac{\left(z^{M^-} - z^{-M^+ - 1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k\right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (1.38)$$

$$H_{k'}^{\sin}(z) = \frac{\left(z^{M^-} - z^{-M^+ - 1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_{k'}\right) z^{-1} + z^{-2}}, \quad (1.39)$$

которые будем считать окончательными.

Выполнив те же упрощающие действия над последовательностями (1.31), (1.32), можно убедиться, что z -преобразованиям (1.38) и (1.39) соответствуют модифицированные функции вещественного базиса Фурье:

$$h_k^{\cos}(m) = \frac{\cos\left[\frac{2\pi}{N} j_k \left(m + M^- + \frac{1}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{N} j_k\right)} \left[u(m + M^-) - u(m - M^+ - 1) \right], \quad (1.40)$$

$$h_{k'}^{\sin}(m) = \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{N} j_{k'} \left(m + M^- + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{N} j_{k'}\right)} \left[u(m + M^-) - u(m - M^+ - 1) \right]. \quad (1.41)$$

Эти функции с точностью до коэффициентов совпадают с вещественными и мнимыми частями комплексных базисных функций сдвинутого дискретного преобразования Фурье (СДПФ) с параметрами сдвига $(0,5; 0)$ [37] для сигнала на интервале аргументов $\left[-M^-, M^+\right]$.

Из выражений (1.38), (1.39) видно, что передаточные функции звеньев имеют общие независимые от индексов множители. Это позволяет построить экономичные с вычислительной точки зрения каскадные рекурсивные процедуры получения отсчетов на выходах звеньев. Если не учитывать возможные совпадения индексов базисных функций (1.40) и (1.41), то рекурсивный вычислительный процесс можно описать следующей системой разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(n) = f(n+M^-) - f(n-M^+ - 1), \\ f_2(n) = f_1(n) - f_1(n-1), \\ f_3(n) = f(n) + f_1(n-1), \\ y_k(n) = \begin{cases} y_k(n-1) + f_1(n), & \text{при } j_k = 0, \\ 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k\right) y_k(n-1) - y_k(n-2) + f_2(n), & 0 < j_k < \frac{N}{2}, \\ y_{k'}(n) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_{k'}\right) y_{k'}(n-1) - y_{k'}(n-2) + f_3(n), & 0 < j_{k'} \leq \frac{N}{2}. \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.42)$$

При построении этой системы учтено, что среди рассматриваемых базисных функций, как и в базисе ДЭФ, имеется одна прямоугольная (функция (1.40) с индексом $j_k = 0$), и для соответствующего ей КИХ-звена реализована упрощенная схема рекурсивных вычислений.

Если базисные функции (1.40) и (1.41) входят в разложение (1.5) только парами при одинаковых значениях индексов ($j_k = j_{k'}$) за исключением «прямоугольника» (1.40) при $j_k = 0$, для которого пары нет, то фильтр оказывается более простым. Действительно, в данном случае вместо системы уравнений (1.42) можно построить другую, обеспечивающую меньшие вычислительные затраты:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(n) = f(n+M^-) - f(n-M^+ - 1), \\ f_2^{(k)}(n) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} j_k\right) f_2^{(k)}(n-1) - f_2^{(k)}(n-2) + f_1(n), \\ y_k(n) = \begin{cases} y_k(n-1) + f_1(n) & \text{при } j_k = 0, \\ f_2^{(k)}(n) - f_2^{(k)}(n-1) & \text{при } 0 < j_k < \frac{N}{2}, \end{cases} \\ y_{k'}(n) = f_2^{(k)}(n) + f_2^{(k)}(n-1) & \text{при } j_{k'} = j_k. \end{array} \right. \quad (1.43)$$

1.4 Секционирование импульсной характеристики КИХ-фильтров

Параллельно-рекурсивные фильтры позволяют резко снизить вычислительную сложность обработки сигналов по сравнению с прямой сверткой: объем вычислений в них пропорционален не размерам окна обработки, а всего лишь небольшому числу используемых параллельных звеньев. Но существует еще одна, дополнительная возможность уменьшения сложности фильтров за счет выбора в разложении (1.5) базисных функций специального вида.

Пусть базисные функции разложения (1.5) одномерной импульсной характеристики КИХ-фильтра отличаются друг от друга только сдвигом, то есть имеют вид:

$$h_k(m) = h^s(m - \gamma_k), \quad (1.44)$$

где $h^s(m)$ – последовательность конечной длины, задающая базис разложения; γ_k – целая константа – параметр сдвига k -й базисной функции относительно $h^s(m)$. В свою очередь

КИХ-фильтр с импульсной характеристикой $h^S(m)$ представим в виде L параллельных рекурсивно реализуемых звеньев:

$$h^S(m) = \sum_{l=0}^{L-1} b_l h_l^S(m), \quad (1.45)$$

где $\{b_l\}_{l=0}^{L-1}$ – коэффициенты разложения импульсной характеристики $h^S(m)$.

Подставим (1.44), (1.45) в (1.7) и далее в (1.6):

$$g(n) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \sum_{l=0}^{L-1} b_l y_l(n - \gamma_k) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} c_{kl} y_l(n - \gamma_k), \quad (1.46)$$

где

$$y_l(n) = \sum_{m=-M_l^-}^{M_l^+} h_l^S(m) f(n-m), \quad (1.47)$$

M_l^-, M_l^+ – целые константы, определяющие границы области ненулевых значений функций $h_l^S(m)$, c_{kl} – коэффициенты. Из записанных соотношений видно, что в рассматриваемом случае обработка данных может быть организована в два шага. Сначала, в соответствии с (1.47), производится рекурсивное вычисление сверток входного сигнала с импульсными характеристиками $h_l^S(m)$. Затем по (1.46) выполняется взвешенное суммирование только некоторых точек (отсчетов) промежуточных последовательностей, полученных на первом шаге.

В частном случае описанную процедуру можно интерпретировать как секционирование заданной импульсной характеристики

$h(m)$. Разобьем ее область ненулевых отсчетов $[-M^-, M^+]$ на K непересекающихся равных интервалов длиной $N' = N/K$. На каждом из интервалов $h(m)$ представим в виде линейной комбинации базисных функций

$$h_k(m) = \sum_{l=0}^{L-1} c_{kl} h_l^S(m - \gamma_k).$$

Очевидно, свертка входного сигнала $f(n)$ с секционированной импульсной характеристикой $h(m)$ может быть определена по формулам (1.46), (1.47).

Благодаря использованию базисных функций со сдвигом вида (1.44) для разложения импульсной характеристики может быть значительно уменьшена сложность рекурсивного вычисления свертки (1.47). Поэтому предлагаемый метод секционирования во многих случаях позволяет дополнительно снизить вычислительную сложность обработки сигнала.

2 ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ КИХ-ФИЛЬТРЫ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

2.1 Полиномиальные базисы и обобщенные моменты

Во многих прикладных задачах анализа изображений возникает необходимость обработки изображения КИХ-фильтром с импульсной характеристикой, описываемой степенным полиномом:

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \alpha_{kl} m_1^k m_2^l \quad (2.1)$$

при $(m_1, m_2) \in D$, где K, L – степени полинома по каждой из переменных; $\{\alpha_{kl}\}_{k,l=0}^{K,L}$ – его коэффициенты. Представление (2.1) является весьма универсальным и может быть использовано при сглаживании изображений, формировании признаков двумерных объектов в скользящем окне, цифровом моделировании линейных искажений оптических сигналов и т.д. [7,9,14,52]. Особое значение степенные полиномы имеют для вычисления так называемых «моментных инвариантов» – признаков, обладающих инвариантностью к преобразованиям изображения типа «поворот» и «масштабирование» [21,38,39,48,54].

Несложно показать, что, с одной стороны, степенной полином (2.1) всегда может быть преобразован к виду:

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \beta_{kl} q_k(m_1) q_l(m_2), \quad (2.2)$$

где

$$q_k(m) = \sum_{i=0}^k a_{ki} m^i \quad (2.3)$$

– любой «одномерный» полином k -го порядка с коэффициентами $\{a_{ki}\}_{i=0}^k$ ($a_{kk} \neq 0$); $\{\beta_{kl}\}_{k,l=0}^{K,L}$ – коэффициенты разложения импульсной характеристики по двумерному факторизуемому полиномиальному базису, введенному выражениями (2.2) и (2.3). С другой стороны, формула (2.1) может считаться частным случаем формулы (2.2), в котором у базисных функций (2.3) все коэффициенты кроме старших равны нулю. Таким образом, соотношения (2.1) и (2.2) эквивалентны с точки зрения описания импульсной характеристики КИХ-фильтра, однако, как будет показано ниже, выражение (2.2) более удобно для построения быстродействующих алгоритмов обработки изображений.

Подставив (2.2) в (1.14), получаем выражение для сигнала на выходе КИХ-фильтра, отличающееся от (1.16) двумерной индексацией линейных признаков:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \beta_{kl} \mu_{kl}(n_1, n_2). \quad (2.4)$$

Величины $\mu_{kl}(n_1, n_2)$, называемые иногда «обобщенными моментами», определяются как свертки входного сигнала с полиномиальными факторизуемыми ядрами

$$\mu_{kl}(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} q_k(m_1) q_l(m_2) f(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (2.5)$$

Полагая, что окно обработки D имеет прямоугольную форму (1.2), получим для вычисления обобщенных моментов выражение, аналогичное (1.19):

$$\mu_{kl}(n_1, n_2) = \sum_{m_2 = -M_2^-}^{M_2^+} q_l(m_2) \left[\sum_{m_1 = -M_1^-}^{M_1^+} q_k(m_1) f(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \right]. \quad (2.6)$$

Как и в общем случае, описанном в п. 1.2, вычисление обобщенных моментов можно производить путем последовательной обработки по каждой из координат, что дает основание ограничиться построением и исследованием одномерных полиномиальных базисов. Алгоритмы обработки сигналов фильтрами с полиномиальными импульсными характеристиками, разработанные в одномерном варианте, легко обобщаются и на двумерный случай.

2.2 Параллельно-рекурсивные алгоритмы вычисления обобщенных моментов

2.2.1 Вычисление обобщенных моментов для произвольного полиномиального базиса

Итак, для последовательно возрастающих значений аргумента n требуется вычислять одномерные обобщенные моменты для полиномиальных базисных функций (2.3):

$$\mu_k(n) = \sum_{m=-M^-}^{M^+} q_k(m) f(n-m), \quad 0 \leq k \leq K. \quad (2.7)$$

Очевидно, выражение (2.7) аналогично формуле (1.7), если в ней использовать базисные функции

$$h_k(m) = \sum_{i=0}^k a_{ki} m^i \left[u(m+M^-) - u(m-M^+ - 1) \right]. \quad (2.8)$$

Поскольку формула (2.8) является частным случаем (1.12), то и здесь применима общая методика построения разностных уравнений, описывающих параллельное рекурсивное вычисление сверток (2.7), через передаточные функции вида (1.13). Однако для полиномиального базиса сконструированные независимо для различных звеньев разностные схемы оказываются весьма громозд-

кими для реализации, хотя их вычислительная сложность (как и в общем случае) и не зависит от размеров окна обработки. Существует другая возможность более быстрого вычисления моментов (2.7), а именно, отказавшись от полной независимости параллельных звеньев, можно построить «каскадно-рекурсивные» процедуры [10-14,43-47].

Для построения соответствующего алгоритма установим связь между моментами на текущем и предыдущем шаге. Согласно (2.3), сдвинутая на шаг базисная функция $q_k(m+1)$ остается степенным полиномом k -го порядка и, следовательно, единственным образом разлагается по базису полиномов $\{q_i(m)\}_{i=0}^k$:

$$q_k(m+1) = \sum_{i=0}^k a_{ki} \sum_{j=0}^i C_i^j m^j = \sum_{i=0}^k b_{ki} q_i(m), \quad (2.9)$$

где C_i^j – биномиальные коэффициенты; $\{b_{ki}\}_{i=0}^k$ – коэффициенты указанного разложения.

В общем случае коэффициенты b_{ki} определяется через a_{ki} следующим образом:

$$b_{kk} = 1,$$

$$b_{ki} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=i}^k a_{kj} C_j^i - \sum_{j=i+1}^k b_{kj} a_{ji} \right), \quad i = k-1, k-2, \dots, 0.$$

Из соотношений (2.7) и (2.9) выводится основная рекуррентная формула:

$$\mu_k(n) = \sum_{i=0}^k \left(\begin{array}{l} b_{ki} \mu_i(n-1) + q_k(-M^-) f(n+M^-) - \\ - q_k(M^+ + 1) f(n-M^+ - 1) \end{array} \right). \quad (2.10)$$

Из соотношения (2.10) видно, что вычисление любого момента $\mu_k(n)$ требует вычисления и всех моментов младших порядков. При этом сложность одного шага формирования полного набора моментов при $0 \leq k \leq K$ оказывается довольно высокой, она имеет примерно квадратичную зависимость от K : число операций сложения $U_+(K)$ и умножения $U_*(K)$ составляет

$$U_+(K) = U_*(K) = \frac{(K+1)(K+4)}{2}. \quad (2.11)$$

Приведенный параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления обобщенных моментов в скользящем окне может применяться при локальном разложении сигнала по любому известному полиномиальному базису: степенному, базисам дискретных ортогональных полиномов и др. [41,42]. Целесообразно однако указать новый класс полиномиальных базисов, специально адаптированных к рассматриваемой процедуре скользящего окна и позволяющих радикально снизить вычислительную сложность обработки сигналов (даже по сравнению с оценками (2.11)) за счет обнуления большей части коэффициентов в рекуррентной формуле (2.10).

2.2.2 Построение полиномиальных базисов с ускоренным вычислением обобщенных моментов

В [12,45,46] было показано, что существуют полиномы (2.3), для которых обеспечивается значительное снижение объема вычислений за счет обнуления части коэффициентов в разностных уравнениях (2.10):

$$b_{ki} = 0 \text{ при } 0 \leq i \leq k-2. \quad (2.12)$$

Путем несложных преобразований выражение (2.9) приводится к виду

$$q_k(m+1) = \begin{cases} q_0(m), & \text{при } k=0; \\ q_1(m) + \frac{a_{11}}{a_{00}} q_0(m), & \text{при } k=1; \\ q_k(m) + \frac{ka_{kk}}{a_{(k-1)(k-1)}} q_{k-1}(m) + \\ + \sum_{j=0}^{k-2} m^j \left[\sum_{i=j+1}^k C_i^j a_{ki} - \frac{ka_{kk} \cdot a_{(k-1)j}}{a_{(k-1)(k-1)}} \right], & \text{при } k \geq 2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Подбирая коэффициенты таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{cases} \sum_{i=j+1}^k C_i^j a_{ki} - a_{(k-1)j} = 0, & 0 \leq j \leq k-1, & k \geq 1, \\ \frac{ka_{kk}}{a_{(k-1)(k-1)}} = 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

можно получить набор полиномиальных функций, для которых справедлива следующая рекуррентная формула:

$$\begin{aligned} q_k(m+1) &= q_k(m) + q_{k-1}(m), & 1 \leq k \leq K, \\ q_0(m) &= 1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тогда схема расчета свертки (2.7) с учетом (2.12) записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \mu_k(n) = \mu_k(n-1) + \mu_{k-1}(n-1) + \\ + q_k(-M^-) f(n+M^-) - q_k(M^+ + 1) f(n-M^+ - 1), \\ \mu_0(n) = \mu_0(n-1) + f(n+M^-) - f(n-M^+ - 1), \\ 1 \leq k \leq K. \end{cases} \quad (2.16)$$

Сложность такой процедуры составляет:

$$U_+(K)=3K+2, \quad U_*(K)=2K+2, \quad (2.17)$$

соответственно, сложений и умножений на отсчет сигнала. Сравнительный анализ оценок (2.11) и (2.17) показывает, что для алгоритма (2.16) наблюдается радикальное снижение вычислительной сложности: вместо квадратичной зависимости от порядка моментов K в (2.11) имеет место линейная зависимость в (2.17).

