ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

Н.А. Калугин

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

САМАРА 2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

Н.А. Калугин

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2009

УДК СГАУ/517 (075)
ББК 22.151.5
К 176

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент Е. Я. Горелова,
канд. техн. наук, доцент А. А. Авраменко

Калугин Н. А.
К 176 **Основы тензорной алгебры:** учеб. пособие / *Н.А. Калугин*.-
Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2009. – 80с.

ISBN 978-5-7883-0674-2

В пособии содержатся основные сведения из тензорной алгебры. Изложение ведется от общего к частному. Тензоры представляются в операторной, матричной и компонентно-индексной формах в произвольном и ортонормированном базисах.

Рассчитано на студентов, специализирующихся в области механики и физики. Будет полезно также специалистам указанных областей знаний.

УДК СГАУ/517 (075)
ББК 22.151.5

ISBN 978-5-7883-0674-2

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тензорное исчисление - раздел математики, изучающий свойства тензоров и действия над ними.

Слово *тензор* произошло от латинского слова *tensio* - напряжение. Родилось это понятие в теории упругости и позволило взглянуть на явления, происходящие в деформируемых средах, с точки зрения их инвариантности (независимости от систем отсчета).

В настоящее время тензорное исчисление широко используется во многих областях науки: в механике сплошной среды, при изучении электромагнитных полей, гравитационных полей и др. Методы тензорного исчисления настолько эффективны, что их стали применять и к анализу закономерностей, описываемых дискретными величинами, предварительно накладывая на эти величины некоторые условия. Одним из важнейших достоинств тензорного исчисления является возможность "конструирования" математических моделей в инвариантной форме, которая позволяет лучше просматривать закономерности изучаемых процессов.

Цель настоящего пособия - дать читателю представление о тензорах и их свойствах, привить ему навыки оперирования над тензорами, подготовить базу для изучения тензорного анализа, механики сплошных сред и других инженерных дисциплин.

Для понимания материала пособия достаточно знаний, полученных студентами при изучении линейной алгебры и математического анализа в объеме первого семестра.

1. КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1.1. Базисные векторы криволинейной системы координат

Пусть $\overline{R}$ - радиус вектор точки M пространства $\Re_n$. Обозначим через ξ криволинейную координату, связанную с некоторой кривой, проходящей через точку M, и отсчитываемую от фиксированной точки M_0 этой кривой (Рис. 1.1). Пусть при переходе от точки M до другой точки M_1 кривой координата ξ получает приращение $\Delta\xi$. При этом радиус-вектор получит приращение $\Delta\overline{R}$.

Производной радиус-вектора по криволинейной координате ξ называется предел отношения приращения вектора к приращению координаты при стремлении последнего к нулю:

$$\overline{R}_\xi = \frac{\partial \overline{R}}{\partial \xi} = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{\Delta\overline{R}}{\Delta\xi} \quad . \tag{1.1}$$

В курсе математического анализа показывается, что $\overline{R}_\xi$ - вектор, касательный к кривой в точке M (рис. 1.1).

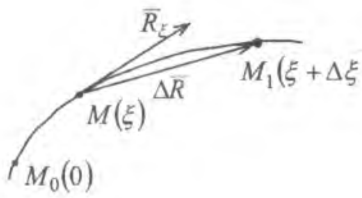

Рис. 1.1. Производная радиус-вектора
по криволинейной координате ξ

1. Криволинейная система координат

Пусть в пространстве задана система координат Z. Это означает, что каждой точке M пространства поставлен во взаимно однозначное соответствие набор n чисел $z^1, z^2, ..., z^n$ или матрица

$$Z = (z^1, z^2, ..., z^n)^T. \qquad (1.2)$$

Координатная линия z^k, проходящая через точку $M\ (z_M^1, z_M^2, ..., z_M^n)$, определяется уравнениями

$$z^i = z_M^i \quad (i = \overline{1,n};\ i \neq k). \qquad (1.3)$$

Это означает, что на линии z^k изменяется только координата z^k, а все остальные координаты остаются неизменными.

Введем n векторов, касательных к координатным линиям z^k

$$\overline{R}_k = \frac{\partial \overline{R}}{\partial z^k}\ (k = \overline{1,n}). \qquad (1.4)$$

В курсе математического анализа показано, что выполнение условия взаимно однозначной связи точек пространства с их координатами (это условие называют также *условием гомеоморфности*) приводит к тому, что система координат будет невырожденной. Векторы $\overline{R}_k$ в этом случае линейно независимы и образуют базис пространства. В частности, в пространстве $\Re_3$ векторы $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$ некомпланарны в любой его точке.

Введем в рассмотрение декартову систему координат

$$X = (x^1, x^2, ..., x^n)^T,$$

для которой базисные векторы $i_1, i_2, ..., i_n$ ортонормированы и не изменяются при переходе от одной точки пространства к другой.

Радиус-вектор $\overline{R}$ в этой системе координат может быть представлен в виде

$$\overline{R} = i_1 x^1 + i_2 x^2 + \ldots + i_n x^n, \tag{1.5}$$

или (с использованием правила Эйнштейна суммирования по повторяющемуся немому индексу, если один из них верхний, а другой - нижний) в виде

$$\overline{R} = i_k x^k; \;\; (k = \overline{1,n}). \tag{1.6}$$

Правило суммирования Эйнштейна в дальнейшем изложении используется весьма часто, причем если пределы изменения немого индекса не указаны, то подразумевается, что они ясны из контекста, или формула справедлива при любом значении *n*.

В формулах (1.5), (1.6) и далее i_k - орт декартовой (ортонормированной) системы координат OX^k.

Используя соотношение (1.6), можно получить разложение векторов $\overline{R}_k$ произвольной системы координат в декартовом базисе

$$\overline{R}_k = \frac{\partial(i_m x^m)}{\partial z^k} = i_m \frac{\partial x^m}{\partial z^k}_m = i_m \rho^m_{\cdot k}. \tag{1.7}$$

В общем случае для различных точек пространства векторы $\overline{R}_k$ различны. Исключение составляют *аффинные* системы координат (так называют прямолинейные, не обязательно ортогональные координаты, для которых $\overline{R}_k = const$). Декартовы координаты также являются аффинными. Действительно, если $\mathrm{Z} = \mathrm{X}$, то

$$\overline{R}_k = \frac{\partial(i_m x^m)}{\partial x^k} = i_m \frac{\partial x^m}{\partial x^k} = i_m \delta^m_k = i_k.$$

Здесь и далее δ^m_k - символ Кронекера, определяемый соотношениями

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1 & m = k; \\ 0 & m \neq k. \end{cases} \qquad (1.8)$$

1.2. Основной и взаимный базисы пространства $\Re_3$

Введем в каждой точке $\Re_3$ базис, определяемый матрицей

$$\mathrm{R}_*^T = (\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3). \qquad (1.9)$$

Чаще всего векторы базиса (1.9) определяют из соотношения (1.4), однако можно задавать их и из каких-либо других соображений. При этом всегда можно сделать так, чтобы тройка векторов $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$ была правой, что в дальнейшем будет подразумеваться.

Базис $\mathrm{R}_*^{\mathrm{T}}$ будем называть *основным базисом*. Наряду с основным введем *взаимный базис*

$$\mathrm{R}^{*\mathrm{T}} = (\overline{R}^1, \overline{R}^2, \overline{R}^3), \qquad (1.10)$$

векторы которого определяются соотношениями

$$\overline{R}_k \cdot \overline{R}^m = \overline{R}^m \cdot \overline{R}_k = \delta_k^m. \qquad (1.11)$$

В трехмерном пространстве векторы взаимного базиса можно определять по формулам

$$\overline{R}^1 = \frac{1}{v_*}\overline{R}_2 \times \overline{R}_3,$$

$$\overline{R}^2 = \frac{1}{v_*}\overline{R}_3 \times \overline{R}_1, \qquad (1.12)$$

$$\overline{R}^3 = \frac{1}{v_*}\overline{R}_1 \times \overline{R}_2.$$

Здесь

$$v_* = \overline{R}_1 \cdot (\overline{R}_2 \times \overline{R}_3).$$

Действительно

$$\overline{R}_1 \cdot \overline{R}^1 = \overline{R}_1 \cdot (\frac{1}{v_*}\overline{R}_2 \times \overline{R}_3) = \frac{1}{v_*}\overline{R}_1 \cdot (\overline{R}_2 \times \overline{R}_3) = 1 \ ;$$

$$\overline{R}_1 \cdot \overline{R}^2 = \overline{R}_1 \cdot (\frac{1}{v_*}\overline{R}_3 \times \overline{R}_1) = 0 \ .$$

Поскольку тройка $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$ - правая, то $v_* > 0$ (геометрически v_*- объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$).

Замечание. *В случае ортонормированной системы координат* $v_* = 1$, $i^k = i_k$, то есть *основной базис совпадает со взаимным базисом.*

Определим объем параллелепипеда, построенного на векторах взаимного базиса.

$$v^* = \overline{R}^1 \cdot (\overline{R}^2 \times \overline{R}^3) = \frac{1}{v_*}(\overline{R}_2 \times \overline{R}_3) \cdot (\overline{R}^2 \times \overline{R}^3) =$$

$$= \frac{1}{v_*}\overline{R}_2 \cdot \left(\overline{R}_3 \times (\overline{R}^2 \times \overline{R}^3)\right) =$$

$$= \frac{1}{v_*}\overline{R}_2 \cdot \left(\overline{R}^2 \cdot (\overline{R}_3 \cdot \overline{R}^3) - \overline{R}^3 \cdot (\overline{R}_3 \cdot \overline{R}_2)\right) = \tag{1.13}$$

$$= \frac{1}{v_*}\overline{R}_2 \cdot \overline{R}^2 = \frac{1}{v_*}.$$

Покажем теперь, что основной базис является взаимным по отношению ко взаимному.

$$\frac{1}{v^*}\overline{R}^2 \times \overline{R}^3 = \frac{1}{v^* v_*}\overline{R}^2 \times (\overline{R}_1 \times \overline{R}_2) = \overline{R}_1 \cdot (\overline{R}^2 \cdot \overline{R}_2) -$$
$$- \overline{R}_2 \cdot (\overline{R}^2 \cdot \overline{R}_1) = \overline{R}_1. \tag{1.14}$$

Аналогично

$$\overline{R}_2 = \frac{1}{v^*}\overline{R}_3 \times \overline{R}_1,$$
$$\overline{R}_3 = \frac{1}{v^*}\overline{R}_1 \times \overline{R}_2. \tag{1.15}$$

