

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Е.В. БАРИНОВА*

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 03.04.01 Прикладные математика и физика

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2023

УДК 531.36(075)+629.78(075)

ББК В213.7я7+О6я7

Б249

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. П. К. Кузнецов,  
д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Дорошин

***Баринава, Елена Витальевна***

Б249

**Основы теории устойчивости движения применительно к задачам космической техники:** учебное пособие / *Е.В. Баринава.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 120 с.

**ISBN 978-5-7883-1975-9**

В учебном пособии излагаются основы теории устойчивости динамических систем: классические методы теории устойчивости (первый и второй метод Ляпунова, теоремы Четаева, Красовского и др.), теория устойчивости консервативных систем, преобразования Рауса, влияние структуры сил на устойчивость движения. Рассматриваемые методы теории устойчивости исследуются применительно к задачам космической техники.

Предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика (уровень бакалавриата), 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика (уровень магистратуры), 03.04.01 Прикладные математика и физика (уровень магистратуры, профиль «Космические информационные системы и наноспутники. Навигация и дистанционное зондирование»), 01.03.03 Механика и математическое моделирование и может быть использовано при выполнении выпускных квалификационных работ.

Подготовлено на межвузовской кафедре космических исследований.

УДК 531.36(075)+629.78(075)

ББК В213.7я7+О6я7

ISBN 978-5-7883-1975-9

© Самарский университет, 2023

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	7
1.1 Основные понятия и определения теории устойчивости движения.....	7
1.2 Уравнения возмущённого движения.....	15
1.3 Уравнения возмущённого движения конического маятника.....	18
2 ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ.....	21
2.1 Функции Ляпунова.....	21
2.2 Теорема Ляпунова об устойчивости движения.....	29
2.3 Теоремы об асимптотической устойчивости.....	31
2.4 Теоремы о неустойчивости движения.....	37
2.5 Методы построения функции Ляпунова.....	40
2.6 Устойчивость движения конического маятника.....	42
2.7 Устойчивость стационарного движения центра масс искусственного спутника Земли.....	45
3 УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ .....	49
3.1 Постановка задачи.....	49
3.2 Устойчивость равновесия линейных автономных систем.....	53
3.3 Основные теоремы об устойчивости движения по первому приближению .....	59
3.4 Критерий Гурвица.....	63
4 УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ.....	66
4.1 Теорема Лагранжа.....	66

4.2 Циклические координаты. Преобразования Рауса.....	70
4.3 Стационарное движение и условия его устойчивости .....	75
4.4 Устойчивость стационарных движений центра масс искусственного спутника Земли .....	78
<b>5 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТОВ .....</b>	<b>82</b>
5.1 Системы координат и проекции моментов.....	82
5.2 Уравнения движения относительно центра масс .....	85
5.3 Определение положений равновесия сферического спутника .....	89
5.4 Исследование устойчивости положений равновесия сферического спутника.....	92
5.5 Определение положений равновесия наноспутника формата CubeSat.....	95
<b>6 ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ .....</b>	<b>101</b>
6.1 Классификация сил .....	101
6.2 Постановка задачи.....	111
6.3 Коэффициенты устойчивости .....	113
6.4 Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия потенциальной системы .....	114
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>118</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость движения является важным понятием в различных областях науки и техники. Она определяет способность объекта сохранять свою ориентацию и траекторию в пространстве, несмотря на воздействие различных внешних сил и моментов. Изучение устойчивости движения имеет широкое применение, включая космическую технику, автомобильную индустрию, робототехнику и многие другие области.

История изучения устойчивости движения началась с появления первых технических объектов, которые нужно было удерживать в равновесии. При этом возникал вопрос устойчивости найденных положений равновесия. Для практики имели значение устойчивые положения равновесия, то есть те, в которые возвращались тела при небольшом отклонении. Классическим примером устойчивого положения равновесия является нижнее положение маятника.

Задачей определения устойчивых положений равновесия занимались ещё Аристотель, Архимед. Первый критерий устойчивости для механической системы тел, находящихся под действием силы тяжести, дал ученик Галилея Торричелли (1608 – 1647). Большой вклад в развитие теории устойчивости внёс Лагранж (1736 – 1813), который обобщил принцип Торричелли на случай произвольных потенциальных сил. Л. Дирихле (1805 – 1859) дал строгое доказательство его теоремы. Исследованием возмущений сил притяжения от других планет занимался Лаплас, показавший в своей «Небесной механике», что для Солнечной системы вековые возмущения незначительны и устойчивость движений всех планет можно считать обеспеченной на очень долгое время.

Вопросами устойчивости движений тел конечных размеров занимались Пуансо, Эйлер. Было показано, что без воздействия посторонних сил тела могут вращаться только вокруг осей,

совпадающих с главными центральными осями инерции, причём устойчивыми будут вращения только вокруг осей, для которых момент инерции является или наибольшим, или наименьшим.

Определением прочности или устойчивости движения против случайных возмущений, имеющих небольшую величину, занимались Раус, Н. Е. Жуковский, Анри Пуанкаре, но наибольшие успехи сделал А. М. Ляпунов.

Основы современной теории устойчивости были заложены великим русским математиком и механиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857 – 1918) в его знаменитой докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения», впервые опубликованной в 1892 году. До сих пор идеи этой работы питают математиков и позволяют получать новые ценные результаты в области теории устойчивости.

В данном пособии мы рассмотрим основные принципы и методы теории устойчивости движения применительно к задачам космической техники. Мы изучим различные приёмы, применяемые при изучении устойчивости движения, включая исследование устойчивости по первому приближению, а также с помощью составления функций Ляпунова. Рассмотрим устойчивость стационарного движения центра масс искусственного спутника Земли, а также исследуем на устойчивость положения равновесия сферического спутника под действием аэродинамического и гравитационного моментов. Эти знания могут быть полезными для инженеров, научных исследователей и всех, кто интересуется устойчивостью движения объектов в пространстве. При написании данного пособия за основу была взята книга Меркина Д.Р. «Введение в теорию устойчивости движения».

# 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Понятие устойчивости является одним из фундаментальных понятий в науке и технике. Само понятие устойчивости движения является непосредственным обобщением понятия устойчивости равновесия.

## 1.1 Основные понятия и определения теории устойчивости движения

Обозначим через  $y_1, \dots, y_n$  вещественные переменные, характеризующие состояние механической, электромеханической или какой-нибудь другой системы. Этими переменными могут быть координаты, скорости, токи, напряжения, температуры и т. п. или функции этих величин. Предполагается, что число переменных  $y_1, \dots, y_n$  конечно и что движение системы (процесс изменения переменных  $y_1, \dots, y_n$  во времени) описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые могут быть разрешены относительно производных по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= Y_1(y_1, \dots, y_n, t), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= Y_n(y_1, \dots, y_n, t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

В этих уравнениях  $Y_1, \dots, Y_n$  – известные функции переменных  $y_1, \dots, y_n$  и времени  $t$ , удовлетворяющие условиям существования и единственности решения.

Если все функции  $Y_k$  не зависят явно от времени  $t$ , то система называется *автономной*, в противном случае – *неавтономной*. Заметим, что при решении конкретных задач уравнения движения не обязательно приводить к виду (1.1), в частности, их можно представить, как одно или несколько уравнений высшего порядка.

Некоторое вполне определённое движение системы, подлежащее исследованию на устойчивость, называется *невозмущённым движением*. Невозмущённому движению системы отвечает определённое частное решение

$$y_1 = f_1(t), \dots, y_n = f_n(t) \quad (1.2)$$

дифференциальных уравнений (1.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{при } t = t_0: y_1 = f_1(t_0), \dots, y_n = f_n(t_0). \quad (1.3)$$

Начальные условия, как правило, являются результатами измерений и, следовательно, известны с некоторой погрешностью. Поэтому возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных условий на решение (1.2).

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных условий оказывают сильное влияние на решение системы, то решение, определяемое неточными начальными данными, не имеет никакого прикладного значения. Поэтому и возникает вопрос о влиянии погрешности определения начальных условий на искомое решение.

Изменим условия (1.3), дав начальным значениям переменных  $y_1 \dots y_n$  небольшие по модулю приращения  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , а именно пусть теперь при  $t = t_0$

$$y_1 = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \quad \dots, \quad y_n = f_n(t_0) + \varepsilon_n. \quad (1.4)$$

Движение системы, отвечающее изменённым начальным условиям (1.4), называется *возмущённым движением*, а величины  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  — *возмущениями*.

Обозначим значения переменных  $y_j$  в возмущённом движении через  $y_j(t)$ , а в невозмущённом движении через  $f_j(t)$  и составим разности между ними

$$x_j = y_j(t) - f_j(t), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Переменные  $x_j$  называются *отклонениями* или *вариациями* величин  $y_j$ . Если все отклонения равны нулю, то есть



$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0 \quad (1.6)$$

то возмущённое движение  $y_j(t)$  будет совпадать с невозмущённым движением  $f_j(t)$ , иначе говоря, *невозмущённому движению отвечают нулевые значения переменных  $x_j$ .*

Для удобства изложения в дальнейшем будем пользоваться языком геометрии. Совокупность отклонений  $x_1, \dots, x_n$  в  $n$ -мерном пространстве переменных  $x_1, \dots, x_n$  определяет точку М (она называется *изображающей точкой*).

*Примечание:*

*В обычном трёхмерном евклидовом пространстве совокупность трёх чисел  $x_1, x_2, x_3$  определяет точку М. Обобщая это понятие, под точкой М в  $n$ -мерном пространстве переменных  $x_1, \dots, x_n$  понимают совокупность  $n$  чисел  $x_1, \dots, x_n$ . Расстояние  $r$  от этой точки до начала О ортогональной координатной системы  $Ox_1x_2 \dots x_n$  определяется равенством*

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

*Продолжая обобщение понятий, существующих в обычном трёхмерном евклидовом пространстве, говорят, что всякое уравнение  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  определяет в пространстве  $n$  измерений некоторую поверхность, в частности, уравнение  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$  определяет в  $n$ -мерном пространстве сферу радиуса  $r$ .*

В возмущённом движении при изменении величин  $x_1, \dots, x_n$  изображающая точка М будет описывать некоторую траекторию  $\gamma$ . Невозмущённому движению  $x_j = 0$  отвечает неподвижная точка – начало координат.

Отклонение возмущённого движения от невозмущённого движения определяется величинами  $x_j(t)$ . Если все  $x_j(t)$  малы по модулю, то будет мала и сумма их квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2. \quad (1.7)$$

Если же отклонение хотя бы одной координаты будет велико, то сумма (1.7) будет велика. Обратное утверждение, очевидно, также справедливо. Поэтому в качестве меры отклонения возмущённого движения от невозмущённого движения можно выбрать величину суммы (1.7). Так как сумма (1.7) равна квадрату расстояния от изображающей точки М до начала координат, то это расстояние характеризует отклонение возмущённого движения от невозмущённого.

Согласно определению возмущённого движения и равенствам (1.4), (1.5), будем иметь

$$\text{при } t = t_0: \quad x_j = x_{0j} = \varepsilon_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.8)$$

т.е. начальные значения отклонений  $x_{0j}$  представляют возмущения системы.

Примем следующее **определение устойчивости Ляпунова:**

*Если по любому положительному числу  $\varepsilon$ , как бы оно мало ни было, можно найти такое положительное число  $\delta$ , что при всяких возмущениях  $x_{0j}$ , удовлетворяющих условию*

$$\sum x_{0j}^2 \leq \delta, \quad (1.9)$$

*и при любом  $t \geq t_0$  будет выполняться неравенство*

$$\sum x_j^2 < \varepsilon, \quad (1.10)$$

*то невозмущённое движение устойчиво, в противном случае – неустойчиво.*

Геометрически это определение означает следующее. Рассмотрим сферу  $\sum x_j^2 = \varepsilon$ . Выберем радиус  $\sqrt{\varepsilon}$  этой сферы произвольно малым. Если движение *устойчиво*, то для этой сферы должна найтись другая сфера  $\sum x_j^2 < \delta$  радиуса  $\sqrt{\delta}$ , обладающая следующим свойством. Изображающая точка М, начав своё движение из любого положения  $M_0$ , лежащего внутри или на поверхности сферы  $\delta$ , при своём дальнейшем движении остаётся всегда внутри сферы  $\varepsilon$ , никогда не достигая её поверхности (рис. 1).

Далее сферу с радиусом  $\sqrt{\delta}$  (аналогично  $\sqrt{\varepsilon}$ ) будем называть  $\delta$ -сферой (или  $\varepsilon$ -сферой). Для наглядности все рисунки, соответствующие  $n$ -мерному пространству, строятся для  $n=2$ .

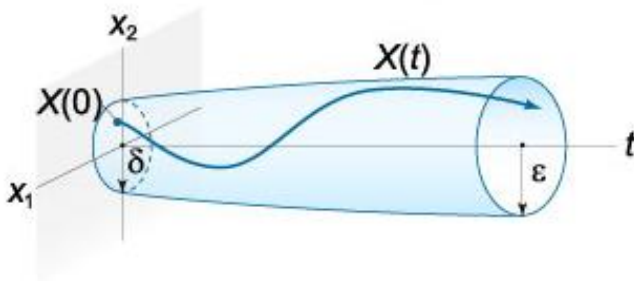


Рисунок 1. Устойчивость по Ляпунову

Если же возмущённое движение неустойчиво, то хотя бы одна траектория изображающей точки  $M$  с течением времени пересечёт  $\varepsilon$ -сферу изнутри наружу при сколь угодно близком положении точки  $M$  к началу координат.

Практически устойчивость данного невозмущённого движения означает, что при достаточно малых начальных возмущениях возмущённое движение будет сколь угодно мало отличаться от невозмущённого движения. Если же невозмущённое движение неустойчиво, то возмущённое движение будет отходить от него, как бы малы ни были начальные возмущения.

Если невозмущённое движение устойчиво и при этом любое возмущённое движение при достаточно малых начальных возмущениях стремится к невозмущённому движению, т. е. если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum x_j^2(t) = 0, \quad (1.11)$$

то невозмущённое движение называется *асимптотически устойчивым*.

Заметим, что одного предельного условия (1.11) недостаточно для асимптотической устойчивости – необходимо, чтобы помимо

этого условия движение было устойчивым. Геометрически это означает, что при асимптотической устойчивости изображающая точка должна неограниченно стремиться к началу координат, не выходя из  $\varepsilon$  – сферы (рис. 2).

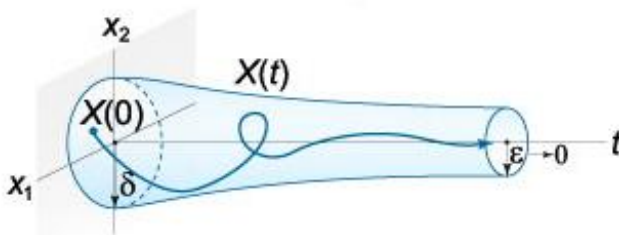


Рисунок 2. Асимптотическая устойчивость

Если же движение является асимптотически устойчивым и, кроме того, выполняется условие

$$\sum x_j^2(t) \leq \alpha e^{-\beta t} \sum x_{0j}^2(t) \quad (1.12)$$

то движение называется *экспоненциально устойчивым* (рис. 3).

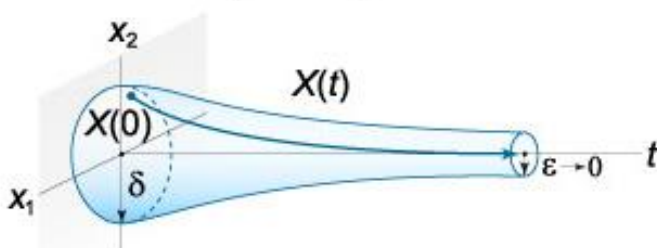


Рисунок 3. Экспоненциальная устойчивость

В некоторых случаях классическое определение устойчивости не выполняется и вводят определения дополнительных видов устойчивости.

Например, с точки зрения классического определения движение математического маятника не является устойчивым, так

как даже при небольших возмущениях, точки, соответствующие одинаковым моментам времени, будут расходиться (одна из них будет запаздывать относительно другой). Однако фазовая траектория возмущённого движения может быть подобрана сколь угодно близко к фазовой траектории невозмущённого движения. В этом случае говорят о *траекторной или орбитальной устойчивости* (рис. 4).

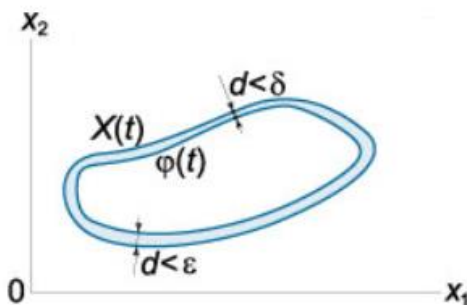


Рисунок 4. Траекторная или орбитальная устойчивость

Может оказаться, что движение, устойчивое относительно одних переменных, неустойчиво относительно других. Так, можно показать, что движение искусственного спутника Земли по круговой орбите устойчиво относительно его радиуса-вектора (орбитальная устойчивость) и неустойчиво относительно декартовых координат. Поэтому, говоря об устойчивости движения, необходимо всегда оговаривать, относительно каких величин рассматривается устойчивость.

В тех случаях, когда асимптотическая устойчивость имеет место при *любых* возмущениях (не обязательно малых), невозмущённое движение называется *устойчивым в целом*.

Иногда устойчивость имеет место не при любых возмущениях, а при возмущениях, подчинённых некоторым условиям. Такая устойчивость называется *условной*.

Понятие *технической устойчивости* возникает в связи с постановкой задачи об устойчивости на конечном интервале времени. Теория устойчивости на конечном интервале времени ставит целью разработку системы оценки отклонений  $x_j$  на конечном интервале времени и выбор параметров таким образом, чтобы эти отклонения укладывались в определённые пределы.

Примером *устойчивой по Пуассону* траектории является состояние равновесия. Если же рассматривается траектория, отличная от неподвижной точки, то *устойчивой по Пуассону* она будет в том случае, если обладает свойством возвращаться в сколь угодно малую окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Поэтому устойчивыми по Пуассону будут циклы и квазипериодические траектории (суперпозиция двух периодических колебаний с несоизмеримыми частотами), а также более сложные траектории, возникающие в хаотических системах. Интервал времени, по прошествии которого траектория возвращается в окрестность точки заданного радиуса, называется периодом возврата Пуанкаре.

*Устойчивость по Лагранжу* подразумевает, что траектория всегда остаётся в некоторой ограниченной области фазового пространства.

Остановимся на *особенностях определения устойчивости движения по Ляпунову*:

1. Предполагается, что возмущения налагаются только на начальные условия, иначе говоря, возмущённое движение происходит при тех же силах (источниках энергии), что и невозмущённое движение.
2. Устойчивость рассматривается на бесконечно большом промежутке времени.
3. Возмущения предполагаются малыми.

Несмотря на эти ограничения, определение Ляпунова устойчивости движения является эффективным и плодотворным в приложениях. Кроме того, методы, развитые Ляпуновым, очень часто лежат в основе исследования других видов устойчивости движения.

## *1.2 Уравнения возмущённого движения*

Если известно общее решение дифференциальных уравнений движения (1.1), можно решить вопрос об устойчивости невозмущённого движения непосредственно, определив значения переменных в возмущённом движении.

Однако в подавляющем большинстве случаев общее решение дифференциальных уравнений движения неизвестно и часто не представляется возможным получить его в аналитическом виде. Да и при известном решении вывод об устойчивости целесообразно делать с помощью специально разработанных методов. Такие методы основаны на качественном анализе дифференциальных уравнений возмущённого движения, которым удовлетворяют отклонения.

Выведем уравнения возмущённого движения «в отклонениях». Для этого из (1.5) выразим  $y_j(t)$ :

$$y_j = f_j(t) + x_j(t), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.13)$$

И подставим (1.13) в (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{f}_j(t) + \dot{x}_j(t) &= Y_j(f_1(t) + x_1(t), f_2(t) \\ &+ x_2(t), \dots, f_n(t) + x_n(t), t), \\ &(j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь точкой обозначается производная по времени.

Разложим правые части системы (1.14) в ряд Тейлора по степеням  $x_j$  в окрестности начала координат, то есть при отклонениях равных нулю. Считается, что функции, разлагаемые в ряды, непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности.

$$\begin{aligned} \dot{f}_j(t) + \dot{x}_j(t) = & Y_j(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), t) \\ & + \left. \frac{\partial Y_j}{\partial x_1} \right|_{x=0} x_1 + \dots + \left. \frac{\partial Y_j}{\partial x_n} \right|_{x=0} x_n + X_j^*, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $X_j^*$  – совокупность всех членов, зависящих от отклонений  $x_j$  в степени выше первой.

Учтём, что в невозмущённом движении функции  $f_j(t)$  должны удовлетворять уравнениям (1.1):

$$\dot{f}_j(t) = Y_j(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), t). \quad (1.16)$$

Вычтем из (1.15) выражение (1.16), получим:

$$\dot{x}_j(t) = \left. \frac{\partial Y_j}{\partial x_1} \right|_{x=0} x_1 + \dots + \left. \frac{\partial Y_j}{\partial x_n} \right|_{x=0} x_n + X_j^*. \quad (1.17)$$

Таким образом получены уравнения *возмущённого движения* в «отклонениях».

В общем случае  $a_{jk} = \left. \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \right|_{x=0}$  – функции времени  $t$ , а в частном – константы.

Если отбросить  $X_j^*$ , то система (1.17) будет *системой уравнений первого приближения*:

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k. \quad (1.18)$$

Очевидно, что при нулевых значениях отклонений правые части уравнений обращаются в ноль.

Обозначим правые части системы (1.18), как  $X_j$ :

$$X_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \quad (1.19)$$

Нормальная форма системы ДУ (например, в виде (1.18)) допускает геометрическую интерпретацию. В возмущённом движении изображающая точка в пространстве отклонений



описывает некоторую траекторию, а скорость её  $U$  определяется равенствами

$$U_1 = \dot{x}_1, U_2 = \dot{x}_2, \dots, U_n = \dot{x}_n.$$

Если правые части системы (1.18) содержат явно время  $t$ , то система неавтономная и движение неустановившееся, а если не содержат – система автономная, движение установившееся.

Однако не всегда уравнения первого приближения дают правильный ответ на вопрос об устойчивости движения.

**Пример:** Пусть уравнения возмущённого движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_2 + ax_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \dot{x}_2 = ax_1 + ax_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на  $x_1$ , второе на  $x_2$  и сложим:

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = a(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}},$$

или же

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_1^2 + x_2^2) = a(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Пусть  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ , где  $r$  – расстояние от начала координат до изображающей точки с координатами  $x_1, x_2$ . Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{dt} = ar^3 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = ar^2.$$

Это уравнение легко интегрируется, и его общее решение имеет вид

$$r = \frac{r_0}{1 - ar_0(t - t_0)},$$

где  $r_0$  – значение  $r$  при  $t = t_0$ .

Проанализируем: при  $a > 0$  при  $t \rightarrow t_0 + \frac{1}{ar_0}$  расстояние  $r$  от изображающей точки  $M$  до начала координат возрастает, и движение неустойчиво. Если  $a < 0$ , то расстояние убывает и стремится к 0 при  $t \rightarrow \infty$ , и движение асимптотически устойчиво.

Теперь рассмотрим уравнения первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1. \end{cases}$$

Выполним те же самые действия:

$$\begin{aligned} x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 &= 0, \\ \frac{dr}{dt} &= 0, \\ r &= r_0. \end{aligned}$$

Тогда получается, что изображающая точка движется по окружности, радиус которой равен начальному отклонению точки от начала координат, и невозмущённое движение (нулевые отклонения) будет устойчиво при любых  $a$ . Это не соответствует выводам, сделанным при исследовании исходных уравнений возмущённого движения.

### *1.3 Уравнения возмущённого движения конического маятника*

Рассмотрим материальную точку массой  $m$ , подвешенную на невесомой нити длиной  $l$  к точке подвеса (сферический маятник). Положения точки будем определять углами  $\varphi$  и  $\theta$ , показанными на рисунке 5.