2.2.3 Полиномиальные базисы с минимальной вычислительной сложностью

Рассмотрим $\{\mu_k(n)\}_{k=0}^K$ как самостоятельные величины (признаки) и поставим задачу разработки такого полиномиального базиса, для которого схема рекурсивного пересчета (2.16) будет простейшей. Следует отметить, что при расчете обобщенных моментов до K -ого порядка система (2.14) состоит из $K(K+1)/2$ уравнений с $(K+1)(K+2)/2$ неизвестными, то есть является недоопределенной и имеет бесконечное множество решений. Таким образом условия (2.14) задают семейство полиномиальных базисов с $(K+1)$ степенями свободы, которыми можно воспользоваться для дополнительного снижения сложности алгоритма (2.16).

Используем одну степень свободы этого семейства полиномиальных функций для того, чтобы выполнялось условие

$$q_0(n)=a_{00}=1, \quad (2.18)$$

а остальные K – для обнуления одного (для определенности последнего) коэффициента во всех разностных уравнениях (2.16), кроме первого:

$$q_k(M^++1)=0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (2.19)$$

При соблюдении обозначенных условий алгоритм вычисления обобщенных моментов становится более простым:

$$\begin{cases} \mu_0(n) = \mu_0(n-1) + f(n+M^-) - f(n-M^+ - 1), \\ \mu_k(n) = \mu_k(n-1) + \mu_{k-1}(n-1) + q_k(-M^-) f(n+M^-), \quad 1 \leq k \leq K. \end{cases}$$

А его сложность определяется следующими выражениями:

$$U_+(K) = 2K + 2, \quad U_*(K) = K, \quad (2.20)$$

что, несомненно, лучше предшествующих оценок. Соответствующий базис, задаваемый ограничениями (2.18), (2.19), был назван *базисом с минимальной вычислительной сложностью* (МВС).

2.3 Алгоритмы формирования МВС и МВС-подобных базисов

2.3.1 Алгоритм построения базиса МВС с обнулением на краю окна обработки

Обратимся к алгоритму параллельно рекурсивного расчета обобщенных моментов на основе базиса МВС. В выше приведенном описании алгоритма для формирования базиса были указаны только соотношения в виде равенств (2.14) и (2.18) и получаемый на их основе алгоритм рекурсивного расчета коэффициентов. Иначе говоря, не был определен явный вид базиса МВС. Оказывается, это возможно сделать. Для этого перейдем от представления полиномов в виде (2.3) к использованию формы записи с помощью корней. Для полинома k -ого порядка будет справедливо:

$$q_k(m) = a_k \prod_{i=0}^{k-1} (m - c_i^k), \quad 0 \leq k \leq K, \quad (2.21)$$

где набор $\{c_i^k\}_{i=0}^{k-1}$ – корни полинома k -й степени, которые в общем случае могут быть и комплексными. Вещественный множи-

тель a_k в нашем случае будет отвечать за $(K+1)$ -ю степень свободы, связанную с полиномом нулевой степени. Пусть нам необходимо, чтобы все полиномы до K -й степени включительно имели одним из корней некоторое число M , ($M = -M^-$ или $M = M^+ + 1$), то есть:

$$q_k(M) = 0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (2.22)$$

Будем рассматривать полиномы «снизу-вверх», начиная с первой степени. Для $k=1$ представление (2.21) упрощается:

$$q_1(m) = a_1(m - c_0^1).$$

Из условия (2.22) следует, что $c_0^1 = M$, и полином первого порядка имеет вид:

$$q_1(m) = a_1(m - M). \quad (2.23)$$

Из рекуррентного соотношения для полиномиального базиса (2.15) следует, что для полинома второго порядка выполняется равенство:

$$q_2(m+1) - q_2(m) = q_1(m).$$

или, посредством представления (2.21):

$$(m - (c_0^2 - 1))(m - (c_1^2 - 1)) - (m - c_0^2)(m - c_1^2) = \frac{a_1}{a_2}(m - M).$$

Учитывая условие (2.22) для полинома второго порядка, можно несколько конкретизировать последнюю формулу:

$$(m - (M - 1))(m - (c_1^2 - 1)) - (m - M)(m - c_1^2) = \frac{a_1}{a_2}(m - M).$$

Подставим $m=M$ в правую и левую части последнего равенства, получим:

$$1\left(M - \left(c_1^2 - 1\right)\right) - 0 = 0 ,$$

откуда

$$c_1^2 = M + 1 ,$$

то есть полином второй степени имеет вид:

$$q_2(m) = a_2(m - M)(m - (M + 1)) .$$

Аналогичные преобразования можно проделать для третьей, четвертой и больших степеней. В результате делаем вывод, что полином k -й степени имеет вид :

$$q_k(m) = a_k \prod_{i=0}^{k-1} (m - (M + i)), \quad 1 \leq k \leq K .$$

При этом существует зависимость между вещественными множителями, а именно

$$\begin{aligned} q_k(m+1) - p_k(m) &= a_k \prod_{i=0}^{k-1} (m+1 - (M+i)) - a_k \prod_{i=0}^{k-1} (m - (M+i)) = \\ &= a_k \left(\prod_{i=-1}^{k-2} (m - (M+i)) - \prod_{i=0}^{k-1} (m - (M+i)) \right) = \\ &= ((m - M + 1) - (m - M - k + 1)) a_k \prod_{i=0}^{k-2} (m - (M+i)) = \\ &= k \cdot a_k \prod_{i=0}^{k-2} (m - (M+i)) = q_{k-1}(m), \end{aligned}$$

то есть все корни за исключением крайнего правого переходят к младшему полиному, а множитель $a_{k-1} = k \cdot a_k$.

Используя оставшуюся степень свободы для выполнения условия $a_0=1$, запишем общий вид полиномиального базиса МВС:

$$\begin{cases} q_0(m)=1, \\ q_k(m)=\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(m-(M+i)), \quad 1 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (2.24)$$

где $M=-M^-$ или $M=M^++1$ (см. рисунок 2.1). Переход же от полученного представления (2.24) к представлению (2.3), при необходимости, может быть легко произведён на основании теоремы Виета [2], устанавливающей связь между соответствующими коэффициентами. Необходимо отметить, что при генерации рекурсивных полиномов с минимальной вычислительной сложностью вовсе не обязательно генерировать все $(K+1)$ полиномов по (2.24), а затем переходить к представлению (2.3).

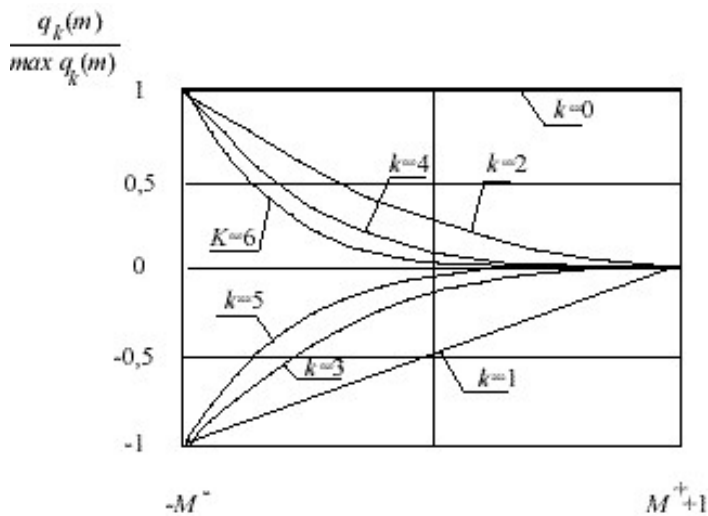


Рисунок 2.1. – Полиномиальный базис с минимальной вычислительной сложностью

Достаточно построить один старший полином в соответствии с приведенной формулой, привести его к виду (2.3), а затем использовать процедуру построения рекурсивного полиномиального базиса по полиному наивысшего порядка по следующей схеме:

$$a_{(k-1)j} = \sum_{i=j+1}^k C_i^j a_{ki}, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (2.25)$$

Отметим два важных свойства построенного набора полиномиальных функций, которые понадобятся в дальнейшем.

А. Целочисленность значений базиса МВС

Пусть $M = -M^-$, тогда $m > M$. Очевидно, что $p_k(m) = 0$ при $M < m < M+k$. Тогда для интервала $m \geq M+k$ справедливо:

$$q_k(m) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (m - (M+i)) = \frac{\prod_{i=1}^{m-M} i}{k! \prod_{i=1}^{m-M-k} i} = \frac{(m-M)!}{k!(m-M-k)!}, \quad 0 \leq k \leq K,$$

тогда очевидно, что значениями полиномиальных базисных функций являются биномиальные коэффициенты, то есть целые числа:

$$q_k(m) = C_{m+M^-}^{m+M^- - k}, \quad 0 \leq k \leq K,$$

Пусть теперь $M = M^+ + 1$, тогда $m < M < M+k$, и тогда для этого интервала справедливо:

$$\begin{aligned} q_k(m) &= (-1)^k \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} ((M+i) - m) = \\ &= (-1)^k \frac{\prod_{i=1}^{M-m-1-k} i}{k! \prod_{i=1}^{M-m-1} i} = (-1)^k C_{M-m-1}^{M-m-1-k}, \quad 0 \leq k \leq K; \end{aligned}$$

то есть значения полиномов в этом случае также являются целыми числами:

$$q_k(m) = (-1)^k C_{M^+ - m + k}^{M^+ - m}, \quad 0 \leq k \leq K.$$

Б. Изменение области нулей в базисе МВС

Из выражения (2.24) очевидно, что корни каждого из полиномов в базисе МВС расположены на действительной оси последовательно в отсчетах целочисленного аргумента. При этом с переходом от старшего полинома к младшему эта «область нулей» сужается, теряя один ноль с края области, как показано на рисунке 2.2. Подобное можно предположить, зная полином старшего порядка и рекурсивное выражение (2.15) для полиномиальных функций.

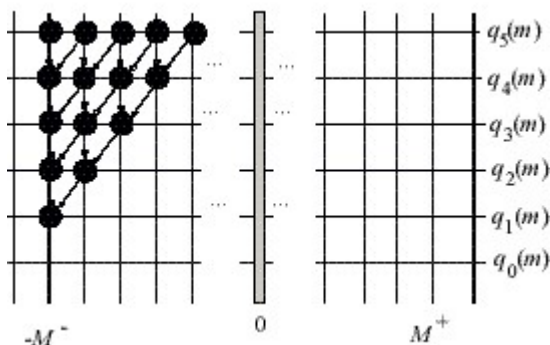


Рисунок 2.2 – Изменение «области нулей» в базисе МВС

2.3.2 МВС-подобные базисы с модифицированной схемой рекурсии

Имея представление о том, как происходит изменение базисных функций можно, не используя рекурсивную схему пересчета коэффициентов (2.14) получить выражение для полинома старшего порядка в базисах с такой же вычислительной сложностью, как

и базис МВС. А именно, необходимо расположить нули полиномиальных функций последовательно в целочисленных отсчетах вблизи границ окна обработки справа от них, как показано на рисунке 2.3.

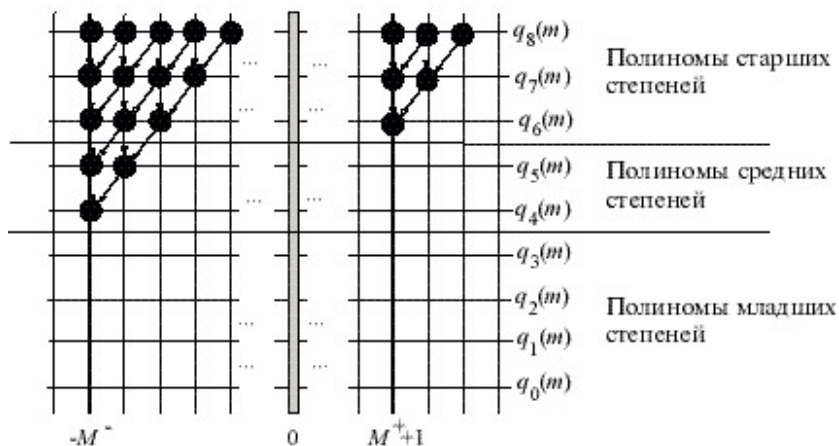


Рисунок 2.3 – Изменение «области нулей» в МВС-подобном базисе

При этом для полиномов старших степеней схема рекурсивно-пересчета моментов оказывается простейшей:

$$\mu_k(n) = \mu_k(n-1) + \mu_{k-1}(n-1),$$

для полиномов средних степеней остается прежней:

$$\mu_k(n) = \mu_k(n-1) + \mu_{k-1}(n-1) + q_k(M^+ + 1) f(n - M^+ - 1),$$

а для полиномов младших степеней записывается в общем виде:

$$\begin{cases} \mu_k(n) = \mu_k(n-1) + \mu_{k-1}(n-1) + \\ \quad + q_k(-M^-) f(n + M^-) - q_k(M^+ + 1) f(n - M^+ - 1), \quad k > 0, \\ \mu_0(n) = \mu_0(n-1) + f(n + M^-) - f(n - M^+ - 1). \end{cases}$$

Можно показать, что сложность подобного рекурсивного алгоритма расчета моментов не зависит от соотношения в распределении корней полинома между правым и левым краями окна обработки и определяется все той же формулой (2.20).

Учитывая вышесказанное, а также требование нормировки для полинома нулевого порядка в форме $q_0(n)=1$, получим следующее выражение для полиномов старшего порядка в наборах МВС-подобных полиномиальных базисов ($K_1 + K_2 = K$):

$$q_K(m) = \frac{1}{K!} \prod_{i_1=0}^{K_1-1} \left(m - (-M^- + i_1) \right) \prod_{i_2=0}^{K_2-1} \left(m - (M^+ + 1 + i_2) \right). \quad (2.26)$$

Все остальные базисные функции соответствующего набора могут быть получены с использованием формулы пересчета (2.25).

Выражение для базиса МВС (2.24) оказывается частным случаем формулы (2.26). Более того, как и для базиса МВС, для МВС-подобных базисов может быть указано выражение (для полинома старшего порядка) с использованием биномиальных коэффициентов. А именно, легко показать, что справедливо следующее представление:

$$q_K(m) = \frac{C^{m+M^- - K_1} C^{M^+ - m}}{C^{m+M^-} C^{M^+ - m + K_2}},$$

$$C_{K_1 + K_2}^{K_1},$$

и целочисленность в общем случае не присутствует.