Замечание*. При выводе соотношений (1.14), (1.15) использовалась формула*

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b}(\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a} \cdot \overline{b}).$$

1.3. Символы Леви - Чивита

Обобщенными символами Леви - Чивита называются символы

$$
\begin{gathered}
\in_{skt} = \overline{R}_s \cdot (\overline{R}_k \times \overline{R}_t) = v_* e_{skt}; \\
\in^{skt} = \overline{R}^s \cdot (\overline{R}^k \times \overline{R}^t) = v^* e^{skt}; \\
e^{skt} = e_{skt} = \begin{cases} 1 & skt = 123,\ 231,\ 312, \\ -1 & skt = 321,\ 132,\ 213, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}
\end{gathered}
\tag{1.16}
$$

С использованием зависимостей (1.16) можно записать формулы (1.12), (1.14), (1.15) в виде

$$
\overline{R}^k = \frac{1}{2} \in^{kmn} \overline{R}_m \times \overline{R}_n, \quad \overline{R}_k = \frac{1}{2} \in_{kmn} \overline{R}^m \times \overline{R}^n. \tag{1.17}
$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$
\overline{R}_k \times \overline{R}_m = \in_{kmn} \overline{R}^n, \quad \overline{R}^s \times \overline{R}^t = \in^{stk} \overline{R}_k. \tag{1.18}
$$

Замечание. *Можно определить символы* e_{skt} *и* e^{stk} *следующим образом:*

$$
e_{skt} = i_s \cdot (i_k \times i_t), \quad e^{skt} = i^s \cdot (i^k \times i^t). \tag{1.19}
$$

Из свойств смешанного произведения векторов и определения (1.16) следуют соотношения:

$$
\begin{gathered}
\in_{skt} = \in_{kts} = \in_{tsk}, \quad \in^{skt} = \in^{kts} = \in^{tsk}, \\
\in^{skt} = - \in^{kst}, \quad \in_{skt} = - \in_{stk}.
\end{gathered}
\tag{1.20}
$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\in_{skt}\in^{snp}=\in_{kts}\in^{snp}=\in_{kts}\overline{R}^{s}\cdot(\overline{R}^{n}\times\overline{R}^{p})=$$
$$=(\overline{R}_{k}\times\overline{R}_{t})\cdot(\overline{R}^{n}\times\overline{R}^{p})=\overline{R}_{k}\cdot(\overline{R}_{t}\times(\overline{R}^{n}\times\overline{R}^{p}))= \qquad (1.21)$$
$$=\overline{R}_{k}\cdot(\overline{R}^{n}\cdot(\overline{R}_{t}\cdot\overline{R}^{p})-\overline{R}^{p}\cdot(\overline{R}_{t}\cdot\overline{R}^{n}))=\delta_{k}^{n}\delta_{t}^{p}-\delta_{k}^{p}\delta_{t}^{n},$$

$$\in_{skt}\in^{skp}=\delta_{k}^{k}\delta_{t}^{p}-\delta_{k}^{p}\delta_{t}^{k}=3\delta_{t}^{p}-\delta_{t}^{p}=2\delta_{t}^{p}, \qquad (1.22)$$

$$\in_{skt}\in^{skt}=2\delta_{t}^{t}=6. \qquad (1.23)$$

Конечно, аналогичные соотношения имеют место и для символов e_{kmn}, e^{skt}.

1.4. Преобразование системы координат и векторов основного и взаимного базисов

Предположим, что в трехмерном пространстве имеются две системы координат, удовлетворяющих условию гомеоморфности:

$$Z=(z^{1}z^{2}z^{3})^{T} \qquad (1.24)$$

и

$$Z'=(z'^{1}z'^{2}z'^{3})^{T}. \qquad (1.25)$$

Условимся называть систему координат (1.24) старой, а (1.25) - новой. Выразим векторы основного базиса новой системы координат через векторы старой.

$$\overline{R'}_{m}=\frac{\partial\overline{R}}{\partial z'^{m}}=\frac{\partial\overline{R}}{\partial z^{k}}\frac{\partial z^{k}}{\partial z'^{m}}=\overline{R}_{k}\frac{\partial z^{k}}{\partial z'^{m}}=\overline{R}_{k}a^{k}_{\cdot m}. \qquad (1.26)$$

Введем в рассмотрение *матрицу Якоби преобразования координат*

$$A = (a^k_{\cdot m}) = \left(\frac{\partial z^k}{\partial z'^m}\right) = \begin{pmatrix} a^1_{\cdot 1} & a^1_{\cdot 2} & a^1_{\cdot 3} \\ a^2_{\cdot 1} & a^2_{\cdot 2} & a^2_{\cdot 3} \\ a^3_{\cdot 1} & a^3_{\cdot 2} & a^3_{\cdot 3} \end{pmatrix}. \tag{1.27}$$

Тогда соотношение (1.26) можно записать в виде

$$R'^{T}_{*} = R^{T}_{*}A, \quad R'_{*} = A^{T}R_{*}. \tag{1.28}$$

Аналогично можно показать, что имеют место соотношения:

$$\overline{R}_k = \overline{R'}_m b^m_{\cdot k}, \tag{1.29}$$

$$R^{T}_{*} = R'^{T}_{*}B, \quad R_{*} = B^{T}R'_{*}, \tag{1.30}$$

где

$$B = (b^m_{\cdot k}) = \left(\frac{\partial z'^m}{\partial z^k}\right) = \begin{pmatrix} b^1_{\cdot 1} & b^1_{\cdot 2} & b^1_{\cdot 3} \\ b^2_{\cdot 1} & b^2_{\cdot 2} & b^2_{\cdot 2} \\ b^3_{\cdot 1} & b^3_{\cdot 2} & b^3_{\cdot 3} \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

- *матрица Якоби обратного преобразования.*

В силу гомеоморфности определители матриц A и B, которые называют *якобианами преобразований,* должны быть отличны от 0.

Найдем произведение матриц A и B.

$$AB = (a^m_{\cdot k} b^k_{\cdot n}) = \left(\frac{\partial z^m}{\partial z'^k}\frac{\partial z'^k}{\partial z^n}\right) = \left(\frac{\partial z^m}{\partial z^n}\right) = \left(\delta^m_n\right) = I. \tag{1.32}$$

Здесь I - единичная матрица.

Из (1.32) следует, что матрицы A и B взаимно обратны, т.е.

$$A^{-1} = B, \quad B^{-1} = A.$$

Сравнивая соотношения (1.26) и (1.27), можно заметить, что *элементы* k-того *столбца матрицы* A *представляют собой компоненты разложения вектора нового базиса* $\overline{R'}_k$ *по базису* $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$.

Действительно, согласно (1.26)

$$\overline{R'}_k = \overline{R}_1 a^1_{\cdot k} + \overline{R}_2 a^2_{\cdot k} + \overline{R}_3 a^3_{\cdot k}.$$

Выясним теперь, как изменяются при преобразовании системы координат векторы взаимного базиса. Пусть имеет место разложение

$$\overline{R'}^m = \overline{R}^k c_k^{\cdot m}, \qquad (1.33)$$

или в матричном виде

$$\mathrm{R}'^{*\mathrm{T}} = \mathrm{R}^{*\mathrm{T}} \mathrm{C}. \qquad (1.34)$$

Здесь

$$\mathrm{C} = (c_k^{\cdot m}) = \begin{pmatrix} c_1^{\cdot 1} & c_1^{\cdot 2} & c_1^{\cdot 3} \\ c_2^{\cdot 1} & c_2^{\cdot 2} & c_2^{\cdot 3} \\ c_3^{\cdot 1} & c_3^{\cdot 2} & c_3^{\cdot 3} \end{pmatrix}. \qquad (1.35)$$

Матрица C введена таким образом, чтобы элементы ее k - того столбца представляли собой коэффициенты разложения k -того вектора нового взаимного базиса по векторам старого взаимного базиса.

Имеем соотношение

$$\overline{R'}^m \cdot \overline{R'}_n = \overline{R}^k c_k^{\cdot m} \cdot \overline{R}_s a^s_{\cdot n} = c_k^{\cdot m} a^s_{\cdot n} \delta_s^k = c_k^{\cdot m} a^k_{\cdot n}, \qquad (1.36)$$

из которого, учитывая соотношение (1.11), справедливое и для нового базиса, получаем зависимость

$$c_k^{\cdot m} a^k_{\cdot n} = \delta_n^m. \qquad (1.37)$$

В матричном виде (1.37) можно записать следующим образом

$$\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{I}. \tag{1.38}$$

Сравнивая с (1.32) и учитывая единственность матрицы, обратной данной, приходим к равенству

$$\mathrm{C}^{\mathrm{T}} = \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}, \tag{1.39}$$

из которого следуют соотношения

$$\mathrm{R}'^{*\mathrm{T}} = \mathrm{R}^{*\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{R}'^{*} = \mathrm{BR}^{*}, \tag{1.40}$$

$$\overline{R'}^{m} = b^{m}_{\cdot k}\,\overline{R}^{k}. \tag{1.41}$$

Строки матрицы B (матрицы A^{-1}) представляют собой *компоненты разложения векторов нового взаимного базиса по старому взаимному базису.*

Из равенств (1.40) следуют формулы связи:

$$\mathrm{R}^{*\mathrm{T}} = \mathrm{R}'^{*\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{R}^{*} = \mathrm{AR}'^{*}. \tag{1.42}$$

Кроме того, сравнение (1.30) с (1.28) и (1.40) с (1.42) позволяет дать еще одну формулировку для матриц A и B.

Элементы k-той строки матрицы A - компоненты разложения k-того вектора старого взаимного базиса по векторам нового взаимного базиса.

Элементы k-того столбца матрицы B - компоненты разложения k-того вектора старого основного базиса по векторам нового основного базиса.

2. ВЕКТОР. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

2.1. Представление вектора в косоугольном базисе. Матрицы вектора. Подъем и опускание индекса

Простейшим, с точки зрения тензорной алгебры, объектом является ***скаляр***. Это характеристика среды, которая в данной точке пространства определяется числом, не зависящим от выбора базиса. К скалярным величинам относят массу, плотность, температуру и т.д. Поскольку *скалярная величина* не изменяется при перемене системы координат, говорят, что она ***инвариантна*** *по отношению к преобразованию координат.*

Следующим по сложности объектом является ***вектор.*** Он характеризуется числом (модулем вектора) и направлением в пространстве. Как известно, вектор может быть разложен по любому базису, причем *компоненты вектора* (его координаты) *меняются* при изменении базиса. Однако это *изменение таково, что сумма составляющих вектора* (сумма произведений его координат на соответствующие базисные векторы) *остается неизменной и равной самому вектору.* Это и определяет *свойства вектора* как *объекта, инвариантного по отношению к преобразованию координат.*

Разложение вектора $\bar{y}$ в основном и взаимном базисах записывается в виде

$$\bar{y} = y^m \bar{R}_m = y_k \bar{R}^k . \tag{2.1}$$

Величины y_k называются *ковариантными*, а y^k - *контравариантными компонентами вектора* $\bar{y}$ (смысл названия будет пояснен ниже).