Кинетическая и потенциальная энергии маятника определяются как

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \left( (l\dot{\varphi} \sin\theta)^2 + (l\dot{\theta})^2 \right), \\ \Pi &= mgl(1 - \cos\theta). \end{aligned} \tag{1.20}$$

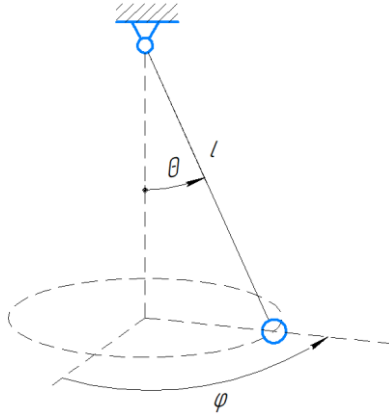


Рисунок 5. Конический маятник

Используя уравнения Лагранжа 2 рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

получим дифференциальные уравнения движения маятника:

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl \sin \theta &= 0, \\ ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + 2ml^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Упростим выражения (1.21):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin \theta + \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \\ \dot{\varphi} &= -2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Введём следующие обозначения:

$$\theta = y_1, \dot{\theta} = y_2, \dot{\varphi} = y_3. \quad (1.23)$$

С учётом (1.23) перепишем (1.22) и заметим, что уравнения движения маятника теперь принимают вид (1.1):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{g}{l} \sin y_1 + y_3^2 \sin y_1 \cos y_1, \\ \dot{y}_3 = -2 y_2 y_3 \operatorname{ctg} y_1. \end{cases} \quad (1.24)$$

Рассмотрим движение маятника по горизонтально расположенной окружности с постоянной скоростью (конический маятник) Тогда примем для невозмущённого движения:

$$\begin{aligned}\theta &= y_1 = f_1(t) = \alpha = const, \\ \dot{\theta} &= y_2 = f_2(t) = 0, \\ \dot{\varphi} &= y_3 = f_3(t) = \omega = const.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Подставляя (1.25) в (1.24) из второго уравнения получим соотношение:

$$\omega^2 \cos \alpha = \frac{g}{l}.\tag{1.26}$$

За невозмущённое движение примем движение, описываемое (1.25). Для возмущённого движения прибавим к (1.25) малые отклонения:

$$y_1 = \alpha + x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \omega + x_3.\tag{1.27}$$

Подставим (1.27) в уравнения (1.24) и получим дифференциальные уравнения возмущённого движения в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(\alpha + x_1) + (\omega + x_3)^2 \sin(\alpha + x_1) \cos(\alpha + x_1), \\ \dot{x}_3 = -2 x_2 (\omega + x_3) \operatorname{ctg}(\alpha + x_1). \end{cases}\tag{1.28}$$

Правые части этих уравнений обращаются в ноль при нулевых отклонениях.

Чтобы получить уравнения первого приближения, разложим в ряд Тейлора в окрестности нулевых значений отклонений правые части уравнений (1.28). В итоге, уравнения возмущённого движения в первом приближении с учётом соотношения (1.26) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \sin^2 \alpha + \omega x_3 \sin 2\alpha, \\ \dot{x}_3 = -2\omega x_2 \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}\tag{1.29}$$

## 2 ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

### 2.1 Функции Ляпунова

Одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости движения является *прямой метод Ляпунова* очень часто этот метод называется *вторым методом Ляпунова*. Будем изучать его для автономных систем.

Рассмотрим некоторые вещественные функции  $V(x) = V(x_1, \dots, x_n)$ , которые определены в области

$$\sum x_j^2 \leq \mu, \quad (2.1)$$

где  $\mu$  – постоянное положительное число.

Предполагается, что в области (2.1) эти функции *однозначны, непрерывны* и обращаются в ноль, когда все отклонения  $x_1, \dots, x_n$  равны нулю, т.е.

$$V(0) = 0. \quad (2.2)$$

Если в области (2.1) функция  $V$  кроме нуля может принимать значения только одного знака, то она называется *знакопостоянной* (соответственно *положительной* или *отрицательной*). Если же знакопостоянная функция обращается в ноль только в том случае, когда  $x_1, \dots, x_n$  равны нулю, то функция  $V$  называется *знакоопределённой* (соответственно *положительно-определённой* или *отрицательно-определённой*). Функции, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются *знакопеременными* функциями. Введённые таким образом функции  $V$ , используемые для исследования устойчивости движения, называются *функциями Ляпунова*.

**Пример 1:** Функция

$$V = x_1^2 + 5x_2^4$$

при  $x_1, x_2$  не равных нулю одновременно, принимает положительные значения и обращается в ноль только при  $x_1 = x_2 = 0$ . Следовательно, эта функция положительно-определённая. В пространстве  $x_1, x_2$   $V$  поверхность  $V = x_1^2 + 5x_2^4$  расположена по одну сторону от плоскости  $x_1, x_2$ , касаясь ее только в начале координат (рис. 6а).

**Пример 2:** Функция

$$V = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

не может принимать отрицательные значения, но она равна нулю не только в начале координат  $x_1 = x_2 = 0$  но и на прямой  $x_1 = x_2$ .  $V = 0$ . Следовательно, эта функция положительна, но не положительно-определённая. В этом случае поверхность  $(x_1 - x_2)^2$  в пространстве  $x_1, x_2$   $V$  также находится по одну сторону плоскости  $x_1, x_2$ , но и касается её не в одной точке, а по прямой  $x_1 = x_2$   $V = 0$  (рис. 6б).

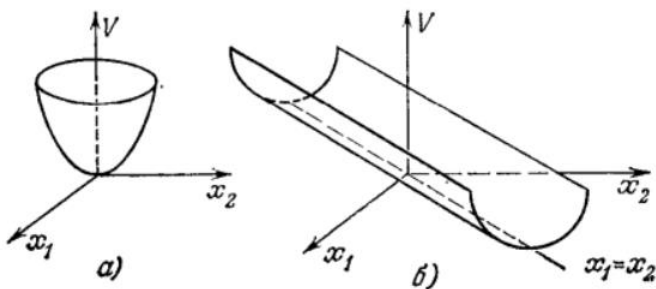


Рисунок 6. Функции Ляпунова

Из определений видно, что знакоопределённая функция имеет при  $x_1 = \dots = x_n = 0$  экстремум (минимум для положительно-определённой функции и максимум для отрицательно-определённой функции). Знакопостоянная функция в начале координат экстремума не имеет, так как в окрестности начала координат имеются точки, в которых функция  $V$  принимает

значения, равные  $V(0) = 0$  (во втором примере эти точки расположены на прямой  $x_1 = x_2, V = 0$ ).

Рассмотрим признаки, с помощью которых можно определить характер функции  $V$ . Прежде всего заметим, что знакоопределённая функция  $V$  должна содержать все переменные  $x_1, \dots, x_n$ . Действительно, пусть, например, функции  $V$  не содержат переменную  $x_n$ . Тогда при  $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n \neq 0$  функция  $V$  будет обращаться в ноль, что недопустимо для знакоопределённых функций.

Пусть знакоопределённая функция  $V = V(x)$  непрерывна вместе со своими производными. Тогда при  $x_1 = \dots = x_n = 0$  она будет иметь изолированный экстремум и, следовательно, все частные производные первого порядка, вычисленные в этой точке, будут равны нулю (необходимые условия существования экстремума).

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.3)$$

Разложим функцию  $V$  в ряд Маклорена по степеням  $x_1, \dots, x_n$ :

$$V = V(0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 x_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0 x_k x_j + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка. Учитывая соотношения (2.2) и (2.3), получим

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j + \dots \quad (2.4)$$

Здесь постоянные числа  $c_{kj} = c_{jk}$  определены равенствами

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.4) видно, что разложение знакоопределённой функции  $V$  в ряд по степеням  $x_1, \dots, x_n$  не содержит членов первой степени.

Предположим, что квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j. \quad (2.6)$$

принимает положительные значения и в ноль обращается только при  $x_1 = \dots = x_n = 0$ . Тогда вне зависимости от членов высшего порядка при достаточно малых по модулю  $x_j$  функция  $V$  будет принимать также положительные значения и в ноль она будет обращаться только при  $x_1 = \dots = x_n = 0$ . Таким образом, если квадратичная форма (2.6) положительно-определённая, то и функция  $V$  будет положительно-определённой.

Рассмотрим матрицу коэффициентов квадратичной формы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

и составим из неё  $n$  главных диагональных миноров:

$$\Delta_1 = c_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

В линейной алгебре доказывается следующий *критерий Сильвестра*: для того, чтобы квадратичная форма с вещественными коэффициентами была положительно-определённой, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  матрицы ее коэффициентов были положительны, т.е.

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Из сказанного следует, что критерий Сильвестра для квадратичной части функции  $V$  является достаточным (но не необходимым) условием положительной определённости самой функции  $V$ .

Если функция  $V$  отрицательно-определённая, то функция  $-V$  будет положительно-определённой. Поэтому достаточным



условием отрицательной определённости функции  $V$  будет критерий Сильвестра для матрицы  $-C$ . Этот критерий имеет вид

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$$

т.е. определители  $\Delta_j$  должны последовательно чередовать знак, причем знак  $\Delta_1 = c_{11}$  должен быть отрицательным.

Может оказаться, что разложение знакоопределённой функции  $V$  в ряд по степеням  $x_1, \dots, x_n$  начинается не с членов второго, а с членов более высокого порядка. К сожалению, общих приемов исследования функции на знакоопределённость в этом случае нет, но можно указать на один необходимый признак: *разложение знакоопределённой функции в ряд по степеням  $x_1, \dots, x_n$  не может начинаться с членов нечётной степени*. Покажем это. Пусть разложение знакоопределённой функции  $V$  в ряд по степеням  $x_1, \dots, x_n$  начинается с членов  $(2k + 1)$ -й степени, где  $k$  – целое положительное число. Положим  $x_2 = \dots = x_n = x_1$ . При этих значениях  $x_j$  функция  $V$  примет вид

$$V = Ax_1^{2k+1} + Bx_1^{2k+2} + \dots$$

Здесь  $A$  и  $B$  постоянные, а точками обозначены члены порядка выше  $2k + 2$ . При  $x_1$  достаточно малом по модулю, знак функции  $V$  будет совпадать со знаком первого члена. Но этот член меняет знак при изменении знака  $x_1$ . Следовательно, при  $A \neq 0$  функция  $V$  будет знакопеременной, что доказывает сделанное замечание.

Перейдём к изучению свойств функции  $V$ . Покажем прежде всего, что если функция  $V$  знакоопределённая, то поверхность  $V(x_1, \dots, x_n) = c$  замкнута.

При доказательстве, не нарушая общности, можно считать, что функция  $V$  положительно-определённая. Возьмём сферу  $\sum x_j^2 = \mu$  и пусть  $l$  – наименьшее значение функции  $V$  на этой сфере, так что на сфере  $\mu$ , функция  $V$  удовлетворяет неравенству

$$V_\mu \geq l.$$

Число  $l$  больше нуля, так как функция  $V$  положительно-определённая и, следовательно, на  $\mu$ -сфере, она не может принимать нулевые или отрицательные значения.

Построим поверхность  $V = c$ , выбрав число  $c < l$ . Будем двигаться из начала координат  $O$  по произвольной прямой  $OL$  до  $\mu$ -сферы (рис. 7а). При этом перемещении функция  $V$  будет меняться от нуля до некоторого числа  $V_\mu$ , большего  $c$  (так как  $V_\mu \geq l > c$ ). Следовательно, в силу непрерывности в некоторой промежуточной точке  $M$  функция  $V$  принимает значение, равное  $c$ , т. е. прямая  $OL$  пересекает в этой точке поверхность  $V = c$ . Так как прямая  $OL$  произвольна, то эта поверхность замкнута.

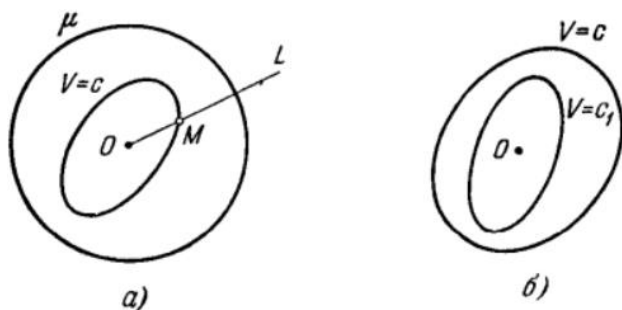


Рисунок 7. Поверхности  $V(x_1, \dots, x_n) = c$

Заметим, что свойство замкнутости поверхности  $V = c$  справедливо только для знакоопределённых функций. Для знакопостоянных или знакопеременных функций поверхности  $V = c$  разомкнуты.

Из этого доказательства вытекают два следствия:

1. Если  $|c| > |c_1|$ , то поверхность  $V = c_1$  находится внутри поверхности  $V = c$ , причём обе поверхности не имеют общих точек (функции  $V$  по определению однозначны) (рис. 7б).

2. Если изображающая точка  $M$  перемещается в сторону возрастания положительно-определённой функции  $V$ , то траектория этой точки пересекает поверхность  $V = c$  изнутри наружу, а при

движении в сторону убывания функции  $V$  – снаружи внутрь (для отрицательно-определённой функции картина обратная). Конечно, в общем случае все эти свойства справедливы только в достаточно малой окрестности нуля.

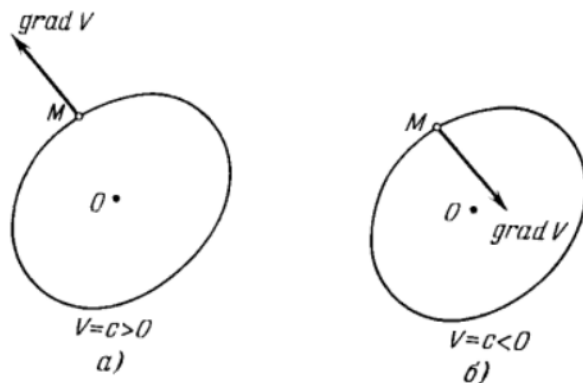


Рисунок 8. Градиент функции Ляпунова

Выберем на поверхности  $V(x) = c$  произвольную точку  $M$  и вычислим в этой точке вектор  $grad V$ :

$$grad V = \frac{\partial V}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \vec{e}_n. \quad (2.9)$$

где  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  – орты осей  $x_1, \dots, x_n$ .

Известно, что вектор  $grad V$  направлен по нормали к поверхности  $V = c$  в точке  $M$  в сторону возрастания функции  $V$ . Из этого следует, что вектор  $grad V$  направлен во внешнюю часть поверхности  $V = c$ , если функция  $V$  положительно-определённая (рис. 8а), и внутрь поверхности  $V = c$ , если функция  $V$  отрицательно-определённая (рис. 8б).

Одновременно с функцией  $V$  будем рассматривать её полную производную  $V$  по времени  $t$ , взятую в предположении, что переменные  $x$ , удовлетворяют дифференциальным уравнениям возмущённого движения (1.17).

Имеем

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n,$$

или, учитывая уравнения (1.17),

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n. \quad (2.10)$$

Напомним теперь, что величины  $X_j$  равны проекциям скорости  $\vec{U}$  изображающей точки  $M$ , а производные  $\frac{\partial V}{\partial x_j}$  – проекциям  $\mathit{grad} V$ . Поэтому правая часть равенства (2.10) равна скалярному произведению векторов  $\vec{U}$  и  $\mathit{grad} V$ , т. е.

$$\dot{V} = \vec{U} \cdot \mathit{grad} V. \quad (2.11)$$

Знание производной  $\dot{V}$  функции  $V$  позволяет наглядно проследить за движением изображающей точки. Действительно, пусть в данный момент времени  $t$  изображающая точка  $M$  занимает некоторое положение. Выберем какую-нибудь положительно-определённую функцию  $V$  и построим поверхность  $V = c$ , проходящую через точку  $M$ . Затем по формуле (2.10) вычислим в этой точке производную  $\dot{V}$  функции  $V$ . Рассмотрим три возможных случая:

1. В данном положении точки  $M$  производная  $\dot{V}$  отрицательна

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} < 0.$$

Из этого следует, что функция  $V$  убывает, то есть точка  $M$  переходит внутрь поверхности  $V = c$ . Этот вывод можно получить и из равенства (2.11). Так как  $V < 0$ , то из формулы (2.11) заключаем, что угол, между скоростью  $\vec{U}$  изображающей точки  $M$  и градиентом функции  $V$ , тупой. Учитывая, что для положительно-определённой функции  $V$  вектор  $\mathit{grad} V$  совпадает с внешней нормалью к поверхности  $V = c$ , заключаем, что вектор  $\vec{U}$  направлен внутрь этой

поверхности. Иначе говоря, траектория изображающей точки  $M$  пересекает поверхность  $V = c$  снаружи внутрь (рис. 9а).

2. В данном положении точки  $M$  производная  $\dot{V} = 0$ . Скалярное произведение  $\vec{U} \cdot \text{grad } V$  равно нулю, угол между этими векторами прямой, траектория изображающей точки касается поверхности  $V = c$  (в частности, она может целиком лежать на этой поверхности).

3. В данном положении  $\dot{V} > 0$ . Функция  $V$  возрастает, траектория изображающей точки пересекает поверхность  $V = c$  изнутри наружу (угол между векторами  $\vec{U}$  и  $\text{grad } V$  острый) (рис. 9б).

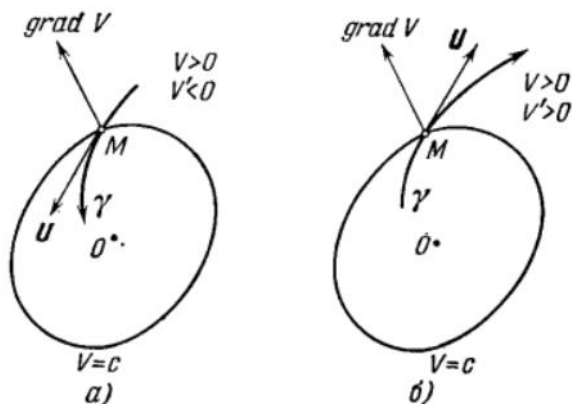


Рисунок 9. Градиент функции Ляпунова и скорость изображающей точки

## 2.2 Теорема Ляпунова об устойчивости движения

### Теорема Ляпунова об устойчивости движения:

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения можно найти знакоопределённую функцию  $V$ , производная которой  $\dot{V}$  в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$ , или тождественно равна нулю, то невозмущённое движение *устойчиво*.

Доказательство:

Выберем произвольное, достаточно малое положительное число  $\varepsilon > 0$  и построим сферу  $\sum x_j^2 = \varepsilon$ . Затем построим поверхность  $V = c$ , лежащую внутри  $\varepsilon$ -сферы (рис. 10). Это можно сделать, потому что функция  $V$  непрерывна и равна нулю в начале координат.

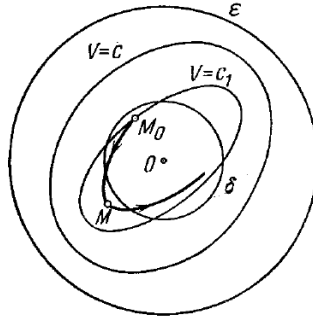


Рисунок 10. К доказательству теоремы Ляпунова об устойчивости движения

Теперь выберем число  $\delta$  настолько малым, чтобы сфера  $\sum x_j^2 = \delta$  целиком лежала внутри поверхности  $V = c$ , не имея с ней общих точек.

Допустим, что функция  $V$  является положительно-определённой. По условию теоремы её производная будет отрицательной функцией или тождественно равна нулю, т.е.  $\dot{V} \leq 0$ . Тогда

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t \dot{V} dt, \quad (2.12)$$

где  $V_0$  – значение функции  $V$  в начальной точке  $M_0$ .

$$\begin{aligned} V - V_0 &\leq 0, \\ V &\leq V_0. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что при  $t \geq t_0$  изображающая точка  $M$  либо находится на поверхности  $V = V_0 = c_1$  (при  $\dot{V} \equiv 0$ ), либо находится внутри этой поверхности. Таким образом,

изображающая точка  $M$ , начав движение из положения  $M_0$ , находящегося внутри или на поверхности  $\delta$  –сферы, никогда не выйдет за пределы поверхности  $V = c_1$  и тем более не может достигнуть поверхности  $\varepsilon$  –сферы. Это доказывает теорему.

### 2.3 Теоремы об асимптотической устойчивости

#### **Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости:**

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения можно найти знакоопределённую функцию  $V$ , производная которой  $\dot{V}$  в силу этих уравнений была бы знакоопределённой функцией противоположного знака с  $V$ , то невозмущенное движение *асимптотически устойчиво*.

Вместо строго доказательства заметим, что выполнены все условия теоремы Ляпунова об устойчивости движения и, следовательно, изображающая точка не выйдет из поверхности  $V = c_1$ . Однако в теореме об асимптотической устойчивости условия более сильные – производная  $\dot{V}$  не может тождественно равняться нулю и в ноль она обращается только в начале координат (так как  $\dot{V}$  знакоопределённая, а не знакпостоянная функция). Поэтому изображающая точка  $M$  сразу после начала движения входит внутрь поверхности  $V = c_1$ . И в итоге изображающая точка асимптотически стремится к началу координат.

#### **Теорема Красовского об асимптотической устойчивости движения:**

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения (1.17) в области (2.1) можно найти положительно-определённую функцию  $V$  такую, что ее производная  $\dot{V}$  удовлетворяет в этой области следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} \dot{V} < 0 \text{ вне } K, \\ \dot{V} = 0 \text{ на } K, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где  $K$  – многообразие точек, не содержащее целых траекторий системы при  $0 \leq t \leq \infty$ , то невозмущённое движение *асимптотически устойчиво*.

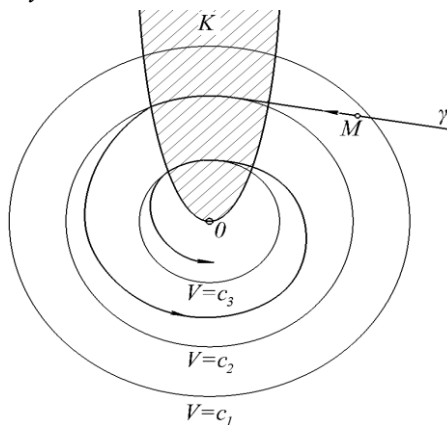


Рисунок 11. Геометрическая иллюстрация теоремы Красовского об асимптотической устойчивости движения

Дадим геометрическую иллюстрацию данной теоремы. По условию теоремы во всех точках окрестности нуля  $\dot{V} \leq 0$  ( $\dot{V} < 0$  вне  $K$  и  $\dot{V} = 0$  на  $K$ ). Из этого следует, что траектория  $\gamma$  изображающей точки  $M$  в области (2.1) не может пересечь поверхность ( $V = c$ ) изнутри наружу.

Если точка  $M$  находится вне многообразия  $K$ , то её траектория  $\gamma$  будет пересекать замкнутые поверхности  $V = c_j$  снаружи внутрь. Действительно, по условию теоремы функция  $V$  положительно-определённая, а вне  $K$  производная  $\dot{V} < 0$  (рис. 11). Предположим теперь, что при своём движении изображающая точка  $M$  попала на многообразии  $K$ . Очевидно, что на этом многообразии точка  $M$  движется по поверхности  $V = c_2$  (на  $K$  производная  $\dot{V} = 0$ ). Так как многообразие  $K$  не содержит целых траекторий системы, то точка  $M$  должна покинуть это многообразие, причём в месте схода траектория  $\gamma$ , касаясь поверхности  $V = c_2$ , войдёт внутрь неё (ибо вне  $K$  она пересекает эти поверхности снаружи внутрь – рис. 11).



В дальнейшем точка  $M$  может снова попасть на многообразии  $K$  и будет двигаться по новой поверхности  $V(x) = c_3$ , расположенной ближе к началу координат, чем поверхность  $V(x) = c_2$  ( $c_3 < c_2$ , так как после схода точки  $M$  с поверхности  $V = c_2$  производная  $\dot{V} < 0$  и, следовательно, функция  $V$  убывает). Этот процесс может неоднократно повторяться, причём изображающая точка  $M$  будет неограниченно приближаться к началу координат (строгое доказательство теоремы сводится, по существу, к аналитическому описанию этого процесса).

Из приведённого обоснования теоремы Красовского видно, в чём состоит отличие в поведении функции  $V$  в условиях его теоремы от поведения этой функции в условиях теоремы Ляпунова.