Таким образом, в рамках указанного обобщения может быть получено $(K+1)$ различных наборов МВС-подобных полиномиальных базисов и схем рекурсивного вычисления соответствующих обобщенных моментов. Вопрос целесообразности использования того или иного набора для задач обнаружения и распознавания может решаться либо на основе анализа инфор-

мативности какого-либо подмножества из набора либо на основе анализа качества самого базиса.

2.4 Параллельно-рекурсивный алгоритм на основе полиномиальных базисов четных степеней

В п. 2.3. были введены семейства базисов, обеспечивающее вычисление КИХ-свертки с минимальным количеством арифметических операций при произвольном виде импульсной характеристики. Существует однако достаточно широкий круг задач, когда необходимо производить вычисление двумерной свертки (1.14) с импульсными характеристиками специального вида. Так, например, в задачах фильтрации изображений и цифрового моделирования видеоинформационного тракта, импульсные характеристики часто оказываются четными функциями. В связи с этим представляется целесообразным построить семейство полиномиальных базисных функций, адаптированных специально для описания четных импульсных характеристик, а также разработать алгоритмы параллельно-рекурсивной фильтрации изображений с использованием подобных базисов. Будем проводить рассуждения в терминах одномерных сигналов, а затем обобщим результаты на двумерный случай.

2.4.1 Семейство рекурсивных полиномиальных функций четных и нечетных степеней

Как отмечается в [30,36] расчет свертки вида (2.7) производится эффективно в случае, если фильтр с конечной импульсной характеристикой $q_k(m)$ описывается разностным уравнением, то есть реализуется рекурсивно. Таким образом, задача заключается в поиске полиномиальных функций (2.3), позволяющих работать в рамках простых рекурсивных схем. При этом границы поиска подобного полиномиального набора ограничены возможностью

использования $(K+1)$ степеней свободы, каждая из которых соответствует одному из коэффициентов в представлении полинома старшего порядка.

Легко показать, что для произвольного полинома K -го порядка можно подобрать полином $(K-1)$ -го порядка так, чтобы выполнялось условие:

$$q_k(m) = q_k(m-1) + q_{k-1}(m), \quad (k > 0).$$

В свою очередь, для полинома $(K-1)$ -го порядка можно подобрать полином $(K-2)$ -го порядка, для которого справедливо равенство:

$$q_k(m) = q_k(m-1) + q_{k-1}(m-1), \quad (k > 0).$$

Тогда полиномы $(K-1)$ -го порядка и $(K-2)$ -го порядка связаны соотношением:

$$q_k(m) = 2q_k(m-1) - q_k(m-2) + q_{k-2}(m-1), \quad (k \geq 2). \quad (2.27)$$

Набор базисных функций, отвечающих этому соотношению, может быть использован в процедуре параллельно-рекурсивного расчета свертки (2.7).

Теперь определим общие ограничения, налагаемые на вид базиса и возникающие при выполнении соотношения (2.27). Подставив выражение (2.3) в последнее разностное уравнение, получим ($k \leq K$):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{(k-2)(2j)} = 2 \sum_{i=j+1}^{[k/2]} a_k(2i) C_{(2i)}^{(2j)}, \quad 0 \leq j \leq [k/2] - 1, \\ a_{(k-2)(2j+1)} = 2 \sum_{i=j+1}^{\left[\frac{k-1}{2} \right]} a_k(2i+1) C_{(2i+1)}^{(2j+1)}, \quad 0 \leq j \leq [(k-1)/2] - 1, \end{array} \right. \quad (2.28)$$

где [...] – целая часть числа, C_i^j – биномиальные коэффициенты. Легко показать, что семейству рекурсивных полиномиальных функций, заданных выражением (2.27), присуще следующее свойство. Если известно, что одна из базисных функций данного семейства является симметричной относительно нуля функцией, то и все базисные функции меньших степеней также являются симметричными. Используем это свойство в дальнейшем, а набор полиномиальных функций удовлетворяющих разностному уравнению (2.27) и, соответственно, соотношению (2.28) с четными индексами k назовем семейством полиномиальных функций четных степеней для рекурсивной обработки [13, 23, 47].

2.4.2 Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления одномерных обобщенных моментов четных степеней

Пусть для последовательности возрастающих значений целочисленного аргумента n требуется вычислить обобщенные моменты четных степеней до K -го включительно. Подставляя в выражение для свертки (2.7) рекуррентное соотношение (2.27), получим ($2 \leq k \leq K$, k, K – четные):

$$\begin{cases} \mu_0(m) = \mu_0(m-1) + q_0(M)(f(m+M) - f(m-M-1)), \\ \mu_k(m) = 2\mu_k(m-1) + \mu_{k-2}(m-1) - \mu_k(m-2) + \\ \quad + q_k(-M)f(m+M) - q_k(M+1)f(m-M-1) - \\ \quad - q_k(-M-1)f(m+M-1) + q_k(M)f(m-M-2). \end{cases} \quad (2.29)$$

Вычислительная сложность предложенной процедуры равна (здесь и везде далее умножение на «2» не учитывается):

$$U_+(K) = 3K + 2, \quad U_*(K) = 2K + 1.$$

Используем факт сохранения симметрии в семействе полиномиальных функций четных степеней для упрощения параллельно-

рекурсивного алгоритма расчета обобщенных моментов. Пусть самая старшая полиномиальная базисная функция является четной, тогда и весь базисный набор представляет собой совокупность заданных на симметричном интервале функций, для которых выполняется равенство (k – четное):

$$q_k(m) = q_k(-m), \quad m \in [-M, M], \quad 0 \leq k \leq K.$$

В этом случае схема (2.29) может быть преобразована к виду (k -четное):

$$\begin{cases} \mu_0(m) = \mu_0(m-1) + q_0(M)(f(m+M) - f(m-M-1)), \\ \gamma_1(m) = f(m-M-2) + f(m+M), \\ \gamma_2(m) = f(m-M-1) + f(m+M-1), \\ \mu_k(m) = 2\mu_k(m-1) + \mu_{k-2}(m-1) - \mu_k(m-2) - \\ - q_k(M+1)\gamma_2(m) + q_k(M)\gamma_1(m), \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Вычислительная сложность алгоритма на одном шаге составляет:

$$U_+(K) = 2K + 4, \quad U_*(K) = K + 1, \quad K > 0.$$

Заметим, что на обеспечение симметрии здесь были использованы $K/2$ степеней свободы, и одна степень свободы на обеспечение равенства $a_{00}=1$. Оставшиеся $K/2$ степеней свободы должны быть использованы для обнуления значений части полиномиальных функций на границе интервала, не выходя при этом за рамки четности базиса. Необходимого эффекта можно добиться следующим образом. Перепишем разностное уравнение (2.27) в виде:

$$q_{k-2}(m-1) = q_k(m) - 2q_k(m-1) + q_k(m-2). \quad (2.30)$$

Из (2.30) следует, что если корни полинома расположить на действительной оси последовательно в отсчетах целочисленного аргумента, то при переходе к полиному с меньшей степенью подобная «область нулей» сужается, теряя два нуля по краям области. Следовательно, если «область нулей» включает в себя интервал $[M, M+1]$, то для $(K/4)$ старших полиномов коэффициенты $q_k(M)$ и $q_k(M+1)$ будут нулевыми, а схема рекурсии простейшей. Для $(K/4)$ младших полиномов схема рекурсии не изменится, т.к. не будут равны нулю значения соответствующих коэффициентов. В случае, если количество полиномиальных базисных функций нечетно, возможно появление дополнительного рекурсивного звена для полинома степени $k=2[K/4]+2$ с нулевым значением одного из коэффициентов $q_k(M)$ или $q_k(M+1)$. Учитывая симметричность всех базисных функций, это явление может быть проиллюстрировано одной из двух схем, представленных на рисунке 2.4.

Таким образом, задача сводится к построению базиса по полиному наивысшего порядка, где последний имеет вид:

$$q_K(m) = \lambda_K \prod_{i=0}^{[K/2]-1} \left(m^2 - \left(M+1 + \left[\frac{K-2}{4} \right] - i \right)^2 \right).$$

Величина $\lambda_K = \frac{1}{K!}$ – нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение равенства $a_{00}=1$. Можно получить также выражение через биномиальные коэффициенты:

$$q_K(m) = \frac{C_{m-T-1+K/2}^{m-T-1} C_{m+T}^{m+T-K/2}}{C_K^{K/2}}, \quad T = M+1 + \left[\frac{K-2}{4} \right]. \quad (2.31)$$

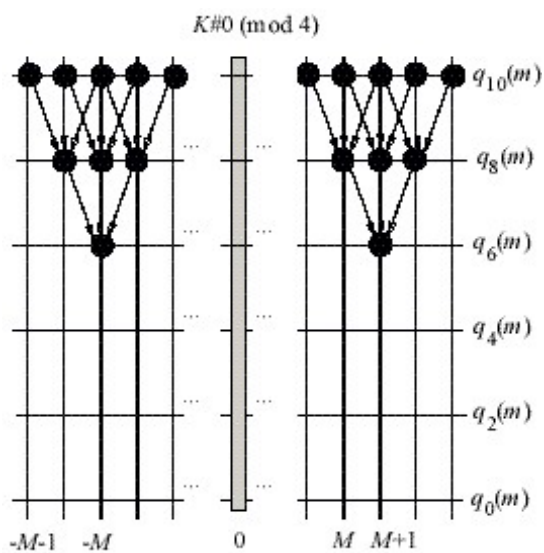
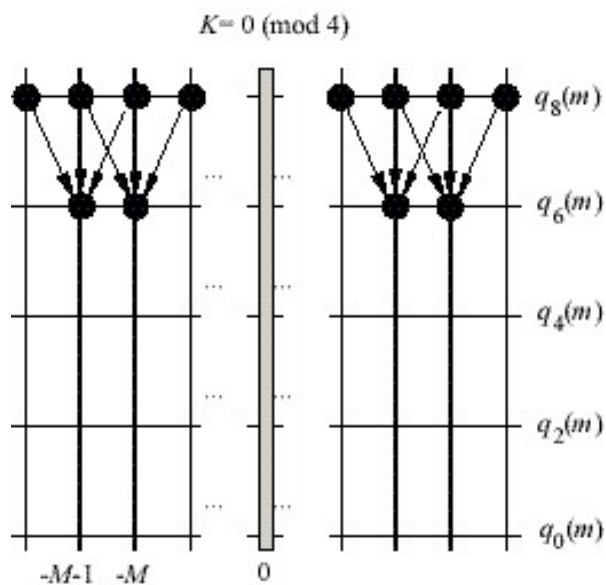


Рисунок 2.4 – Изменение «области нулей» в четном полиномиальном базисе

Представление младших полиномиальных базисных функций можно получить по формуле (2.28). На рисунке 2.5 приведен типичный вид нормированных полиномиальных базисных функций четных степеней, получаемых при использовании описанной схемы формирования базиса (2.28) для заданного полинома старшего порядка (2.31) при $K=12$.

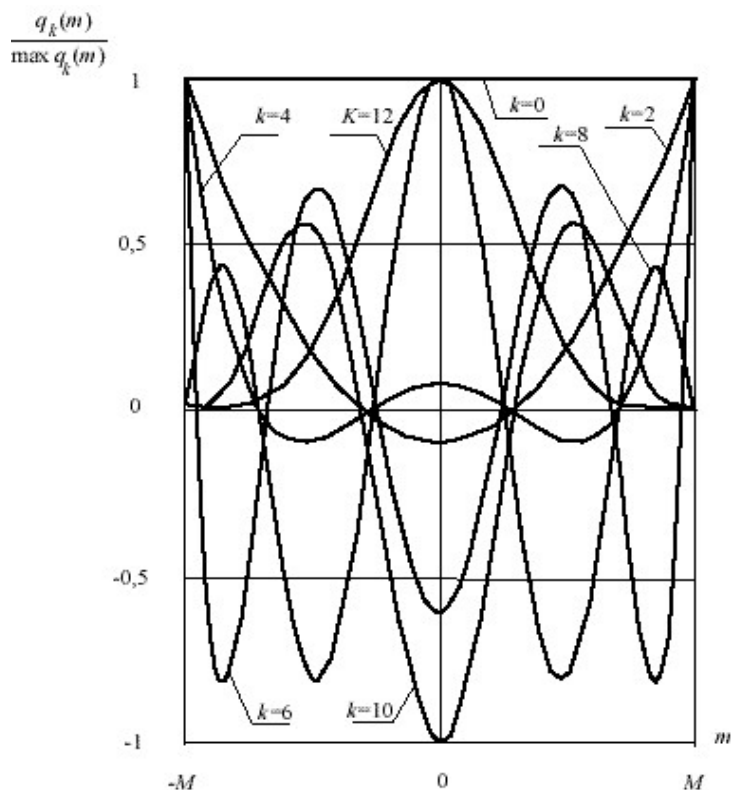


Рисунок 2.5 – Полиномиальные базисные функции четных степеней

Схема параллельно-рекурсивного расчета обобщенных моментов на основе полученного базиса имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0(m) = \mu_0(m-1) + f(m+M) - f(m-M-1), \\ \gamma_1(m) = f(m+M) + f(m-M-2), \\ \gamma_2(m) = f(m+M-1) + f(m-M-1), \\ \mu_k(m) = 2\mu_k(m-1) - \mu_k(m-2) + \mu_{k-2}(m-1) + \xi_k(m), \\ \text{где } \xi_k(m) = \begin{cases} q_k(M)\gamma_1(m) - q_k(M+1)\gamma_2(m), & \text{если } 2 \leq k \leq 2\lceil K/4 \rceil, \\ q_k(M)\gamma_1(m), & \text{если } K \neq 0 \pmod{4}, k = 2\lceil K/4 \rceil + 2, \\ 0, & \text{если } 2 + 2\lceil (K+2)/4 \rceil \leq k \leq K; \end{cases} \end{array} \right.$$

а сложность обработки определяется выражением:

$$U_+(K) = 1,5K + 4, \quad U_*(K) = K/2, \quad (K > 2).$$

что приблизительно в 1,33–2 раза ниже соответствующих затрат на алгоритм с базисом МВС.

При использовании моментов для вычисления свертки сигнала с четной конечной импульсной характеристикой сложность алгоритма модифицируется с учетом затрат на скалярное произведение и равна:

$$U_+(K) = 2K + 4, \quad U_*(K) = K, \quad (K > 2),$$

что приблизительно в 1,5–2 раза меньше, чем сложность алгоритма на основе МВС базиса.