Вводя матрицы ковариантных

$$\mathrm{Y}_* = (y_1 \; y_2 \; y_3)^T \tag{2.2}$$

и контравариантных

$$\mathrm{Y}^* = (y^1\ y^2\ y^3)^T \tag{2.3}$$

компонентов вектора, можно представить (2.1) в матричном виде

$$\overline{y} = \mathrm{R}_*^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}^* = \mathrm{Y}^{*\mathrm{T}}\mathrm{R}_* = \mathrm{R}^{*\mathrm{T}}\mathrm{Y}_* = \mathrm{Y}_*^{\mathrm{T}}\mathrm{R}^*. \tag{2.4}$$

Конечно, если система координат ортонормирована и основной базис совпадает с взаимным, то $y^k = y_k$ и матрицы компонентов Y_* и Y^* совпадают.

Из (2.1) следуют формулы

$$\begin{aligned} y^s &= \overline{y}\cdot\overline{R}^s = \overline{R}^s\cdot\overline{y}, \\ y_m &= \overline{y}\cdot\overline{R}_m = \overline{R}_m\cdot\overline{y}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Например,

$$\overline{y}\cdot\overline{R}_k = y_m\overline{R}^m\cdot\overline{R}_k = y_m\delta_k^m = y_k.$$

Операция перехода от ковариантных компонентов к контравариантным называется подъемом индекса, от контравариантных к ковариантным - опусканием индекса.

Разложим векторы взаимного базиса $\overline{R}^s$ по базису $\mathrm{R}_*^{\mathrm{T}}$. Пусть это разложение имеет вид

$$\overline{R}^s = g^{sk}\,\overline{R}_k. \tag{2.6}$$

Выясним смысл коэффициентов g^{sk}.

Имеем

$$\overline{R}^s\cdot\overline{R}^k = g^{sm}\,\overline{R}_m\cdot\overline{R}^k = g^{sm}\delta_m^k = g^{sk}. \tag{2.7}$$

Аналогично,

$$\overline{R}_s = g_{sk}\,\overline{R}^k\,, \tag{2.8}$$

$$g_{sk} = g_{ks} = \overline{R}_s \cdot \overline{R}_k\,. \tag{2.9}$$

Соотношения (2.6), (2.8) можно рассматривать и как *операции подъема и опускания индексов* по отношению к векторам основного и взаимного базисов, что дает еще одну связь между ними.

Используя (2.6) и (2.8), приходим к формулам

$$y^s = \overline{R}^s \cdot y_k \overline{R}^k = g^{sk} y_k\,, \tag{2.10}$$

$$y_m = \overline{R}_m \cdot y^n \overline{R}_n = g_{mn} y^n\,, \tag{2.11}$$

которые описывают операции подъема и опускания индексов для компонентов вектора.

Введем в рассмотрение симметричные в силу (2.7) и (2.9) матрицы

$$\mathrm{G}_{**} = \left(g_{mn}\right); \qquad \mathrm{G}^{**} = \left(g^{km}\right). \tag{2.12}$$

С их помощью операции подъема и опускания индексов легко представить в матричной форме:

$$\overline{\mathrm{R}}^{*\mathrm{T}} = \mathrm{R}_*^{\mathrm{T}}\mathrm{G}^{**}\,, \quad \mathrm{R}_*^{\mathrm{T}} = \mathrm{R}^{*\mathrm{T}}\mathrm{G}_{**}\,, \tag{2.13}$$

$$\mathrm{R}^* = \mathrm{G}^{**}\mathrm{R}_*\,, \quad \mathrm{R}_* = \mathrm{G}_{**}\mathrm{R}^*\,, \tag{2.14}$$

$$\mathrm{Y}^* = \mathrm{G}^{**}\mathrm{Y}_*\,, \quad \mathrm{Y}_* = \mathrm{G}_{**}\mathrm{Y}^*\,. \tag{2.15}$$

Используя операцию подъема и опускания индексов и свойства коэффициентов g^{sk}, легко получить еще одно полезное соотношение для векторов основного и взаимного базисов:

$$\overline{R}^s \times \overline{R}_s = g^{sm}\overline{R}_m \times \overline{R}_s = -g^{sm}\overline{R}_s \times \overline{R}_m =$$
$$= -g^{ms}\overline{R}_m \times \overline{R}_s = -g^{sm}\overline{R}_m \times \overline{R}_s = 0.$$

В заключение выясним связь между матрицами G_{**} и G^{**}.

Имеем соотношение

$$\delta_k^s = \overline{R}^s \cdot \overline{R}_k = g^{sm}\overline{R}_m \cdot g_{kt}\overline{R}^t = g^{sm}g_{tk}\delta_m^t = g^{sm}g_{mk}, \quad (2.16)$$

которому соответствует матричное равенство

$$I = G^{**}G_{**}. \quad (2.17)$$

Таким образом, G_{**} и G^{**} - взаимно обратные матрицы, т.е. справедливы соотношения

$$G_{**} = (G^{**})^{-1}, \quad G^{**} = (G_{**})^{-1}.$$

Замечание. *Для ортонормированного базиса*

$$G_{**} = G^{**} = I.$$

2.2. Преобразование компонентов вектора. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора

Пусть известны компоненты вектора $\overline{y}$ в базисах R_*^T и R^{*T}. Требуется найти компоненты этого вектора в базисах R'^{*T} и R'^{T}_{*}.

Используя формулы (2.5), (1.26) и (1.41), можно получить соотношения

$$y'_s = \overline{y} \cdot \overline{R'}_s = \overline{y} \cdot \overline{R}_m a^{m}_{\cdot s} = y_m a^{m}_{\cdot s}, \tag{2.18}$$

$$y'^k = \overline{R'}^k \cdot \overline{y} = b^{k}_{\cdot m} \overline{R}^m \cdot \overline{y} = b^{k}_{\cdot m} y^m, \tag{2.19}$$

которым соответствуют матричные равенства

$$\mathrm{Y'}^{\mathrm{T}}_{*} = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}_{*} \mathrm{A}, \tag{2.20}$$

$$\mathrm{Y'}^{*} = \mathrm{B}\mathrm{Y}^{*} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}^{*}. \tag{2.21}$$

Таким образом, если

$$\overline{y} = \mathrm{R}^{\mathrm{T}}_{*} \mathrm{Y}^{*} = \mathrm{R'}^{\mathrm{T}}_{*} \mathrm{Y'}^{*},$$

то

$$\mathrm{R'}^{\mathrm{T}}_{*} = \mathrm{R}^{\mathrm{T}}_{*} \mathrm{A}, \quad \mathrm{Y'}^{*} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}^{*}.$$

Сравним формулы преобразований базисных векторов и соответствующих компонентов (1.28), (2.20), (1.40), (2.21)

$$\mathrm{R'}_{*} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{R}_{*}, \quad \mathrm{Y'}_{*} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}_{*};$$

$$\mathrm{R'}^{*} = \mathrm{B}\mathrm{R}^{*}, \quad \mathrm{Y'}^{*} = \mathrm{B}\mathrm{Y}^{*}.$$

Видно, что матрицы, с помощью которых производятся преобразования, одинаковы при одном и том же расположении индексов преобразуемых матриц.

Пусть в некотором пространстве заданы *элементы* x *и* y, которые при изменении базиса пространства *изменяются при помощи одного и того же оператора.* В этом случае такие элементы называются ***ковариантными.***

В тензорном исчислении принято называть ковариантными величины, изменяющиеся так же, как векторы основного базиса, и отмечать эти величины индексами, расположенными снизу. *Контравариантные* величины обозначаются верхними индексами и изменяются как векторы взаимного базиса.

Замечание. *Если старый и новый базисы являются ортонормированными (*A *является ортогональной матрицей), то*

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}.$$

При этом отпадает различие между ковариантными и контравариантными компонентами (сравните формулы преобразования).

2.3. Операции над векторами

Сумма двух векторов дается соотношениями

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_s + y_s)\bar{R}^s = (x^s + y^s)\bar{R}_S. \tag{2.22}$$

Скалярное произведение определяется формулами:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_k \bar{R}^k \cdot \bar{y} = x_k y^k = x_k g^{ks} y_s = x^s y_s = x^s g_{sm} y^m.$$

В матричном виде выражения (2.22) и (2.23) выглядят следующим образом:

$$\bar{x} + \bar{y} = \mathrm{R}^{*\mathrm{T}}(\mathrm{X}_* + \mathrm{Y}_*) = \mathrm{R}_*^{\mathrm{T}}(\mathrm{X}^* + \mathrm{Y}^*), \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot \bar{y} &= \mathrm{X}_*^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}^* = \mathrm{X}_*^{\mathrm{T}}\mathrm{G}^{**}\mathrm{Y}_* = \\ &= \mathrm{X}^{*\mathrm{T}}\mathrm{Y}_* = \mathrm{X}^{*\mathrm{T}}\mathrm{G}_{**}\mathrm{Y}^* \end{aligned} \tag{2.25}$$

Векторное произведение двух векторов в трехмерном пространстве определяется формулами

$$\bar{a} \times \bar{b} = a_k b_m \bar{R}^k \times \bar{R}^m = a_k b_m \in^{kmt} \bar{R}_t = a^k b^m \in_{kmt} \bar{R}^t. \tag{2.26}$$

Векторное произведение двух векторов можно представить также в виде определителей

$$\bar{a} \times \bar{b} = v^* \begin{vmatrix} \bar{R}_1 & \bar{R}_2 & \bar{R}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = v_* \begin{vmatrix} \bar{R}^1 & \bar{R}^2 & \bar{R}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}. \qquad (2.27)$$

Смешанное (векторно-скалярное) произведение трех векторов дается соотношениями

$$\begin{aligned} &\bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{a} \cdot b_k c_m \in^{kmt} \bar{R}_t = \\ &= a_t b_k c_m \in^{tkm} = a^t b^k c^m \in_{tkm} \end{aligned}, \qquad (2.28)$$