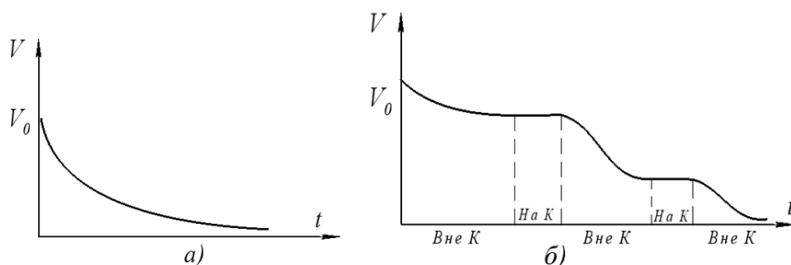


Рисунок 12. Геометрическая иллюстрация асимптотической устойчивости

Для асимптотической устойчивости теорема Ляпунова требует, чтобы при  $t \rightarrow \infty$  функция  $V$  стремилась к нулю монотонно (рис. 12а), Красовский ослабил это условие и показал, что для асимптотической устойчивости функция  $V$  может стремиться к нулю не монотонно, а ступенчато (рис. 12б – горизонтальные участки графика функции  $V$  соответствуют нахождению изображающей точки  $M$  на многообразии  $K$ ).

Остановимся кратко на определении условий, при выполнении которых многообразие  $K$  не будет содержать целых траекторий дифференциальных уравнений возмущённого движения (1.17).

Возьмём положительно-определённую функцию  $V$ , производная которой просто отрицательная функция, т. е. она может принимать помимо отрицательных также и нулевые значения. Совокупность тех значений  $x_1, \dots, x_n$ , при которых производная  $\dot{V}$  обращается в ноль (кроме начала координат) определяет многообразие  $K$ . На вопрос, содержит или не содержит это многообразие целые траектории уравнений (1.17), можно во многих случаях ответить непосредственной проверкой.

Для этого достаточно внести уравнение многообразия (если его можно написать в явном виде) в дифференциальные уравнения возмущённого движения. Если при этом уравнения обращаются в тождества, то многообразии  $K$  содержит целые траектории; в противном случае не содержит.

В тех случаях, когда многообразии  $K$  представляет некоторую поверхность

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

достаточно составить скалярное произведение  $\vec{U} \cdot \text{grad}(F)$ , где  $\vec{U}$  – скорость изображающей точки  $M$ .

Если это произведение тождественно равно нулю, то скорость  $\vec{U}$  будет все время перпендикулярна к  $\text{grad}(F)$ , т.е. к нормали поверхности  $F = 0$ . Это означает, что траектория  $\gamma$  изображающей точки  $M$  лежит всеми своими точками на этой поверхности. Таким образом, для того чтобы целые траектории дифференциальных уравнений возмущённого движения (1.17) не принадлежали поверхности  $F = 0$ , достаточно, чтобы скалярное произведение  $\vec{U} \cdot \text{grad}(F)$  не равнялось нулю тождественно:

$$\vec{U} \cdot \text{grad}(F) = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial F}{\partial x_j} \neq 0. \quad (2.14)$$

**Пример:**

Рассмотрим следующие дифференциальные уравнения возмущённого движения:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1x_2 - x_2^3.$$

Возьмём в качестве функции Ляпунова следующую положительно-определённую функцию:

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

В силу уравнений возмущённого движения она имеет отрицательную производную

$$\dot{V} = -(x_1 - x_2^2)^2.$$

Так как производная  $\dot{V}$  не отрицательно-определённая, а просто отрицательная функция, то теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости применить нельзя. Попробуем воспользоваться теоремой Красовского. Множество  $K$  найдём, приравняв производную  $V$  к нулю:

$$F = x_1 - x_2^2 = 0$$

(на плоскости  $x_1, x_2$  это парабола).

Составим скалярное произведение (2.14)

$$\vec{U} \cdot \text{grad}(F) = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

или, подставляя соответствующие величины и учитывая, что на  $K$   $x_1 = x_2^2$ ,

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \text{grad}(F) &= -(x_1 - 3x_2^2) \cdot 1 + (-x_1x_2 - x_2^3)(-2x_2) = \\ &= 2x_2^2 + 4x_2^4. \end{aligned}$$

Это выражение не обращается в ноль (точка  $x = 0$ , как обычно, исключается), поэтому многообразие  $F = x_1 - x_2^2 = 0$  не содержит целых траекторий. Теперь видно, что выполнены все условия теоремы Красовского об асимптотической устойчивости. Действительно:

- 1) Функция  $V$  положительно-определённая;

- 2) Производная  $\dot{V}$  на  $K$  равна нулю, а вне  $K$  она отрицательна;
- 3) Множество  $K$  не содержит целых траекторий.

Следовательно, рассматриваемое движение асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова и обобщение Красовского устанавливают достаточные условия асимптотической устойчивости в малом, т.е. при малых начальных возмущениях. Е.А. Барбашину и Н.Н. Красовскому принадлежит теорема, определяющая достаточные условия асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях.

### **Теорема Барбашина – Красовского:**

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения можно найти положительно-определённую функцию  $V(x)$ , удовлетворяющую условию:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty, \quad (2.15)$$

производная которой, вычисленная в силу этих уравнений, удовлетворяет при всех  $x$  двум условиям:

$$\begin{aligned} \dot{V} < 0 \text{ вне } K, \\ \dot{V} = 0 \text{ на } K, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $K$  – множество точек, не содержащее целых траекторий системы при  $0 \leq t \leq \infty$ , то невозмущённое движение  $x=0$  устойчиво в целом (символ  $x \rightarrow \infty$  в равенстве (2.15) означает, что хотя бы одна координата  $x_k$  стремится к бесконечности по любому закону).

Покажем необходимость условия (2.15). При доказательстве теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости решающее значение имеют два свойства знакоопределённых функций  $V$ :

- в окрестности нуля поверхности  $V(x) = c$  замкнуты;
- неограниченное стремление знакоопределённой функции  $V(x)$  к нулю свидетельствует о стремлении изображающей точки к началу координат.

При рассмотрении устойчивости в целом необходимо учитывать, что координаты  $x_k$  могут принимать большие по модулю значения (хотя бы в начале движения). Поэтому, если условие (2.15) не выполнено, то может оказаться, что поверхности  $V(x) = c$ , замкнутые при достаточно малых  $|x_k|$  будут разомкнуты при больших  $|x_k|$ . В результате значения функции  $V(x)$  могут убывать, а изображающая точка не будет стремиться к началу координат.

#### 2.4 Теоремы о неустойчивости движения

Ляпунову принадлежат две теоремы о неустойчивости движения.

##### **Теорема Ляпунова о неустойчивости движения 1:**

Если дифференциальные уравнения возмущённого движения позволяют найти функцию  $V$ , которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределённой производной  $\dot{V}$  и могла бы принимать в окрестности нуля значения одного знака с  $\dot{V}$ , то невозмущённое движение неустойчиво.

##### **Теорема Ляпунова о неустойчивости движения 2:**

Если дифференциальные уравнения возмущённого движения позволяют найти функцию  $V$ , производная от которой в силу этих уравнений могла бы быть приведена к виду

$$\dot{V} = \lambda V + W,$$

где  $\lambda = \text{const} > 0$ , а функция  $W$  или тождественно равна нулю или представляет собой знакостоянную функцию, а сама функция  $V$  может принимать значения одного знака с  $W$ , то невозмущённое движение неустойчиво.

В 30-х годах прошлого столетия Четаев обобщил эти теоремы и доказал теорему, из которой как частный случай вытекают теоремы Ляпунова.

Пусть вещественная непрерывная и однозначная функция  $V(x)$  определена в области (2.1)  $\sum x_k^2 \leq \mu$ , где  $\mu$  – постоянное положительное число.

Совокупность значений переменных  $x_1, \dots, x_n$  из этой области, удовлетворяющих неравенству

$$V(x) > 0,$$

называется областью положительной определённости функции (областью  $V > 0$ ), а поверхность  $V = 0$  – границей области  $V > 0$ . Предполагается, как и прежде, что  $V(0) = 0$ , т.е. начало координат принадлежит границе области положительной определённости ( $V > 0$ ). Так, например, границей области  $V > 0$  для функции  $V = x_1 - x_2^2$  будет парабола  $x_1 = x_2^2$  (рис. 13).

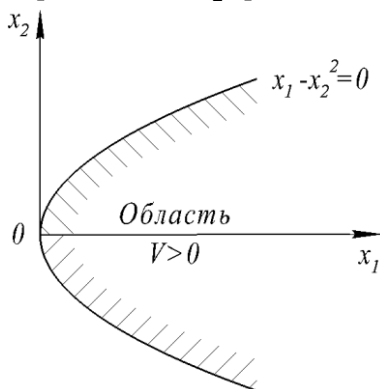


Рисунок 13. Граница области положительной определённости

Если функция  $V$  положительно-определённая, то областью  $V > 0$  будет вся окрестность нуля. Для отрицательных функций  $V$  область  $V > 0$  не существует.

### **Теорема Четаева:**

Если дифференциальные уравнения возмущённого движения позволяют найти функцию  $V(x)$ , для которой в сколь угодно малой окрестности нуля существует область  $V > 0$ , и если производная  $\dot{V}$  функции  $V$ , вычисленная в силу этих уравнений,

положительна во всех точках области  $V > 0$ , то невозмущённое движение неустойчиво.

Обобщение Четаева по сравнению с теоремами Ляпунова состоит в том, что он ослабил условия Ляпунова, налагаемые на производную  $\dot{V}$  – достаточно, чтобы она была положительно-определённой не во всех точках окрестности нуля, как требует теорема Ляпунова, а только в области  $V > 0$ .

Другое ослабление требований, налагаемых на производную  $\dot{V}$ , содержится в следующей теореме.

**Теорема Красовского о неустойчивости движения:**

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения (1.17) можно найти функцию  $V$  такую, что её производная  $\dot{V}$  удовлетворяет условиям:

$$\dot{V} > 0 \text{ вне } K,$$

$$\dot{V} = 0 \text{ на } K,$$

где  $K$  – многообразие точек, не содержащее целых траекторий при  $0 \leq t \leq \infty$ , и если при этом можно указать точки, лежащие в произвольной окрестности начала координат, такие, что в них  $V > 0$ , то невозмущённое движение неустойчиво.

Возьмём начальную точку  $M_0(x_0)$  такую, чтобы в ней выполнялось условие  $V(x_0) > 0$ . Так как в этой точке  $V_0 > 0$  и  $\dot{V} > 0$  (предполагаем вначале, что  $M_0$  не принадлежит многообразию  $K$ ), то функция  $V$  будет возрастать, а изображающая точка  $M$  будет удаляться от начала координат. Если при своём движении изображающая точка  $M$  попадёт на  $K$ , или  $M_0$  принадлежит  $K$ , то вскоре она должна будет покинуть это многообразие (оно не содержит целых траекторий) и снова начнётся удаление точки  $M$  от начала координат.

## 2.5 Методы построения функции Ляпунова

Применение основных теорем требует определения функций Ляпунова, удовлетворяющих определённым требованиям. К сожалению, общих методов построения таких функций нет. Приведём различные способы построения функций Ляпунова.

### Метод преобразования координат

Если для данных уравнений трудно найти функцию Ляпунова, то можно перейти к новым координатам и уравнения можно привести к такой форме, для которой соответствующая функция находится проще. Прежде всего нужно попробовать линейное преобразование с постоянными коэффициентами.

### Метод неопределённых коэффициентов

Запишем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} x_k x_j. \quad (2.17)$$

Подчиним неопределённые коэффициенты  $a_{kj}$  критерию Сильвестра. Тогда функция  $V$  будет положительно-определённой. Так как число коэффициентов  $a_{kj}$  равно  $\frac{n(n+1)}{2}$ , то после этого остаётся ещё  $\frac{n(n-1)}{2}$  независимых коэффициентов, которыми можно распорядиться по своему усмотрению.

Предположим, что нужно найти условия, при которых движение будет асимптотически устойчиво, чаще всего такие задачи встречаются в технических положениях. Постараемся подобрать оставшиеся независимые коэффициенты  $a_{kj}$  функции  $V$  так, чтобы производная  $\dot{V}$ , вычисленная в силу уравнений возмущённого движения, была бы функцией отрицательно-определённой или удовлетворяла бы условиям теоремы



Красовского. Если такие коэффициенты  $a_{kj}$  можно найти, то невозмущённое движение будет асимптотически устойчиво.

Можно отметить, что от умножения на положительное число свойства функции не изменяются. Поэтому один коэффициент, например  $a_{nn}$ , функции  $V(x)$  можно положить равным единице.

### **Построение функции Ляпунова с помощью связи интегралов**

Предположим, что уравнения возмущённого движения допускают интеграл

$$F(x_1, \dots, x_n) = h = const, \quad (2.18)$$

для которого разность  $F(x) - F(0)$  является положительно-определённой функцией переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда в качестве функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = F(x_1, \dots, x_n) - F(0). \quad (2.19)$$

Действительно, производная функции  $V$  по времени в силу уравнений возмущённого движения тождественно равна нулю и, следовательно, эта функция будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

В некоторых случаях дифференциальные уравнения возмущённого движения допускают несколько интегралов

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = h_1, \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) = h_m, \quad (2.20)$$

где  $h_1, \dots, h_m$  – постоянные интегрирования, причём ни один из них не является положительно-определённой функцией. Для такого случая Н.Г. Четаев предложил искать функцию  $V$  в форме связи интегралов. В общем виде эта связка может иметь вид

$$\begin{aligned} V = & \lambda_1[F_1 - F_1(0)] + \dots + \lambda_m[F_m - F_m(0)] \\ & + \chi_1[F_1^2 - F_1^2(0)] + \dots \\ & + \chi_m[F_m^2 - F_m^2(0)], \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \chi_1, \dots, \chi_m$  – неопределённые постоянные.

Если постоянные  $\lambda_j$  и  $\chi_j$  удастся подобрать таким образом, что функция  $V$  будет положительно-определённой, то она будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения (так как  $V = const$  является также интегралом уравнений возмущённого движения).

Метод Четаева построения функции Ляпунова с помощью связки интегралов весьма эффективен. Сделаем несколько замечаний:

а) один из  $2m$  коэффициентов  $\lambda_j$  и  $\chi_j$  можно выбрать произвольно, например, положив  $\lambda_1 = 1$ ;

б) часто функцию  $V$  можно построить с помощью линейной связки интегралов, положив все  $\chi_j = 0$ . Члены с квадратами интегралов следует привлекать только в том случае, если линейная связка недостаточна;

в) во многих случаях интегралы уравнений возмущённого движения можно построить из общих соображений (например, с помощью общих теорем механики), не составляя самих уравнений. Этим приёмом следует широко пользоваться, избегая излишних преобразований.

## 2.6 Устойчивость движения конического маятника

Рассмотрим устойчивость движения конического маятника, уравнения возмущённого движения которого были получены в п.1.3. Кинетическая и потенциальная энергия с точностью до постоянной:

$$T = \frac{1}{2} m \left( (l \dot{\varphi} \sin \theta)^2 + (l \dot{\theta})^2 \right), \quad \Pi = -mgl \cos \theta.$$

Так как действующая на маятник сила тяжести потенциальна, а координата  $\varphi$  циклическая (кинетическая энергия  $T$  зависит от обобщённой скорости  $\dot{\varphi}$ , но не зависит от координаты  $\varphi$ , и

обобщённая сила, соответствующая этой координате, равна нулю:  $Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$ ), то существуют два интеграла движения ( $h$  и  $n$  – постоянные):

$$T + \Pi = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta} + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta = \frac{ml^2}{2} h,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = ml^2 n$$

(множители  $\frac{ml^2}{2}$  и  $ml^2$  введены для удобства).

Второе равенство представляет интеграл момента количества движения маятника относительно вертикали и его можно получить из элементарных соображений. Эти интегралы получены из общих теорем динамики. Конечно, можно было сначала составить дифференциальные уравнения возмущённого движения, а затем, комбинируя их, найти интегралы. Как уже было отмечено ранее, выбранный здесь путь, как правило, является более простым.

Пользуясь равенствами  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$ , введёнными ранее в п. 1.3, запишем эти интегралы в следующей форме:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = [x_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1)(\omega + x_3)^2] - \frac{2g}{l} \cos(\alpha + x_1) = h,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = \sin^2(\alpha + x_1)(\omega + x_3) = n.$$

Перейдём к исследованию устойчивости стационарного движения маятника относительно величин  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$ . Ни один из найденных интегралов не является знакоопределённой функцией относительно величин  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Поэтому составим линейную связку интегралов, положив  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = \lambda$ :

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda[F_2 - F_2(0)] =$$

$$= [x_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1)(\omega + x_3)^2] - \frac{2g}{l} \cos(\alpha + x_1) -$$

$$-(\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{2g}{l} \cos \alpha) + \lambda \sin^2(\alpha + x_1)(\omega + x_3) - \lambda \sin^2 \alpha \omega.$$

Члены  $-(\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{2g}{l} \cos \alpha)$  и  $-\lambda \sin^2 \alpha \omega$  внесены для того, чтобы функция  $V$  обращалась в ноль при  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Заменяем отношение  $\frac{g}{l}$  его значением из равенства  $\omega^2 \cos \alpha = \frac{g}{l}$  (формула (1.26)) и разложим функцию  $V$  в ряд по степеням  $x_1, x_2, x_3$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha + x_1) &= \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha \cdot x_1 + \cos 2\alpha \cdot x_1^2 + \dots, \\ \cos(\alpha + x_1) &= \cos \alpha - \sin \alpha \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot x_1^2 + \dots, \end{aligned}$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Внесём эти значения для  $\sin^2(\alpha + x_1)$  и  $\cos(\alpha + x_1)$  в последнее выражение для функции  $V$  и сгруппируем члены:

$$\begin{aligned} V &= \omega[(\lambda + \omega) \cos 2\alpha + \omega \cos^2 \alpha] x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 \alpha \cdot x_3^2 + \\ &+ \omega \sin 2\alpha \cdot (\lambda + 2\omega) x_1 + \sin^2 \alpha \cdot (\lambda + 2\omega) x_3 + \\ &+ \sin 2\alpha \cdot (\lambda + 2\omega) x_1 x_3 + \dots \end{aligned}$$

Для того чтобы функция  $V$  была положительно-определённой, необходимо прежде всего избавиться от членов, содержащих вариации  $x_1, x_2$  и  $x_3$  в первой степени. В данном случае для этого достаточно предположить

$$\lambda = -2\omega.$$

При таком значении  $\lambda$  функции  $V$  примет вид

$$V = \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 \alpha \cdot x_3^2 + \dots$$

Так как квадратичная часть функции  $V$  положительно-определённая относительно  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , то при достаточно малых значениях  $x_1, x_2$  и  $x_3$  вся исходная функция  $V$  будет также положительно-определена. Производная по времени функции  $V$  на основании интегралов  $F_1(x_1, x_2, x_3)$  и  $F_2(x_1, x_2, x_3)$  тождественно равна нулю, и, следовательно, стационарное движение конического маятника устойчиво относительно  $\theta, \dot{\theta}$  и  $\phi$ .

## 2.7 Устойчивость стационарного движения центра масс искусственного спутника Земли

Будем предполагать, что на спутник действуют только силы притяжения Земли, приводящие к одной равнодействующей  $F$ , приложенной к центру масс спутника, причем модуль её определяется законом всемирного тяготения:

$$F = \mu \frac{m}{r^2}. \quad (2.22)$$

Здесь  $\mu = gR^2 = fM$  – гравитационный параметр Земли ( $R$  – ее радиус,  $g$  – ускорение силы тяжести на поверхности Земли,  $M$  – ее масса,  $f$  – гравитационная постоянная),  $r = OC$  – расстояние от центра Земли  $O$  до центра масс  $C$  спутника,  $m$  – его масса.

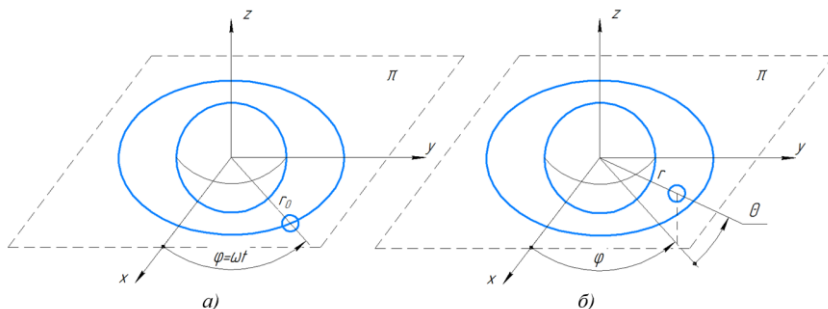


Рисунок 14. Невозмущённое движение искусственного спутника Земли

Рассмотрим равномерное движение центра масс искусственного спутника по круговой орбите радиуса  $r_0$ , лежащей в плоскости  $\pi$  (рис. 14а). Такое движение называется стационарным движением искусственного спутника Земли. Параметры, определяющие стационарное движение спутника, должны удовлетворять следующему условию, непосредственно вытекающему из второго закона Ньютона ( $mr_0\omega^2 = \mu \frac{m}{r_0^2}$ )

$$\omega^2 r_0^3 = \mu, \quad (2.23)$$

где  $\omega = \dot{\varphi} = const$  – угловая скорость вращения радиуса-вектора  $r_0$  спутника в стационарном движении.

Положение спутника в возмущённом движении будем определять сферическими координатами  $r, \varphi, \theta$  (рис. 14б). Кинетическая  $T$  и потенциальная  $\Pi$  энергии спутника определяются выражениями:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad \Pi = -\mu \frac{m}{r}.$$

Так как действующая на искусственный спутник Земли сила тяготения потенциальна, а координата  $\varphi$  циклическая (более подробно об этом будет изложено в разделе 4), то существуют два интеграла движения ( $h$  и  $n$  – постоянные):

$$T + \Pi = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \mu \frac{m}{r} = \frac{m}{2} h,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi} = mn.$$

Будем рассматривать устойчивость стационарного движения спутника по круговой орбите относительно величин  $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$ . Введем обозначения:  $r = r_0 + x_1, \dot{r} = x_2, \theta = x_3, \dot{\theta} = x_4, \dot{\varphi} = \omega + x_5$ . В сделанных обозначениях найденные интегралы можно записать в следующей форме:

$$F_1 = x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 (\omega + x_5)^2 - 2 \frac{\mu}{(r_0 + x_1)} = h,$$

$$F_2 = (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 (\omega + x_5) = n.$$

Перейдём к исследованию невозмущённого движения спутника. Ни один из найденных интегралов не является знакоопределённой функцией величин  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Поэтому функцию Ляпунова  $V$  будем искать в форме связки этих интегралов ( $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda, \chi_1 = 0, \chi_2 = \chi$ ):

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda_2 [F_2 - F_2(0)] + \chi [F_2^2 - F_2^2(0)],$$

где  $\lambda$  и  $\chi$  – постоянные числа.