2.4.3 Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления двумерных обобщенных моментов четных степеней

Зададим базисный набор, состоящий из разделимых четных полиномиальных функций следующего вида:

$$q_{kl}(m_1, m_2) = q_k(m_1)q_l(m_2),$$

здесь k, l – четные индексы, совместно задающие совокупность базисных функций и ограниченные некоторой парой (K, L) . Подобное представление позволяет, как отмечалось ранее, использовать построчно-столбцовую схему обработки (2.6). В результате алго-

ритм параллельно-рекурсивного вычисления двумерных четных обобщенных моментов примет следующий вид (k – четное):

- формирование вектора одномерных моментов в процессе рекурсивной обработки по строкам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0(m_1, m_2) = \mu_0(m_1 - 1, m_2) + f(m_1 + M_1, m_2) - f(m_1 - M_1 - 1, m_2) \\ \gamma_1(m_2) = f(m_1 + M_1, m_2) + f(m_1 - M_1 - 2, m_2), \\ \gamma_2(m_2) = f(m_1 + M_1 - 1, m_2) + f(m_1 - M_1 - 1, m_2), \\ \mu_k(m_1, m_2) = 2\mu_k(m_1 - 1, m_2) - \mu_k(m_1 - 2, m_2) + \\ \quad + \mu_{k-2}(m_1 - 1, m_2) + \xi_k(m_2), \\ \text{где } \xi_k(m_2) = \begin{cases} q_k(M_1)\gamma_1(m_2) - q_k(M_1 + 1)\gamma_2(m_2), & \text{если } 2 \leq k \leq 2[K/4], \\ q_k(M_1)\gamma_1(m_2), & \text{если } K \neq 0 \pmod{4}, k = 2[K/4] + 2, \\ 0, & \text{если } 2 + 2[(K + 2)/4] \leq k \leq K; \end{cases} \end{array} \right.$$

- вычисление матрицы двумерных моментов в процессе рекурсивной обработки по столбцам ($0 \leq k \leq K$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{k0}(m_1, m_2) = \mu_{k0}(m_1, m_2 - 1) + \mu_k(m_1, m_2 + M_2) - \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 1), \\ \psi_k^1(m_1, m_2) = \mu_k(m_1, m_2 + M_2) + \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 2), \\ \psi_k^2(m_1, m_2) = \mu_k(m_1, m_2 + M_2 - 1) + \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 1), \\ \mu_{kl}(m_1, m_2) = 2\mu_{kl}(m_1, m_2 - 1) - \mu_{kl}(m_1, m_2 - 2) + \\ \quad + \mu_{k(l-2)}(m_1, m_2 - 1) + \zeta_{kl}(m_1, m_2), \\ \text{где} \\ \zeta_{kl}(m_1, m_2) = \begin{cases} q_l(M_2)\psi_k^1(m_1, m_2) - q_l(M_2 + 1)\psi_k^2(m_1, m_2); & 2 \leq l \leq 2[L/4]; \\ q_l(M_2)\psi_1, & \text{если } L \neq 0 \pmod{4}, l = 2[L/4] + 2; \\ 0, & \text{если } 2 + 2[(L + 2)/4] \leq l \leq L. \end{cases} \end{array} \right.$$

Вычислительная сложность приведенной процедуры составляет:

$$U_+(K, L) = \frac{(K+2)(3L+14)}{4} + 1, \quad U_*(K, L) = \frac{(K+2)(2L+2)}{4} - 1, \\ (K, L > 2). \quad (2.32)$$

а в случае, если моменты используются для расчета свертки с двумерным осесимметричным неразделимым КИХ-фильтром, то с учетом затрат на последующее вычисление скалярного произведения (2.4) получим:

$$U_+(K, L) = (K+2)(L+4), \quad U_*(K, L) = 0,5(K+2)(L+2) - 1, \quad (K, L > 2),$$

что приблизительно в 2-4 раза меньше, чем для базиса МВС. При вычислении свертки с разделимой ИХ оценки следующие:

$$U_+(K, L) = 2(K+L) + 8, \quad U_*(K) = K + L, \quad (K > 2), \quad (2.33)$$

а достигаемый выигрыш эквивалентен выигрышу одномерного фильтра.

2.5 Параллельно-рекурсивной алгоритм фильтрации сигналов при нечетной полиномиальной импульсной характеристике

Полученные результаты для четного полиномиального базиса легко переносятся на случай нечетных базисных функций.

2.5.1 Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления одномерных обобщенных моментов нечетных степеней

Пусть для последовательности возрастающих значений целочисленного аргумента n требуется вычислить обобщенные моменты нечетных степеней до степени K включительно. Подставляя в выражение для свертки (2.7) рекуррентное соотношение (2.30), получим ($3 \leq k \leq K$, k, K – нечетные):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1(m) = 2\mu_1(m-1) - \mu_1(m-2) + \\ \quad + q_1(-M)f(m+M) - q_1(M+1)f(m-M-1) - \\ \quad - q_1(-M-1)f(m+M-1) + q_1(M)f(m-M-2), \\ \mu_k(m) = 2\mu_k(m-1) + \mu_{k-2}(m-1) - \mu_k(m-2) + \\ \quad + q_k(-M)f(m+M) - q_k(M+1)f(m-M-1) - \\ \quad - q_k(-M-1)f(m+M-1) + q_k(M)f(m-M-2). \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Вычислительная сложность подобной процедуры:

$$U_+(K) = 3K + 2, \quad U_*(K) = 2K + 2.$$

Используем факт сохранения асимметрии в семействе полиномиальных функций нечетных степеней для упрощения параллельно-рекурсивного алгоритма расчета обобщенных моментов. Пусть самая старшая полиномиальная базисная функция является нечетной, тогда и весь базисный набор представляет собой совокупность заданных на симметричном интервале функций, для которых выполняется равенство (k – нечетное):

$$q_k(m) = -q_k(-m), \quad m \in [-M, M], \quad 1 \leq k \leq K.$$

В подобной ситуации схема (2.34) может быть преобразована к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(m) = f(m-M-2) - f(m+M), \\ \gamma_2(m) = f(m+M-1) - f(m-M-1), \\ \mu_1(m) = 2\mu_1(m-1) - \mu_1(m-2) + \gamma_1(m) + \frac{(M+1)}{M}\gamma_2(m), \\ \mu_k(m) = 2\mu_k(m-1) + \mu_{k-2}(m-1) - \mu_k(m-2) \\ \quad + q_k(M)\gamma_1(m) + q_k(M+1)\gamma_2(m). \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Вычислительные затраты подобного алгоритма на одном шаге составляют:

$$U_+(K) = 2K + 3, \quad U_*(K) = K.$$

На обеспечение симметрии были использованы $K/2$ степеней свободы, и одна степень свободы на обеспечение равенства $q_1(M)=1$. Оставшиеся $K/2$ степеней свободы должны быть использованы для обнуления значений части полиномиальных функций на границе интервала, не выходя при этом за рамки нечетности базиса. Необходимого эффекта можно добиться, располагая корни полинома старшего порядка тем же способом, что и для четного полиномиального базиса, как показано на рисунке 2.6.

Таким образом, как и в случае четных полиномиальных базисных функций, задача сводится к построению базиса по полиному наивысшего порядка, где последний имеет вид:

$$q_K(m) = \lambda_K \cdot m \cdot \prod_{i=0}^{[K/2]-1} \left(m^2 - \left(M+1 + \left[\frac{K-2}{4} \right] - i \right)^2 \right).$$

Величина $\lambda_K = \frac{1}{K! M}$ – нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение равенства $q_1(M)=1$. Представление с использованием биномиальных коэффициентов с точностью до множителя m/M совпадает с соответствующей формулой для четных полиномиальных базисов (2.31). Аналогично, значения базисной функции не являются целочисленными.

Выражения для младших базисных функций можно получить по формуле (2.28). На рисунке 2.7 приведен типичный вид нормированных полиномиальных базисных функций нечетных степеней, получаемых при использовании описанной схемы формирования базиса (2.28) для заданного полинома старшего порядка при $K=13$.

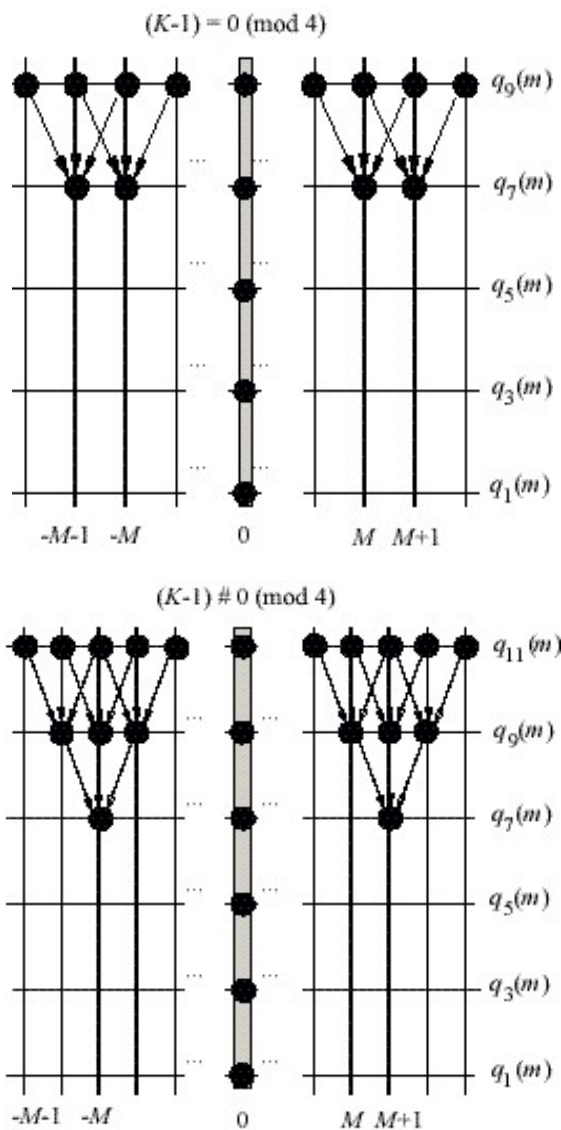


Рисунок 2.6 – Изменение «области нулей»
в нечетном полиномиальном базисе

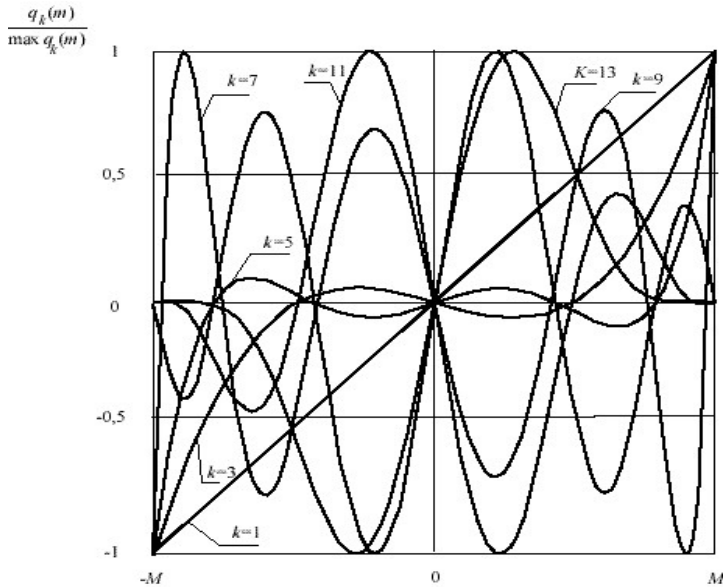


Рисунок 2.7 – Полиномиальные базисные функции нечетных степеней

Алгоритм параллельно-рекурсивного расчета обобщенных моментов на основе полученного базиса имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_1(m) &= f(m-M-2) - f(m+M), \\
 \gamma_2(m) &= f(m+M-1) - f(m-M-1), \\
 \mu_1(m) &= 2\mu_1(m-1) - \mu_1(m-2) + \gamma_1(m) + \frac{(M+1)}{M} \gamma_2(m), \\
 \mu_k(m) &= 2\mu_k(m-1) - \mu_k(m-2) + \mu_{k-2}(m-1) + \xi_k(m), \\
 \text{где } \xi_k(m) &= \begin{cases} q_k(M)\gamma_1(m) + q_k(M+1)\gamma_2(m), & \text{если } 3 \leq k \leq 2[(K-1)/4] + 1; \\ q_k(M)\gamma_1(m), & \text{если } (K-1) \neq 0 \pmod{4}, k = 2[(K-1)/4] + 3; \\ 0, & \text{если } 3 + 2[(K+1)/4] \leq k \leq K; \end{cases}
 \end{aligned} \right\}$$

а сложность обработки определяется выражением:

$$U_+(K) = 1,5K + 3,5, \quad U_*(K) = (K - 1)/2, \quad (K \geq 3),$$

что приблизительно в 1,33–2 раза меньше соответствующих затрат на алгоритм с базисом МВС.

При использовании моментов для вычисления свертки сигнала с нечетной конечной импульсной характеристикой оценка сложности алгоритма модифицируется с учетом затрат на скалярное произведение и равна:

$$U_+(K) = 2K + 3, \quad U_*(K) = K \quad (K \geq 3),$$

что в 1,5–2 раза лучше соответствующих оценок алгоритма с базисом МВС.

2.5.2 Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления двумерных обобщенных моментов нечетных степеней

Зададим базисный набор, состоящий из разделимых нечетных полиномиальных функций следующего вида:

$$q_{kl}(m_1, m_2) = q_k(m_1)q_l(m_2),$$

здесь k, l – четные индексы, совместно задающие совокупность базисных функций и ограниченные некоторой парой (K, L) . Тогда алгоритм параллельно-рекурсивного вычисления двумерных нечетных обобщенных моментов примет вид (k – нечетное):

– формирование вектора одномерных моментов в процессе рекурсивной обработки по строкам:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_0(m_1, m_2) = \mu_0(m_1 - 1, m_2) + f(m_1 + M_1, m_2) - f(m_1 - M_1 - 1, m_2), \\
\gamma_1(m_2) = f(m_1 - M_1 - 2, m_2) - f(m_1 + M_1, m_2), \\
\gamma_2(m_2) = f(m_1 + M_1 - 1, m_2) - f(m_1 - M_1 - 1, m_2), \\
\mu_k(m_1, m_2) = 2\mu_k(m_1 - 1, m_2) - \mu_k(m_1 - 2, m_2) \\
\qquad \qquad \qquad + \mu_{k-2}(m_1 - 1, m_2) + \xi_k(m_2), \\
\text{где} \\
\xi_k(m_2) = \begin{cases} q_k(M_1)\gamma_1(m_2) - q_k(M_1 + 1)\gamma_2(m_2), & \text{если } 3 \leq k \leq 2[(K-1)/4] + 1; \\ q_k(M_1)\gamma_1(m_2), & \text{если } (K-1) \neq 0 \pmod{4}, \quad k = 2[(K-1)/4] + 3; \\ 0, & \text{если } 3 + 2[(K+1)/4] \leq k \leq K. \end{cases}
\end{array} \right.$$

– вычисление матрицы двумерных моментов в процессе рекурсивной обработки по столбцам ($1 \leq k \leq K$):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_{k0}(m_1, m_2) = \mu_{k0}(m_1, m_2 - 1) + \mu_k(m_1, m_2 + M_2) - \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 1), \\
\psi_k^1(m_1, m_2) = \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 2) - \mu_k(m_1, m_2 + M_2), \\
\psi_k^2(m_1, m_2) = \mu_k(m_1, m_2 + M_2 - 1) - \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 1), \\
\mu_{kl}(m_1, m_2) = 2\mu_{kl}(m_1, m_2 - 1) - \mu_{kl}(m_1, m_2 - 2) + \\
\qquad \qquad \qquad + \mu_{k(l-2)}(m_1, m_2 - 1) + \zeta_{kl}(m_1, m_2), \\
\text{где} \\
\zeta_{kl}(m_1, m_2) = \begin{cases} q_l(M_2)\psi_k^1(m_1, m_2) - q_l(M_2 + 1)\psi_k^2(m_1, m_2), & 3 \leq l \leq 2[(L+1)/4], \\ q_l(M_2)\psi_k^1, & \text{если } (L-1) \neq 0 \pmod{4}, \quad l = 2[(L-1)/4] + 3, \\ 0, & \text{если } 3 + 2[(L+1)/4] \leq l \leq L. \end{cases}
\end{array} \right.$$

Выражение для вычислительной сложности приведенной процедуры практически совпадает с соответствующим выражением для четного полиномиального базиса (2.32)-(2.33).