или в виде определителей

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = v^* \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = v_* \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \qquad (2.29)$$

Кроме того, квадрат смешанного произведения можно представить в инвариантной форме

$$\left[\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})\right]^{2}=v^{*}v_{*}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a^1 & b^1 & c^1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=$$

$$=\det\left[\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a^1 & b^1 & c^1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{vmatrix}a_k a^k & a_k b^k & a_k c^k\\ b_k a^k & b_k b^k & b_k c^k\\ c_k a^k & c_k b^k & c_k c^k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{a} & \bar{a}\cdot\bar{b} & \bar{a}\cdot\bar{c}\\ \bar{b}\cdot\bar{a} & \bar{b}\cdot\bar{b} & \bar{b}\cdot\bar{c}\\ \bar{c}\cdot\bar{a} & \bar{c}\cdot\bar{b} & \bar{c}\cdot\bar{c}\end{vmatrix}.$$

Из последнего равенства следуют, в частности, формулы

$$v_*^2=\left[\bar{R}_1\cdot\left(\bar{R}_2\times\bar{R}_3\right)\right]^2=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}=\det \mathrm{G}_{**}, \quad (2.30)$$

$$\left(v^*\right)^2=\det \mathrm{G}^{**}. \quad (2.31)$$

В тензорной алгебре принято обозначать

$$\det \mathrm{G}_{**} = g_* = g. \tag{2.32}$$

Остальные величины в формулах (2.30), (2.31) выражаются через g:

$$\det \mathrm{G}^{**} = \frac{1}{g}, \quad v_* = \sqrt{g}, \quad v^* = \frac{1}{\sqrt{g}}. \tag{2.33}$$

3.ТЕНЗОР ВТОРОГО РАНГА

3.1. Понятие тензора 2 ранга

Линейный оператор, с помощью которого осуществляется преобразование одного вектора евклидова пространства *(как инвариантной величины)* в другой вектор того же пространства, называется *тензором второго ранга.*

$$\widehat{Q} : \overline{x} \mapsto \overline{y} \Leftrightarrow \overline{y} = \widehat{Q} \cdot \overline{x}.$$

В тензорной алгебре принято записывать отображение в виде равенства, в котором вектор-образ $\overline{y}$ равен скалярному произведению тензора на вектор-прообраз $\overline{x}$.

Тензор будем обозначать большой буквой латинского алфавита с «крышечкой» сверху.

Поскольку тензор является линейным оператором, он удовлетворяет следующим аксиомам:

$$\widehat{A} \cdot \left(\overline{x} + \overline{y}\right) = \widehat{A} \cdot \overline{x} + \widehat{A} \cdot \overline{y};\ \widehat{A} \cdot \left(\lambda \overline{x}\right) = \lambda\left(\widehat{A} \cdot \overline{x}\right).$$

Равенство двух тензоров определяется соотношениями

$$\widehat{A} = \widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{A} \cdot \overline{x} = \widehat{B} \cdot \overline{x}, \forall\, \overline{x}.$$

На множестве тензоров второго ранга определена *операция сложения тензоров*

$$\widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{C} \cdot \overline{x} = \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) \cdot \overline{x} = \widehat{A} \cdot \overline{x} + \widehat{B} \cdot \overline{x},\ \forall\, \overline{x},$$

для которой выполняются *аксиомы сложения*:

1. $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{B} + \widehat{A};$
2. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) + \widehat{C} = \widehat{A} + \left(\widehat{B} + \widehat{C}\right);$

3. $\exists \widehat{\Theta} : \widehat{\Theta} \cdot \overline{x} = \overline{\Theta}, \ \forall \overline{x}\, ; \widehat{A} + \widehat{\Theta} = \widehat{\Theta} + \widehat{A} = \widehat{A};$

4. $\forall \widehat{A} \ \exists \left(-\widehat{A}\right): \ \widehat{A} + (-\widehat{A}) = \widehat{A} - \widehat{A} = \widehat{\Theta}.$

Тензор $\widehat{\Theta}$ называют нулевым тензором, а тензор $\left(-\widehat{A}\right)$ - противоположным для тензора $\widehat{A}$.

Определена *операция умножения тензора на действительное число* λ:

$$\widehat{B} = \lambda\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{B} \cdot \overline{x} = \left(\lambda\widehat{A}\right) \cdot \overline{x} = \lambda\left(\widehat{A} \cdot \overline{x}\right) = \widehat{A} \cdot \left(\lambda \cdot \overline{x}\right), \quad \forall \overline{x} \ ,$$

для которой выполняются *аксиомы умножения*:

1. $\lambda\widehat{A} = \widehat{A}\lambda$;
2. $1\widehat{A} = \widehat{A}$;
3. $0\widehat{A} = \widehat{\Theta}$;
4. $(\lambda\mu)\widehat{A} = \lambda\left(\mu\widehat{A}\right) = \mu\left(\lambda\widehat{A}\right) = \lambda\mu\widehat{A}$.

Выполняются *аксиомы дистрибутивности сложения относительно умножения на число*:

1. $(\lambda + \mu)\widehat{A} = \lambda\widehat{A} + \mu\widehat{A}$;
2. $\lambda\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = \lambda\widehat{A} + \lambda\widehat{B}$.

Замечание. *При формулировке аксиом использованы обычные обозначения*: $\forall$ -"*для любого*", $\exists$ - "*существует*", :- "*такой, что*".

3.2. Диада векторов

Диадой векторов $\overline{x}$ *и* $\overline{y}$ называется математический объект *(оператор)* $\overline{x}\,\overline{y}$, осуществляющий преобразование вектора евклидова пространства в другой вектор того же пространства, причем выполняются следующие правила:

$$\overline{xy}\cdot\bar a=\bar x(\bar y\cdot\bar a)=(\bar y\cdot\bar a)\bar x=(\bar a\cdot\bar y)\bar x=\bar x(\bar a\cdot\bar y). \qquad (3.1)$$

Операция получения диады из двух векторов называется *тензорным умножением*

Легко проверить, что диада является тензором второго ранга. В качестве дополнительных свойств диады можно указать следующие

$$\overline{xy}\neq\overline{yx}, \qquad (3.2)$$

$$(\lambda\bar a+\mu\bar b)\bar c\cdot\bar x=\lambda\overline{ac}\cdot\bar x+\mu\overline{bc}\cdot\bar x, \qquad (3.3)$$

$$\bar a(\lambda\bar b+\mu\bar c)\cdot\bar x=\lambda\overline{ab}\cdot\bar x+\mu\overline{ac}\cdot\bar x. \qquad (3.4)$$

Диада $\overline{yx}$ называется *транспонированной* по отношению к диаде $\overline{xy}$. Обозначается это так

$$(\overline{xy})^T=\overline{yx}. \qquad (3.5)$$

С введением этого понятия можно записать равенство

$$\overline{xy}\cdot\bar a=\bar a\cdot\overline{xy}=\bar a\cdot(\overline{xy})^T. \qquad (3.6)$$

Дадим определение еще нескольких операций с диадами, широко используемых в тензорной алгебре

$$\overline{xy}\times\bar a=\bar x(\bar y\times\bar a)=-\overline{xa}\times\bar y, \qquad (3.7)$$

$$\bar a\times\overline{xy}=(\bar a\times\bar x)\bar y=-\bar x\times\overline{ay}, \qquad (3.8)$$

$$\overline{xy}\cdot\overline{uv}=\bar x(\bar y\cdot\bar u)\bar v=(\bar y\cdot\bar u)\overline{xv}. \qquad (3.9)$$

Легко проверить, что

$$(\overline{xy}\cdot\overline{uv})^T=(\overline{uv})^T\cdot(\overline{xy})^T. \qquad (3.10)$$

3.3. Компоненты тензора 2 ранга. Матрицы тензора

Рассмотрим произвольный тензор второго ранга $\widehat{Q}$. Введем обозначения

$$q_{st} = \overline{R}_s \cdot \left(\widehat{Q} \cdot \overline{R}_t\right) = \overline{R}_s \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}_t . \tag{3.11}$$

Покажем, что *тензор* $\widehat{Q}$ *взаимно однозначно определяется как сумма* n^2 *диад (n – размерность пространства).*

$$\widehat{Q} = q_{st} \overline{R}^s \overline{R}^t . \tag{3.12}$$

Докажем сначала возможность такого представления. Для этого рассмотрим тензор

$$\widehat{P} = q_{st} \overline{R}^s \overline{R}^t$$

и покажем, что $\widehat{P} = \widehat{Q}$.

Найдем для произвольного вектора $\overline{x}$ ковариантные координаты векторов $\widehat{Q} \cdot \overline{x}$ и $\widehat{P} \cdot \overline{x}$. Имеем:

$$\overline{R}_m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{x} = \overline{R}_m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}_t x^t = q_{mt} x^t ,$$

$$\overline{R}_m \cdot \widehat{P} \cdot \overline{x} = \overline{R}_m \cdot q_{st} \overline{R}^s \overline{R}^t \cdot \overline{x} = \delta_m^s q_{st} x^t = q_{mt} x^t .$$

Вследствие равенства координат, $\widehat{P} \cdot \overline{x} = \widehat{Q} \cdot \overline{x}$. Отсюда, по определению равенства тензоров, следует, что $\widehat{P} = \widehat{Q}$.

Докажем теперь единственность разложения (3.12). Предположим, что помимо (3.12) тензор $\widehat{Q}$ можно представить в виде

$$\widehat{Q} = q'_{st} \overline{R}^s \overline{R}^t .$$

Имеем

$$q_{st} = \overline{R}_s \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}_t = \overline{R}_s \cdot q'_{mn} \overline{R}^m \overline{R}^n \cdot \overline{R}_t = q'_{mn} \delta_s^m \delta_t^n = q'_{st}\,.$$

Взаимная однозначность представления (3.12) доказана.

Аналогично можно показать, что тензор $\widehat{Q}$ взаимно однозначно представляется в виде

$$\widehat{Q} = q^{mn} \overline{R}_m \overline{R}_n = q^{s}_{\cdot t} \overline{R}_s \overline{R}^t = q_m^{\cdot n} \overline{R}^m \overline{R}_n\,, \tag{3.13}$$

где

$$q^{mn} = \overline{R}^m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}^n; \; q^{s}_{\cdot t} = \overline{R}^s \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}_t; \quad q_m^{\cdot n} = \overline{R}_m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}^n. \tag{3.14}$$

По аналогии с компонентами вектора принято называть q_{st} -ко-ковариантными, $q_m^{\cdot n}$ - ко-контравариантными q^{st} - контра-контравариантными, $q^{s}_{\cdot t}$ - контра-ковариантными компонентами тензора. В ортонормированном базисе все компоненты совпадают.