Внесём в это выражение для  $V$  значения интегралов  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\begin{aligned}
V = & x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 (\omega + x_5)^2 - 2 \frac{\mu}{(r_0 + x_1)} \\
& - r_0^2 \omega^2 + 2 \frac{\mu}{r_0} + \lambda [(r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 (\omega + x_5) - r_0^2 \omega] + \\
& + \chi [(r_0 + x_1)^4 \cos^4 x_3 (\omega + x_5)^2 - r_0^4 \omega^2].
\end{aligned}$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд по степеням  $x_1, \dots, x_5$ . Имеем

$$\begin{aligned}
\cos^2 x_3 &= \left(1 - \frac{x_3^2}{2} + \dots\right)^2 = 1 - x_3^2 + \dots, \\
\cos^4 x_3 &= \left(1 - \frac{x_3^2}{2} + \dots\right)^4 = 1 - 2x_3^2 + \dots, \\
\frac{\mu}{r_0 + x_1} &= \frac{\mu}{r_0} - \mu \frac{x_1}{r_0^2} + \mu \frac{x_1^2}{r_0^3} + \dots,
\end{aligned}$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Подставим эти выражения и учтём, что в стационарном движении параметры  $\omega$  и  $r_0$  удовлетворяют условию (2.23). Тогда после очевидных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
V = & \omega(-\omega + \lambda + 6\chi r_0^2 \omega) x_1^2 + x_2^2 - r_0^2 \omega (\omega + \lambda + 2\chi r_0^2 \omega) x_3^2 + \\
& + r_0^2 x_4^2 + r_0^2 (1 + \chi r_0^2) x_5^2 + 2r_0 \omega (2\omega + \lambda + 2\chi r_0^2 \omega) x_1 + \\
& + r_0^2 (2\omega + \lambda + 2\chi r_0^2 \omega) x_5 + 2r_0 (2\omega + \lambda + 4\chi r_0^2 \omega) x_1 x_5 + \dots
\end{aligned}$$

Для того чтобы функция  $V$  была знакоопределённой, нужно прежде всего приравнять нулю коэффициенты при членах, содержащих переменные  $x_1$  и  $x_5$  в первой степени. Таким образом, числа  $\lambda$  и  $\chi$  должны удовлетворять соотношению:

$$2\omega + \lambda + 2\chi r_0^2 \omega = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = -2\omega - 2\chi r_0^2 \omega.$$

Подставляя это значение  $\lambda$  в последнее выражение для  $V$ , найдём

$$V = \omega^2 (4\chi r_0^2 - 3) x_1^2 + x_2^2 + r_0^2 \omega^2 x_3^2 + r_0^2 x_4^2 +$$

$$+r_0^2(1 + \chi r_0^2)x_5^2 + 4\chi r_0^2\omega x_1x_5 + \dots$$

Разобьём квадратичные члены на две функции:

$$V_1 = x^2 + r_0^2\omega^2x_3^2 + r_0^2x_4^2,$$

$$V_2 = \omega^2(4\chi r_0^2 - 3)x_1^2 + 4\chi r_0^3\omega x_1x_5 + r_0^2(1 + \chi r_0^2)x_5^2.$$

Функция  $V_1$  положительно-определённая относительно величин  $x_2, x_3$  и  $x_4$ . Поэтому для того, чтобы функция  $V$  была знакоопределённой относительно  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , достаточно показать, что можно найти такое  $\chi$ , при котором функция  $V_2$  будет положительно-определённая относительно  $x_1$  и  $x_5$ . Критерий Сильвестра для функции  $V_2$  имеет вид

$$\Delta_1 = \omega^2(4\chi r_0^2 - 3) > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \omega^2(4\chi r_0^2 - 3) & 2\chi r_0^3\omega \\ 2\chi r_0^3\omega & r_0^2(1 + \chi r_0^2) \end{vmatrix} = \omega^2 r_0^2 (\chi r_0^2 - 3) > 0.$$

Из этих выражений видно, что при  $\chi > \frac{3}{r_0^2}$  оба условия будут выполнены и, следовательно, функция  $V_2$  будет положительно-определённой относительно  $x_1, x_5$ , а функция  $V$  – положительно-определённой относительно  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , что и доказывает устойчивость стационарного движения искусственного спутника Земли относительно величин  $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$  и  $\phi$ .



## 3 УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общие решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и некоторых линейных уравнений могут быть получены в аналитической форме. По этой причине исследование устойчивости данных решений не представляет особых затруднений и может быть успешно выполнено путём анализа указанных решений. Однако, функционирование большинства реальных динамических систем описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, не имеющими аналитических решений. Поэтому традиционным подходом при исследовании вопросов устойчивости исходных нелинейные уравнения часто заменяют линейными уравнениями первого порядка. Этот метод является простым и эффективным, хотя и не всегда применим.

### *3.1 Постановка задачи*

А.М. Ляпунов предложил при исследовании на устойчивость выделить в исходной системе уравнений возмущённого движения линейную и нелинейную составляющие. Рассмотрим уравнения возмущённого движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + X_1, \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + X_n,$$

где нелинейные члены  $X_1, \dots, X_n$  содержат  $x_1, \dots, x_n$  в степени выше первой.

Требуется определить условия, при которых заключение об устойчивости движения можно составить по уравнениям первого приближения:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$\dots$$

$$(3.2)$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n,$$

при любых нелинейных членах  $X_1, \dots, X_n$ .

Впервые эта задача была поставлена А. М. Ляпуновым.

Напомним метод построения характеристического уравнения.

Для автономной системы (не содержит время  $t$  в явном виде) все коэффициенты  $a_{kj}$  уравнений (3.2) – постоянные числа. Частное решений этих уравнений ищется в форме:

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t}, \dots, x_n = A_n e^{\lambda t},$$

$$(3.3)$$

где  $A_1, \dots, A_n, \lambda$  – постоянные числа.

Дифференцируем (3.3) по времени:

$$\dot{x}_1 = A_1 \lambda e^{\lambda t}, \dots, \dot{x}_n = A_n \lambda e^{\lambda t}.$$

$$(3.4)$$

Внесём (3.4) и (3.3) в (3.2) и сократим на  $e^{\lambda t} \neq 0$ . Тогда, после группировки:

$$(a_{11} - \lambda)A_1 + a_{12}A_2 + \dots + a_{1n}A_n = 0,$$

$$a_{21}A_1 + (a_{22} - \lambda)A_2 + \dots + a_{2n}A_n = 0,$$

$$\dots$$

$$a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)A_n = 0.$$

$$(3.5)$$

Так как, эта система линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $A_1, \dots, A_n$  должна иметь решение, отличное от нуля (иначе все  $x_k \equiv 0$ ), то определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(3.6)$$

Полученное уравнение относительно  $\lambda$  называется *характеристическим уравнением*, а соответствующий определитель – *характеристическим определителем*.

Рассмотрим корни характеристического уравнения. Характеристическое уравнение содержит неизвестное число  $\lambda$  в степени  $n$ , следовательно, оно имеет  $n$  корней:

$$\lambda_1, \lambda_n, \dots, \lambda_n.$$

Если среди корней характеристического уравнения нет равных (корни простые), то всегда существует такое неособенное линейное преобразование:

$$z_k = \sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \quad (k = 1, \dots, n), \quad (3.7)$$

где  $b_{kj}$  – некоторые постоянные числа, которое приводит уравнения первого приближения (3.2) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1, \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2, \\ &\dots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n \end{aligned} \quad (3.8)$$

Переменные  $z_1, \dots, z_n$  называются *каноническими переменными*. Применим преобразование (3.7) к уравнениям возмущённого движения (3.1)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + Z_1, \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + Z_2, \\ &\dots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n + Z_n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $Z_1, \dots, Z_n$  – нелинейные члены, содержащие  $z_1, \dots, z_n$  в степени, выше первой.

Каждому комплексному корню  $\lambda = \vartheta + i\mu$  характеристического уравнения (3.6) отвечает сопряжённый корень  $\bar{\lambda} = \vartheta - i\mu$  ( $\vartheta$  и  $\mu$  – вещественные постоянные числа); им соответствуют комплексно-сопряжённые канонические переменные  $z = u + iv$  и  $\bar{z} = u - iv$ , где  $u$  и  $v$  – вещественные функции времени  $t$ . Вещественным корням  $\lambda$  характеристического

уравнения (3.6) отвечают вещественные канонические переменные  $z$ .

Так как коэффициенты  $b_{kj}$  преобразования (3.7) постоянные числа, то из устойчивости (неустойчивости) невозмущённого движения относительно переменных  $x_k$  следует устойчивость (неустойчивость) относительно канонических переменных  $z_k$  и наоборот.

Предположим теперь, что система линейна, то есть дифференциальные уравнения возмущённого движения имеют вид (3.2) или в канонических переменных (3.8).

В сделанных предположениях (корни характеристического уравнения простые) дифференциальные уравнения (3.8) независимы друг от друга. Их общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{01} e^{\lambda_1 t}, \\ &\dots \\ z_n &= z_{0n} e^{\lambda_n t}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где  $z_{01}, \dots, z_{0n}$  – значения переменных  $z_1, \dots, z_n$  при  $t=0$ .

Пусть  $\lambda_k = \vartheta_k + i\mu_k$  – корень характеристического уравнения (если  $\vartheta_k \neq 0, \mu_k \neq 0$  – корень комплексный;  $\vartheta_k = 0, \mu_k \neq 0$  – корень мнимый;  $\mu_k = 0$  – корень вещественный;  $\vartheta_k = \mu_k = 0$  – корень нулевой).

Имеем:

$$|e^{\lambda_k t}| = |e^{(\vartheta_k + i\mu_k)t}| = e^{\vartheta_k t} |e^{i\mu_k t}|,$$

или, учитывая, что  $|e^{i\mu_k t}| = 1$  при любых  $\mu_k$  и  $t$ :

$$|e^{\lambda_k t}| = e^{\vartheta_k t}. \tag{3.11}$$

При  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} |e^{\lambda_k t}| &\rightarrow 0, \text{ при } \vartheta_k < 0, \\ |e^{\lambda_k t}| &= 1, \text{ при } \vartheta_k = 0, \\ |e^{\lambda_k t}| &\rightarrow \infty, \text{ при } \vartheta_k > 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

### 3.2 Устойчивость равновесия линейных автономных систем

Из общего решения (3.10) и предельных равенств (3.12) вытекают теоремы об устойчивости движения линейной автономной системы, имеющей простые корни характеристического уравнения.

1. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны (все  $\vartheta_k < 0$ ), то невозмущенное движение асимптотически устойчиво (все  $z_k \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

2. Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, вещественная часть которого положительна, то невозмущенное движение неустойчиво (хотя бы одно все  $z_k \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

3. Если вещественные части некоторых корней характеристического уравнения равны нулю, а вещественные части остальных корней отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически (все  $z_k$  ограничены, и часть из них стремится к нулю).

Рассмотрим более подробно линейные автономные системы второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Как было показано выше классификация положений равновесия определяется *собственными значениями*  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$ . Числа  $\lambda_1, \lambda_2$  находятся из решения соответствующего *характеристического уравнения*

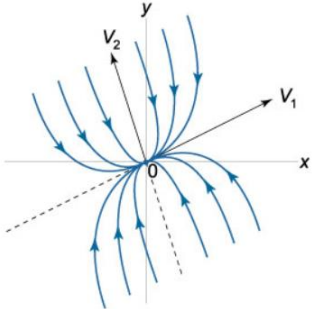
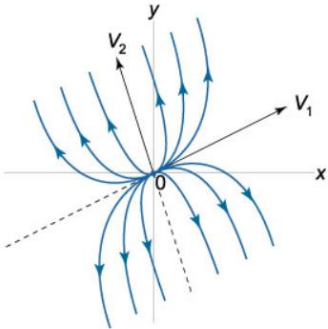
$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (3.14)$$

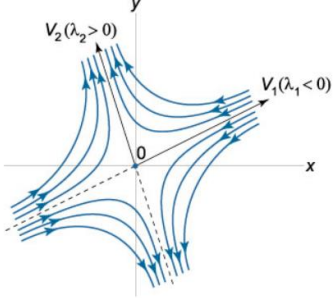
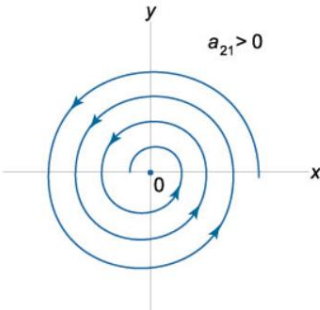
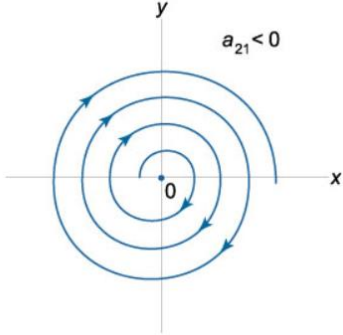
В общем случае, когда матрица  $A$  является невырожденной, существует 4 различных типа точек равновесия (точек покоя): узел, седло, фокус и центр. Для систем второго порядка удобно изучать поведение решений вблизи положений равновесия с помощью

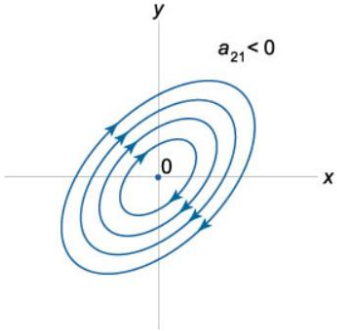
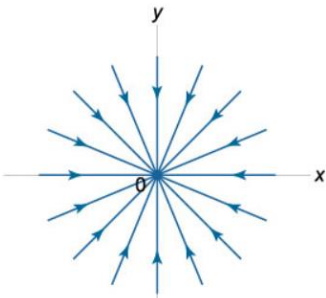
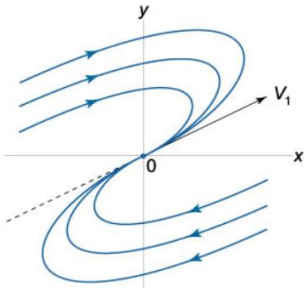
фазового портрета, который представляет собой совокупность фазовых траекторий на координатной плоскости.

В таблице 1 приведены основные типы точек равновесия и их фазовые портреты.

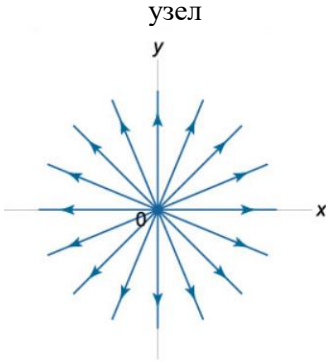
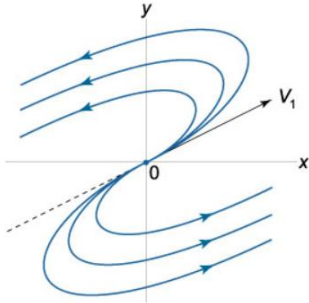
Таблица 1. Классификация положений равновесия

Корни характеристического уравнения	Характер положения равновесия и фазовый портрет в его окрестности	Устойчивость положения равновесия
Действительные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , $\lambda_1 < 0$ , $\lambda_2 < 0$	Устойчивый узел 	Асимптотическая устойчивость
Действительные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , $\lambda_1 > 0$ , $\lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел 	Неустойчива

<p>Действительные корни <math>\lambda_1 \neq \lambda_2</math>,  <math>\lambda_1 &lt; 0</math>,  <math>\lambda_2 &gt; 0</math></p>	<p>Седло</p> 	<p>Неустойчива</p>
<p>Комплексные корни  <math>\lambda_{1,2} = \vartheta \pm i\mu</math>,  <math>\vartheta &lt; 0</math>,  <math>\mu \neq 0</math></p>	<p>Устойчивый фокус</p> 	<p>Асимптотическая устойчивость</p>
<p>Комплексные корни  <math>\lambda_{1,2} = \vartheta \pm i\mu</math>,  <math>\vartheta &gt; 0</math>,  <math>\mu \neq 0</math></p>	<p>Неустойчивый фокус</p> 	<p>Неустойчива</p>

<p>Комплексные корни  <math>\lambda_{1,2} = \vartheta \pm i\mu,</math>  <math>\vartheta = 0,</math>  <math>\mu \neq 0</math></p>	<p>Центр  <math>y</math>  <math>a_{21} &lt; 0</math>  </p>	<p>Устойчива</p>
<p>Действительные кратные корни  <math>\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,</math>  <math>\lambda &lt; 0</math></p>	<p>Устойчивый дикритический узел  <math>y</math>    или устойчивый вырожденный узел  </p>	<p>Асимптотическая устойчивость</p>



Действительные кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$ $\lambda > 0$	Неустойчивый дикритический узел  или неустойчивый вырожденный узел 	Неустойчива
--	---	-------------

В таблице приведена классификация положений равновесия, основанная на собственных значениях. Однако тип точки равновесия можно определить и без вычисления собственных значений, зная лишь определитель матрицы  $\det A$  и её след  $tr A$ .

*Следом матрицы* называется число, равное сумме диагональных элементов:  $tr A = a_{11} + a_{22}$ .

Тогда характеристическое уравнение (3.14) можно записать в виде

$$\lambda^2 - tr A \cdot \lambda + \det A = 0$$

Тогда дискриминант этого уравнения имеет вид:

$$D = (trA)^2 - 4 \det A.$$

Таким образом, *бифуркационная кривая*, разграничивающая различные режимы устойчивости, представляет собой параболу  $\det A = (trA / 2)^2$  на плоскости  $trA, \det A$  (рис. 15). Выше параболы находятся точки равновесия типа фокус и центр, ниже параболы находятся точки типа «узел» и «седло». Сама парабола содержит критические и вырожденные узлы.

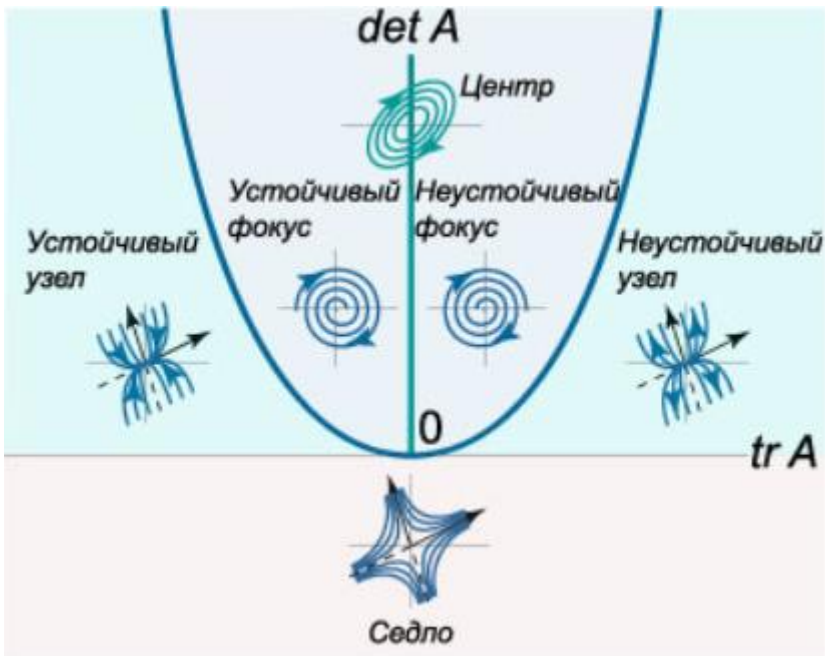


Рисунок 15. Бифуркационная диаграмма

Устойчивые режимы движения существуют в левом верхнем квадранте бифуркационной диаграммы. Остальные три квадранта соответствуют неустойчивым положениям равновесия.

### 3.3 Основные теоремы об устойчивости движения по первому приближению

#### **Теорема Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению:**

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

#### Доказательство:

Будем считать, что все корни характеристического уравнения простые. Так как вариации  $x_1, \dots, x_n$  связаны с каноническими переменными  $z_1, \dots, z_n$  линейным преобразованием (3.7) при постоянных  $b_{kj}$ , то достаточно доказать, что в условиях теоремы невозмущённое движение асимптотически устойчиво относительно переменных  $z_1, \dots, z_n$ .

Пусть часть корней характеристического уравнения комплексно-сопряжённые, а часть вещественные.

Комплексно-сопряжённые корни:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \vartheta_1 + i\mu_1, & \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \vartheta_1 - i\mu_1, & (3.15) \\ \lambda_3 = \vartheta_2 + i\mu_2, & \quad \lambda_4 = \bar{\lambda}_3 = \vartheta_2 - i\mu_2, \end{aligned}$$

Вещественные корни:

$$\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_n.$$

Комплексно-сопряжённым корням  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3, \lambda_4$  будут отвечать комплексно-сопряжённые канонические переменные  $z_1, z_2$  и  $z_3, z_4$ :

$$\begin{aligned} z_1 = u_1 + iv_1, & \quad z_2 = \bar{z}_1 = u_1 - iv_1, & (3.16) \\ z_3 = u_2 + iv_2, & \quad z_4 = \bar{z}_3 = u_2 - iv_2, \end{aligned}$$

где  $u_1, u_2, v_1, v_2$  – вещественные функции времени  $t$ . Вещественным корням  $\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_n$  отвечают вещественные канонические переменные  $z_5, z_6, \dots, z_n$ .

Составим функции Ляпунова в следующем виде:

$$V = \frac{1}{2} (z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5^2 + z_6^2 + \dots + z_n^2). \quad (3.17)$$

Отметим, что функция  $V$  является положительно-определённой вещественной функцией переменных  $u_1, u_2, v_1, v_2, z_5, z_6, \dots, z_n$ . Это следует из равенств:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_1 \bar{z}_1 = (u_1 + iv_1)(u_1 - iv_1) = u_1^2 + v_1^2, \\ z_3 z_4 &= z_3 \bar{z}_3 = (u_2 + iv_2)(u_2 - iv_2) = u_2^2 + v_2^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Вычислим производную  $\dot{V}$  функции  $V$ :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 z_2 + z_1 \dot{z}_2 + \dot{z}_3 z_4 + z_3 \dot{z}_4) + z_5 \dot{z}_5 + \dots + z_n \dot{z}_n.$$

Внесём сюда значения  $\dot{z}_k$  из уравнения (3.9):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} ((\lambda_1 z_1 + Z_1) z_2 + z_1 (\lambda_2 z_2 + Z_2) + (\lambda_3 z_3 + Z_3) z_4 + \\ &+ z_3 (\lambda_4 z_4 + Z_4)) + z_5 (\lambda_5 z_5 + Z_5) + \dots + z_n (\lambda_n z_n + Z_n), \end{aligned}$$

или, группируя члены:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} [(\lambda_1 + \lambda_2) z_1 z_2 + (\lambda_3 + \lambda_4) z_3 z_4] + \lambda_5 z_5^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + Z,$$

где  $Z$  – совокупность членов, содержащих  $z_1, \dots, z_n$  в степени выше второй. Так как, согласно равенствам (3.15),

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\vartheta_1, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 2\vartheta_2,$$

то, учитывая выражение (3.16), получим:

$$\dot{V} = \vartheta_1 (u_1^2 + v_1^2) + \vartheta_2 (u_2^2 + v_2^2) + \lambda_5 z_5^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + Z. \quad (3.19)$$

По условиям теоремы вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны. В принятых обозначениях будем иметь:

$$\vartheta_1 < 0, \vartheta_2 < 0, \lambda_5 < 0, \dots, \lambda_n < 0.$$

Из этого следует, что квадратичная часть производной  $\dot{V}$  будет отрицательно-определённой функцией переменных  $u_1, u_2, v_1, v_2, z_5, \dots, z_n$ , а вместе с ней при достаточно малых значениях  $|z_k|$  отрицательно-определённой будет и производная  $\dot{V}$

независимо от членов высшего порядка. Таким образом, выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, что доказывает сформулированную теорему.

**Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению:**

Если среди корней характеристического уравнения найдётся хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущённое движение неустойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

Доказательство:

По условию теоремы хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть. Пусть это будет  $\lambda_1$ , т.е.  $\vartheta_1 > 0$ .

Для упрощения доказательства сделаем следующие предположения:

- 1) Вещественные части всех корней не равны нулю;
- 2) Корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – простые.

Для определённости будем по-прежнему считать, что имеются две пары комплексно-сопряжённых корней ( $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \lambda_3, \lambda_4 = \bar{\lambda}_3$ ), а остальные корни  $\lambda_5, \dots, \lambda_n$  вещественные. Составим функцию Ляпунова в следующей форме:

$$V = \frac{1}{2} \vartheta_1 (z_1 z_2 + \vartheta_2 z_3 z_4 + \lambda_5 z_5^2 + \dots + \lambda_n z_n^2). \quad (3.20)$$

Отметим, что эта вещественная функция может принимать положительные значения, например, при  $z_3 = z_4 = z_5 = \dots = z_n = 0$  и  $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ . Вычислим производную  $\dot{V}$  функции  $V$ :

$$\dot{V} = \vartheta_1 \left\{ \frac{1}{2} [\dot{z}_1 z_2 + z_1 \dot{z}_2 + \vartheta_2 (\dot{z}_3 z_4 + z_3 \dot{z}_4)] + \lambda_5 z_5 \dot{z}_5 + \dots + \lambda_n z_n \dot{z}_n \right\}.$$

Внесём сюда значения производных  $\dot{z}_k$  из уравнений (3.9) и сгруппируем члены:

$$\dot{V} = \left\{ \frac{1}{2} [(\lambda_1 + \lambda_2) z_1 z_2 + \vartheta_2 (\lambda_3 + \lambda_4) z_3 z_4] + \lambda_5^2 z_5^2 + \dots + \lambda_n^2 z_n^2 \right\} + Z,$$

где  $Z$  – совокупность членов, содержащих  $z_1, \dots, z_n$  в степени выше второй. Пользуясь равенствами (3.15) и (3.18), получим:

$$\dot{V} = \vartheta_1\{\vartheta_1(u_1^2 + v_1^2) + \vartheta_2^2(u_2^2 + v_2^2) + \lambda_5^2 z_5^2 + \dots + \lambda_n^2 z_n^2\} + Z. \quad (3.21)$$

В сделанных предположениях  $\vartheta_1 > 0$  и  $\vartheta_2, \lambda_5, \dots, \lambda_n$  не равны нулю. Поэтому квадратичная часть производной  $\dot{V}$  будет положительно-определённой, а вместе с ней при достаточно малых значениях  $|z_k|$  положительно-определённой будет и производная  $\dot{V}$  независимо от членов высшего порядка. Таким образом, выполнены все условия теоремы Ляпунова о неустойчивости движения, что доказывает сформулированную теорему.