2.6 Оценка качества полиномиальных базисов по различным критериям

Как уже отмечалось ранее, вопрос целесообразности использования того или иного набора полиномиальных базисных функций для задач обработки изображений может решаться либо на основе анализа информативности какого-либо подмножества из набора, либо на основе анализа качества самого базиса.

Можно предложить три критерия для оценки качества базиса. Первый из них связан со спецификой реализации вычислений на процессорах с фиксированной разрядной сеткой. В такой ситуации нас интересует диапазон значений формируемых моментов, а значит и диапазон значений полиномиальных базисных функций. Диапазон моментов будем оценивать следующей величиной:

$$diap = \max_k \sum_{m=-M^-}^{M^+} |q_k(m)|.$$

Второй критерий для оценки качества набора базисных функций связан со спецификой реализации вычислений на процессорах с плавающей точкой. Тогда интерес представляет вопрос устойчивости вычисления или вопрос обусловленности матрицы моментов. Из численных методов известно [2,22], что, чем лучше обусловлена матрица (взаимной корреляции базисных функций), тем устойчивее получаемое решение (например, при решении системы линейных уравнений, обращении матрицы и т.д.). Число обусловленности для матрицы \mathbf{B} рассчитывается следующим образом:

$$cond \mathbf{B} = \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{B}^{-1}\|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма матрицы. Для квадратичной нормы число обусловленности равно:

$$\text{cond}\mathbf{B} = \sqrt{\frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}}}$$

Здесь $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное собственные значения матрицы.

Третий критерий для оценки качества набора базисных функций связан с различной степенью его «ортогональности» или «коррелированности». Чем меньше уровень корреляции между базисными функциями, тем проще производить классификацию и тем лучше соответствующий набор. Принято оценивать коэффициент сопряженности по норме Гильберта-Шмидта [7]:

$$\text{norm}\mathbf{B} = \sqrt{\frac{1}{K(K+1)} \sum_{i=0}^K \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^K \left(\frac{b_{ij}}{\sqrt{b_{ii}b_{jj}}} \right)^2},$$

здесь b_{ij} – элементы матрицы. Для ортогональной системы значение этой величины равно нулю, максимальное значение этой величины равно единице.

Поскольку перебрать все возможные комбинации окон, степеней полиномов невозможно, приведем несколько примеров, по которым и определим основные правила выбора наборов базисных функций. В качестве аргументов на графиках рисунке 2.8 используется величина, задающая соотношение количества нулей в правой и левой области $K_1 - K_2$. Линии на графиках соответствуют следующим наборам базисных функций:

« ——— » (сплошная линия) – МВС-подобные базисные функции;

« » (пунктирная линия) – четные полиномиальные базисные функции;

« ----- » (штриховая линия) – нечетные полиномиальные базисные функции.

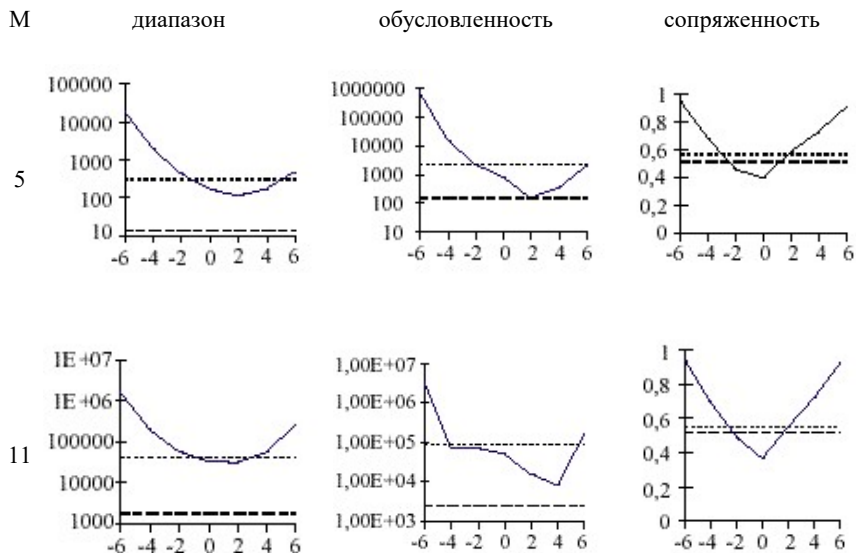


Рисунок 2.8 – Исследование качества наборов полиномиальных базисов для рекурсивной обработки ($M = M^- = M^+$, $K = 6$).

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- общий вид зависимости введенных показателей для МВС-подобных базисов практически не зависит от размеров окна обработки;
- наилучшие значения показателей среди МВС-подобных базисов имеет набор, порождающий полином которого имеет набор корней с приблизительно равным распределением между правой и левой границей окна обработки;

- в целом матрица корреляций МВС-подобных базисных функций достаточно плохо обусловлена;
- среди всех базисов наименьшим диапазоном и наилучшей обусловленностью обладают нечетные полиномиальные базисы;
- базисные функции всех наборов сильно сопряжены.

3 РАСЧЕТ И ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

3.1 Общая схема расчета параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров

При конструировании параллельно-рекурсивного КИХ-фильтра необходимо решить три задачи:

- выбрать размеры окна обработки и класс базисных функций разложения (1.5) или (1.15);
- из полного множества базисных функций выбранного класса выделить фактически используемые в разложении K функций;
- рассчитать коэффициенты фильтра.

Первая задача может быть решена эвристически. Вторая и третья – решаются одновременно, в ходе переборной процедуры численных расчетов [30, 32].

Выделенное подмножество из K базисных функций должно обеспечивать как можно более высокую эффективность обработки сигналов. Для определения наилучшего подмножества в общем случае нужно перебрать все возможные сочетания по K базисным функциям в их полном множестве, вычислить для каждого сочетания некоторый показатель качества R и найти вариант, соответствующий максимальному значению показателя. Однако такой перебор оказывается практически неосуществимым из-за чрезмерного объема необходимых вычислений.

Наиболее просто было бы заранее ввести некоторое упорядочение базисных функций (например, для базиса Фурье – по возрастанию «частотного индекса») и использовать первые K функций из упорядоченного набора. Но, во-первых, не всегда удается указать «естественный» порядок следования функций (для прямо-

угольного базиса, в двумерном случае и т.д.), и, во-вторых, выбранное подмножество может оказаться весьма далеким от оптимального.

В [30, 32] для выбора базисных функций предлагается использовать субоптимальный метод последовательного присоединения («селекции вперед»), широко применяемый для выделения подмножества признаков в задачах распознавания образов. Согласно ему, сначала выбирается единственная функция, обеспечивающая максимум показателя качества, затем к ней присоединяется еще одна, максимизирующая показатель в паре с уже выбранной, и так далее до получения набора из K функций. (Для базиса Фурье в варианте с попарной реализацией звеньев процедура модифицируется: на каждом шаге добавляется не по одной, а по группе функций, связанных одинаковыми значениями индексов). Данный метод резко сокращает вычислительные затраты по сравнению с полным перебором при незначительной потере оптимальности формируемого подмножества базисных функций.

Как следует из сказанного выше, для каждого анализируемого подмножества базисных функций требуется рассчитывать показатель качества обработки сигналов, а для окончательного варианта подмножества – и коэффициенты разложения импульсной характеристики фильтра в ряд (1.5) или (1.15). Интересно, что для многих задач обработки сигналов схема этих расчетов оказывается, по существу, идентичной [30,32].

Вектор-столбец искоемых коэффициентов $\mathbf{A}=\{a_k\}_{k=0}^{K-1}$ задается матричным соотношением вида

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}, \quad (3.1)$$

а показатель качества, максимизируемый в процессе выбора базисных функций, соотношением

$$R = \mathbf{A}^T \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{B} = \{b_{lk}\}_{l,k=0}^{K-1}$ – невырожденная симметрическая матрица, верхний индекс -1 означает обращение матрицы, $\mathbf{C} = \{c_k\}_{k=0}^{K-1}$ – вектор-столбец, верхний индекс T – транспонирование вектора. Специфика расчета фильтра для каждой конкретной задачи заключается только в способе вычисления элементов матрицы \mathbf{B} и вектора \mathbf{C} .

Ниже выводятся соотношения, по которым рассчитываются указанные элементы для некоторых наиболее важных прикладных задач. В целях компактности изложения детально рассматриваются случаи обработки одномерных сигналов, а для двумерных даются основные расчетные формулы. Все участвующие в преобразованиях последовательности считаются вещественными.

3.2 Среднеквадратичная аппроксимация импульсной характеристики

Выведем соотношения, по которым рассчитываются указанные элементы в задаче аппроксимации импульсной характеристики. Пусть требуется построить фильтр с импульсной характеристикой $h(m)$, которая аппроксимирует некоторую заданную импульсную характеристику $\bar{h}(m)$. Для решения этой задачи воспользуемся методом наименьших квадратов. Будем минимизировать взвешенную квадратичную ошибку аппроксимации:

$$\varepsilon^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) [\bar{h}(m) - h(m)]^2, \quad (3.3)$$

где $w(m)$ – некоторая неотрицательная весовая последователь-

ность. Подставим в формулу (3.3) выражение (1.5) для импульсной характеристики параллельного фильтра:

$$\varepsilon^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) \left[\bar{h}(m) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(m) \right]^2 \quad (3.4)$$

и приравняем нулю частные производные:

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_l} = 0, \quad 0 \leq l \leq K-1. \quad (3.5)$$

В результате получим систему линейных уравнений относительно коэффициентов фильтра:

$$\mathbf{BA} = \mathbf{C}, \quad (3.6)$$

в которой элементы матрицы \mathbf{B} и вектора \mathbf{C} вычисляются по формулам

$$b_{lk} = \sum_{m=-M^-}^{M^+} w(m) h_l(m) h_k(m), \quad c_k = \sum_{m=-M^-}^{M^+} w(m) \bar{h}(m) h_k(m). \quad (3.7)$$

Очевидно, решение данной системы определяется записанным выше соотношением (3.1). Подставив найденные коэффициенты фильтра в (3.4), несложно получить достигаемый минимум ошибки аппроксимации:

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) \bar{h}^2(m) - R, \quad (3.8)$$

где R вычисляется по формуле (3.2). В разности (3.8) первый член не зависит от параметров синтезируемого фильтра, поэтому уменьшение ошибки в процессе подбора базисных функций обеспечивается максимизацией показателя качества R .

Для двумерного параллельно-рекурсивного КИХ-фильтра, описываемого соотношениями (1.15) – (1.17), с импульсной характеристикой, аппроксимирующей двумерную функцию $\bar{h}(m_1, m_2)$, формулы (3.3), (3.7) и (3.8) модифицируются:

$$\varepsilon^2 = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} w(m_1, m_2) [\bar{h}(m_1, m_2) - h(m_1, m_2)]^2, \quad (3.9)$$

$$b_{lk} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} w(m_1, m_2) h_l(m_1, m_2) h_k(m_1, m_2),$$

$$c_k = \sum_{(m_1, m_2) \in D} w(m_1, m_2) \bar{h}(m_1, m_2) h_k(m_1, m_2), \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} w(m_1, m_2) \bar{h}^2(m_1, m_2) - R, \quad (3.11)$$

где $w(m_1, m_2)$ – двумерная неотрицательная весовая функция ошибки аппроксимации.

3.3 Среднеквадратичная аппроксимация частотной характеристики

Аппроксимация частотной характеристики ЛПП-системы является традиционной задачей проектирования цифровых фильтров [25]. Частотная характеристика синтезируемого фильтра (спектр Фурье его импульсной характеристики)

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-i\omega m}, \quad (3.12)$$

где ω – безразмерный вещественный частотный аргумент, должна здесь приближенно соответствовать некоторой требуемой частот-

ной характеристике $\bar{H}(e^{i\omega})$. Будем минимизировать взвешенную квадратичную ошибку аппроксимации, которую, принимая во внимание периодичность спектров последовательностей [25, 29], запишем в виде:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega}) \left| \bar{H}(e^{i\omega}) - H(e^{i\omega}) \right|^2 d\omega, \quad (3.13)$$

где $W(e^{i\omega})$ – вещественная четная неотрицательная весовая функция. С учетом формул (1.5) и (3.12) представим выражение (3.13) в более конкретной форме:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega}) \left| \bar{H}(e^{i\omega}) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k H_k(e^{i\omega}) \right|^2 d\omega, \quad (3.14)$$

где $H_k(e^{i\omega})$ – частотные характеристики параллельных звеньев фильтра. И далее через условие (3.5) перейдем к системе линейных уравнений вида (3.6) и ее решению (3.1), в которых элементы матрицы \mathbf{B} и вектора \mathbf{C} определяются следующим образом:

$$b_{lk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega}) H_l(e^{i\omega}) H_k(e^{i\omega}) d\omega, \quad (3.15)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega}) \bar{H}(e^{i\omega}) H_k(e^{i\omega}) d\omega.$$

Коэффициенты фильтра, найденные по формуле (3.1) с использованием (3.15), обеспечивают минимум ошибки аппроксимации (3.14):

$$\varepsilon_{\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega}) \left| \bar{H}(e^{i\omega}) \right|^2 d\omega - R, \quad (3.16)$$

где R – подлежащий максимизации показатель качества фильтра, вычисляемый по формуле (3.2).

На практике может оказаться более удобным использовать вместо спектральных функций, входящих в приведенные выше выражения, соответствующие им последовательности. Опираясь на свойства преобразования Фурье [25, 29], несложно трансформировать соотношения (3.15) и (3.16) к виду:

$$b_{lk} = \sum_{m=-M^-}^{M^+} \sum_{n=-M^-}^{M^+} h_l(m) h_k(n) w(m-n), \quad (3.17)$$

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-M^-}^{M^+} \bar{h}(m) h_k(n) w(m-n),$$

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{h}(m) \bar{h}(n) w(m-n) - R, \quad (3.18)$$

где

$$w(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega$$

– последовательность, соответствующая спектральной весовой функции $W(e^{i\omega})$,

$$\bar{h}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{H}(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega$$

– импульсная характеристика идеального (аппроксимируемого) фильтра.