Можно ввести в рассмотрение матрицы соответствующих компонентов тензора.

$$\mathbf{Q}_{**} = (q_{mn}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^{**} = (q^{mn}) = \begin{pmatrix} q^{11} & q^{12} & q^{13} \\ q^{21} & q^{22} & q^{23} \\ q^{31} & q^{32} & q^{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^{*}_{\cdot *} = (q^{m}_{\cdot n}) = \begin{pmatrix} q^{1}_{\cdot 1} & q^{1}_{\cdot 2} & q^{1}_{\cdot 3} \\ q^{2}_{\cdot 1} & q^{2}_{\cdot 2} & q^{2}_{\cdot 3} \\ q^{3}_{\cdot 1} & q^{3}_{\cdot 2} & q^{3}_{\cdot 3} \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{Q}_{*}^{\cdot *} = (q_{m}^{\cdot n}) = \begin{pmatrix} q_{1}^{\cdot 1} & q_{1}^{\cdot 2} & q_{1}^{\cdot 3} \\ q_{2}^{\cdot 1} & q_{2}^{\cdot 2} & q_{2}^{\cdot 3} \\ q_{3}^{\cdot 1} & q_{3}^{\cdot 2} & q_{3}^{\cdot 3} \end{pmatrix}.$$

Переходить от одних компонентов к другим можно с помощью операции подъема и опускания индекса. Например,

$$q_{mn} = \overline{R}_m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}_n = g_{mt} \overline{R}^t \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}_n = g_{mt} q^{t}_{\cdot n} \,. \tag{3.16}$$

То же самое в матричном виде:

$$\mathrm{Q}_{**} = \mathrm{G}_{**} \mathrm{Q}^{*}_{\cdot *} \,. \tag{3.17}$$

Аналогично преобразуются и другие компоненты тензора.

3.4. Умножение тензора на вектор. Скалярное произведение тензоров

Используя диадное представление произвольного тензора $\widehat{Q}$, операцию скалярного умножения тензора на вектор можно представить в виде

$$\begin{aligned} \widehat{Q}\cdot\bar{x} &= q_{mn}\bar{R}^{m}\bar{R}^{n}\cdot\bar{x} = q_{mn}x^{n}\bar{R}^{m}, \\ \bar{x}\cdot\widehat{Q} &= \bar{x}\cdot q_{mn}\bar{R}^{m}\bar{R}^{n} = x^{m}q_{mn}\bar{R}^{n}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Таким образом, если $\bar{y}=\widehat{Q}\cdot\bar{x}$, $\bar{z}=\bar{x}\cdot\widehat{Q}$, то

$$y_m = q_{mn}x^n, \quad z_n = x^m q_{mn}. \tag{3.19}$$

Это соответствует матричным равенствам

$$\mathrm{Y}_* = \mathrm{Q}_{**}\mathrm{X}^*, \quad \mathrm{Z}_*^{\mathrm{T}} = \mathrm{X}^{*\mathrm{T}}\mathrm{Q}_{**}. \tag{3.20}$$

Используя другие разложения тензора $\widehat{Q}$, легко получить еще ряд формул:

$$y^s = q^{sn}x_n = q^{s}_{\cdot n}x^n, \quad y_s = q_s^{\cdot n}x_n, \tag{3.21}$$

$$z^s = x^n q_n^{\cdot s} = x_n q^{ns}, \quad z_s = x_n q^{n}_{\cdot s}. \tag{3.22}$$

Формулы (3.21), (3.22) легко представляются и в матричном виде:

$$\mathrm{Y}^* = \mathrm{Q}^{**}\mathrm{X}_* = \mathrm{Q}^{*}_{\cdot *}\mathrm{X}^*, \quad \mathrm{Y}_* = \mathrm{Q}_*^{\cdot *}\mathrm{X}_*, \tag{3.23}$$

$$\mathrm{Z}^{*\mathrm{T}} = \mathrm{X}^{*\mathrm{T}}\mathrm{Q}_*^{\cdot *} = \mathrm{X}_*^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}^{**}; \quad \mathrm{Z}_*^{\mathrm{T}} = \mathrm{X}_*^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}^{*}_{\cdot *}. \tag{3.24}$$

Используя диадное представление, легко определить также операции векторного умножения тензора на вектор и скалярного произведения тензоров, в результате которых получается тензор второго ранга:

$$\begin{aligned} \hat{C} = \hat{Q} \times \bar{a} = q^{mn} \bar{R}_m \bar{R}_n \times a^t \bar{R}_t = \\ = q^{mn} a^t \in_{nts} \bar{R}_m \bar{R}^s = c^{m}_{\cdot s} \bar{R}_m \bar{R}^s , \end{aligned} \qquad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{C} = \bar{a} \times \hat{Q} = a^t \bar{R}_t \times q^{mn} \bar{R}_m \bar{R}_n = a^t q^{mn} \in_{tms} \bar{R}^s \bar{R}_n = \\ = c_s^{\cdot n} \bar{R}^s \bar{R}_n , \end{aligned} \qquad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \hat{C} = \hat{P} \cdot \hat{Q} = p^{mn} \bar{R}_m \bar{R}_n \cdot q_{st} \bar{R}^s \bar{R}^t = \\ = p^{mn} q_{st} \delta_n^s \bar{R}_m \bar{R}^t = p^{mn} q_{nt} \bar{R}_m \bar{R}^t = c^{m}_{\cdot t} \bar{R}_m \bar{R}^t . \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Формулу (3.27) можно представить и в матричном виде:

$$\mathrm{C}^{*}_{\cdot *} = \mathrm{P}^{**} \mathrm{Q}_{**} . \qquad (3.28)$$

Аналогично можно получить другое разложение тензора $\hat{C}$, используя разложения тензоров $\hat{P}, \hat{Q}$ и вектора $\bar{a}$ в различных базисах.

Легко проверить, что операции, рассмотренные в данном разделе, не обладают свойством коммутативности, но свойства дистрибутивности и ассоциативности для них выполняются, т.е.

$$\begin{aligned} \hat{Q} \cdot \bar{a} \neq \bar{a} \cdot \hat{Q} , \\ \hat{Q} \times \bar{a} \neq \bar{a} \times \hat{Q} , \\ \hat{Q} \cdot \hat{P} \neq \hat{P} \cdot \hat{Q} ; \end{aligned} \qquad (3.29)$$

$$
\begin{aligned}
&\widehat{Q}\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\widehat{Q}\cdot\overline{a}+\widehat{Q}\cdot\overline{b}\ ,\\
&\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\widehat{Q}=\overline{a}\cdot\widehat{Q}+\overline{b}\cdot\widehat{Q}\ ,\\
&\widehat{Q}\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\widehat{Q}\times\overline{a}+\widehat{Q}\times\overline{b},\\
&\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\widehat{Q}=\overline{a}\times\widehat{Q}+\overline{b}\times\widehat{Q},\\
&\left(\widehat{P}+\widehat{Q}\right)\cdot\widehat{S}=\widehat{P}\cdot\widehat{S}+\widehat{Q}\cdot\widehat{S},\\
&\widehat{P}\cdot\left(\widehat{Q}+\widehat{S}\right)=\widehat{P}\cdot\widehat{Q}+\widehat{P}\cdot\widehat{S}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\widehat{P}\cdot\widehat{Q}\right)\cdot\overline{a}=\widehat{P}\cdot\left(\widehat{Q}\cdot\overline{a}\right)=\widehat{P}\cdot\widehat{Q}\cdot\overline{a}\ ,\\
&\widehat{P}\cdot\widehat{Q}\times\overline{a}=\left(\widehat{P}\cdot\widehat{Q}\right)\times\overline{a}=\widehat{P}\cdot\left(\widehat{Q}\times\overline{a}\right),\\
&\overline{a}\times\widehat{P}\cdot\widehat{Q}=\left(\overline{a}\times\widehat{P}\right)\cdot\widehat{Q}=\overline{a}\times\left(\widehat{P}\cdot\widehat{Q}\right),\\
&\overline{a}\cdot\widehat{P}\cdot\widehat{Q}=\left(\overline{a}\cdot\widehat{P}\right)\cdot\widehat{Q}=\overline{a}\cdot\left(\widehat{P}\cdot\widehat{Q}\right),\\
&\widehat{P}\cdot\widehat{Q}\cdot\widehat{S}=\left(\widehat{P}\cdot\widehat{Q}\right)\cdot\widehat{S}=\widehat{P}\cdot\left(\widehat{Q}\cdot\widehat{S}\right),\\
&\overline{a}\cdot\widehat{Q}\times\overline{b}=\left(\overline{a}\cdot\widehat{Q}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\cdot\left(\widehat{Q}\times\overline{b}\right).
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

3.5. Транспонированный тензор. Свойства операции транспонирования. Симметричный тензор

Заменив в разложении произвольного тензора

$$\widehat{Q}=q_{mn}\overline{R}^m\overline{R}^n=q^{mn}\overline{R}_m\overline{R}_n=q^s{}_{\cdot t}\overline{R}_s\overline{R}^t=q_s{}^{\cdot t}\overline{R}^s\overline{R}_t$$

базисные диады на транспонированные, приходим к тензору, который называется *транспонированным* по отношению к $\widehat{Q}$.

$$\widehat{Q}^T=q_{mn}\overline{R}^n\overline{R}^m=q^{mn}\overline{R}_n\overline{R}_m=q^s{}_{\cdot t}\overline{R}^t\overline{R}_s=q_s{}^{\cdot t}\overline{R}_t\overline{R}^s$$

Транспонированный тензор удовлетворяет следующим равенствам, справедливым для любого тензора $\hat{Q}$ и вектора $\bar{a}$:

$$\hat{Q} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \hat{Q}^T, \quad \hat{Q}^T \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \hat{Q}. \tag{3.32}$$

Докажем для примера первое из них:

$$\hat{Q} \cdot \bar{a} = q_{mn} \bar{R}^m (\bar{R}^n \cdot \bar{a}) = (\bar{a} \cdot \bar{R}^n) q_{mn} \bar{R}^m =$$
$$= \bar{a} \cdot q_{mn} \bar{R}^n \bar{R}^m = \bar{a} \cdot \hat{Q}^T$$

Операция определения $\hat{Q}^T$ по известному тензору $\hat{Q}$ называется операцией транспонирования. Эта операция обладает следующими легко доказуемыми свойствами:

$$\begin{gathered}
\left(\hat{P} + \hat{Q}\right)^T = \hat{P}^T + \hat{Q}^T, \\
\left(\lambda \hat{P}\right)^T = \lambda \hat{P}^T, \\
\left(\hat{Q}^T\right)^T = \hat{Q}, \\
\left(\hat{P} \cdot \hat{Q}\right)^T = \hat{Q}^T \cdot \hat{P}^T, \\
\left(\hat{Q} \times \bar{a}\right)^T = -\bar{a} \times \hat{Q}^T, \\
\left(\bar{a} \times \hat{Q}\right)^T = -\hat{Q}^T \times \bar{a}.
\end{gathered} \tag{3.33}$$

Докажем для примера предпоследнее свойство. Пусть $\bar{x}$ - произвольный вектор. Имеем

$$\left(\hat{Q} \times \bar{a}\right)^T \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \left(\hat{Q} \times \bar{a}\right) = \left(\bar{x} \cdot \hat{Q}\right) \times \bar{a} = -\bar{a} \times \left(\bar{x} \cdot \hat{Q}\right) =$$
$$= -\bar{a} \times \left(\hat{Q}^T \cdot \bar{x}\right) = -\left(\bar{a} \times \hat{Q}^T\right) \cdot \bar{x}$$

В силу произвольности вектора $\overline{x}$, отсюда следует предпоследнее равенство.