#### Про теоремы Ляпунова

Доказанные две теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению решают задачу в двух случаях:

1) Вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.

2) Вещественная часть хотя бы одного корня положительна.

Существуют особые или критические случаи, например, когда вещественные части некоторых или всех корней характеристического уравнения могут равняться нулю (в частности, среди корней могут быть и нулевые), а вещественные части остальных отрицательны. В этих случаях будем считать, что уравнения первого приближения не могут решить задачу об устойчивости движения.

Например, для полученных в п. 1.3 уравнений первого приближения конического маятника (1.29) характеристическое уравнение имеет вид

$$-\lambda(\lambda^2 + \omega^2(1 + 3 \cos^2 \alpha)) = 0.$$

Соответственно корни характеристического уравнения:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm \omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha} i.$$

Все корни имеют нулевые вещественные части, следовательно, по уравнениям первого приближения нельзя сделать вывод об устойчивости движения.

### 3.4 Критерий Гурвица

После раскрытия характеристического определителя и группировки членов по степеням характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3.22)$$

Из коэффициентов (3.22) запишем следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

по следующему правилу: в первой строке стоят коэффициенты уравнения (3.22) с нечётными индексами, начиная с  $a_1$ . Элементы каждой последующей строки образуются из соответствующих элементов предшествующей строки уменьшением индекса на единицу. Если в соответствии с этим правилом индекс коэффициента превосходит степень уравнения (3.22) или отрицателен, то этот коэффициент заменяется нулём. В результате такого построения на главной диагонали должны стоять коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$ , а в последнем столбце все элементы, кроме последнего, равны нулю.

Составим главные диагональные миноры матрицы (3.23):

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (3.24)$$

Последнее равенство очевидно, так как в последнем столбце все элементы, кроме последнего, равны нулю.

### Теорема Гурвица:

Для того чтобы все корни алгебраического уравнения (3.22) с вещественными коэффициентами и положительным коэффициентом при старшем члене имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры (3.24) были положительными

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (3.25)$$

Заметим, что из теоремы Гурвица и теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению можно сделать вывод:

Если при  $a_0 > 0$  все миноры Гурвица  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  положительны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости.

Заметим также, что если хотя бы одно из неравенств имеет противоположный смысл, то среди корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  уравнения (3.22) имеются такие, вещественные части которых положительны (это служит признаком неустойчивости системы – вторая теорема Ляпунова).

Следствия, вытекающие из формул Виета:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n), \\ \frac{a_2}{a_0} &= \lambda_1\lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{a_n}{a_0} &= (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \end{aligned}$$

1. Для того чтобы при  $a_0 > 0$  все корни уравнения (3.22) имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы все коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$  были положительны

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0. \quad (3.26)$$

Эти неравенства (они только необходимы, но не достаточны) можно получить из критерия Гурвица.



2. Если при  $a_0 > 0$  хотя бы один из коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$  отрицателен, то среди корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  уравнения (3.22) имеются такие, вещественные части которых положительны.

Частные случаи.

1. Система первого порядка ( $n=1$ ):

$$a_0\lambda + a_1 = 0.$$

Условие асимптотической устойчивости ( $a_0 > 0$ )  $a_1 > 0$ .

2. Система второго порядка ( $n=2$ ):

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Матрица (3.23) и условие Гурвица имеют вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2.$$

Отсюда следует условие асимптотической устойчивости системы второго порядка ( $a_0 > 0$ ):

$$a_1 > 0, a_2 > 0.$$

3. Система третьего порядка ( $n=3$ ):

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Матрица (3.23) и условие Гурвица имеют вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_3 - a_0 a_3 > 0, \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0.$$

Используя неравенства (3.25), получаем условие асимптотической устойчивости системы третьего порядка ( $a_0 > 0$ )

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

В общем виде условие Гурвица очень удобно при  $n \leq 4$ . В тех случаях, когда  $n$  велико и левая часть характеристического уравнения имеет форму определителя и не приведена к многочлену, целесообразно перейти к численным методам с использованием ЭВМ.

## 4 УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

### 4.1 Теорема Лагранжа

Рассмотрим механическую систему с голономными и стационарными связями, положение которой определяется  $s$  обобщенными независимыми координатами  $q_1, \dots, q_s$ . Как известно, в положении равновесия все обобщенные силы  $Q_k$  такой системы равны нулю:

$$Q_1 = 0, \dots, Q_s = 0. \quad (4.1)$$

Если обобщённые силы  $Q_k$  зависят от координат  $q_j$  и скоростей  $\dot{q}_j$ , то для определения положений, в которых система может находиться в равновесии, достаточно внести в равенство (4.1) значения  $\dot{q}_j = 0$  и решить полученные уравнения относительно  $q_1, \dots, q_s$ .

Для консервативных сил

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k},$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия системы, и уравнения (4.1) принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (4.2)$$

Решая эти уравнения относительно  $q_1, \dots, q_s$ , найдем те значения обобщенных координат, при которых система может находиться в равновесии. Таких положений может оказаться несколько, причём в некоторых из них равновесие может быть устойчивым, а в некоторых неустойчивым. Так, например, простой маятник, подвешенный на стержне, имеет два возможных

положения равновесия, из них в нижнем положении равновесие устойчиво, а в верхнем неустойчиво.

Рассмотрим одно из возможных положений равновесия. Будем считать, что в этом положении потенциальная энергия равна нулю. Это всегда можно сделать, так как потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной. Кроме того, не нарушая общности, можно считать, что в этом положении все обобщённые координаты  $q_1, \dots, q_s$  равны нулю (для этого достаточно отсчёт координат вести от этого положения). Будем рассматривать устойчивость равновесия относительно обобщённых координат  $q_1, \dots, q_s$  и обобщённых скоростей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ .

Тогда уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad (4.3)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k, \quad (k = 1, \dots, s).$$

будут уравнениями возмущённого движения. Число уравнений  $n = 2s$  и они допускают интеграл энергии

$$T + \Pi = h, \quad (4.4)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы.

Лагранжу принадлежит следующая теорема (1788 г.), определяющая достаточные условия устойчивости равновесия консервативных систем. (Строгое доказательство теоремы Лагранжа впервые дал Дирихле, поэтому эта теорема часто называется теоремой Лагранжа – Дирихле. Здесь приводится доказательство Ляпунова, вытекающее непосредственно из его прямого метода).

### **Теорема Лагранжа – Дирихле:**

Если в положении изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями потенциальная

энергия  $\Pi$  имеет минимум, то в этом положении равновесие устойчиво.

Доказательство:

В рассматриваемом положении равновесия потенциальная энергия равна нулю и имеет минимум. Поэтому по крайней мере в достаточно малой окрестности нуля значения функции  $\Pi$  будут положительны. Это означает, что в этой окрестности потенциальная энергия  $\Pi$  представляет положительно-определённую функцию переменных  $q_j$ , а полная энергия системы

$$V = T + \Pi \quad (4.5)$$

положительно-определённую функцию обобщённых координат  $q_1, \dots, q_s$  и обобщённых скоростей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$  (так как кинетическая энергия  $T$  механической системы с голономными и стационарными связями является положительно-определённой квадратичной формой обобщённых скоростей).

Полная производная функции  $V$  по времени на основании интеграла (4.4) равна нулю. Следовательно, эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, что и доказывает теорему Лагранжа.

Теорема Лагранжа широко используется в приложениях. Как правило, при её практическом применении удобнее всего разложить потенциальную энергию в ряд по степеням  $q_1, \dots, q_s$ , а затем воспользоваться критерием Сильвестра. В общем виде имеем

$$\Pi = \Pi(0) + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots,$$

где точками обозначены члены, содержащие  $q_1, \dots, q_s$  в степени выше второй.

По условию  $\Pi(0) = 0$  (в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю); кроме того, в этом положении должны выполняться равенства (4.2). Поэтому

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{kj} q_j q_k + \dots, \quad (4.6)$$

где постоянные коэффициенты

$$c_{kj} = c_{jk} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0. \quad (4.7)$$

Если коэффициенты  $c_{kj}$  удовлетворяют критерию Сильвестра, то квадратичная часть равенства (4.6) будет положительно-определённой квадратичной формой переменных  $q_1, \dots, q_s$ , а вместе с ней будет положительно-определена в окрестности нуля и потенциальная энергия  $\Pi$ . Это означает, что потенциальная энергия  $\Pi$  имеет изолированный минимум и, следовательно, согласно теореме Лагранжа, в рассматриваемом положении равновесие устойчиво.

Теорема Лагранжа определяет только достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы: если потенциальная энергия имеет в положении изолированного равновесия минимум, то равновесие устойчиво. Ляпунов первый поставил вопрос об обратимости теоремы Лагранжа, а именно: можно ли утверждать, что при отсутствии минимума потенциальной энергии равновесие будет неустойчивым? Ему принадлежат следующие две теоремы, примем их без доказательств.

**Теорема 1:**

Если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия не имеет минимума и его отсутствие определяется членами второго порядка малости без необходимости рассматривания членов высшего порядка, то равновесие неустойчиво.

**Теорема 2:**

Если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия имеет максимум, определяемый по членам наименее

высокого порядка, которые действительно имеются в разложении этой функции, то равновесие неустойчиво.

Н.Г. Четаев обобщил эти теоремы Ляпунова и доказал следующую **теорему**:

Если в изолированном положении равновесия потенциальная энергия  $\Pi$ , предполагаемая аналитической функцией  $q_1, \dots, q_s$ , не имеет минимума, то равновесие неустойчиво.

На основании приведённых теорем будем в дальнейшем считать, что устойчивому положению равновесия потенциальной системы отвечает минимум потенциальной энергии. Из этого следует, что устойчивое положение равновесия потенциальной системы изолировано.

#### 4.2 Циклические координаты. Преобразования Рауса

Существует обширный класс механических систем, для которых некоторые координаты не входят явным образом в кинетическую энергию системы, а обобщённые силы, соответствующие этим координатам, равны нулю. Такие координаты называются *циклическими*, а остальные координаты системы *позиционными* или просто *нециклическими*. Так, например, для конического маятника координата  $\varphi$  – циклическая, а координата  $\theta$  – позиционная.

Пусть  $q_1, \dots, q_s$  – позиционные, а  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  – циклические координаты системы. Запишем уравнения Лагранжа для циклических координат:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = Q_{\varphi_j}, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (4.8)$$

Кинетическая энергия  $T$  системы по определению циклических координат не зависит явным образом от  $\varphi_j$ , поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = 0.$$

Кроме того, обобщённые силы  $Q_{\varphi_j}$  соответствуют циклическим координатам, равны нулю.

$$Q_{\varphi_j} = 0.$$

Следовательно, уравнения Лагранжа для циклических координат принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (4.9)$$

Эти уравнения допускают очевидные первые интегралы:

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} = c_j = \text{const}, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (4.10)$$

показывающие, что *обобщённые импульсы, соответствующие циклическим координатам, остаются постоянными во все время движения.*

Первые интегралы последнего уравнения можно использовать для преобразования уравнений Лагранжа для позиционных координат. Это преобразование принадлежит Раусу и носит его имя.

Правые части первых интегралов последнего уравнения содержат циклические скорости  $\dot{\varphi}_j$  линейно, так как  $T$  – квадратичная функция скоростей. Найдём из  $m$  первых интегралов все  $\dot{\varphi}_j$  выразив их через  $q_k$  и  $\dot{q}_k$ , внесем затем их в выражение для кинетической энергии и обозначим результат подстановки через  $T^*$ , после чего составим функцию Рауса по следующей формуле

$$R = T^* - \sum_{k=1}^m c_k \dot{\varphi}_k \quad (4.11)$$

В этом выражении циклические скорости  $\dot{\varphi}_k$  должны быть заменены их значениями, полученными из первых интегралов. Уравнения для позиционных координат  $q_j$  примут следующий вид в предположении, что все силы, действующие на систему, потенциальны:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, s). \quad (4.12)$$

Функция Рауса не содержит циклических координат  $\varphi$  и скоростей, а зависит только от  $q_k$  и  $\dot{q}_k$ . Поэтому движение в позиционных координатах  $q_j$  можно изучать по предыдущему уравнению, как бы *игнорируя* циклические координаты. В связи с этим движение в циклических координатах называется *скрытым движением*, а движение в позиционных координатах – *явным движением*.

Остановимся подробно на структуре функции Рауса. В результате всех преобразований, связанных с построением, в функции Рауса  $R$  можно выделить слагаемое  $R_2$ , содержащее позиционные скорости  $\dot{q}_k$  во второй степени, слагаемое  $R_1$ , содержащее позиционные скорости  $\dot{q}_k$  в первой степени и слагаемое  $R_0$  независящее от скоростей  $\dot{q}_k$ :

$$R = R_2 + R_1 + R_0, \quad (4.13)$$

где

$$R_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (4.14)$$

$$R_1 = \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j, \quad (4.15)$$

В этих равенствах коэффициенты  $a_{kj} = a_{jk}, a_j$ , а также  $R_0$  – функции позиционных координат  $q_1, \dots, q_s$  и постоянных интегрирования  $c_1, \dots, c_m$ . Не останавливаясь на доказательстве, заметим, что квадратичная форма  $R_2$  является положительно-определённой.

Внесём в уравнения (4.12) значения функции Рауса из формулы (4.13):



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(R_2 + R_1 + R_0)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(R_2 + R_1 + R_0)}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (4.16)$$

Разбивая на отдельные слагаемые и учитывая, что  $R_0$  не зависит от  $\dot{q}_k$  и, следовательно,  $\frac{\partial R_0}{\partial \dot{q}_j} = 0$ , получим после группировки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_2}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial R_0}{\partial q_j} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_1}{\partial q_j} \right). \quad (4.17)$$

Пользуясь формулой (4.15) для  $R_1$ , преобразуем выражение, стоящее в скобках, имеем

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^s a_k \dot{q}_k = a_j, \quad (j = 1, \dots, s). \quad (4.18)$$

Учитывая, что  $a_j$  зависит от времени  $t$  сложным образом через  $q_1, \dots, q_s$ , получим по правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{da_j}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Заменим теперь в формуле индекс суммирования  $j$  на  $k$  и продифференцируем по  $q_j$ :

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^s a_k \dot{q}_k = \sum_{k=1}^s \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_k.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_1}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^s g_{jk} \dot{q}_k. \quad (4.19)$$

где так называемые *гироскопические коэффициенты*  $g_{jk}$  определены равенствами

$$g_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j}. \quad (4.20)$$

Теперь уравнения приводятся к следующему виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_2}{\partial q_j} = - \frac{\partial W}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^s g_{jk} \dot{q}_k, \quad (4.21)$$

где

$$W = \Pi - R_0. \quad (4.22)$$

Уравнениям можно отнести некоторую систему (она называется *приведённой системой*), в которой функции  $R_2$  и  $W$  служат *кинетической и потенциальной энергиями*, обобщённые силы этой системы определяются равенствами

$$Q_j = - \frac{\partial W}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^s g_{jk} \dot{q}_k. \quad (4.23)$$

Причём  $\sum_{k=1}^s g_{jk} \dot{q}_k$  называются *гироскопическими силами*. Из определения гироскопических коэффициентов  $g_{jk}$  видно, что их матрица кососимметричная, т.е.

$$g_{jk} = -g_{kj}. \quad (4.24)$$

В этом легко убедиться, поменяв в формуле (4.20) местами индексы  $k$  и  $j$ . Заметим, что при отсутствии гироскопических сил (это, как правило, бывает при  $R_1 = 0$ ) система называется *гироскопически несвязанной*. Основное свойство гироскопических сил состоит в том, что сумма их работ на действительном перемещении равна нулю. Это свойство лежит в основе их определения, данного Томсоном и Тетом. Гироскопические силы встречаются не только в системах с циклическими координатами.

Из дифференциальных уравнений (4.21) приведённой системы легко получить интеграл энергии:

$$R_2 + W = R_2 + \Pi - R_0 = const. \quad (4.25)$$

Этот интеграл может быть получен формальными методами, но физически он очевиден – гироскопические силы, действующие на приведённую систему, не производят работы и, следовательно, они не могут изменить общий баланс энергии.

### 4.3 Стационарное движение и условия его устойчивости

При некоторых условиях материальная система, имеющая  $m$  циклических и  $s$  позиционных координат, может совершать стационарное движение, которое состоит в том, что все позиционные координаты и циклические скорости сохраняют постоянные значения, равные начальным. Условия, при которых осуществляется стационарное движение, легко получаются из следующих очевидных соображений.

Согласно определению в стационарном движении, все позиционные координаты сохраняют постоянное значение:

$$q_k(t) = q_{k0} = \text{const}, \quad (k = 1, \dots, s).$$

Это означает, что приведённая система находится в покое. Но для этого, согласно равенствам (4.1), необходимо и достаточно, чтобы все обобщённые силы (4.23) этой системы равнялись нулю, т.е.

$$Q_j = - \left( \frac{\partial W}{\partial q_j} \right)_{q_0} - \sum_{k=1}^s g_{jk} \dot{q}_k = 0. \quad (4.26)$$

Или учитывая, что в стационарном движении (равновесии системы) все  $\dot{q}_k = 0$ :

$$\left( \frac{\partial W}{\partial q_j} \right)_{q_0} = 0, \quad (j = 1, \dots, s). \quad (4.27)$$

Принимая во внимание (4.22). Для потенциальной энергии  $W$  приведённой системы, этим условиям можно придать и другой вид, а именно:

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_{q_0} = \left( \frac{\partial R_0}{\partial q_j} \right)_{q_0}, \quad (j = 1, \dots, s). \quad (4.28)$$

Таким образом, для осуществимости стационарного движения необходимо и достаточно, чтобы начальные значения позиционных координат  $q_j$  удовлетворяли  $s$  равенствам (4.27) и все начальные

значения позиционных скоростей  $q_j$  равнялись нулю (при  $q = const$  и  $\dot{q} = 0$  все циклические скорости  $\dot{\phi}$  будут сохранять постоянные значения). Отметим, что в функцию  $R_0$  входят постоянные  $c_j$  циклических интегралов, поэтому значения  $q_{0j}$  в стационарном движении зависят от циклических скоростей  $\dot{\phi}$ , содержащихся в  $c_j$ .

Перейдём теперь к определению условий устойчивости стационарного движения, которое будем считать за возмущённое движение. Не нарушая общности, можно считать, что в стационарном движении все позиционные координаты  $q_j$  равны нулю. Тогда уравнения движения приведённой системы (4.21) будут дифференциальными уравнениями возмущённого движения относительно позиционных координат  $q_j$  и скоростей  $\dot{q}_j$ . Раусу принадлежат и несколько теорем об устойчивости стационарного движения. Здесь приводится одна из них, получившая наибольшее распространение.

### **Теорема Рауса:**

Если в стационарном движении потенциальная энергия  $W = \Pi - R_0$  приведённой системы имеет минимум, то это движение устойчиво относительно позиционных координат и скоростей, по крайней мере для возмущений, не нарушающих значений циклических интегралов.

### Доказательство:

При стационарном движении исходной системы приведённая система находится в покое. Кроме того, имеет место интеграл энергии (4.25). Поэтому для доказательства теоремы Рауса достаточно повторить доказательство теоремы Лагранжа.

Теорема Рауса в данной формулировке справедлива, конечно, для возмущений, при которых не нарушаются циклические интегралы (4.10), так как они входят в потенциальную энергию

приведённой системы через функцию  $R_0$ . Ляпунову принадлежит существенное дополнение, устраняющее этот недостаток.

**Теорема:**

Если потенциальная энергия  $W$  приведённой системы имеет минимум как при данных  $p_j = c_j$ , отвечающих рассматриваемому стационарному движению, так и при всяких достаточно близких к данным значениях  $p_j = c_j + n_j$ , где  $n_j$  малы по модулю, причём значения переменных  $q_k$ , обращающие ее в минимум, суть непрерывные функции величин  $p_j$ , то стационарное движение устойчиво относительно  $\dot{q}_k$  и  $q_k$ .

**Примечание:** Циклические интегралы (4.10) содержат позиционные и циклические скорости линейно. Поэтому из устойчивости стационарного движения относительно величин  $q_k$  и  $\dot{q}_k$  следует устойчивость и относительно циклических скоростей, но не циклических координат.

Важно отметить, что устойчивость стационарного движения может быть осуществлена и при отсутствии минимума потенциальной энергии, за счёт гироскопических сил. Поэтому распространить теоремы Ляпунова и Четаева об обратимости теоремы Лагранжа на стационарное движение нельзя. Однако для гироскопически несвязанных систем справедлива следующая теорема, являющаяся перефразировкой теоремы Четаева об обратимости теоремы Лагранжа.

**Теорема:**

Если для изолированного стационарного движения гироскопически несвязанной системы при фиксированных циклических интегралах функция  $W$ , предполагаемая аналитической функцией переменных  $q$ , не имеет минимума, то стационарное движение неустойчиво.

В заключение отметим, что для практического применения теоремы Рауса достаточно заметить, что при выполнении её

условий функция  $W - W_0$  будет положительно-определённой ( $W_0$  – значение функции  $W$  в стационарном движении). Поэтому здесь рационально использовать обычный приём разложения этой функции в ряд с последующим применением критерия Сильвестра.

#### 4.4 Устойчивость стационарных движений центра масс искусственного спутника Земли

Рассмотрим применение преобразований Рауса для изучения устойчивости стационарных движений центра масс искусственного спутника Земли. В разделе 2.7 были получены следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий спутника

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad \Pi = -\mu \frac{m}{r}.$$

Из этих выражений видно, что координата  $\varphi$  – циклическая, т.к. входит в  $T$  не явно, а в виде  $\dot{\varphi}$ . Также обобщённая сила, соответствующая  $\varphi$ , равна 0. Остальные координаты – позиционные.

Тогда уравнение Лагранжа 2 рода для  $\varphi$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = c.$$

Это обобщённый импульс и, также, интеграл:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi} = c.$$

Выразим  $\dot{\varphi}$  и подставим в  $T$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{m r^2 \cos^2 \theta}, \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{m^2 r^4 \cos^4 \theta},$$

$$T^* = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{c^2}{2 m r^2 \cos^2 \theta}.$$

Составим функцию Рауса:

$$R = T^* - c\dot{\phi},$$

с учётом того, что

$$\dot{\phi} = \frac{c}{m r^2 \cos^2 \theta}.$$

Получим

$$\begin{aligned} R &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{c^2}{2 m r^2 \cos^2 \theta} - \frac{c^2}{m r^2 \cos^2 \theta} = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{c^2}{2 m r^2 \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

Уравнения для позиционных координат примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial \theta} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Представим функцию Рауса в виде

$$R = R_2 + R_1 + R_0.$$

$$R_2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad R_1 = 0, \quad R_0 = - \frac{c^2}{2 m r^2 \cos^2 \theta}.$$

Так как  $R_1 = 0$ , то система гироскопически не связана.