При переходе к двумерным сигналам полученные расчетные соотношения претерпевают не принципиальные изменения. Выражение квадратичной ошибки вместо (3.13) принимает вид:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \left| \begin{array}{c} \bar{H}(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) - \\ - H(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \end{array} \right|^2 d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.19)$$

где $W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – вещественная неотрицательная весовая функция, обладающая свойством центральной симметрии:

$$W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = W(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}),$$

$\bar{H}(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – аппроксимируемая частотная характеристика, $H(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – частотная характеристика рассчитываемого фильтра. Вместо соотношений (3.15) следует использовать

$$b_{lk} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \cdot H_l(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \right) d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.20)$$

$$c_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \cdot \bar{H}(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \right) d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.21)$$

где $H_k(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – частотная характеристика параллельных звеньев фильтра, а вместо соотношений (3.17), (3.18) –

$$b_{lk} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum_{(n_1, n_2) \in D} \sum \left(\begin{array}{l} h_l(m_1, m_2) h_k(n_1, n_2) \cdot \\ \cdot w(m_1 - n_1, m_2 - n_2) \end{array} \right), \quad (3.22)$$

$$c_k = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{(n_1, n_2) \in D} \sum \left(\begin{array}{l} \bar{h}(m_1, m_2) h_k(n_1, n_2) \cdot \\ \cdot w(m_1 - n_1, m_2 - n_2) \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\min}^2 &= \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{l} \bar{h}(m_1, m_2) \bar{h}(n_1, n_2) \cdot \\ \cdot w(m_1 - n_1, m_2 - n_2) \end{array} \right) - R, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $w(n_1, n_2)$, $\bar{h}(n_1, n_2)$ – двумерные последовательности, соответствующие спектральным функциям $W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ и $\bar{H}(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$. Связь между всеми последовательностями и их спектрами определяется двумерным преобразованием Фурье [16, 26]. Например,

$$\left\{ \begin{array}{l} W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} w(n_1, n_2) \exp[-i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)], \\ w(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \exp[i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)] d\omega_1 d\omega_2. \end{array} \right.$$

Заметим, что если минимизировать невзвешенную квадратичную ошибку аппроксимации, то нет необходимости рассчитывать фильтр с использованием частотного подхода. В силу теоремы Парсеваля [16, 25], при отсутствующих (равных единице) весовых функциях критерии (3.13) и (3.19) эквивалентны соответственно критериям (3.3) и (3.9). При этом задача расчета фильтра с требуемой частотной характеристикой сводится к задаче аппроксимации импульсной характеристики, решение которой в вычислительном

плане проще. Однако в общем виде весовых функций аппроксимация импульсной и частотной характеристик приводит к разным фильтрам. В этой связи рассмотрим отдельно частные случаи выбора спектральных весовых функций, имеющие важное практическое значение.

3.4 Моделирование ЛПП-системы

Пусть требуется рассчитать фильтр, преобразующий входной сигнал $f(n)$ так же, как некоторая «идеальная» ЛПП-система с известными характеристиками. Обозначим как $y^{(h)}(n)$ сигнал на выходе рассчитываемого фильтра и как $y^{(\bar{h})}(n)$ сигнал на выходе идеальной системы. Далее рассмотрим два случая.

В первом случае предположим, что $f(n)$ – детерминированная последовательность со спектром $F(e^{i\omega})$. Будем минимизировать квадратичное отклонение одного выходного сигнала от другого:

$$\varepsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[g^{(\bar{h})}(n) - g^{(h)}(n) \right]^2 \quad (3.24)$$

В соответствии с теоремой Парсеваля и другими свойствами преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| G^{(\bar{h})}(e^{i\omega}) - G^{(h)}(e^{i\omega}) \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| F(e^{i\omega}) \right|^2 \left| \bar{H}(e^{i\omega}) - H(e^{i\omega}) \right|^2 d\omega, \end{aligned}$$

где $G^{(\bar{h})}(e^{i\omega})$, $G^{(h)}(e^{i\omega})$ – спектры выходных сигналов, $\bar{H}(e^{i\omega})$

– частотная характеристика идеальной системы, $H(e^{i\omega})$ – частотная характеристика рассчитываемого фильтра. Сравнение последнего выражения с критерием (3.13) показывает, что данная задача заключается в аппроксимации частотной характеристики $\bar{H}(e^{i\omega})$ с весовой функцией

$$W(e^{i\omega}) = |F(e^{i\omega})|^2, \quad (3.25)$$

при этом значения ошибок (3.13) и (3.24) совпадают. Спектральной весовой функции (3.25) соответствует последовательность

$$w(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)f(m+n), \quad (3.26)$$

она нужна при расчете фильтра с использованием соотношений (3.17) и (3.18).

Рассмотрим второй случай. Пусть $f(n)$ – стационарная случайная последовательность с нулевым средним и энергетическим спектром $\Phi_f(e^{i\omega})$. При расчете фильтра потребуем минимизации дисперсии разности выходных сигналов:

$$\varepsilon^2 = E \left\{ \left[g^{(\bar{h})}(n) - g^{(h)}(n) \right]^2 \right\}. \quad (3.27)$$

Известно [25], что эта дисперсия может быть вычислена через энергетический спектр разности, который, в свою очередь, выражается через энергетический спектр входной последовательности и частотные характеристики идеальной системы и рассчитываемого фильтра:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_f(e^{i\omega}) \left| \bar{H}(e^{i\omega}) - H(e^{i\omega}) \right|^2 d\omega.$$

Сопоставив это соотношение с критерием (3.13), видим, что мы снова пришли к задаче аппроксимации частотной характеристики при весовой функции

$$W(e^{i\omega}) = \Phi_f(e^{i\omega}), \quad (3.28)$$

а ошибки (3.13) и (3.27) опять совпадают. Для того, чтобы воспользоваться при расчетах формулами (3.17), (3.18), выполним над весовой функцией (3.28) обратное преобразование Фурье и получим, что

$$w(n) = B_f(n) \quad (3.29)$$

– автоковариационная функция входного сигнала.

Для двумерных сигналов и систем аналоги формул (3.24) – (3.29) имеют соответственно вид:

$$\varepsilon^2 = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left[g^{(\bar{h})}(n_1, n_2) - g^{(h)}(n_1, n_2) \right]^2, \quad (3.30)$$

$$W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \left| F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \right|^2, \quad (3.31)$$

$$w(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} f(m_1, m_2) f(m_1 + n_1, m_2 + n_2), \quad (3.32)$$

$$\varepsilon^2 = E \left\{ \left[g^{(\bar{h})}(n_1, n_2) - g^{(h)}(n_1, n_2) \right]^2 \right\}, \quad (3.33)$$

$$W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \Phi_f(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}), \quad (3.34)$$

$$w(n_1, n_2) = B_f(n_1, n_2), \quad (3.35)$$

где $g^{(\bar{h})}(n_1, n_2)$ и $g^{(h)}(n_1, n_2)$ – двумерные входные сигналы идеальной ЛПП-системы и рассчитываемого фильтра, $f(m_1, m_2)$ и $F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – двумерная входная детерминированная последовательность и ее спектр, $B_f(n_1, n_2)$ и $\Phi_f(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – АКФ и энергетический спектр входного стационарного случайного сигнала. Минимальные значения ошибок (3.30), (3.33) равны значению критерия (3.19).

3.5 Преобразование стационарных случайных процессов

Во многих практических ситуациях требуется применение линейного фильтра, преобразующего некоторый входной стационарный случайный процесс в выходной процесс с заданным энергетическим спектром. Задача расчета такого фильтра при его параллельной структуре является частным случаем рассмотренных выше задач. Известно [25], что энергетические спектры входного сигнала фильтра – $\Phi_f(e^{i\omega})$ и выходного сигнала – $\Phi_g(e^{i\omega})$ связаны между собой соотношением

$$\Phi_g(e^{i\omega}) = \Phi_f(e^{i\omega}) \left| \bar{H}(e^{i\omega}) \right|^2,$$

где $\bar{H}(e^{i\omega})$ – частотная характеристика фильтра. Поэтому при заданных энергетических спектрах сигналов на входе и выходе требуемая частотная характеристика фильтра записывается в виде

$$\bar{H}(e^{i\omega}) = \sqrt{\frac{\Phi_g(e^{i\omega})}{\Phi_f(e^{i\omega})}} \quad (3.36)$$

(предполагаем, что энергетический спектр входного сигнала строго положителен на всех частотах). Как следует из уже полученных результатов, в данном случае расчет параллельного фильтра по условию минимума критерия (3.27) сводится к аппроксимации частотной характеристики (3.36) с весовой функцией (3.28). Общие расчетные соотношения (3.15) и (3.17) при этом конкретизируются и записываются соответственно в виде:

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_f(e^{i\omega}) H_l(e^{i\omega}) H_k(e^{-i\omega}) d\omega, \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_f(e^{i\omega}) \Phi_g(e^{i\omega})} H_k(e^{-i\omega}) d\omega \end{aligned} \quad (3.37)$$

и

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \sum_{m=-M^-}^{M^+} \sum_{n=-M^-}^{M^+} h_l(m) h_k(n) B_f(m-n), \\ c_k &= \sum_{m=-M^-}^{M^+} \bar{h}(m) h_k(m), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где $B_f(m)$ – АКФ входного процесса, $f(m)$ – последовательность, вычисляемая через обратное преобразование Фурье:

$$\bar{h}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_f(e^{i\omega}) \Phi_g(e^{i\omega})} e^{i\omega m} d\omega .$$

При расчете коэффициентов параллельного фильтра по фор-

муле (3.1) с использованием (3.37) или (3.38) обеспечивается минимальное значение ошибки (3.27), равное

$$\varepsilon_{\min}^2 = D_g - R, \quad (3.39)$$

где D_g – дисперсия выходного случайного процесса.

Рассмотрим еще более конкретную задачу синтеза случайного процесса с энергетическим спектром $\Phi_g(e^{i\omega})$ из дискретного белого шума – последовательности независимых случайных величин с единичной дисперсией. В данном случае $\Phi_f(e^{i\omega})=1$, и выражения (3.37) и (3.38) упрощаются:

$$b_{lk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_l(e^{i\omega}) H_k(e^{-i\omega}) d\omega, \quad (3.40)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_g(e^{i\omega})} H_k(e^{-i\omega}) d\omega,$$

$$b_{lk} = \sum_{m=-M^-}^{M^+} h_l(m) h_k(m), \quad c_k = \sum_{m=-M^-}^{M^+} \bar{h}(m) h_k(m), \quad (3.41)$$

где

$$\bar{h}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_g(e^{i\omega})} e^{i\omega m} d\omega.$$

Сопоставление формул (3.41) и (3.7) показывает, что теперь задача свелась к невзвешенной квадратичной аппроксимации импульсной характеристики $\bar{h}(m)$.

В двумерном случае аналоги формул (3.37), (3.38), (3.40) и (3.41) имеют соответственно вид:

$$b_{lk} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\begin{array}{c} \Phi_f(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) H_l(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \cdot \\ \cdot H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \end{array} \right) d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.42)$$

$$c_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\begin{array}{c} \sqrt{\Phi_f(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \Phi_g(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})} \cdot \\ \cdot H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \end{array} \right) d\omega_1 d\omega_2,$$

$$b_{lk} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum_{(n_1, n_2) \in D} h_l(m_1, m_2) h_k(n_1, n_2) B_f(m_1 - n_1, m_2 - n_2), \quad (3.43)$$

$$c_k = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum \bar{h}(m_1, m_2) h_k(n_1, n_2),$$

где

$$\bar{h}(m_1, m_2) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\begin{array}{c} \sqrt{\Phi_f(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \Phi_g(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})} \cdot \\ \cdot \exp[i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)] \end{array} \right) d\omega_1 d\omega_2,$$

$$b_{lk} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_l(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.44)$$

$$c_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_g(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})} H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) d\omega_1 d\omega_2,$$

$$b_{lk} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum h_l(m_1, m_2) h_k(n_1, n_2), \quad (3.45)$$

$$c_k = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum \bar{h}(m_1, m_2) h_k(n_1, n_2),$$

где

$$\bar{h}(m_1, m_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_g(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})} \exp[i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)] d\omega_1 d\omega_2 .$$

Для минимального значения ошибки формирования выходного процесса остается в силе выражение (3.39).

3.6 Восстановление сигналов

Рассмотрим линейную модель наблюдения случайного сигнала на фоне помехи:

$$f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{h}(m) f_0(n-m) + v(n) , \quad (3.46)$$

где $\bar{h}(m)$ – импульсная характеристика «искажающей» ЛПП-системы, $f_0(n)$ и $v(n)$ – соответственно полезный сигнал и помеха, некоррелированные между собой стационарные случайные последовательности с нулевыми средними и автоковариационными функциями (АКФ) $B_{f_0}(m)$ и $B_v(m)$. Потребуем, чтобы рассчитываемый цифровой фильтр обеспечивал наилучшее в среднеквадратичном смысле восстановление полезного сигнала или, иными словами, чтобы для сигнала $g(n)$ на выходе фильтра дисперсия ошибки

$$\varepsilon^2 = E \left\{ [f_0(n) - g(n)]^2 \right\} \quad (3.47)$$

принимала минимальное значение (здесь и далее $E\{\dots\}$ – оператор математического ожидания). С учетом формул (1.6) и (1.7) конкретизируем выражение (3.47):

$$\varepsilon^2 = E \left\{ \left[f_0(n) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k \sum_{m=-M^-}^{M^+} h_k(m) f(n-m) \right]^2 \right\} \quad (3.48)$$

и далее через условие (3.5) перейдем к системе уравнений (3.6) и к формуле (3.1) для расчета коэффициентов фильтра, в которых в данном случае

$$b_{lk} = \sum_{m=-M^-}^{M^+} \sum_{n=-M^-}^{M^+} h_l(m) h_k(n) B_f(m-n), \quad (3.49)$$

$$c_k = \sum_{m=-M^-}^{M^+} h_k(m) B_{f_0 f}(-m),$$

где $B_f(m)$ – АКФ наблюдаемого входного сигнала, и $B_{f_0 f}(m)$ – взаимная ковариационная функция полезного и наблюдаемого сигналов. Эти функции выражаются через введенные выше характеристики модели наблюдения (3.46) [25]:

$$B_f(m) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \bar{h}(r) \bar{h}(r+p) B_{f_0}(m-p) + B_v(m),$$

$$B_{f_0 f}(m) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \bar{h}(p) B_{f_0}(m-p).$$

Подставив найденные коэффициенты фильтра в формулу (3.48), после ряда преобразований получаем значение минимальной дисперсии ошибки восстановления:

$$\varepsilon_{\min}^2 = D_{f_0} - R, \quad (3.50)$$

где D_{f_0} – дисперсия полезного сигнала.

Для двумерных сигналов соотношения (3.46), (3.47) и (3.49) модифицируются. Модель наблюдения записывается в виде:

$$f(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \bar{h}(m_1, m_2) f_0(n_1 - m_1, n_2 - m_2) + v(n_1, n_2), \quad (3.51)$$

минимизируемая ошибка восстановления:

$$\varepsilon^2 = E \left\{ \left[f_0(n_1, n_2) - g(n_1, n_2) \right]^2 \right\}, \quad (3.52)$$

элементы матрицы **B** и вектора **C** в формулах (3.1), (3.2) и (3.6):

$$b_{lk} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum_{(n_1, n_2) \in D} h_l(m_1, m_2) h_k(n_1, n_2) B_f(m_1 - n_1, m_2 - n_2),$$

$$c_k = \sum_{(m_1, m_2) \in D} h_k(m_1, m_2) B_{f_0 f}(-m_1, -m_2), \quad (3.53)$$

где

$$B_f(m_1, m_2) = B_v(m_1, m_2) +$$

$$+ \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} \bar{h}(r_1, r_2) \bar{h}(r_1 + p_1, r_2 + p_2) B_{f_0}(m_1 - p_1, m_2 - p_2)$$

$$B_{f_0 f}(m_1, m_2) = \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \bar{h}(p_1, p_2) B_{f_0}(m_1 - p_1, m_2 - p_2).$$

Все участвующие в данных выражениях двумерные последовательности имеют тот же смысл, что и в одномерном случае. Выражение (3.50) для минимального значения ошибки остается без изменений.