Выясним, как связаны матрицы транспонированного тензора $\widehat{Q}^T$ с матрицами тензора $\widehat{Q}$.

$$\overset{T}{q}_{mn} = \overline{R}_m \cdot \widehat{Q}^T \cdot \overline{R}_n = \overline{R}_m \cdot \left(\overline{R}_n \cdot \widehat{Q}\right) = \overline{R}_n \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R}_m = q_{nm},$$
$$\overset{T}{q}{}^{mn} = \ldots = q^{nm}, \quad \overset{T}{q}{}^{m}_{\cdot n} = \ldots = q_n^{\cdot m}, \quad \overset{T}{q}{}_m^{\cdot n} = \ldots = q_m^{\cdot n}. \tag{3.34}$$

Равенства (3.34) приводят к матричным соотношениям

$$\left(\overset{\mathrm{T}}{\mathrm{Q}}\right)_{**} = \left(\mathrm{Q}_{**}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \left(\overset{\mathrm{T}}{\mathrm{Q}}\right)^{**} = \left(\mathrm{Q}^{**}\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\left(\overset{\mathrm{T}}{\mathrm{Q}}\right)^{*}_{\cdot *} = \left(\mathrm{Q}_{*}^{\cdot *}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \left(\overset{\mathrm{T}}{\mathrm{Q}}\right)^{\cdot *}_{*} = \left(\mathrm{Q}^{*}_{\cdot *}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{3.35}$$

Замечание. *В случае ортонормированного базиса все матрицы компонентов различной вариантности тензора совпадают, поэтому матрица транспонированного тензора равна транспонированной матрице исходного.*

Тензор $\widehat{S}$ называется симметричным, если выполняется равенство

$$\widehat{S}^T = \widehat{S}.$$

Из (3.34) следуют соотношения для компонентов симметричного тензора $\widehat{S}$

$$s_{mn} = s_{nm}, \quad s^{mn} = s^{nm}, \quad s_n^{m} = s_n^{\cdot m}, \quad s_m^{\cdot n} = s^{n}_{\cdot m}. \tag{3.36}$$

Это приводит к следующим матричным зависимостям:

$$S_{**} = \left(S_{**}\right)^{T}, \quad S^{**} = \left(S^{**}\right)^{T},$$
$$S^{*}_{\cdot *} = \left(S_{*}^{\cdot *}\right)^{T}, \quad S_{*}^{\cdot *} = \left(S^{*}_{\cdot *}\right)^{T}. \tag{3.37}$$

Таким образом, у симметричного тензора симметричными являются только матрицы ко-ко и контра-контравариантных компонентов.

Матрицы смешанных компонентов в общем случае несимметричны, действительно:

$$S_{*}^{\cdot *} = G_{**}S^{**} \;\Rightarrow\; (S_{*}^{\cdot *})^{T} = S^{**}G_{**} \neq S_{*}^{\cdot *}.$$

Симметрия будет иметь место только в ортонормированном базисе или в том случае, когда S^{**} и G_{**} - коммутативные матрицы.

3.6. Единичный (метрический) тензор. Свойства единичного тензора

Тензор $\hat{E}$ называется единичным (метрическим), если для произвольного вектора выполняются равенства

$$\hat{E} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \hat{E} = \bar{y}.$$

Определим компоненты единичного тензора:

$$\begin{aligned}
&\bar{R}_s \cdot \hat{E} \cdot \bar{R}_k = \bar{R}_s \cdot \bar{R}_k = g_{sk},\\
&\bar{R}^m \cdot \hat{E} \cdot \bar{R}^n = \bar{R}^m \cdot \bar{R}^n = g^{mn},\\
&\bar{R}^m \cdot \hat{E} \cdot \bar{R}_n = \bar{R}^m \cdot \bar{R}_n = \delta^m_n,\\
&\bar{R}_s \cdot \hat{E} \cdot \bar{R}^k = \bar{R}_s \cdot \bar{R}^k = \delta^k_s.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Таким образом, матрицы единичного тензора имеют вид

$$\mathrm{E}^{**} = \mathrm{G}^{**}, \ \mathrm{E}_{**} = \mathrm{G}_{**}, \ \mathrm{E}^{*}_{\cdot *} = \mathrm{E}_{*}^{\cdot *} = \mathrm{I}. \qquad (3.39)$$

Диадное представление единичного тензора дается соотношениями

$$\widehat{E} = g_{sk}\overline{R}^{s}\overline{R}_{k} = g^{mn}\overline{R}_{m}\overline{R}_{n} = \delta^{m}_{n}\overline{R}_{m}\overline{R}^{n} = \\ = \delta^{k}_{s}\overline{R}^{s}\overline{R}_{k} = \overline{R}_{n}\overline{R}^{n} = \overline{R}^{s}\overline{R}_{s}. \qquad (3.40)$$

Единичный тензор имеет следующие свойства.

1. Единичный тензор является симметричным тензором, т.е. $\widehat{E} = \widehat{E}^{T}$. Справедливость свойства следует непосредственно из определения и формул (3.40).
2. Квадрат длины любого вектора - квадратичная форма его компонентов, причем матрица квадратичной формы совпадает с матрицей единичного тензора:

$$\overline{x}\cdot\overline{x} = \overline{x}\cdot g_{sk}\overline{R}^{s}\overline{R}^{k}\cdot\overline{x} = a^{s}g_{sk}a^{k} = \mathrm{X}^{*\mathrm{T}}\mathrm{G}_{**}\mathrm{X}^{*},$$

$$\overline{x}\cdot\overline{x} = \ldots = \mathrm{X}_{*}^{\mathrm{T}}\mathrm{G}^{**}\mathrm{X}_{*}.$$

3. Скалярное умножение на единичный тензор справа или слева любого тензора не изменяет последнего:

$$\widehat{E}\cdot\widehat{Q} = \widehat{Q}\cdot\widehat{E} = \widehat{Q}.$$

Действительно

$$\widehat{Q}\cdot\widehat{E} = q^{mn}\overline{R}_{m}\left(\overline{R}_{n}\cdot\widehat{E}\right) = q^{mn}\overline{R}_{m}\overline{R}_{n} = \widehat{Q}.$$

3.7. Понятие тензора n ранга. Свертывание индексов

Назовем тензором n-го ранга математический объект ${}^{(n)}Q$, определяемый суммой ***полиад*** базисных векторов, например

$$
{}^{(3)}Q = q^{mnk}\,\overline{R}_m\,\overline{R}_n\,\overline{R}_k\,, \qquad {}^{(4)}Q = q_{m\,\cdot\,\cdot\,t}^{\;\cdot\,n\,k\,\cdot}\,\overline{R}^m\,\overline{R}_n\,\overline{R}_k\,\overline{R}^t \,. \tag{3.41}
$$

Для компонентов тензоров n - го ранга применимы операции подъема и опускания индексов, например,

$$
q^{m\,\cdot\,k\,t}_{\cdot\,s\,\cdot\,\cdot} = g_{sn}q^{mnkt}\,. \tag{3.42}
$$

Сводя умножение тензоров к соответствующему умножению соседних векторов в полиадах их разложений, можно ввести следующие операции.

Скалярное произведение тензоров

$$
{}^{(m)}A\cdot{}^{(n)}Q = {}^{(m+n-2)}S\,,
$$

Например,

$$
{}^{(3)}A\cdot{}^{(2)}Q = a^{mnt}\,\overline{R}_m\,\overline{R}_n\,\overline{R}_t\cdot q_{sk}\,\overline{R}^s\,\overline{R}^k = a^{mnt}q_{tk}\,\overline{R}_m\,\overline{R}_n\,\overline{R}^k\,.
$$

Векторное произведение тензоров

$$
{}^{(m)}A\times{}^{(n)}Q = {}^{(m+n-1)}S\,,
$$

например,

$$
\hat{Q}\times\hat{P} = q^{mn}\,\overline{R}_m\,\overline{R}_n\times p^{st}\,\overline{R}_s\,\overline{R}_t = q^{mn}p^{st}\in_{nsk}\,\overline{R}_m\,\overline{R}^k\,\overline{R}_t\,.
$$

Тензорное произведение

$$
{}^{(m)}A\,{}^{(n)}Q = {}^{(m+n)}S\,,
$$

Например,

$$
\hat{Q}\overline{b} = q^{mn}\,\overline{R}_m\,\overline{R}_n b_k\,\overline{R}^k = q^{mn}b_k\,\overline{R}_m\,\overline{R}_n\,\overline{R}^k\,.
$$

Вектор может рассматриваться как тензор первого ранга, а скаляр - как тензор нулевого ранга.

Становится ясно, что компонентная форма записи имеет преимущество перед матричной, в частности, потому, что в матричном виде можно представить только операции, в которые входят тензоры не выше второго ранга.