Подставим полученную сумму в уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial (R_2 + R_0)}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial (R_2 + R_0)}{\partial r} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial (R_2 + R_0)}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial (R_2 + R_0)}{\partial \theta} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $R_0$  не зависит от обобщённых скоростей и соответствующие производные будут равны нулю. Преобразуем и получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R_2}{\partial r} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial R_0}{\partial r} = - \frac{\partial (\Pi - R_0)}{\partial r} = - \frac{\partial W}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial R_2}{\partial \theta} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + \frac{\partial R_0}{\partial \theta} = - \frac{\partial (\Pi - R_0)}{\partial \theta} = - \frac{\partial W}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Этим уравнениям можно отнести некоторую систему – приведённую – для которой  $R_2$  – кинетическая энергия,

а  $\Pi - R_0 = W$  – потенциальная энергия. Обобщённые силы для этой системы имеют вид

$$Q_r = -\frac{\partial W}{\partial r}, \quad Q_\theta = -\frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

Движение стационарное, значит, обобщённые силы должны быть равны нулю (это необходимое и достаточное условие того, что приведённая система находится в покое). Получим условие осуществимости стационарного движения:

$$Q_r = -\frac{\partial W}{\partial r}\Big|_{r_0, \theta_0} = 0, \quad Q_\theta = -\frac{\partial W}{\partial \theta}\Big|_{r_0, \theta_0} = 0.$$

Определим это движение.

$$\begin{aligned} W &= -\mu \frac{m}{r} + \frac{c^2}{2 m r^2 \cos^2 \theta}, \\ -\frac{\partial W}{\partial r}\Big|_{r_0, \theta_0} &= -\left(\mu \frac{m}{r_0^2} - \frac{c^2}{m r_0^3 \cos^2 \theta_0}\right) = 0, \\ -\frac{\partial W}{\partial \theta}\Big|_{r_0, \theta_0} &= -\left(\frac{-\sin \theta_0 c^2}{m r_0^2 \cos^3 \theta_0}\right) = 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$r_0 = \frac{c^2}{\mu m^2 \cos^2 \theta_0}, \quad \theta_0 = 0.$$

Итак,

$$r = r_0 = \frac{c^2}{\mu m^2}, \quad \theta = \theta_0 = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \frac{c}{m r_0^2}.$$

Примем стационарное движение за невозмущённое и исследуем устойчивость стационарного движения с помощью теоремы Рауса и дополнением Ляпунова.

Придадим стационарному движению малые отклонения:

$$r = r_0 + x, \quad \theta = \theta_0 + \theta = \theta.$$

Разложим  $W - W_0$  в ряд по  $r$  и  $\theta$  в окрестности стационарного движения:



$$W - W_0 = \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r_0, \theta_0} x + \left. \frac{\partial W}{\partial \theta} \right|_{r_0, \theta_0} \theta + \\ + \frac{1}{2} \left( \left. \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right|_{r_0, \theta_0} x^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} \right|_{r_0, \theta_0} x \theta + \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right|_{r_0, \theta_0} \theta^2 \right) + \dots$$

Найдём производные обобщённой потенциальной энергии:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r_0, \theta_0} = \mu \frac{m}{r_0^2} - \frac{c^2}{m r_0^3 \cos^2 \theta_0} = \frac{\mu^3 m^5}{c^4} - \frac{\mu^3 m^5}{c^4} = 0, \\ \left. \frac{\partial W}{\partial \theta} \right|_{r_0, \theta_0} = \frac{-\sin \theta_0 c^2}{m r_0^2 \cos^3 \theta_0} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right|_{r_0, \theta_0} = -\frac{2\mu m}{r_0^3} + \frac{3c^2}{m r_0^4 \cos^2 \theta_0} = -\frac{2\mu^4 m^7}{c^6} + \frac{3\mu^4 m^7}{c^6} = \frac{\mu^4 m^7}{c^6}, \\ \left. \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} \right|_{r_0, \theta_0} = -\frac{2c^2 \sin \theta_0}{m r_0^3 \cos^3 \theta_0} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right|_{r_0, \theta_0} = \frac{-2(\cos^2 \theta_0 - 3)c^2}{m r_0^2 \cos^4 \theta_0} = \frac{\mu^2 m^3}{c^2}.$$

Запишем разность  $W - W_0$ , отбросив члены порядка выше третьего:

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu^4 m^7}{c^6} r^2 + \frac{\mu^2 m^3}{c^2} \theta^2 \right).$$

Получили положительно-определённую квадратичную форму. Следовательно, в стационарном движении потенциальная энергия  $W$  имеет минимум. Кроме того, для всякого  $r \neq 0$  решение  $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$  непрерывно зависит от  $c$ . Таким образом мы получили, что стационарное движение устойчиво относительно  $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \phi$  по теореме Рауса и дополнению Ляпунова.

# 5 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТОВ

При изучении неуправляемого движения космического аппарата важной задачей является определение положений равновесия относительно его центра масс. Знание положений равновесия и характера движения спутника в их окрестности позволяет использовать моменты внешних сил для обеспечения необходимой ориентации и стабилизации.

Используя работы Белецкого, Сарычева и других авторов исследуем на устойчивость положения равновесия сферического спутника под действием аэродинамического и гравитационного моментов при движении на круговой орбите, а также рассмотрим положения равновесия наноспутников формата CubeSat.

## *5.1 Системы координат и проекции моментов*

Для описания движения спутника относительно центра масс введём две системы координат (СК): орбитальную и связанную СК. Так как рассматривается круговая орбита, то орбитальная СК  $OXYZ$  совпадает с траекторной, начало её находится в центре масс спутника, ось  $OZ$  направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника, ось  $OX$  совпадает с направлением вектора скорости; ось  $OY$  дополняет СК до правой. Связанная с спутником СК  $Oxyz$ , начало которой находится в центре масс спутника,  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  – центральные оси инерции спутника.

Связь между орбитальной СК  $OXYZ$  и связанной СК  $Oxyz$  определим с помощью углов Эйлера: угла атаки  $\alpha_n$  (угол между

продольной осью спутника и вектором набегающего потока), угла прецессии  $\psi$  (угол между плоскостью полёта и плоскостью угла атаки), угла собственного вращения  $\varphi$  (угол между плоскостью угла атаки и поперечной осью спутника). Взаимное расположение выбранных систем координат показано на рисунке 16.

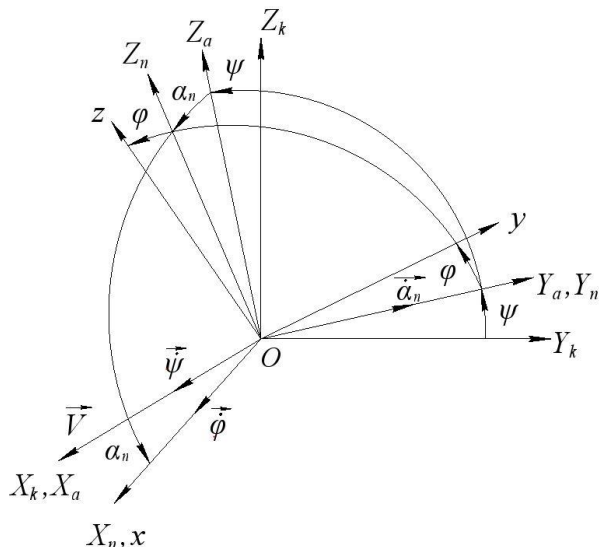


Рисунок 16. Взаимное расположение СК

Матрица перехода от орбитальной СК  $OXYZ$  к связанной СК  $Ox_ny_nz_n$  определяется следующим образом:

$$B = [b_{ij}],$$

где  $b_{11} = \cos \alpha_n$ ,  $b_{12} = \sin \alpha_n \sin \psi$ ,  $b_{13} = -\sin \alpha_n \cos \psi$ ,

$b_{21} = \sin \alpha_n \sin \varphi$ ,  $b_{22} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \alpha_n \sin \varphi \sin \psi$ ,

$b_{23} = \cos \varphi \sin \psi + \cos \alpha_n \sin \varphi \cos \psi$ ,

$b_{31} = \sin \alpha_n \cos \varphi$ ,  $b_{32} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \alpha_n \cos \varphi \sin \psi$ ,

$b_{33} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \alpha_n \cos \varphi \cos \psi$ .

Гравитационный момент в связанной со спутником системе координат имеет следующие проекции:

$$\begin{aligned}
 M_{gx} &= \frac{3\mu}{r^3} (J_z - J_y) b_{23} b_{33} , \\
 M_{gy} &= \frac{3\mu}{r^3} (J_x - J_z) b_{33} b_{13} , \\
 M_{gz} &= \frac{3\mu}{r^3} (J_y - J_x) b_{13} b_{23} .
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

где  $J_x, J_y, J_z$  – главные центральные моменты инерции спутника;  $\mu$  – гравитационный параметр Земли;  $r = R_3 + H$  – длина радиуса вектора центра масс МКА;  $H$  – высота полёта;  $R_3$  – радиус Земли.

Аэродинамический момент для спутников, имеющих форму сферы, в связанной со спутником системе координат, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 M_{ax} &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta z b_{21} - \Delta y b_{31}), \\
 M_{ay} &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta x b_{31} - \Delta z b_{11}), \\
 M_{az} &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta y b_{11} - \Delta x b_{21}),
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

где  $q = \rho V^2 / 2$  – скоростной напор;  $\rho$  – плотность атмосферы на данной высоте;  $V$  – скорость полёта спутника;  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  – положение центра масс относительно центра давления (геометрического центра);  $S_x$  – характерная площадь спутника;  $c_0$  – коэффициент, который может принимать значения от 2 до 3 в зависимости от физических свойств газа и поверхности спутника, для проектных проработок принимается равным 2,2.

Следует учесть, что для круговой орбиты справедливо соотношение:

$$\omega_{orb}^2 = \frac{\mu}{r^3},$$

где  $\omega_{orb}$  – орбитальная угловая скорость.

## 5.2 Уравнения движения относительно центра масс

Так как оси связанной СК  $Ox_iz$  являются главными центральными осями инерции спутника, то уравнения пространственного движения спутника относительно центра масс под действием аэродинамического и гравитационного моментов можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_{gx} + M_{ax}, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= M_{gy} + M_{ay}, \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_{gz} + M_{az}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  – проекции угловой скорости  $\vec{\omega}$  на оси связанной СК.

Так как

$$\vec{\omega} = \vec{\psi} + \vec{\varphi} + \vec{\dot{\alpha}}_n + \vec{\omega}_{op\delta},$$

то кинематические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos \alpha_n + \dot{\varphi} + \omega_{op\delta} b_{12}, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \alpha_n + \dot{\alpha}_n \cos \varphi + \omega_{op\delta} b_{22}, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \alpha_n - \dot{\alpha}_n \sin \varphi + \omega_{op\delta} b_{32}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Динамические уравнения Эйлера (5.3) и кинематические соотношения (5.4) составляют полную систему уравнений движения относительно центра масс спутника.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2).$$

В использованных ранее обозначениях перепишем компоненты угловой скорости в виде:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \tilde{\omega}_x + \omega_{op\delta} b_{12}, \\ \omega_y &= \tilde{\omega}_y + \omega_{op\delta} b_{22}, \\ \omega_z &= \tilde{\omega}_z + \omega_{op\delta} b_{32}. \end{aligned}$$

Тогда кинетическую энергию примет вид:

$$T = \frac{1}{2} \left( J_x (\tilde{\omega}_x + \omega_{op\delta} b_{12})^2 + J_y (\tilde{\omega}_y + \omega_{op\delta} b_{22})^2 + J_z (\tilde{\omega}_z + \omega_{op\delta} b_{32})^2 \right). \quad (5.5)$$

Распишем кинетическую энергию по степеням обобщённых скоростей (аналогично рассмотренным предыдущем разделе преобразованиям Рауса):

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \left( J_x (\tilde{\omega}_x)^2 + J_y (\tilde{\omega}_y)^2 + J_z (\tilde{\omega}_z)^2 \right), \\ T_1 &= \omega_{op\delta} (J_x \tilde{\omega}_x b_{12} + J_y \tilde{\omega}_y b_{22} + J_z \tilde{\omega}_z b_{32}), \\ T_0 &= \frac{1}{2} \left( J_x (\omega_{op\delta} b_{12})^2 + J_y (\omega_{op\delta} b_{22})^2 + J_z (\omega_{op\delta} b_{32})^2 \right). \end{aligned}$$

Потенциальную энергию можно определить несколькими способами. Из курса высшей математики известно, что если некоторое поле является потенциальным (то есть градиентом некоторого скалярного поля), то с помощью криволинейного интеграла по координатам можно найти его потенциал. Рассмотрим это на примере аэродинамического момента.

Найдём проекции момента на оси  $\vec{e}_{\alpha_n}$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_\psi$ , которые совпадают с направлением соответствующих скоростей (рис. 16).

$$\begin{aligned} M_{a\alpha_n} &= M_{ay} \cos \varphi - M_{az} \sin \varphi = \\ &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta x \sin \alpha_n - \Delta y \cos \alpha_n \sin \varphi - \Delta z \cos \alpha_n \cos \varphi), \\ M_{a\varphi} &= M_{ax} = -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta z b_{21} - \Delta y b_{31}) = \\ &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta z \sin \alpha_n \sin \varphi - \Delta y \sin \alpha_n \cos \varphi), \\ M_{a\psi} &= 0, \end{aligned}$$

Проверим является ли данное векторное поле потенциальным. Для этого найдём ротор векторного поля

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{M}_a &= \begin{vmatrix} \vec{e}_{\alpha_n} & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_\psi \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ M_{a\alpha} & M_{a\varphi} & M_{a\psi} \end{vmatrix} = \\ &= (0 - 0)\vec{e}_{\alpha_n} - (0 - 0)\vec{e}_\varphi - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta z \cos \alpha_n \sin \varphi - \\ &- \Delta y \cos \alpha_n \cos \varphi + \Delta y \cos \alpha_n \cos \varphi - \Delta z \cos \alpha_n \sin \varphi) \vec{e}_\psi = \vec{0}. \end{aligned}$$

Получили нулевой вектор, значит поле потенциально. Найдём его потенциал с помощью криволинейного интеграла второго рода.

$$\begin{aligned} \Pi_a &= - \left( \int_{(0,0,0)}^{(\alpha_n,0,0)} M_{a\alpha_n} d\alpha_n + \int_{(\alpha_n,0,0)}^{(\alpha_n,\varphi,0)} M_{a\varphi} d\varphi + \int_{(\alpha_n,\varphi,0)}^{(\alpha_n,\varphi,\psi)} M_{a\psi} d\psi \right). \\ \Pi_a &= c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \int_{(0,0,0)}^{(\alpha_n,0,0)} (\Delta x \sin \alpha_n - \Delta y \cos \alpha_n \sin \varphi \\ &- \Delta z \cos \alpha_n \cos \varphi) d\alpha_n + \\ &+ c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \int_{(\alpha_n,0,0)}^{(\alpha_n,\varphi,0)} (\Delta z \sin \alpha_n \sin \varphi - \Delta y \sin \alpha_n \cos \varphi) d\varphi \\ &+ \int_{(\alpha_n,\varphi,0)}^{(\alpha_n,\varphi,\psi)} 0 d\psi. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \Pi_a &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta x \cos \alpha_n + \Delta y \sin \alpha_n \sin \varphi \\ &+ \Delta z \sin \alpha_n \cos \varphi - \Delta x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Отметим, что последнюю постоянную  $(-\Delta x)$  можно отбросить, так как потенциал всегда находят с точностью до постоянной. В данном случае лучше её оставить, потому что тогда при нулевых значениях углов данная составляющая потенциальной энергии обращается в ноль. С учётом выражений для направляющих косинусов, можно записать:

$$\Pi_a = -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta x b_{11} + \Delta y b_{12} + \Delta z b_{13} - \Delta x).$$

Для проверки можно воспользоваться равенствами:

$$Q_{\alpha_n} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n}, Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, Q_\psi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}.$$

Аналогично можно вывести потенциал от гравитационного момента (значительно более громоздкие преобразования). В работах Белецкого, Архангельского с помощью силовой функции получено следующее выражение для потенциальной энергии гравитационного момента:

$$\Pi_g = \frac{3}{2} \omega_{op\delta}^2 (J_x b_{13}^2 + J_y b_{23}^2 + J_z b_{33}^2).$$

Для составления обобщённого интеграла энергии воспользуемся формулой:

$$T_2 - T_0 + \Pi = const.$$

Тогда обобщённый интеграл энергии сферического спутника с учётом аэродинамического и гравитационного моментов будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (J_x \tilde{\omega}_x^2 + J_y \tilde{\omega}_y^2 + J_z \tilde{\omega}_z^2) - \\ & - \frac{1}{2} \omega_{op\delta}^2 (J_x b_{12}^2 + J_y b_{22}^2 + J_z b_{32}^2) + \\ & + \frac{3}{2} \omega_{op\delta}^2 (J_x b_{13}^2 + J_y b_{23}^2 + J_z b_{33}^2) - \\ & - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta x b_{11} + \Delta y b_{12} + \Delta z b_{13}) = const. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Приведённая потенциальная энергия имеет вид:

$$\begin{aligned} W = & -\frac{1}{2} \omega_{op\delta}^2 (J_x b_{12}^2 + J_y b_{22}^2 + J_z b_{32}^2) + \\ & + \frac{3}{2} \omega_{op\delta}^2 (J_x b_{13}^2 + J_y b_{23}^2 + J_z b_{33}^2) - \\ & - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta x b_{11} + \Delta y b_{12} + \Delta z b_{13}). \end{aligned} \quad (5.8)$$



### 5.3 Определение положений равновесия сферического спутника

Определим положения равновесия относительно орбитальной системы координат. В таком случае абсолютная угловая скорость спутника постоянна.

Если в начальный момент времени объект находится в некотором положении и скорости всех его точек равны нулю, и при этом объект будет находиться в этом положении все время, то такое положение называется положением равновесия.

Для рассматриваемого случая получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_n &= 0, \dot{\psi} = 0, \dot{\phi} = 0, \\ \omega_x &= \omega_{орб} b_{12}, \quad \omega_y = \omega_{орб} b_{22}, \quad \omega_z = \omega_{орб} b_{32}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную систему уравнений и проекции аэродинамического и гравитационного моментов в динамические уравнения Эйлера, получаем систему для определения положений равновесия в направляющих косинусах:

$$\begin{aligned} (J_z - J_y) \omega_{орб}^2 (b_{22} b_{32} - 3b_{23} b_{33}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta z b_{21} - \Delta y b_{31}) &= 0, \\ (J_x - J_z) \omega_{орб}^2 (b_{12} b_{32} - 3b_{13} b_{33}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta x b_{31} - \Delta z b_{11}) &= 0, \\ (J_y - J_x) \omega_{орб}^2 (b_{12} b_{22} - 3b_{13} b_{23}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x (\Delta y b_{11} - \Delta x b_{21}) &= 0. \end{aligned}$$

Данную систему можно решить относительно направляющих косинусов при добавлении условий ортогональности:

$$\begin{aligned} b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{31}^2 &= 1, \\ b_{12}^2 + b_{22}^2 + b_{32}^2 &= 1, \\ b_{13}^2 + b_{23}^2 + b_{33}^2 &= 1, \\ b_{22} \cdot b_{23} + b_{32} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{13} &= 0, \\ b_{22} \cdot b_{21} + b_{32} \cdot b_{31} + b_{12} \cdot b_{11} &= 0, \\ b_{21} \cdot b_{23} + b_{33} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{11} &= 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Ввиду существенной нелинейности указанной системы уравнений получить их аналитическое решение в общем виде не представляется возможным. Символьно-численный метод решения этой системы приведён в работах Сарычева.

Рассмотрим частный случай, когда  $\Delta y = \Delta z = 0$ :

$$(J_z - J_y)\omega_{\text{орб}}^2(b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) = 0,$$

$$(J_x - J_z)\omega_{\text{орб}}^2(b_{12}b_{32} - 3b_{13}b_{33}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \Delta x b_{31} = 0,$$

$$(J_y - J_x)\omega_{\text{орб}}^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \Delta x b_{21} = 0.$$

Введём следующие обозначения:

$$\vartheta_1 = \frac{\omega_{\text{орб}}^2(J_y - J_x)}{c_0 q S_x}, \quad \vartheta_2 = \frac{\omega_{\text{орб}}^2(J_z - J_x)}{c_0 q S_x}.$$

Тогда комбинации углов прецессии  $\psi$ , собственного вращения  $\varphi$  и атаки  $\alpha_n$ , соответствующие положениям равновесия относительно центра масс, определяются по следующим формулам:

(1)  $\alpha_1 = 0$  при  $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  – 4 положения равновесия при любых соотношениях  $\Delta x$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ;

(2)  $\alpha_2 = \pi$  при  $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  – 4 положения равновесия при любых соотношениях  $\Delta x$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ;

(3) Если  $\frac{|\Delta x|}{3} < |\vartheta_2|$ :  $\psi_1 = 0$ , ( $\psi_3 = \pi$ ),  $\varphi_1 = 0$ , ( $\varphi_3 = \pi$ ),

$$\alpha_3 = \arccos\left(\frac{\Delta x}{3\vartheta_2}\right) - 4 \text{ положения равновесия}; \quad (5.10)$$

(4) Если  $|\Delta x| < |\vartheta_2|$ :  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ , ( $\psi_4 = \frac{3\pi}{2}$ ),  $\varphi_1 = 0$ , ( $\varphi_3 = \pi$ ),  $\alpha_4 = \arccos\left(\frac{-\Delta x}{\vartheta_2}\right) - 4$  положения равновесия;

(5) Если  $\frac{|\Delta x|}{3} < |\vartheta_1|$ :  $\psi_1 = 0$ , ( $\psi_3 = \pi$ ),  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , ( $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ ),

$$\alpha_5 = \arccos\left(\frac{\Delta x}{3\vartheta_1}\right) - 4 \text{ положения равновесия};$$

(6) Если  $|\Delta x| < |\vartheta_1|$ :  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $(\psi_4 = \frac{3\pi}{2})$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $(\varphi_4 = \frac{3\pi}{2})$ ,  $\alpha_6 = \arccos\left(\frac{-\Delta x}{\vartheta_1}\right)$  – 4 положения равновесия.

Обобщая, запишем окончательный результат в таблицу 2, в которой в зависимости от соотношения параметров показано число положений равновесия, а в скобках указаны соответствующие номера комбинаций углов прецессии, собственного вращения и атаки.

Таблица 2. Число положений равновесия сферического спутника  
(в скобках указаны номера комбинаций углов,  
соответствующие положениям равновесия)

	$0 <  \vartheta_2  < \frac{ \Delta x }{3}$	$\frac{ \Delta x }{3} <  \vartheta_2  <  \Delta x $	$ \Delta x  <  \vartheta_2 $
$0 <  \vartheta_1  < \frac{ \Delta x }{3}$	8 (1,2)	12 (1,2,3)	16 (1,2,3,4)
$\frac{ \Delta x }{3} <  \vartheta_1  <  \Delta x $	12 (1,2,5)	16 (1,2,3,5)	20 (1,2,3,4,5)
$ \Delta x  <  \vartheta_1 $	16 (1,2,5,6)	20 (1,2,3,5,6)	24 (1,2,3,4,5,6)

Следует отметить, что для выбранных систем координат при значениях угла атаки 0 или  $\pi$  повороты на угол прецессии и угол собственного вращения производятся относительно одной оси и можно рассматривать их как один угол  $\delta = \varphi + \psi$  – угол крена. В дальнейшем для определённости при значениях угла атаки 0 или  $\pi$  можно принять  $\psi = 0$ .

Рассмотрим случай, когда на спутник действует только гравитационный момент. Например, центр масс точно совпадает с центром давления, или высота орбиты больше 700 км. В этом случае форма аппарата не влияет на его ориентацию, так как аэродинамический момент равен нулю. Положением равновесия является такая ориентация спутника, когда главные центральные оси совпадают с осями орбитальной системы координат, то есть при

значениях углов атаки  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ . Данный результат можно получить из формул (5.10) подстановкой  $\Delta x = 0$ . Всего 24 положения равновесия, что согласуется с нижней правой ячейкой таблицы 2.