3.7 Обнаружение объектов

Пусть сигнал на входе фильтра состоит либо из аддитивной смеси «объекта» $T(n)$ известной формы и «фона» – случайной последовательности $v(n)$:

$$f(n) = T(n) + v(n), \quad (3.54)$$

либо только из фона:

$$f(n) = v(n), \quad (3.55)$$

и задача состоит в том, чтобы отличить одну ситуацию от другой. Будем судить о наличии объекта по уровню сигнала $g(n)$ на выходе фильтра, то есть считать, что наблюдаемый входной сигнал соответствует модели (3.54), если

$$g(n) > \Delta, \quad (3.56)$$

где Δ – некоторое пороговое значение, и модели (3.55) в противном случае. Решение, принятое по правилу (3.56), означает обнаружение объекта, при этом значение аргумента n позволяет указать положение (произвести локализацию) объекта на временной оси [37].

Данную задачу можно интерпретировать как задачу классификации входного сигнала, решаемую для каждого значения n . Примем в качестве классификационных признаков сигналы (1.7) на выходах параллельных звеньев фильтра. Совокупность этих сигналов образует вектор признаков $\mathbf{Y} = \{y_k(n)\}_{k=0}^{k-1}$.

Будем считать, что фон $v(n)$ стационарен, распределен по нормальному закону, имеет нулевое среднее и АКФ $B_v(m)$. Несложно получить, что для модели сигнала (3.54) математическое

ожидание вектора \mathbf{Y} имеет:

$$\mathbf{C} = E\{\mathbf{Y}\} = \{c_k\}_{k=0}^{k-1} = \left\{ \sum_{m=-M^-}^{M^+} h_{k(m)} T(-m) \right\}_{k=0}^{k-1}, \quad (3.57)$$

а для модели (3.55) оно равно нулю. Ковариационная матрица вектора в обоих случаях одинакова:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= E\{(\mathbf{Y}-\mathbf{C})(\mathbf{Y}-\mathbf{C})^T\} = \{b_{lk}\}_{k=0}^{k-1} = \\ &= \left\{ \sum_{m=-M^-}^{M^+} \sum_{n=-M^-}^{M^+} h_l(m) h_k(n) B_v(m-n) \right\}_{k=0}^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Поскольку процедура формирования признаков линейна, вектор \mathbf{Y} в каждом классе сигналов, как и фон, распределен нормально. Известно [33,34], что в такой ситуации оптимальным является линейный классификатор, который принимает решение о наличии объекта при

$$\mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Y} > \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} - d, \quad (3.59)$$

где d – параметр, зависящий от выбранного критерия обнаружения и априорной вероятности появления объекта в наблюдаемом сигнале. Сопоставление неравенств (3.56) и (3.59) с учетом формулы (1.6) позволяет одновременно найти вектор коэффициентов фильтра (он снова определяется соотношением (3.1)) и пороговое значение выходного сигнала:

$$\Delta = \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} - d = \frac{1}{2} R - d, \quad (3.60)$$

где величина R опять выражается формулой (3.2) и в данном случае представляет собой расстояние Махаланобиса между классами

сигналов [33]. Параметр R является показателем качества классификатора: чем больше его значение, тем меньше вероятность ошибок обнаружения объекта.

В задаче обнаружения двумерного объекта для наблюдаемого сигнала, вместо моделей (3.54) и (3.55) используются соответственно:

$$f(n_1, n_2) = T(n_1, n_2) + v(n_1, n_2), \quad (3.61)$$

$$f(n_1, n_2) = v(n_1, n_2), \quad (3.62)$$

и решение о наличии объекта выносится, если сигнал на выходе двумерного фильтра превышает пороговый уровень:

$$g(n_1, n_2) > \Delta. \quad (3.63)$$

Формулы (3.1), (3.2) и (3.60) для расчета и анализа фильтра сохраняются, но модифицируются выражения для элементов матрицы (3.58) и вектора (3.57):

$$b_{lk} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum_{(n_1, n_2) \in D} \sum \left(\begin{array}{l} h_l(m_1, m_2) h_k(n_1, n_2) \cdot \\ \cdot B_v(m_1 - n_1, m_2 - n_2) \end{array} \right), \quad (3.64)$$

$$c_k = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum h_k(m_1, m_2) T(m_1, m_2).$$

Двумерные последовательности, которые присутствуют в соотношениях (3.61)–(3.64), имеют тот же смысл, что и одномерные, введенные выше.

3.8 Другие задачи локальной обработки изображений

Существует множество и других задач обработки цифровых изображений, требующих применения КИХ-фильтрации. Как правило, для них известны импульсные характеристики фильтров,

следовательно, в соответствии с методом, изложенным в п. 3.1–3.2, могут быть синтезированы и применены параллельно-рекурсивные фильтры. Ниже приведено несколько примеров широко распространенных задач.

3.8.1 Сглаживание изображений

Понятие сглаживания изображения имеет двоякий смысл. При коррекции искажений сигнала, внесенных изображающей системой, сглаживание – это подавление помех, связанных с несовершенством изображающей системы. При препарировании изображений сглаживание – устранение деталей (обычно малоразмерных), мешающих восприятию нужных объектов на изображении.

При коррекции искажений, вызванных искажающей системой, сглаживанию подвергается так называемое исходное изображение – изображение на выходе изображающей системы. При препарировании сглаживание может применяться к изображению на любой стадии как один из этапов.

К сглаживающим маскам обычно предъявляются следующие требования:

1. *Четность*: $h(m_1, m_2) = h(-m_1, m_2) = h(m_1, -m_2)$. Следует из изотропности рассматриваемой процедуры и требования несмещенности отсчетов выходного изображения относительно входного.

2. *Конечность*: импульсная характеристика должна быть отлична от нуля на конечном множестве отсчетов $[-M_1, M_1] \times [-M_2, M_2]$.

3. *Требование неискаженного среднего*: для обеспечения сохранения математического ожидания входного изображения должно выполняться следующее равенство:

$$\sum_{m_1=-M_1}^{M_1} \sum_{m_2=-M_2}^{M_2} h(m_1, m_2) = 1. \quad (3.65)$$

Характерным примером сглаживающей маски является гауссовская импульсная характеристика:

$$h(m_1, m_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{m_2^2}{2\sigma_2^2}\right). \quad (3.66)$$

При этом степень сглаживания по каждой из координат задается установкой параметров σ_1 и σ_2 .

3.8.2 Подчеркивание контуров

В прикладных и научных задачах часто оказывается недостаточным представить наблюдателю объект с помощью идеальной изображающей системы. При решении сложных задач, требующих скрупулезного анализа изображений (поиск, идентификация объектов, определение разного рода количественных характеристик, обобщающие описания и т. п.), желательно вооружить зрение, то есть дать наблюдателю средства, облегчающие интерпретацию изображений, извлечение из них информации.

Принято считать, что, из-за особенностей человеческого зрения, наибольшую смысловую нагрузку при визуальной интерпретации изображения несут достаточно резкие перепады яркости, то есть контура. Поэтому для улучшения качества восприятия или выделения информативных деталей изображения часто применяется процедура подчеркивания контуров.

Кроме того, процедура подчеркивания контуров встречается в качестве одного из составных элементов при решении других задач обработки изображений. Например, ее часто проводят на подготовительном этапе при выделении объектов и определении ме-

стоположения объектов на изображении, а также при их распознавании.

Традиционный подход к подчеркиванию контуров основан на аппроксимации производных функции яркости изображения. При этом, для уменьшения нежелательного влияния малоразмерных деталей, изображение зачастую предварительно сглаживается фильтром типа (3.66). Как отмечено в работе [53], такая обработка эквивалентна свертке изображения с ядрами, представляющими собой производные гауссовской функции. Характерным примером масок такого вида является LoG-маска (лапласиан от гауссовской функции):

$$h(m_1, m_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(2 - \frac{m_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{m_2^2}{\sigma_2^2} \right) \exp\left(-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{m_2^2}{2\sigma_2^2} \right). \quad (3.67)$$

Согласно Марру-Хилдрету [50], LoG-фильтр является оптимальным для процедуры обнаружения фрагментов. Кроме того, LoG-маска применяется также при решении задач выделения углов [53] для предварительной идентификации возможного положения угловых точек.

Очень похожий вид имеет DOG-маска (разность гауссовых масок), которая применяется как для аппроксимации LoG-маски, так и сама по себе. Для простоты запишем ее изотропный вариант:

$$h(m_1, m_2) = G_\sigma(m_1, m_2) - G_{2\sigma}(m_1, m_2), \quad (3.68)$$

где $G_\sigma(m_1, m_2)$, $G_{2\sigma}(m_1, m_2)$ – изотропные гауссовские функции вида (3.65) с параметрами σ и 2σ соответственно.

Благодаря своему специфическому виду (завышенному центру в сочетании с заниженной внешней частью), DOG-маска применяется также в алгоритмах кластеризации [51] для подчеркивания кластеров.

Следует также обратить внимание на то, что отношение меж-

ду параметрами гауссовских масок, входящих в разность (3.68), принимается равным 2. Как утверждается в [51], такой выбор определяется нейрофизиологическими особенностями именно человеческого зрения, и для других живых существ это соотношение может быть иным.

3.8.3 Выделение углов

Углы являются важным геометрическими признаками для задач согласования изображений. Подобные задачи возникают, например, при обработке и анализе томографических изображений в медицине.

Важной группой угловых детекторов являются так называемые прямые или полутоновые угловые детекторы. Традиционный подход к построению таких детекторов основан на использовании дифференциальных характеристик изображения, которые вычисляются посредством оценивания первой и второй частных производных функции яркости изображения, сглаженного фильтром типа (3.66).

Первая группа угловых детекторов, построенных с использованием такого подхода, базируется на измерении кривизны изофоты, взвешенной градиентом функции яркости. Характерным примером является детектор Китчена–Розенфельда [49]:

$$KIT = \frac{f_{m_1 m_1} f_{m_2}^2 + f_{m_2 m_2} f_{m_1}^2 - 2 f_{m_1 m_2} f_{m_1} f_{m_2}}{f_{m_1}^2 + f_{m_2}^2}, \quad (3.69)$$

где f_{m_i} и $f_{m_i m_j}$ – частные производные первого и второго порядка от функции яркости по соответствующим координатам.

Вторая группа угловых детекторов измеряет гауссовскую кривизну K_G функции яркости, которая выражается через ее частные производные следующим образом:

$$K_G = \frac{f_{m_1 m_1} f_{m_2 m_2} + f_{m_2 m_2}^2}{(1 + f_{m_1}^2 + f_{m_2}^2)^2}. \quad (3.70)$$

Существует много подходов, основанных на этих двух концепциях. В частности, в работе [53] указано, что один из способов оценивания производных для цифровых изображений, сглаженных гауссовским фильтром, состоит в свертке с ядрами, которые представляют собой производные от гауссовской функции. Запишем одномерную гауссовскую функцию и ее первые две производные:

$$g_0(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right), \quad g_1(m) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} m \cdot \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$g_2(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left(\frac{m^2}{\sigma^2} - 1\right) \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right).$$

Двумерные ядра строятся как разделимые комбинации одномерных ядер:

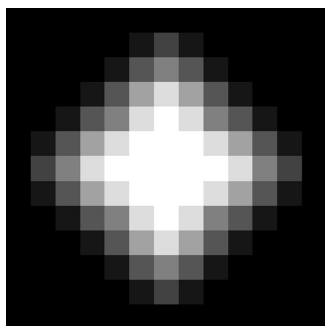
$$G_{kl}(m_1, m_2) = g_k(m_1) g_l(m_2). \quad (3.71)$$

В работе [53] предлагается использовать ядра такого вида для аппроксимации детекторов (3.69), (3.70). В этом случае задача выделения углов может быть решена линейной фильтрацией с использованием импульсных характеристик вида (3.71) с последующим вычислением отклика по формулам (3.69), (3.70), в которых частные производные функции яркости заменены на соответствующие частные производные гауссовской функции.

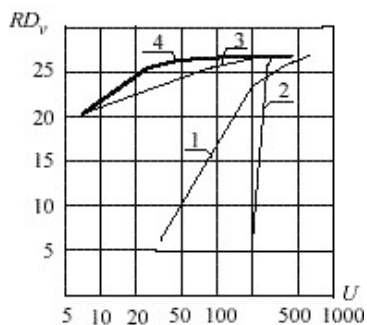
3.9 Анализ эффективности параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров в задачах обработки изображений

Анализ эффективности параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров проведем на простых примерах решения задач обнаружения объектов на изображении и аппроксимации заданной ИХ. Ограничимся рассмотрением фильтров на основе полиномиальных базисов, поскольку именно они обеспечивают наиболее ярко выраженное преимущество над традиционными способами решения поставленных задач.

В задаче *обнаружения* в качестве объекта примем изображение «креста» (размером 9×9 элементов) единичной яркости на нулевом фоне, подвергнутое линейному искажению путем двукратного усреднения квадратным окном 3×3 элемента и зашумлению аддитивным белым шумом с дисперсией D_v и изображенное на рисунке 3.1, а.



а



б

Рисунок 3.1 – Анализ эффективности применения рекурсивных полиномиальных базисов в задаче обнаружения объекта

Качество фильтра при обнаружении объектов характеризуется зависимостью произведения RD_v (здесь R – расстояние Махаланобиса между классами объекта и фона) от приведенной вычислительной сложности обработки:

$$U=U_+ + \eta U^* ,$$

где η – коэффициент относительной сложности операции умножения (при построении зависимостей примем типичное значение $\eta=3$).

Для сравнения результаты работы параллельно-рекурсивных алгоритмов приведены параллельно с традиционными, а именно на рисунке 3.1, б даны следующие обозначения алгоритмов:

1. обычный КИХ-фильтр в форме прямой свертки [15,26,27];
2. быстрая свертка по схеме Кули-Тьюки с основанием «2» и процедурой оптимального секционирования входного сигнала [15,26];
3. параллельно-рекурсивный фильтр на основе полиномиального базиса с минимальной вычислительной сложностью (см. п. 2.3);
4. параллельно-рекурсивный фильтр на основе четного полиномиального базиса, предложенный в п. 2.4.

Из рисунка 3.1, б видно, что наибольшим расстоянием Махаланобиса и, следовательно, качеством обладает фильтр на основе четного полиномиального базиса при любой сложности обработки.