Постановка знака скалярного произведения между двумя соседними базисными векторами полиады тензора произвольного ранга называется ***свертыванием тензора по паре индексов***. *В результате такого свертывания ранг исходного тензора снижается на две единицы.*

Например,

$$q^{mnt}\overline{R}_m\overline{R}_n\cdot\overline{R}_t = q^{mnt}g_{nt}\overline{R}_m =$$

$$= q^{m\,n\,\cdot}_{\cdot\;\cdot\;n}\overline{R}_m = \left(q^{m\,1\,\cdot}_{\cdot\;\cdot\;1} + q^{m\,2\,\cdot}_{\cdot\;\cdot\;2} + q^{m\,3\,\cdot}_{\cdot\;\cdot\;3}\right)\overline{R}_m.$$

Знак скалярного произведения можно ставить любое допустимое число раз (появляется понятие n кратного свертывания). Например,

$$\tilde{Q}\cdot\cdot\tilde{P} = q^{mn}\overline{R}_m\overline{R}_n\cdot\cdot p_{st}\overline{R}^s\overline{R}^t = q^{mn}p_{st}\delta^s_n\delta^t_m = q^{mn}p_{nm}.$$

С помощью n - кратного свертывания можно определить компоненты тензора n ранга, например

$$^{(4)}Q\cdot\cdot\cdot\cdot\overline{R}_m\overline{R}_n\overline{R}_s\overline{R}_t = q_{ijkr}\overline{R}^i\overline{R}^j\overline{R}^k\overline{R}^r\cdot\cdot\cdot\cdot\overline{R}_m\overline{R}_n\overline{R}_s\overline{R}_t =$$

$$= q_{ijkr}\delta^r_m\delta^k_n\delta^j_s\delta^i_t = q_{tsnm}.$$

Таким образом, операция свертывания индексов обобщает понятие скалярного произведения. Эта операция широко используется в тензорной алгебре.

Легко доказываются следующие правила двойного свертывания:

$$
\begin{aligned}
&\overline{ab}\cdot\cdot\hat{Q}=\hat{Q}\cdot\cdot\overline{ab}, \qquad \hat{E}\cdot\cdot\hat{P}\cdot\hat{Q}=\hat{P}\cdot\cdot\hat{Q},\\
&\hat{P}\cdot\cdot\hat{Q}=\hat{P}^T\cdot\cdot\hat{Q}^T=\hat{Q}^T\cdot\cdot\hat{P}^T=\hat{Q}\cdot\cdot\hat{P},\\
&\hat{E}\cdot\cdot\left(\hat{P}\cdot\hat{Q}\cdot\hat{S}\right)=\hat{P}\cdot\cdot\hat{Q}\cdot\hat{S}=\hat{P}\cdot\hat{Q}\cdot\cdot\hat{S}=\\
&\qquad=\hat{S}\cdot\cdot\hat{P}\cdot\hat{Q}=\hat{S}\cdot\hat{P}\cdot\cdot\hat{Q}.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

3.8. Инварианты тензора

Инвариантом тензора называется функция его компонентов, не зависящая от выбора базиса. *Примером может служить квадрат длины вектора, являющейся инвариантом вектора*

$$\overline{x}\cdot\overline{x}=x_s\overline{R}^s\cdot\overline{x}=x_s x^s .$$

Можно показать, что вектор не имеет инвариантов, отличных от функций его длины.

Тензор 2 ранга имеет n главных инвариантов, линейно не зависимых друг от друга.

Линейный инвариант, называемый также *следом тензора*, равен сумме элементов главной диагонали матрицы смешанных компонентов тензора:

$$J_1\left(\hat{Q}\right)=tr\,\hat{Q}=q^{m}_{\cdot m}=q_s^{\cdot s}. \tag{3.44}$$

Квадратичный инвариант равен сумме главных миноров второго порядка матрицы смешанных компонентов тензора. Например, в трехмерном пространстве

$$J_2\left(\hat{Q}\right)=\begin{vmatrix} q^1_{\cdot 1} & q^1_{\cdot 2}\\ q^2_{\cdot 1} & q^2_{\cdot 2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} q^1_{\cdot 1} & q^1_{\cdot 3}\\ q^3_{\cdot 1} & q^3_{\cdot 3}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} q^2_{\cdot 2} & q^2_{\cdot 3}\\ q^3_{\cdot 2} & q^3_{\cdot 3}\end{vmatrix}. \tag{3.45}$$

Вообще, инвариант k порядка равен сумме главных миноров k порядка матрицы смешанных компонентов тензора.

Наконец, инвариант n порядка называется *определителем тензора* и равен определителю матрицы его смешанных компонентов. Например, в трехмерном пространстве

$$J_3\left(\hat{Q}\right) = \det \hat{Q} = \det \mathrm{Q}^{*}_{\cdot *} = \det \mathrm{Q}_{*}^{\cdot *} . \qquad (3.46)$$

Формулы (3.44), (3.45), (3.46) могут быть представлены и в инвариантной форме. Например, в трехмерном пространстве

$$J_1\left(\hat{Q}\right) = \hat{E} \cdot\cdot \hat{Q}, \qquad (3.47)$$

$$J_2\left(\hat{Q}\right) = \frac{1}{2}\left(J_1^2\left(\hat{Q}\right) - J_1\left(\hat{Q}^2\right)\right), \qquad (3.48)$$

$$\begin{aligned} J_3\left(\hat{Q}\right) &= \frac{1}{6}\left[J_1^3\left(\hat{Q}\right) - 3J_1\left(\hat{Q}\right)J_1\left(\hat{Q}^2\right) + 2J_1\left(\hat{Q}^3\right)\right] = \\ &= \frac{1}{3}\left(J_1\left(\hat{Q}^3\right) - J_1^3\left(\hat{Q}\right) + 3J_1\left(\hat{Q}\right)J_2\left(\hat{Q}\right)\right). \end{aligned} \qquad (3.49)$$

В этих формулах введены обозначения

$$\hat{Q}^2 = \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \;\; \hat{Q}^n = \hat{Q}^{n-1} \cdot Q. \qquad (3.50)$$

При вычислении инвариантов тензора второго ранга, действующего в трехмерном пространстве, могут быть полезны следующие правила.

$$J_1\left(\lambda\hat{Q}\right) = \lambda J_1\left(\hat{Q}\right), \;\; J_1\left(\hat{Q} + \hat{P}\right) = J_1\left(\hat{Q}\right) + J_1\left(\hat{P}\right),$$
$$J_1\left(\hat{Q}^T\right) = J_1\left(\hat{Q}\right),$$
$$J_2\left(\lambda\hat{Q}\right) = \lambda^2 J_2\left(\hat{Q}\right), \;\; J_2\left(\hat{Q}\right) = J_2\left(\hat{Q}^T\right),$$
$$J_3\left(\lambda\hat{Q}\right) = \lambda^3 J_3\left(\hat{Q}\right), \;\; J_3\left(\hat{P}\cdot\hat{Q}\right) = J_3\left(\hat{P}\right)\cdot J_3\left(\hat{Q}\right),$$
$$J_3\left(\hat{Q}\right) = J_3\left(\hat{Q}^T\right).$$

3.9. Тензор, обратный данному. Матрицы обратного тензора

Тензор второго ранга называется *вырожденным (особенным)*, если его определитель равен нулю. Всякому невырожденному тензору $\hat{Q}$ можно поставить в соответствие единственный *обратный тензор* $\hat{Q}^{-1}$, удовлетворяющий условию

$$\hat{Q}^{-1} \cdot \hat{Q} = \hat{E} = \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{-1}. \tag{3.51}$$

Единственность обратного тензора следует из того, что для линейного оператора, каковым является тензор второго ранга, обратный оператор определяется единственным образом.

Выполняются следующие легко доказываемые правила:

1. $\bar{y} = \hat{Q} \cdot \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \hat{Q}^{-1} \cdot \bar{y}$,
2. $\bar{y} = \bar{x} \cdot \hat{Q} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \cdot \hat{Q}^{-1}$,
3. $\hat{S} = \hat{P} \cdot \hat{Q} \Rightarrow \hat{P} = \hat{S} \cdot \hat{Q}^{-1}$,
4. $\hat{S} = \hat{Q} \cdot \hat{P} \Rightarrow \hat{P} = \hat{Q}^{-1} \cdot \hat{S}$,
5. $\left(\hat{Q}^{-1}\right)^{-1} = \hat{Q}$,
6. $\left(\hat{Q}^{-1}\right)^{T} = \left(\hat{Q}^{T}\right)^{-1} = \hat{Q}^{-T}$,
7. $\det \hat{Q}^{-1} = \left(\det \hat{Q}\right)^{-1}$,
8. $\left(\hat{P} \cdot \hat{Q}\right)^{-1} = \hat{Q}^{-1} \cdot \hat{P}^{-1}$.

Выведем правила определения компонентов обратного тензора. В основе вывода лежат соотношения.

$$\bar{R}^{m} \cdot \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{-1} \cdot \bar{R}_{n} = \delta_{n}^{m}\ , \ \bar{R}_{n} \cdot \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{-1} \cdot \bar{R}^{m} = \delta_{n}^{m}. \tag{3.52}$$

Проведя несложные преобразования, придем к формулам

$$q^{mk}\,\overset{-1}{q}_{kn} = \delta_n^m\;,\;\; q^{m}_{\cdot k}\,\overset{-1}{q}{}^{k}_{n} = \delta_n^m\;,\qquad\qquad (3.53)$$

$$q_{mk}\,\overset{-1}{q}{}^{kn} = \delta_m^n\;,\;\; q_m^{\cdot k}\,\overset{-1}{q}{}_k^{\cdot n} = \delta_m^n\,.$$

Соответствующие матричные соотношения имеют вид

$$\mathrm{Q}^{**}\,\overset{-1}{\mathrm{Q}}_{**} = \mathrm{I},\;\; \mathrm{Q}^{*}_{\cdot *}\,\overset{-1}{\mathrm{Q}}{}^{*}_{\cdot *} = \mathrm{I},\qquad\qquad (3.54)$$

$$\mathrm{Q}_{**}\,\overset{-1}{\mathrm{Q}}{}^{**} = \mathrm{I},\;\; \mathrm{Q}_{*}^{\cdot *}\,\overset{-1}{\mathrm{Q}}{}_{*}^{\cdot *} = \mathrm{I}.$$

Из (3.54) следует связь между матрицами тензоров $\widehat{Q}$ и $\widehat{Q}^{-1}$:

$$\overset{-1}{\mathrm{Q}}_{**} = \left(\mathrm{Q}^{**}\right)^{1},\;\; \overset{-1}{\mathrm{Q}}{}^{*}_{\cdot *} = \left(\mathrm{Q}^{*}_{\cdot *}\right)^{-1},\qquad\qquad (3.55)$$

$$\overset{-1}{\mathrm{Q}}{}^{**} = \left(\mathrm{Q}_{**}\right)^{-1},\;\; \overset{-1}{\mathrm{Q}}{}_{*}^{\cdot *} = \left(\mathrm{Q}_{*}^{\cdot *}\right)^{-1}.$$

3.10. Преобразование компонентов тензора при изменении базиса

Пусть имеются два базиса: «*старый*» $\mathrm{R}_{*}^{\mathrm{T}} = \left(\overline{R}_1\,\overline{R}_2\,\overline{R}_3\right)$ и «*новый*» $\mathrm{R}'^{\mathrm{T}}_{*} = \left(\overline{R'}_1\,\overline{R'}_2\,\overline{R'}_3\right)$.