#### 5.4 Исследование устойчивости положений равновесия сферического спутника

Исследуем устойчивость положений равновесия, когда на спутник действует только гравитационный момент. В этом случае приведённая потенциальная энергия имеет вид:

$$W = -\frac{1}{2}\omega_{op\delta}^2(J_x b_{12}^2 + J_y b_{22}^2 + J_z b_{32}^2) + \frac{3}{2}\omega_{op\delta}^2(J_x b_{13}^2 + J_y b_{23}^2 + J_z b_{33}^2).$$

Или с учётом уравнений ортогональности (5.9) можно записать

$$W = \frac{1}{2}\omega_{op\delta}^2((J_y - J_x)b_{12}^2 + (J_y - J_z)b_{32}^2) + \frac{3}{2}\omega_{op\delta}^2((J_x - J_z)b_{13}^2 + (J_y - J_z)b_{23}^2) + C_1, \quad (5.11)$$

где  $C_1 = -\frac{1}{2}\omega_{op\delta}^2 J_y + \frac{3}{2}\omega_{op\delta}^2 J_z = const$ .

Рассмотрим положение равновесия  $\alpha_n = 0, \varphi = 0, \psi = 0$ . Выбранные направляющие косинусы обращаются в ноль. Очевидно, что при положительных коэффициентах перед квадратами направляющих косинусов потенциальная энергия (5.11) будет иметь минимум, равный  $C_1$ . То есть при

$$J_y - J_x > 0, \quad J_y - J_z > 0, \quad J_x - J_z > 0.$$

Объединяя эти неравенства, получим достаточные условия устойчивости положения равновесия  $\alpha_n = 0, \varphi = 0, \psi = 0$ :

$$J_y > J_x > J_z. \quad (5.12)$$

Используя данный вывод запишем **теорему Белецкого об устойчивости относительного равновесия:**

Для устойчивости положения относительного равновесия твёрдого тела на круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил достаточно, чтобы в этом равновесии ось минимального момента инерции направлена по радиус-вектору орбиты, ось максимального момента инерции направлена по нормали к плоскости орбиты, а ось среднего момента инерции направлена по касательной к орбите.

Сформулированная теорема позволяет объяснить в каком положении стабилизировался естественный спутник Земли – Луна. Известно, что Луна находится в положении относительного равновесия, так как обращена всегда одной стороной к Земле. По некоторым данным в положении относительного равновесия относительно своих центральных планет находятся и некоторые спутники Юпитера, Сатурна и Марса.

С точки зрения проектирования космических аппаратов, данная теорема указывает как следует расположить искусственный спутник на орбите, чтобы он стабилизировался исключительно за счёт внешних, гравитационных сил. Важно отметить, что с инженерной точки зрения устойчивых положений относительного равновесия четыре: два «головой вверх» левым или правым «боком» вперёд и два «головой вниз» (тоже левым или правым «боком» вперёд).

В работах Белецкого приведён также вывод оптимально устойчивых соотношений моментов инерции:

$$J_y : J_x : J_z = 1,75 : 1 : 0,75.$$

Данному предельному соотношению соответствует бесконечно тонкий диск. Фактически следует подразумевать спутник с отношением моментов инерции близким к указанному.

Пусть выполняется условие (5.12). Рассмотрим как добавление аэродинамического момента влияет на устойчивость положения

равновесия  $\alpha_n = 0, \varphi = 0, \psi = 0$  при  $\Delta x \neq 0, \Delta y = \Delta z = 0$ .  
Приведённая потенциальная энергия примет вид

$$W = \frac{1}{2} \omega_{op\sigma}^2 (J_y - J_x) b_{12}^2 + (J_y - J_z) b_{32}^2 + \\ + \frac{3}{2} \omega_{op\sigma}^2 (J_x - J_z) b_{13}^2 + (J_y - J_z) b_{23}^2 - \\ - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \Delta x b_{11} + C_1. \quad (5.13)$$

Рассмотрим отдельно предпоследнее слагаемое. Разложим его в окрестности положения равновесия до второго порядка включительно:

$$-c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \Delta x b_{11} \approx c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \Delta x \frac{\alpha_n^2}{2} - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \Delta x.$$

Получаем, что при  $\Delta x > 0$  положение равновесия  $\alpha_n = 0, \varphi = 0, \psi = 0$  будет устойчивым, а при  $\Delta x < 0$  – неустойчивым. Условие  $\Delta x > 0$  означает, что центр масс смещён вперёд относительно центра давления.

Таким образом получаем, что при добавлении аэродинамического момента количество устойчивых положений равновесия уменьшается вдвое по сравнению с действием только гравитационного момента. В рассмотренном случае, когда центр масс смещён по оси с промежуточным моментом инерции, получается два устойчивых положения равновесия: «головой вверх» или «головой вниз», когда центр масс смещён вперёд относительно центра давления.

Остальные случаи требуют дополнительного исследования. Как было показано выше, при добавлении аэродинамического момента, в зависимости от высоты может изменяться не только устойчивость, но и количество положений равновесия. Для анализа их устойчивости следует проанализировать поведение приведённой потенциальной энергии (5.8) в окрестности положения равновесия. Минимум потенциальной энергии можно определить по знаку

второй производной: если вторая производная потенциальной энергии есть положительно определённая квадратичная форма, то в рассматриваемой точке минимум. В общем виде дифференциал второго порядка для потенциальной энергии имеет вид:

$$d^2W = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} d\psi^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} d\varphi^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \psi} d\alpha d\psi + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \varphi} d\alpha d\varphi + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \psi} d\varphi d\psi.$$

Далее применяя критерий Сильвестра можно сделать вывод об устойчивости найденных положений равновесия.

Анализ показывает, что при рассмотрении совместного действия аэродинамического и гравитационного моментов на сферический спутник вне зависимости от общего количества положений равновесия, только два из них являются устойчивыми.

### *5.5 Определение положений равновесия наноспутника формата CubeSat*

Рассмотрим теперь движение относительно центра масс наноспутника (НС) формата CubeSat 1U-3U. Поскольку такие аппараты имеют форму прямоугольного параллелепипеда, аэродинамический момент зависит не только от угла атаки, но и от угла собственного вращения (рис. 17). Аэродинамический момент в связанной с НС системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} M_{ax} &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta z b_{21} - \Delta y b_{31}), \\ M_{ay} &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta x b_{31} - \Delta z b_{11}), \\ M_{az} &= -c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta y b_{11} - \Delta x b_{21}), \end{aligned} \tag{5.14}$$

где  $\tilde{S} = |\cos(\alpha_n)| + k_s \sin(\alpha_n) \cdot (|\sin(\varphi)| + |\cos(\varphi)|) = |b_{11}| + k_s(|b_{21}| + |b_{31}|)$  – площадь проекции НС на плоскость перпендикулярную вектору скорости набегающего потока,

отнесённая к характерной площади  $S_x$ ;  $k_s$  – отношение площади одной из боковых поверхностей к характерной площади.

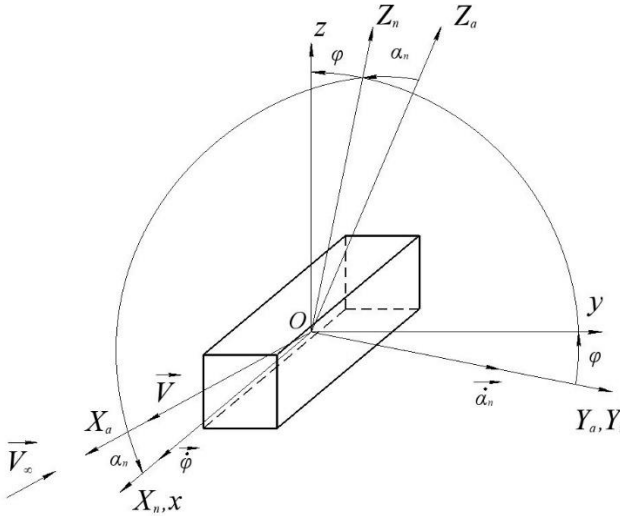


Рисунок 17. Взаимное расположение вектора набегающего потока и связанной с наноспутником СК  $Oxyz$

Запишем систему для определения положений равновесия НС формата CubeSat 1U-3U под действием аэродинамического и гравитационного моментов в направляющих косинусах:

$$(J_z - J_y)\omega_{орб}^2(b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta z b_{21} - \Delta y b_{31}) = 0,$$

$$(J_x - J_z)\omega_{орб}^2(b_{12}b_{32} - 3b_{13}b_{33}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta x b_{31} - \Delta z b_{11}) = 0,$$

$$(J_y - J_x)\omega_{орб}^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta y b_{11} - \Delta x b_{21}) = 0.$$

Отличие от аналогичной системы, полученной для сферического спутника в разделе 5.3, заключается в наличии множителя  $\tilde{S}$  у проекций аэродинамического момента. Данную систему можно решить относительно направляющих косинусов при добавлении условий ортогональности (5.9). Ввиду существенной нелинейности указанных систем уравнений получить их



аналитическое решение в общем виде не представляется возможным. Аналитическое решение получено в работах Бариновой, Тимбая для двух частных случаев:

- смещения центра давления динамически симметричного НС от его центра масс по трём координатам;
- смещения центра давления НС с тремя разными главными моментами инерции от его центра масс по одной из главных осей инерции.

Сначала рассмотрим частный случай динамически симметричного МКА ( $J_n = J_y = J_z$ ) при смещении центра давления от его центра масс по трём координатам ( $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0, \Delta z \neq 0$ ). Тогда система для определения положений равновесия примет вид:

$$c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta z b_{21} - \Delta y b_{31}) = 0,$$

$$(J_x - J_n) \omega_{\text{орб}}^2 (b_{12} b_{32} - 3b_{13} b_{33}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta x b_{31} - \Delta z b_{11}) = 0,$$

$$(J_n - J_x) \omega_{\text{орб}}^2 (b_{12} b_{22} - 3b_{13} b_{23}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{S} (\Delta y b_{11} - \Delta x b_{21}) = 0.$$

Полученные при решении данной системы сочетания угла прецессии, пространственного угла атаки и угла собственного вращения, соответствующие положением равновесия приведены в таблице 3.

Таблица 3. Положения равновесия для случая динамически симметричного НС

			$\Delta x > 0 / \Delta x < 0$		
			$ \vartheta  < \frac{u}{3}$	$\frac{u}{3} <  \vartheta  < u$	$u <  \vartheta $
$\psi_1 = 0$ ( $\psi_3 = \pi$ )	$\varphi_1$	$\vartheta > 0$	$\alpha_3 / \alpha_1$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 / \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 / \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$
		$\vartheta < 0$	$\alpha_3 / \alpha_1$	$\alpha_3 / \alpha_1$	$\alpha_3 / \alpha_1$
	$\varphi_2$	$\vartheta > 0$	$\alpha_6 / \alpha_8$	$\alpha_6 / \alpha_8$	$\alpha_6 / \alpha_8$
		$\vartheta < 0$	$\alpha_6 / \alpha_8$	$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 / \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$	$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 / \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$

$\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ $(\psi_4 = \frac{3\pi}{2})$	$\varphi_1$	$\vartheta > 0$	$\alpha_{11} / \alpha_9$	$\alpha_{11} / \alpha_9$	$\alpha_{11} / \alpha_9$
		$\vartheta < 0$	$\alpha_{11} / \alpha_9$	$\alpha_{11} / \alpha_9$	$\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ / $\alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{12}$
	$\varphi_2$	$\vartheta > 0$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$	$\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$ / $\alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{16}$
		$\vartheta < 0$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$	$\alpha_{14} / \alpha_{16}$
Число положений равновесия			8	12	163

Здесь  $w = k_s(|\Delta y| + |\Delta z|)$ ,  $u = (\sqrt{w} + \sqrt{|\Delta x|})^2$ ,  $\vartheta = \frac{\omega_{op\delta}^2(J_n - J_x)}{c_0 q S_x}$

$$\varphi_1 = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta z}, & \Delta z < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta z} + \pi, & \Delta z > 0, \end{cases} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi,$$

$$\alpha_i = \operatorname{arcctg} \left( \frac{-r_i \pm \sqrt{r_i^2 - 4\Delta x q_i w}}{2q_i \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right), \quad r_i = q_i w + p_i \vartheta + \Delta x,$$

при  $i = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14$ ,

$$\alpha_i = \operatorname{arcctg} \left( \frac{-r_i \pm \sqrt{r_i^2 + 4\Delta x q_i w}}{-2q_i \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right), \quad r_i = q_i w + p_i \vartheta - \Delta x,$$

при  $i = 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16$ ,

верхний знак перед квадратным корнем соответствует нечётному индексу  $\alpha_i$ , соответственно нижний знак – чётному;  $p_i = -3$ , если  $i = 1, 2, \dots, 8$ ;  $p_i = 1$ , если  $i = 9, 10, \dots, 16$ ;  $q_i = 1$ , если  $i = 1, \dots, 4$ ;  $9, \dots, 12$ ;  $q_i = -1$ , если  $i = 5, \dots, 8$ ;  $13, \dots, 16$ .

Из таблицы 3 можно сделать вывод, что в зависимости от соотношений параметров, определяющих влияние аэродинамического и гравитационного моментов, для случая динамически симметричного НС формата CubeSat возможно 8, 12 или 16 положений относительного равновесия. Запишем условия,

при которых изменяется число положений относительного равновесия:

при  $|\vartheta| < \frac{u}{3} - 8$  положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием аэродинамического момента над гравитационным;

при  $\frac{u}{3} < |\vartheta| < u - 12$  положений относительного равновесия, когда гравитационный и аэродинамический моменты соизмеримы;

при  $u < |\vartheta| - 16$  положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием гравитационного момента над аэродинамическим.

Перейдём к рассмотрению динамически несимметричного НС ( $J_y \neq J_z$ ) формата CubeSat 1-3U, когда центр давления смещён относительно центра масс НС только по оси  $Ox$  ( $\Delta x \neq 0, \Delta y = \Delta z = 0$ ).

Тогда система для определения положений равновесия примет вид:

$$\begin{aligned} (J_z - J_y)\omega_{орб}^2(b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) &= 0, \\ (J_x - J_z)\omega_{орб}^2(b_{12}b_{32} - 3b_{13}b_{33}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{\Delta} x b_{31} &= 0, \\ (J_y - J_x)\omega_{орб}^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_x \tilde{\Delta} x b_{21} &= 0. \end{aligned}$$

При решении данной системы были получены комбинации углов прецессии  $\psi$ , собственного вращения  $\varphi$  и атаки  $\alpha_n$ , соответствующие положениям равновесия относительно центра масс. Они определяются по следующим формулам:

- (1)  $\alpha_1 = 0$  при  $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  – 4 положения равновесия при любых соотношениях  $\Delta x, \vartheta_1, \vartheta_2$ ;
- (2)  $\alpha_2 = \pi$  при  $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  – 4 положения равновесия при любых соотношениях  $\Delta x, \vartheta_1, \vartheta_2$ ;

(3) Если  $\frac{|\Delta x|}{3} < |\vartheta_2|$ :  $\psi_1 = 0$ , ( $\psi_3 = \pi$ ),  $\varphi_1 = 0$ , ( $\varphi_3 = \pi$ ),

$\alpha_3 = \text{arcctg} \left( \frac{-\Delta x k_S}{-3\vartheta_2 + \text{sign}(\vartheta_2)|\Delta x|} \right)$  – 4 положения равновесия;

(4) Если  $|\Delta x| < |\vartheta_2|$ :  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ , ( $\psi_4 = \frac{3\pi}{2}$ ),  $\varphi_1 = 0$ , ( $\varphi_3 = \pi$ ),

$\alpha_4 = \text{arcctg} \left( \frac{-\Delta x k_S}{\vartheta_2 - \text{sign}(\vartheta_2)|\Delta x|} \right)$  – 4 положения равновесия;

(5) Если  $\frac{|\Delta x|}{3} < |\vartheta_1|$ :  $\psi_1 = 0$ , ( $\psi_3 = \pi$ ),  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , ( $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ ),

$\alpha_5 = \text{arcctg} \left( \frac{-\Delta x k_S}{-3\vartheta_1 + \text{sign}(\vartheta_1)|\Delta x|} \right)$  – 4 положения равновесия;

(6) Если  $|\Delta x| < |\vartheta_1|$ :  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ , ( $\psi_4 = \frac{3\pi}{2}$ ),  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , ( $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ ),

$\alpha_6 = \text{arcctg} \left( \frac{-\Delta x k_S}{\vartheta_1 - \text{sign}(\vartheta_1)|\Delta x|} \right)$  – 4 положения равновесия.

Окончательный результат с учётом условий существования положений равновесия совпадает со случаем сферического спутника и приведён в таблице 2.

Задача исследования устойчивости найденных положений равновесия является более трудоёмкой, чем для сферического спутника, так как поле аэродинамического момента (5.14) не является потенциальным. Для доказательства достаточно найти ротор этого поля, как было показано для сферического спутника в разделе 5.2. Для исследования устойчивости полученных положений равновесия можно использовать численный анализ траекторий в их окрестности. При рассмотрении совместного действия аэродинамического и гравитационного моментов на динамически несимметричный НС вне зависимости от общего количества положений равновесия, только два из них являются устойчивыми.

## 6 ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим, как влияют на устойчивость различные силы.

### 6.1 Классификация сил

Будем считать, что положение системы определяется  $s$  обобщёнными координатами  $q_1, \dots, q_s$ , а движение её описывается уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k(q, \dot{q}) \quad (k = 1, \dots, s). \quad (6.1)$$

В этих уравнениях кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j. \quad (6.2)$$

представляет положительно-определённую квадратичную форму обобщённых скоростей  $\dot{q}$  с коэффициентами инерции  $a_{kj}(q) = a_{jk}(q)$ , зависящими от координат  $q$ , а обобщённые силы  $Q_k$  являются функциями координат  $q$  и скоростей  $\dot{q}$ .

Для большей наглядности введём в рассмотрение  $s$ -мерное ортогональное пространство  $(q_1, \dots, q_s)$  и два вектора:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_s \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_s \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что первый вектор определяет изображающую точку  $M$ , а второй – силу, приложенную к этой точке.

Перейдём теперь к характеристике сил.

**I. Линейные силы.** Рассмотрим сначала случай, когда сила  $\vec{Q}$  линейно зависит от радиуса-вектора  $\vec{q}$  и скорости  $\dot{\vec{q}}$  изображающей точки

$$\vec{Q} = -C_1\vec{q} - B_1\dot{\vec{q}} \quad (6.3)$$

где  $C_1$  и  $B_1$  – заданные квадратные матрицы порядка  $s \times s$  с постоянными элементами.

Разобьём матрицы  $C_1$  и  $B_1$  на симметричные  $C$  и  $B$  и кососимметричные  $P$  и  $G$  части

$$C_1 = C + P, \quad B_1 = B + G, \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} C = C^T &= \frac{1}{2}(C_1 + C_1^T), & P = -P^T &= \frac{1}{2}(C_1 - C_1^T), \\ B = B^T &= \frac{1}{2}(B_1 + B_1^T), & G = -G^T &= \frac{1}{2}(B_1 - B_1^T). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Тогда сила  $\vec{Q}$  принимает вид

$$\vec{Q} = \vec{K} + \vec{R} + \vec{D} + \vec{\Gamma}. \quad (6.6)$$

Здесь

$$\vec{K} = -C\vec{q}, \quad \vec{R} = -P\dot{\vec{q}}, \quad \vec{D} = -B\dot{\vec{q}}, \quad \vec{\Gamma} = -G\dot{\vec{q}} \quad (6.7)$$

Сила  $\vec{K} = -C\vec{q}$  с симметричной матрицей  $C = (c_{kj})$  называется *потенциальной* или *консервативной*, а квадратичная форма

$$\Pi = \frac{1}{2}C\vec{q} \cdot \vec{q} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j c_{kj} q_k q_j \quad (6.8)$$

равна потенциальной энергии системы.

Составим с помощью симметричной матрицы  $B = (b_{kj})$  квадратичную форму

$$F = \frac{1}{2}B\dot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j b_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j. \quad (6.9)$$

Если эта функция не отрицательна, то она называется *функцией рассеивания* или *диссипативной функцией Релея*; соответствующие силы  $\vec{D} = -B\dot{\vec{q}}$  называются *диссипативными* силами с

положительным сопротивлением (или просто *диссипативными* силами). Если квадратичная форма  $F$  положительно-определённая, то диссипация называется *полной*, в противном случае – *неполной*. Наконец, если функция  $F$  может принимать отрицательные значения, то среди составляющих силы  $\vec{D} = -V\dot{q}$  имеются *ускоряющие* силы (*силы отрицательного сопротивления*).

Обычно диссипативные силы с положительным сопротивлением возникают естественным образом при движении тел в сопротивляющейся среде, в электрических цепях при наличии омического сопротивления и т. п. Ускоряющие силы (силы отрицательного сопротивления), как правило, создаются с помощью специальных устройств.

Силы  $\vec{G} = -G\dot{q}$  линейно зависящие от скоростей  $\dot{q}$  и имеющие кососимметричную матрицу коэффициентов  $G = \|g_{kj}\|$ , называются, как уже говорилось ранее, *гироскопическими*. Чаще всего эти силы встречаются в системах, содержащих гироскопы, но они могут быть и в других системах.

Силы  $\vec{R} = -P\dot{q}$ , линейно зависящие от координат  $q$  с кососимметричной матрицей коэффициентов  $P = \|p_{kj}\|$ , называются *неконсервативными позиционными* или просто *неконсервативными* силами (иногда циркуляционными, псевдогироскопическими). Неконсервативные позиционные силы возникают как естественным образом, так и с помощью специальных устройств.

**Пример.** Пусть силы  $Q_1$  и  $Q_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} Q_1 &= -5\dot{q}_1 + q_1 - 2q_2, \\ Q_2 &= 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - 6q_1 - 5q_2. \end{aligned}$$

Составим матрицы  $C_1$  и  $B_1$ :

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдём транспонированные матрицы  $C_1^T$  и  $B_1^T$  (в матрицах  $C_1$  и  $B_1$  переставляем строки и столбцы):

$$C_1^T = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_1^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Разложим матрицы  $C_1$  и  $B_1$  на симметричные и кососимметричные части:

$$C = \frac{1}{2}(C_1 + C_1^T) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2}(C_1 - C_1^T) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2}(B_1 + B_1^T) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \frac{1}{2}(B_1 - B_1^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём потенциальную энергию  $\Pi$  и функцию Релея  $F$ :

$$\Pi = \frac{1}{2}(-q_1^2 + 8q_1q_2 + 5q_2^2),$$

$$F = \frac{1}{2}(5\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \dot{q}_2^2).$$

В данном примере функция Релея  $F$  может принимать как положительные значения (например, при  $\dot{q}_1 \neq 0$  и  $\dot{q}_2 = 0$ ), так и отрицательные значения (например, при  $\dot{q}_1 = 0$  и  $\dot{q}_2 \neq 0$ ). Поэтому диссипативная сила  $-B\dot{q}$  имеет положительные и отрицательные составляющие. Матрицы-столбцы потенциальных  $-C\vec{q}$ , неконсервативных  $-P\vec{q}$ , диссипативных  $-B\dot{q}$  и гироскопических  $-G\dot{q}$  сил соответственно равны:

$$\begin{pmatrix} q_1 - 4q_2 \\ -4q_1 - 5q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2q_2 \\ -2q_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}.$$

**II. Нелинейные силы.** Приведённая классификация линейных сил по их математической структуре очень удобна для линейных систем, особенно при исследовании устойчивости движения. Однако для нелинейных сил этот метод неприменим. Поэтому для общей характеристики сил воспользуемся их физическими свойствами.

Как известно, работа потенциальной силы  $\vec{K}(q)$  не зависит от пути перемещения точки приложения силы. Для этой силы справедливо равенство



$$\vec{K}(q) = -grad\Pi \quad (6.10)$$

или для составляющих

$$K_j = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.11)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия.

Для того чтобы некоторая сила  $\vec{K}(q)$ , зависящая от положения изображающей точки  $M$ , была потенциальной, необходимо и достаточно, чтобы её проекции удовлетворяли равенствам (число их равно числу сочетаний из  $s$  по два)

$$\frac{\partial K_j}{\partial q_k} = \frac{\partial K_k}{\partial q_j} \quad (k, j = 1, \dots, s) \quad (6.12)$$

(необходимость этих условий вытекает непосредственно из (6.11)).

Справедливость формул (6.10) – (6.12) для линейной силы  $\vec{K} = -C\vec{q}$  следует из равенства (6.8).