При построении зависимостей качества фильтра от сложности для алгоритмов прямой и быстрой свертки варьировались размеры окна обработки, а для параллельно-рекурсивных фильтров выбирались различные подмножества двумерных базисных функций из множества с индексами

$$0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq K .$$

В задаче *аппроксимации* импульсной характеристики с помощью полиномиальных функций рассмотрим двумерную «гауссоиду», то есть разделимую по координатам функцию вида

$$\bar{h}(m_1, m_2) = \exp\left(-0,01(m_1^2 + m_2^2)\right),$$

заданную на симметричном окне $|m_1| \leq 15$, $|m_2| \leq 15$ и изображенную на рисунке 3.2, а.

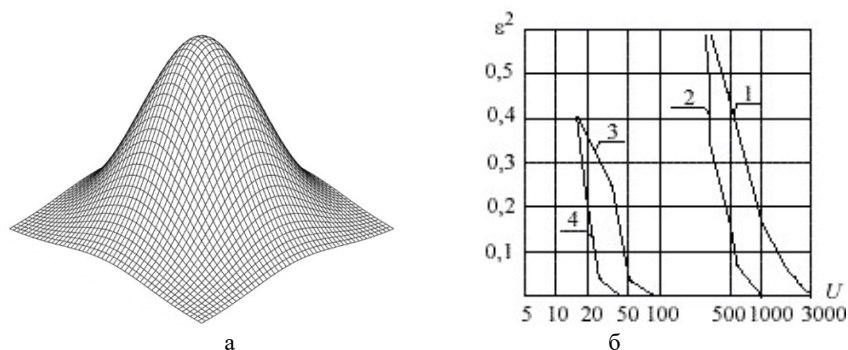


Рисунок 3.2 – Анализ эффективности применения рекурсивных полиномиальных базисов в задаче аппроксимации импульсной характеристики

В силу разделимости искомой ИХ, ее аппроксимация сводится к аппроксимации каждой из одномерных составляющих функции:

$$\bar{h}(m) = \exp(-0,01m^2).$$

На рисунке 3.2, б также показаны зависимости среднеквадратической погрешности аппроксимации от вычислительной сложности для фильтров, реализованных вышеозначенными четырьмя способами.

Представленные результаты показывают, что разработанные параллельно-рекурсивные фильтры значительно увеличивают скорость обработки изображений – в 10-100 раз по сравнению с известными алгоритмами прямой и быстрой свертки. В случае осесимметричных импульсных характеристик, часто используемых во многих прикладных задачах, при применении четных полиномиальных базисов вычислительная сложность дополнительно снижается в 1,5-2 раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены методы построения вычислительно эффективных алгоритмов локального линейного описания цифровых изображений, основанные на применении параллельно-рекурсивных фильтров с конечной импульсной характеристикой. При обработке изображений в режиме «скользящего окна» оказывается возможным радикальное снижение вычислительной сложности обработки путем ее распараллеливания и рекурсивной реализации. Дано общее описание одно- и двумерных параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров, обеспечивающих гибкость синтеза рекурсивно вычисляемых базисных функций. Сложность параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров определяется числом параллельных звеньев и не зависит от размеров окна обработки, что обеспечивает рост их преимуществ при увеличении окна.

При построении параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров возможно использование известных базисов разложения импульсных характеристик, в частности прямоугольного, косинусного базисов и базиса Фурье. Однако наибольший практический интерес представляют полиномиальные базисы, для которых разработаны быстрые алгоритмы формирования моментных характеристик, широко используемых при обнаружении и распознавании объектов на изображении. Введено семейство полиномиальных базисных функций, обеспечивающих минимальную вычислительную сложность обработки, а также построены алгоритмы формирования полиномиальных базисов специального вида (четных и нечетных), предназначенных для разложения осесимметричных импульсных характеристик.

Для многих задач моделирования и обработки сигналов расчет параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров может производиться по единой схеме, специфика каждой задачи проявляется только в значениях параметров схемы. Разработанная общая схема расчета

конкретизирована для наиболее важных прикладных задач – для аппроксимации импульсной и частотной характеристик, моделирования ЛПП-систем, преобразования и синтеза стационарных процессов, восстановления сигналов, обнаружения объектов.

На основе локальных признаков, формируемых с помощью параллельно-рекурсивных фильтров, могут конструироваться нелинейные процедуры обработки изображений, основанные на методологиях машинного обучения и распознавания образов.

Таким образом, параллельно-рекурсивные алгоритмы фильтрации, обладая низкой вычислительной сложностью, не зависящей от размеров окна обработки, позволяют радикально повысить скорость обработки изображений (в 10–100 раз по сравнению с известными методами), могут быть использованы в системах оперативного анализа видеoinформации, в том числе в реальном масштабе времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амин, М.Г. Новый подход к рекурсивному преобразованию Фурье / М.Г. Амин // ТИИЭР. – 1987. – Том 11. – С. 112-113.
2. Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копленова. – М.: Высш. шк, 1994. – 544 с.
3. Бейтс, Р. Восстановление и реконструкция изображений / Р. Бейтс, М. Мак-Доннелл – М.: Мир, 1989. – 336 с.
4. Вапник, В.Н. Теория распознавания образов / В.Н. Вапник, А.Я. Червоненкис. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
5. Василенко, Г.И. Восстановление изображений / Г.И. Василенко, А.М. Тараторин. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.
6. Виткус, Р.Ю. Адаптивные линейные фильтры для обработки изображений / Р.Ю. Виткус, Л.П. Ярославский // Адаптивные методы обработки изображений: сборник научных трудов / под ред. В.И. Сифоров, Л.П. Ярославский. – М.: Наука, 1988. – С. 6-35..
7. Виттих, В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований / В.А. Виттих, В.В. Сергеев, В.А. Сойфер. – М.: Наука, 1982. – 214 с.
8. Глумов, Н.И. Информационная технология распознавания объектов на изображении в режиме скользящего окна / Н.И. Глумов, Э.И. Коломиец, В.В. Сергеев // Научное приборостроение. – Том 3(1). – 1993. – С. 72-88.
9. Глумов, Н.И. Быстрый алгоритм аппроксимации изображения в скользящем окне / Н.И. Глумов, Н.И. Крайнюков, В.В. Сергеев, А.Г. Храмов // Компьютерная оптика. – Том 13. – 1993. – С. 47-49.
10. Глумов, Н.И. Анализ характеристик параллельно рекурсивных алгоритмов вычисления свертки / Н.И. Глумов, В.В. Мясников, В.В. Сергеев // 3-я Всероссийская с участием стран СНГ конфе-

- ренция «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии» (РОАИ-3-97), г. Нижний Новгород. – Часть II. – 1997. – С. 108-112.
11. Глумов, Н.И. Параллельно-рекурсивные алгоритмы вычисления полиномиальных признаков изображения в скользящем окне / Н.И. Глумов, В.В. Мясников, В.В. Сергеев // Труды Пятого Международного семинара «Распределенная обработка информации». 10-12 октября. – Новосибирск, 1995. – С. 272-275.
 12. Глумов, Н.И. Применение полиномиальных базисов для обработки изображений в скользящем окне / Н.И. Глумов, В.В. Мясников, В.В. Сергеев // Компьютерная оптика. – Том 14-15. 1995. – С. 55-68.
 13. Глумов, Н.И. Рекурсивные фильтры с четными полиномиальными импульсными характеристиками для обработки изображений скользящим окном / Н.И. Глумов, В.В. Мясников, В.В. Сергеев // Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии: 2-я Всероссийская с участием стран СНГ конференция. – Часть 2. – Ульяновск, 1995. – С. 94-96.
 14. Глумов, Н.И. Разложение двумерного сигнала по степенному и полиномиальным базисам в скользящем окне / Н.И. Глумов, В.В. Сергеев // Тезисы докл. 6-й науч. конф. «Математические методы распознавания образов». – Москва, 1993. – С. 90-91.
 15. Голд, Б. Цифровая обработка сигналов / Б. Голд, Ч. Рэйдер. – М.: Советское радио, 1973. – 368 с.
 16. Даджион, Д. Цифровая обработка многомерных сигналов / Д. Даджион, Р. Мерсеро. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
 17. Журавлев, Ю.И. Распознавание образов и распознавание изображений. Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение / Ю.И. Журавлев, И.Б. Гуревич. – Вып.2. – М.: Наука, 1989. – С. 5-72.

18. Зеленков, А.В. Алгоритмы дискретного косинусного преобразования для спектрального анализа на скользящем интервале / А.В. Зеленков // Автометрия. – 1982. – Том 6. – С. 34-42.
19. Ковалевский, В.А. Методы оптимальных решений в распознавании изображений / В.А. Ковалевский. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
20. Краковский, В.Я. Особенности скользящего анализа спектра / В.Я. Краковский, В.Н. Чайковский // Автометрия. – 1984. – Том 6. – С. 34-37.
21. Майтра, С. Моментные инварианты / С. Майтра // ТИИЭР. – 1979. – Том 4. – С. 297-299.
22. Мудров, А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран, Паскаль / А.Е. Мудров. – Томск: МП «РАСКО», 1991. – 272 с.
23. Мясников, В.В. Четные полиномиальные базисы для обработки изображений фильтрами с осесимметричными импульсными характеристиками / В.В. Мясников // Автометрия. – Том. 1, 1996. – С. 80-87.
24. Оботнин, А.Н. Алгоритм определения скользящего спектра / А.Н. Оботнин, Е.Э. Страшинин // Автометрия. – 1975. – Том. 1. – С. 30-35.
25. Оппенгейм, А.В. Цифровая обработка сигналов / А.В. Оппенгейм, Р.В. Шафер. – М.: Мир, 1979. – 368 с.
26. Прэтт, У.К. Цифровая обработка изображений 1 / У.К. Прэтт. – М.: Мир, 1982. – 312 с.
27. Прэтт, У.К. Цифровая обработка изображений. / У.К. Прэтт – М.: Мир, 1982. Книга 2. – 480 с.
28. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Голд. – М.: Мир, 1978.
29. Сергеев, В.В. Математические модели и методы в автоматизированных системах научных исследований / В.В. Сергеев. –

- Куйбышев: Куйбышевский авиационный институт, 1986. – 50 с.
30. Сергеев, В.В. Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры в задачах обработки изображений / В.В. Сергеев // Радиотехника. – 1990. – Том 8. – С. 38-41.
 31. Сергеев, В.В. Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры для обработки изображений / В.В. Сергеев // Компьютерная оптика. – 1992. – Том 10-11. – С. 186-201.
 32. Сергеев, В.В. Расчет параллельных КИХ-фильтров для некоторых задач обработки сигналов и изображений // В.В. Сергеев, Л.Г. Фролова / Компьютерная оптика. – 1992. – Том 12. – С. 72-81.
 33. Ту, Дж. Принципы распознавания образов / Дж. Ту, Р. Гонсалес. – М.: Мир, 1978. – 411 с.
 34. Фукунага, К. Введение в статистическую теорию распознавания образов / К. Фукунага. – М.: Наука, 1979. – 367 с.
 35. Ярославский, Л.П. Введение в цифровую обработку изображений / Л.П. Ярославский – М.: Советское радио, 1979. – 312 с.
 36. Ярославский, Л.П. О возможности параллельной и рекурсивной организации цифровых фильтров / Ярославский Л.П. // Радиотехника. – 1984. – Том 3. – С. 87-91.
 37. Ярославский, Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику / Л.П. Ярославский. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
 38. Abu-Mostafa, Y. Image Normalization by Complex Moments / Y. Abu-Mostafa, D. Psaltis // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – PAMI-7(1), 1985. – pp. 46-55.
 39. Abu-Mostafa, Y. Recognitive Aspects of Moment Invariants / Y. Abu-Mostafa, D. Psaltis // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – PAMI-6(6), 1984. – pp. 698-706.
 40. Chochia, P.A. Image Enhancement Using Sliding Histograms / P.A. Chochia // Computer Vision, Graphics, and Image Processing.

- Vol. 44, 1988. – pp. 211-229.
41. Glumov, N.I. Detection of objects on the image using a sliding window mode / N.I. Glumov, E.I. Kolomiyetz, V.V. Sergeyev // *Optics & Laser Technology*. – Vol. 27(4), 1995. pp. 241-249.
 42. Glumov, N.I. The Fast Algorithm of Image Approximation in a Sliding Window / N.I. Glumov, N.I. Krainukov, V.V. Sergeyev, A.G. Khramov // *Pattern Recognition and Image Analysis*. – Vol.4, 1991. – pp. 424-426.
 43. Glumov, N.I. Analysis of characteristics of parallel-recursive algorithms of convolution calculation / N.I. Glumov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeyev // *International Symposium “Optical Information Science and Technology” – OIST’97*. – Moscow, Russia, 27-30 august 1997. – pp. 267-274.
 44. Glumov, N.I. Application of polynomial bases for image processing using sliding window / N.I. Glumov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeyev // *Image Processing and Computer Optics, SPIE Vol. 2363*, 1994. – pp. 40-49.
 45. Glumov, N.I. Parallel-Recursive Local Image Processing and Polynomial Bases / N.I. Glumov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeyev // *Proceedings of the Third IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems – ICECS’96*. Vol.2, Rodos, Greece, 1996. – pp. 696-699.
 46. Glumov, N.I. Polynomial bases for image processing in a sliding window / N.I. Glumov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeyev // *Pattern Recognition and Image Analysis*. – Vol. 4(4), 1994. – pp.408-413.
 47. Glumov, N.I. Recursive Filters with Even Polynomial Impulse Responses for Processing Images by a Sliding Window / N.I. Glumov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeyev // *Pattern Recognition and Image Analysis*. – Vol. 6(1), 1996. – pp. 122-123.
 48. Hu, M. Visual pattern recognition by moment invariants / M. Hu // *IRE Trans. Information Theory*. – Vol. IT-8, 1962. – pp. 179-187.

49. Kitchen, L. Gray-level corner detection / L. Kitchen, A. Rosenfeld // Pattern Recognition Letters. – Vol. 1(2), 1982. – pp. 95-102.
50. Marr, D. Theory of edge detection / D. Marr, H. Hildreth // Proc. Roy. Soc. London. – Vol. B207, 1980. – pp. 187-217.
51. Pauwels, E. Fully Unsupervised Clustering Using Centre Surround Receptive Fields with Application to Color Segmentation / E. Pauwels, P. Fiddelaers, F. Mindru // Proceedings of 7th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns, Springer. – Vol. 1296, 1997. – pp. 17-24.
52. Shen, J. Orthogonal Legendre moments and their calculation / Shen J., Shen D. // Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition II(B). -Vienna, Austria, 1996. – pp. 241-245.
53. Strammberger T. Hierarchical Filter Scheme for Efficient Corner Detection / T. Strammberger, K. Engelmeier // Proceedings of 7th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns, Springer. – Vol. 1296, 1997. – pp. 215-222.
54. The, C.H. On image analysis by the methods of moments / C.H. Teh, R.T. Chin // IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell. – Vol. 10(4), 1988. – pp. 496-513.

Учебное издание

*Глумов Николай Иванович
Мясников Владислав Валерьевич
Сергеев Владислав Викторович*

**ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ
МЕТОДЫ ЛОКАЛЬНОГО ОПИСАНИЯ
ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 23.06.2023. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 6,25. Тираж 27 экз. Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.