По определению Томсона и Тета сила  $\vec{\Gamma}(q)$  называется *гироскопической*, если мощность (работа) её тождественно равна нулю

$$\vec{\Gamma} \cdot \dot{\vec{q}} = \sum_{k=1}^s \Gamma_k \dot{q}_k \equiv 0. \quad (6.13)$$

Из этого определения следует, что гироскопическая сила перпендикулярна скорости  $\dot{\vec{q}}$  изображающей точки  $M$ . Линейная сила  $\vec{\Gamma} = -G\dot{\vec{q}}$  удовлетворяет этому условию, так как в силу косо́й симметрии матрицы  $G$  произведение  $\vec{\Gamma} \cdot \dot{\vec{q}} = -G\dot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}}$  тождественно равно нулю.

Сила  $\vec{D}(\dot{q})$ , зависящая от скорости  $\dot{q}$  изображающей точки  $M$ , называется *диссипативной* силой с положительным или отрицательным сопротивлением, если её мощность не равна нулю тождественно. Диссипативным силам положительного сопротивления отвечает отрицательная мощность

$$N = \vec{D} \cdot \dot{\vec{q}} = \sum_{k=1}^s D_k \dot{q}_k \leq 0 \quad (6.14)$$

(знак равенства в этом соотношении не может быть тождественным), а силам отрицательного сопротивления – положительная мощность. Если мощность  $N(\dot{q})$  является отрицательно-определённой функцией скоростей  $\dot{q}_k$ , то диссипацию назовём *полной*; если же мощность  $N(\dot{q})$  – просто отрицательная функция скоростей  $\dot{q}_k$ , то диссипацию назовём *неполной* или *частичной*.

Нам осталось дать общее определение неконсервативных позиционных сил. Из определения линейной неконсервативной силы следует, что она *перпендикулярна* радиус-вектору  $q$  изображающей точки  $M$  ( $\vec{R} \cdot \vec{q} = -P\vec{q} \cdot \vec{q} \equiv 0$ , так как матрица  $P$  – кососимметричная). Обобщая это свойство, будем называть любую силу  $\vec{R}(q)$ , зависящую от координат системы  $q_k$ , *неконсервативной позиционной силой*, если она *ортогональна* радиус-вектору  $\vec{q}$  изображающей точки

$$\vec{R} \cdot \vec{q} = \sum_{k=1}^s R_k q_k \equiv 0. \quad (6.15)$$

Выше было показано, что произвольные силы, линейно зависящие от координат и скоростей системы, можно разложить на потенциальные  $\vec{K}$ , неконсервативные позиционные  $\vec{R}$ , гироскопические  $\vec{\Gamma}$  и диссипативные  $\vec{D}$  силы. Покажем, что аналогичное разложение можно произвести для широкого класса нелинейных сил.

### **Теорема:**

Любую непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу  $\vec{Q}(q)$ , зависящую только от положения системы,

можно разложить на потенциальную и неконсервативную позиционную составляющие

$$\vec{Q}(q) = -grad \Pi + \vec{R}(q), \quad (6.16)$$

где поле  $\vec{R}$  и потенциальная энергия  $\Pi$  подлежат определению.

Доказательство этой теоремы приведено в книге Меркина.

**Пример.** Даны обобщённые позиционные силы

$$Q_1 = q_1^3 + q_1 q_2^3, \quad Q_2 = q_1^2 q_2^2 + 2q_2^5$$

Требуется разложить эти силы на потенциальные и неконсервативные позиционные составляющие.

Умножим обе части равенства скалярно на  $\vec{q}$

$$H = Q_1 q_1 + Q_2 q_2 = q_1^4 + 2q_1^2 q_2^3 + 2q_2^6.$$

Интеграл (6.21) в нашем случае будет

$$q_1 = C q_2$$

Внесём это значение для  $q_1$  в функцию  $H$ :

$$H = C^4 q_2^4 + 2C^2 q_2^5 + 2q_2^6.$$

Вычислим теперь по формуле (6.23) потенциальную энергию.

Получим

$$\Pi = - \int \frac{C^4 q_2^4 + 2C^2 q_2^5 + 2q_2^6}{q_2} dq_2,$$

или

$$\Pi = -\frac{1}{4} C^4 q_2^4 - \frac{2}{5} C^2 q_2^5 - \frac{1}{3} q_2^6.$$

Заменив постоянную  $C$  на её значение  $q_1/q_2$ , получим окончательное выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = -\left(\frac{1}{4} q_1^4 + \frac{2}{5} q_1^2 q_2^3 + \frac{1}{3} q_2^6\right).$$

Заметим, что при  $q_1 = q_2 = 0$  потенциальная энергия имеет максимум (так как для переменных  $q_1^2$  и  $q_2^3$  выполнен критерий Сильвестра:  $\Delta_1 = -1/4 < 0$ ,  $\Delta_2 = 1^3/300 > 0$ ).

Теперь найдём составляющие потенциальной силы  $\vec{K}(q) = -grad\Pi$  и неконсервативной позиционной силы  $\vec{R}(q)$ :

$$K_1 = q_1^3 + \frac{4}{5}q_1q_2^3, \quad K_2 = \frac{6}{5}q_1^2q_2^2 + 2q_2^5$$

$$R_1 = \frac{1}{5}q_1q_2^3, \quad R_2 = -\frac{1}{5}q_1^2q_2^2.$$

Легко проверить, что силы  $R_1$  и  $R_2$  удовлетворяют условию (6.15).

Рассмотрим теперь силу  $\vec{Q}(\dot{q})$ , зависящую от скорости  $\dot{q}$  изображающей точки  $M$ . Если выделить из этой силы гироскопическую составляющую  $\vec{\Gamma}$  (силу, не производящую работу), то в соответствии с определениями оставшаяся часть будет равна диссипативной силе с положительным или отрицательным сопротивлением. Таким образом, имеем

$$\vec{Q}(\dot{q}) = \vec{D}(\dot{q}) + \vec{\Gamma}(\dot{q}). \quad (6.17)$$

Покажем сейчас, что силу сопротивления  $\vec{D}(\dot{q})$  можно представить как градиент некоторой скалярной функции  $F(\dot{q})$ :

$$\vec{D}(\dot{q}) = -grad F. \quad (6.18)$$

В этом равенстве  $grad F$  определяется в пространстве скоростей  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$  так, что

$$D_k = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, \dots, s), \quad (6.19)$$

причём должны выполняться равенства

$$\frac{\partial D_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial D_j}{\partial \dot{q}_k} \quad (k, j = 1, \dots, s). \quad (6.20)$$

Для доказательства сделанного утверждения достаточно заметить, что в соответствии с определениями гироскопическая сила  $\vec{\Gamma}$  в пространстве скоростей  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$  и неконсервативная позиционная сила  $\vec{R}$  в пространстве координат

$(q_1, \dots, q_s)$  удовлетворяют одинаковым условиям ортогональности (6.13) и (6.15). Поэтому можно записать следующую теорему.

**Теорема:**

Любую непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу  $\vec{Q}(\dot{q})$ , зависящую только от скоростей системы, можно представить суммой двух сил

$$\vec{Q}(\dot{q}) = -grad F + \vec{\Gamma}, \quad (6.21)$$

где  $\vec{\Gamma}$  – гироскопическая сила, а  $F$  – некоторая скалярная функция скоростей  $\dot{q}_k$ .

Сравнивая равенства (6.21) и (6.17), получим (6.18). Функцию  $F(\dot{q})$  будем называть *функцией Релея*. Заметим, что функция  $-F(\dot{q})$  является потенциалом поля сил сопротивления.

Учитывая равенства (6.18) и (6.19), вычислим мощность силы сопротивления

$$N(\dot{q}) = \vec{D} \cdot \dot{\vec{q}} = -grad F \cdot \dot{\vec{q}} = - \sum_{k=1}^s \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k. \quad (6.22)$$

Можно доказать, что однородным силам положительного сопротивления с полной диссипацией отвечает положительно-определённая диссипативная функция  $F$ , а при неполной (частичной) диссипации – просто положительная функция  $F$ .

В дальнейшем, если не будет специальной оговорки, под силой сопротивления  $\vec{D}$  будем понимать силу положительного сопротивления (диссипативную силу). В тех редких случаях, когда будут рассматриваться силы отрицательного сопротивления, они будут называться *ускоряющими* силами.

До сих пор мы считали, что гироскопические силы  $\vec{\Gamma}$  и силы сопротивления  $\vec{D}$  зависят только от скорости  $\dot{\vec{q}}$ . На практике эти силы очень часто зависят также от положения системы, т.е. от радиуса – вектора  $\vec{q}$  изображающей точки  $M$ :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}(q, \dot{q}), \quad \vec{D} = \vec{D}(q, \dot{q}).$$

Все определения для этих сил сохраняются без всякого изменения, если только радиус-вектор  $\vec{q}$  точки  $M$  рассматривать как параметр. В частности, будем считать, что силы  $\vec{\Gamma}$  и  $\vec{D}$  обращаются в нуль при  $\dot{\vec{q}} = 0$ .

$$\vec{\Gamma}(q, 0) = 0, \quad \vec{D}(q, 0) = 0, \quad (6.23)$$

причём предполагается, что при  $\dot{\vec{q}} \neq 0$  эти силы не равны нулю при любых значениях  $\vec{q}$ , расположенных вблизи точки  $\vec{q} = 0$ .

Мощность  $N$  силы  $\vec{D}$  будет теперь зависеть не только от скорости  $\dot{\vec{q}}$ , но и от  $\vec{q}$

$$N(q, \dot{q}) = \vec{D}(q, \dot{q}) \cdot \dot{\vec{q}}. \quad (6.24)$$

Определение полной и частичной диссипации остаётся почти без изменения: диссипация называется полной (частичной), если мощность  $N(q, \dot{q})$  силы  $\vec{D}$  является отрицательно-определённой (отрицательной) функцией скорости  $\dot{\vec{q}}$  при всех значениях  $\vec{q}$ , расположенных вблизи точки  $\vec{q} = 0$ .

**Пример 1.** Сила  $\vec{\Gamma}$  с линейными относительно скоростей составляющими

$$\Gamma_1 = \cos \beta \dot{\beta}, \quad \Gamma_2 = -\cos \beta \dot{\alpha}$$

гироскопическая, так как её мощность

$$N = \Gamma_1 \dot{\alpha} + \Gamma_2 \dot{\beta} = \cos \beta \dot{\beta} \dot{\alpha} + (-\cos \beta \dot{\alpha}) \dot{\beta} \equiv 0$$

тождественно равна нулю.

**Пример 2.** Сила  $\vec{\Gamma}$  с нелинейными относительно скоростей составляющими

$$\Gamma_1 = (B - C)\dot{x}_2\dot{x}_3, \quad \Gamma_2 = (C - A)\dot{x}_3\dot{x}_1, \quad \Gamma_3 = (A - B)\dot{x}_1\dot{x}_2$$

где  $A$ ,  $B$ , и  $C$  – произвольные функции координат  $x_1, x_2, x_3$  и скоростей  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ , гироскопическая, так как её мощность

$$N = \Gamma_1 \dot{x}_1 + \Gamma_2 \dot{x}_2 + \Gamma_3 \dot{x}_3 \equiv 0$$

тождественно равна нулю.

**Пример 3.** Сила  $\vec{D}$ , составляющие которой определяются равенствами

$$D_1 = - [1 + \cos^2(q_1 + q_2)] \dot{q}_1^2 \operatorname{sign} \dot{q}_1, \quad D_2 = - (\dot{q}_2 + \dot{q}_2^3),$$

является силой положительного сопротивления с полной диссипацией. Действительно, мощность этой силы

$$N = D_1 \dot{q}_1 + D_2 \dot{q}_2 = -\{[1 + \cos^2(q_1 + q_2)] \dot{q}_1^2 |\dot{q}_1| + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_2^4\}$$

представляет отрицательно-определённую функцию скоростей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$  при любых  $q_1$  и  $q_2$  (при вычислении  $N$  учтено, что  $\dot{q}_1 \operatorname{sign} \dot{q}_1 = |\dot{q}_1|$ ). Функция Релея для данных сил имеет вид

$$F = \frac{1}{3} [1 + \cos^2(q_1 + q_2)] |\dot{q}_1|^3 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^3 + \frac{1}{4} \dot{q}_2^4.$$

Эта функция удовлетворяет равенствам (6.19), так как

$$\frac{d}{d\dot{q}_1} |\dot{q}_1|^3 = 3|\dot{q}_1|^2 \frac{d}{d\dot{q}_1} |\dot{q}_1| = 3\dot{q}_1^2 \operatorname{sign} \dot{q}_1.$$

## 6.2 Постановка задачи

Будем считать, что уравнения возмущённого движения относительно величин  $q$  и  $\dot{q}$  приведены к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + D_k + \Gamma_k + R_k, \\ \frac{dq_k}{dt} &= \dot{q}_k \quad (k = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (6.25)$$

В этих уравнениях  $T$  – положительно-определённая квадратичная форма скоростей  $\dot{q}$ .

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (6.26)$$

где  $a_{kj} = a_{jk}$  – функции  $q$ . Предполагается, что при  $\vec{q} = 0$  потенциальная энергия  $\Pi$  равна нулю. Кроме того, предполагается, что при  $\vec{q} = 0$  обращаются в нуль потенциальные и

неконсервативные позиционные силы, а при  $\dot{\vec{q}} = 0$  обращаются в нуль диссипативные и гироскопические силы.

Независимо от способа получения уравнений возмущённого движения (6.25) функцию  $T$  можно рассматривать как кинетическую энергию приведённой системы, переменные  $q_k$  и  $\dot{q}_k$  – как обобщённые координаты и скорости, а члены, стоящие в правых частях этих уравнений, – как потенциальные, диссипативные, гироскопические и неконсервативные позиционные силы соответственно. Относительно сил предполагается только, что они удовлетворяют сделанным в предыдущем пункте определениям и условиям существования и единственности решения дифференциальных уравнений (6.25). Никаких других ограничений на силы не налагается – они могут быть линейными, существенно нелинейными (их разложения по степеням  $q$  и  $\dot{q}$  могут начинаться с членов любого порядка), наконец, они могут быть неаналитическими функциями координат  $q$  и скоростей  $\dot{q}$ .

Задача ставится следующим образом: как определить характер устойчивости равновесия системы по структуре действующих сил? Примером решения такой задачи может служить теорема Лагранжа и её обращение, на основании которой вопрос об устойчивости равновесия консервативной системы решается исследованием одной потенциальной энергии без привлечения анализа левых частей уравнений.

Кроме уравнений возмущённого движения в форме (6.25), будем рассматривать случай, когда разложения всех сил по степеням  $q$  и  $\dot{q}$  содержат линейные члены. Для таких систем уравнения возмущённого движения приводятся к виду

$$A\ddot{\vec{q}} + B_1\dot{\vec{q}} + C_1\vec{q} = \vec{Q}^{(2)}. \quad (6.27)$$



### 6.3 Коэффициенты устойчивости

Пусть на систему действуют только потенциальные силы, содержащие линейную часть, а все остальные силы отсутствуют ( $\vec{R} = \vec{D} = \vec{\Gamma} = 0$ ). Тогда, с помощью канонического преобразования можно записать уравнение движения в виде

$$\ddot{\vec{z}} + C_0 \dot{\vec{z}} = \vec{Z}.$$

Это векторно-матричное уравнение эквивалентно  $s$  скалярным уравнениям (напомним, что  $C_0$ - диагональная матрица)

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 &= Z_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \ddot{z}_s + c_s \dot{z}_s &= Z_s, \end{aligned} \tag{6.28}$$

где функции  $Z_k$  содержат координаты  $z_j$  и скорости  $\dot{z}_j$  в степени выше первой.

Линейная часть каждого уравнения (6.28) содержит только одну координату (такие координаты называются *нормальными*). Характеристические числа  $k$ -го уравнения этой системы равны  $\pm\sqrt{-c_k}$ . Отсюда следует, что если какое-нибудь число  $c_k$  положительно, то при отсутствии соответствующего нелинейного члена  $Z_k$  движение в нормальной координате  $z_k$ , будет устойчиво. Если же какое-нибудь число  $c_k < 0$ , то движение в этой нормальной координате неустойчиво независимо от членов высшего порядка (так как из двух характеристических чисел  $\pm\sqrt{-c_k}$  одно будет положительно, см. теорему Ляпунова о неустойчивости движения по уравнениям первого приближения). В связи с этим числа  $c_k$  называются *коэффициентами устойчивости* системы, а число отрицательных чисел  $c_k$  — *степенью неустойчивости* (эти определения принадлежат Пуанкаре). В дальнейшем будет иметь значение не число неустойчивых коэффициентов  $c_k$ , а его чётность. Пользуясь равенством

$$c_1 \cdot \dots \cdot c_s = \det C ,$$

можно определить чётность степени неустойчивости системы, не прибегая к непосредственному переходу к нормальным координатам.

Таким образом, имеем простое правило; *если определитель матрицы  $C$  потенциальных сил исходных уравнений возмущённого движения положителен, то степень неустойчивости системы чётная, если же  $\det C < 0$ , то степень неустойчивости системы нечётная.*

**Пример.**

1. Уравнения возмущённого движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + 5q_1 + 2q_2 &= 0, \\ \ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2 + 2q_1 - q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Система потенциальная, так как матрица коэффициентов сил, линейно зависящих от координат, симметричная:

$$C = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы  $\det C = -9$  отрицателен. Поэтому, не приводя уравнения к нормальным координатам, можно утверждать, что система имеет нечётную степень неустойчивости. Так как число координат равно двум, то имеются одна неустойчивая и одна устойчивая координаты.

*6.4 Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия потенциальной системы*

В реальных условиях на потенциальную систему налагаются диссипативные силы, возникающие за счёт сопротивления среды или в результате действия специально установленных устройств. Кроме того, очень часто встречаются системы, на которые действуют не только потенциальные и диссипативные, но и гироскопические силы.

Предположим сначала, что невозмущённое движение  $z = 0$ ,  $\dot{z} = 0$  под действием одних потенциальных сил неустойчиво. Естественно возникает вопрос: нельзя ли стабилизировать неустойчивое движение, присоединив к потенциальным силам гироскопические силы? Простые примеры показывают, что в некоторых случаях это осуществимо. Действительно, потенциальная система

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 + c_2 z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

при отрицательных  $c_1$  и  $c_2$  неустойчива. Присоединим к системе гироскопические силы  $-g\dot{z}_2$  и  $g\dot{z}_1$  соответственно. Получим

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + g\dot{z}_2 + c_1 z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 - g\dot{z}_1 + c_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Составим характеристические уравнения этой системы

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_1 & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 + c_2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + (g^2 + c_1 + c_2)\lambda^2 + c_1 c_2 = 0.$$

Так как в этом уравнении  $\lambda$  содержится только в чётных степенях, то каждому корню  $\lambda$  будет отвечать корень  $-\lambda$ . Поэтому, если вещественная часть хотя бы одного корня не равна нулю, то найдётся корень, вещественная часть которого положительна. Из этого следует, что устойчивость наступит только в том случае, если все корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми числами, а корни относительно  $\lambda^2$  — отрицательными вещественными числами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты характеристического уравнения удовлетворяли следующим условиям:

$c_1 c_2 > 0$ ,  $g^2 + c_1 + c_2 > 0$ ,  $(g^2 + c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2 > 0$ .  
Эти три неравенства сводятся к одному условию (напомним, что по предположению  $c_1 < 0$  и  $c_2 < 0$ )

$$|g| > \sqrt{-c_1} + \sqrt{-c_2}. \quad (6.31)$$

Таким образом, если коэффициент  $g$  удовлетворяет этому условию, то неустойчивая потенциальная система (6.29) будет стабилизирована добавлением гироскопических сил  $-g\dot{z}_2$  и  $g\dot{z}_1$ .

На самом деле не всегда можно стабилизировать неустойчивую потенциальную систему гироскопическими силами. Следующая теорема говорит о том, когда это невозможно. Рассмотрим её без доказательства.

### **Первая теорема Томсона – Тета – Четаева:**

Если неустойчивость изолированного положения равновесия системы при одних потенциальных силах имеет нечётную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна при любых членах, содержащих координаты и скорости в степени выше первой.

### **Вторая теорема Томсона – Тета – Четаева:**

Если изолированное положение равновесия системы устойчиво при одних потенциальных силах, то при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил устойчивость равновесия сохранится.

### **Третья теорема Томсона – Тета – Четаева:**

Если изолированное положение равновесия системы устойчиво при одних потенциальных силах, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении произвольных гироскопических сил и сил сопротивления с полной диссипацией.

Во всех теоремах этой главы рассматривается устойчивость относительно координат и скоростей, причём за невозмущённое движение принимается  $\vec{z} = 0, \dot{\vec{z}} = 0$ .

В начале этого параграфа было показано, что в некоторых случаях неустойчивую потенциальную систему можно стабилизировать гироскопическими силами. При доказательстве мы не учитывали диссипативные силы. Рассмотрим сейчас, какое значение имеют эти силы для гироскопической стабилизации.

### **Четвертая теорема Томсона – Тета – Четаева:**

Если в окрестности изолированного неустойчивого положения равновесия консервативной системы потенциальная энергия может принимать отрицательные значения, то при добавлении сил сопротивления с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил равновесие останется неустойчивым.

Из рассмотренной теоремы следует, что если неустойчивую потенциальную систему стабилизировать гироскопическими силами, то даже малые силы сопротивления с полной диссипацией (практически они всегда существуют) разрушат с течением времени достигнутую устойчивость. Поэтому устойчивость, существующую при одних потенциальных силах, Томсон и Тет назвали *вековой*, а устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил, - *временной*.

Рассмотрим выражение  $T + \Pi$ , оно представляет полную механическую (электромеханическую) энергию. При полной диссипации мощность  $N < 0$ , а функция Релея  $F > 0$ . Поэтому

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) < 0.$$

Отсюда следует, что с течением времени полная энергия  $T + \Pi$  убывает, рассеивается (разумеется, не исчезает, а переходит в другие виды энергии, например, в тепловую). Мощность  $N$  и функцию Релея  $F$  можно рассматривать как меру рассеивания полной энергии  $T + \Pi$ . Этим и объясняется причина, по которой силы положительного сопротивления называют диссипативными силами, а соответствующую функцию Релея  $F$  – диссипативной функцией.

Доказательства теорем, приведённых в этой главе, можно найти в работе Меркина.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial. Mech. Dyn. Astron.* 2007. Vol. 97. No. 4, Pp. 267-287.

2. *Barinova E.V., Timbai I.A.* Study of Relative Equilibrium Positions of a Dynamically Symmetric Cubesat Nanosatellite under Aerodynamic and Gravitational Moments // *26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. ICINS 2019 – Proceedings.* 2019.

3. *Barinova E.V., Timbai I.A.* Determining of Equilibrium Positions of CubeSat Nanosatellite under the Influence of Aerodynamic and Gravitational Moments // *27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. ICINS 2020 – Proceedings.* 2020.

4. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие для механико-математических специальностей вузов. М.: Наука, 1984.

5. *Баринова Е.В., Тимбай И.А.* Положения относительного равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat под действием гравитационного и аэродинамического моментов // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение.* 2019. Т. 18. № 2. С. 21-32.

6. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.

7. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Издательство Московского университета, 1975.

8. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие для университетов по специальности «Математика». М.: Высшая школа, 1991.

9. *Бутенин Н.В., Луиц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1971.

10. *Любимов В.В.* Математическая теория устойчивости с приложениями. Санкт-Петербург: Лань. 2018.

11. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.

12. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения: учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1987.

13. *Меркин Д.Р., Бауэр С.М., Смирнов А.Л.* Задачи по теории устойчивости: учебное пособие для вузов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

14. *Понтрягин Л.С.* Знакомство с высшей математикой: Дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Наука, 1988.

15. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // Космические исследования. 2015. Т. 53. №. 6. С. 488-496.

16. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование устойчивости положений равновесия // Космические исследования. 2016. Т. 54. №. 5. С. 415-426.

17. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.

18. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: АН СССР, 1962.

*Учебное издание*

*Баринова Елена Витальевна*

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ  
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ  
КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ**

*Учебное пособие*

Редакционно-издательская обработка  
издательства Самарского университета

Подписано в печать 20.11.2023. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 7,5.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ . Арт. – 12(Р2УП)/2023.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Издательство Самарского университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.