Выведем правило, позволяющее вычислять компоненты тензора в новом базисе по компонентам в старом, если известны матрицы преобразования координат A и $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$. При выводе используются формулы (1.26), (1.41), (3.11), (3.14).

$$q'^{mn} = \overline{R'}^m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R'}^n = b^m_{\cdot k} \overline{R}^k \cdot \widehat{Q} \cdot b^n_{\cdot s} \overline{R}^s = b^m_{\cdot k} q^{ks} b^n_{\cdot s},$$

$$q'^m_{\cdot n} = \overline{R'}^m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R'}_n = b^m_{\cdot k} \overline{R}^k \cdot \widehat{Q} \cdot a^s_{\cdot n} \overline{R}_s = b^m_{\cdot k} q^k_{\cdot s} a^s_{\cdot n},$$

$$q'_{mn} = \overline{R'}_m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R'}_n = a^k_{\cdot m} \overline{R}_k \cdot \widehat{Q} \cdot a^s_{\cdot n} \overline{R}_s = a^k_{\cdot m} q^k_{\cdot s} a^s_{\cdot n},$$

$$q'^{\cdot n}_m = \overline{R'}_m \cdot \widehat{Q} \cdot \overline{R'}^n = a^k_{\cdot m} \overline{R}_k \cdot \widehat{Q} \cdot b^n_{\cdot s} \overline{R'}^s = a^k_{\cdot m} q_k^{\cdot s} b^n_{\cdot s}.$$

Соответствующие матричные соотношения имеют вид

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathrm{Q}}^{**} = \mathrm{B}\mathrm{Q}^{**}\mathrm{B}^{\mathrm{T}},\ \widetilde{\mathrm{Q}}^{*}_{\cdot *} = \mathrm{B}\mathrm{Q}^{*}_{\cdot *}\mathrm{A}, \\ \widetilde{\mathrm{Q}}_{**} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_{**}\mathrm{A},\ \widetilde{\mathrm{Q}}_{*}^{\cdot *} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_{*}^{\cdot *}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{3.56}$$

3.11. Тензор преобразования векторов основного базиса

Посмотрим на процесс перехода от старого базиса к новому с другой точки зрения. Имеем:

$$\overline{R'}_k = \overline{R'}_m \delta^m_k = \overline{R'}_m \overline{R}^m \cdot \overline{R}_k \Rightarrow \overline{R'}_k = \widehat{S} \cdot \overline{R}_k. \tag{3.57}$$

Таким образом, за новые векторы основного базиса принимаются образы векторов старого основного базиса при воздействии на них *тензором преобразования векторов основного базиса* $\widehat{S}$. Этот тензор можно определить соотношением

$$\widehat{S} = \overline{R'}_m \overline{R}^m = a^k_{\cdot m} \overline{R}_k \overline{R}^m. \tag{3.58}$$

Обратное преобразование дается формулой

$$\overline{R}_k = \widehat{S}^{-1} \cdot \overline{R'}_k. \tag{3.59}$$

Определим тензор $\widehat{S}^{-1}$. Имеем

$$\hat{E} = \overline{R'}_k \overline{R'}^k = \overline{R'}_m \delta_k^m \overline{R'}^k = \overline{R'}_m \overline{R}^m \cdot \overline{R}_k \overline{R'}^k = \hat{S} \cdot \overline{R}_k \overline{R'}^k .$$

Отсюда, вследствие единственности обратного тензора,

$$\hat{S}^{-1} = \overline{R}_k \overline{R'}^k = b^m_{\cdot k} \overline{R'}_m \overline{R'}^k . \qquad (3.60)$$

Из (3.59) следует одна интересная особенность тензора $\hat{S}$.

$$s^k_{\cdot m} = \overline{R}^k \cdot \hat{S} \cdot \overline{R}_m = a^k_{\cdot m} = \overline{R}^k \cdot \overline{R'}_m ;$$

$$s'^k_{\cdot m} = \overline{R'}^k \cdot \hat{S} \cdot \overline{R'}_m = \overline{R'}^k \cdot \overline{R'}_t \overline{R}^t \cdot \overline{R'}_m = \qquad (3.61)$$

$$= \delta_t^k \overline{R}^t \cdot \overline{R'}_m = \overline{R}^k \cdot \overline{R'}_m = a^k_{\cdot m} .$$

Видно, что тензор $\hat{S}$ имеет похожие разложения в двух базисах

$$\hat{S} = a^k_{\cdot m} \overline{R}_k \overline{R}^m = a^k_{\cdot m} \overline{R'}_k \overline{R'}^m . \qquad (3.62)$$

Аналогично можно показать, что

$$\hat{S}^{-1} = b^m_{\cdot k} \overline{R'}_m \overline{R'}^k = b^m_{\cdot k} \overline{R}_m \overline{R}^k , \qquad (3.63)$$

$$b^m_{\cdot k} = \overline{R'}^m \cdot \overline{R}_k . \qquad (3.64)$$

Соотношения (3.61) и (3.64) дают еще один физический смысл для компонентов матриц A и B.

Выясним, как преобразуются векторы взаимного базиса.

$$\overline{R'}^k = \delta_m^k \overline{R'}^m = \overline{R}^k \cdot \overline{R}_m \overline{R'}^m \Rightarrow \overline{R'}^k = \overline{R}^k \cdot \hat{S}^{-1} . \qquad (3.65)$$

Обратная зависимость определяется формулой

$$\overline{R}^k = \overline{R'}^k \cdot \hat{S} . \qquad (3.66)$$

3.12. Ортогональный тензор. Ортогональное преобразование базиса

Тензор $\hat{O}$ называется *ортогональным*, если выполняется равенство

$$\hat{O}^{-1} = \hat{O}^{T}. \tag{3.67}$$

Имеет место следующая зависимость для определителя ортогонального тензора.

$$\left(\det\hat{O}\right)^2 = \det\hat{O}\cdot\det\hat{O}^T = \det\left(\hat{O}\cdot\hat{O}^T\right) = \det\hat{E} = 1.$$

Таким образом, определитель ортогонального тензора

$$\det\hat{O} = \pm 1. \tag{3.68}$$

При этом *если* $\det\hat{O}^T = 1$, *то* $\hat{O}$ *называется тензором поворота*. Можно показать, что тензор поворота, осуществляющий поворот вокруг единичного вектора $\bar{e}$ на угол ϕ против часовой стрелки, определяется соотношением

$$\hat{O} = \hat{E}\cos\varphi + \overline{ee}(1-\cos\varphi) + \bar{e}\times\hat{E}\sin\varphi. \tag{3.69}$$

Тензор $\hat{O}^T$ можно представить в виде

$$\hat{O}^T = \hat{E}\cos\varphi + \overline{ee}(1-\cos\varphi) - \bar{e}\times\hat{E}\sin\varphi. \tag{3.70}$$

Преобразование вектора, осуществляемое ортогональным тензором, называется *ортогональным преобразованием*.

Ортогональное преобразование не изменяет длины вектора и сохраняет угол между векторами. Докажем это.

$$\begin{matrix}\overline{a'} = \hat{O}\cdot\bar{a} = \bar{a}\cdot\hat{O}^T \\ \overline{b'} = \hat{O}\cdot\bar{b}\end{matrix} \Rightarrow \overline{a'}\cdot\overline{b'} = \bar{a}\cdot\hat{O}^T\cdot\hat{O}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\hat{E}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\bar{b}.$$

В частности, $\overline{a'} \cdot \overline{a'} = \overline{a} \cdot \overline{a}$ - квадрат длины, и, следовательно, длина сохраняется. Поскольку сохраняется длина векторов и скалярное произведение, то не меняется и угол между векторами. Свойство доказано.

Пусть преобразование векторов основного базиса осуществляется ортогональным тензором. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\hat{S} = (\hat{S}^{-1})^T \quad \Rightarrow \quad \overline{R'}_k \overline{R}^k = (\overline{R}_m \overline{R'}^m)^T. \qquad (3.71)$$

В этом случае ортогональный тензор преобразования можно записать в виде

$$\hat{S} = \hat{\hat{O}} = \overline{R'}_k \overline{R}^k = \overline{R'}^k \overline{R}_k. \qquad (3.72)$$

Для базисных векторов выполняются соотношения

$$\overline{R'}_k = \hat{O} \cdot \overline{R}_k, \;\; \overline{R'}^k = \overline{R}^k \cdot \hat{O}^{-1} = \overline{R}^k \cdot \hat{O}^T = \hat{O} \cdot \overline{R}^k. \qquad (3.73)$$

Как и следовало ожидать, векторы основного и взаимного базисов преобразуются одним и тем же тензором с сохранением углов и длин, т.е. как бы вместе. В частности, преобразование с помощью тензора поворота означает поворот базисов одновременно на некоторый угол вокруг некоторой оси.

Пусть вектор $\overline{x} = x_s \overline{R}^s = x^k \overline{R}_k$ преобразуется вместе с базисом. Назовем *«повернутым»* вектор

$$\overline{x''} = \hat{O} \cdot \overline{x}. \qquad (3.74)$$

Определим его координаты в повернутом базисе

$$x''^s = \overline{R'}^s \cdot \overline{x''} = \overline{R'}^s \cdot \hat{O} \cdot \overline{x} = (\overline{R}^s \cdot \hat{O}^T) \cdot \hat{O} \cdot \overline{x} = \overline{R}^s \cdot \overline{x} = x^s.$$

Аналогично можно показать, что $x''_s = x_s$.

Конечно, координаты вектора $\overline{x}$ в повернутом базисе меняются. Их не следует путать с координатами вектора $\overline{x}''$.

Повернутым тензором второго ранга называется тензор

$$\widehat{Q}'' = \widehat{O} \cdot \widehat{Q} \cdot \widehat{O}^T . \tag{3.75}$$

Легко убедиться, что компоненты повернутого тензора в повернутом базисе равны соответствующим компонентам исходного тензора в старом базисе. Например,

$$q''_{mn} = \overline{R'}_m \cdot \widehat{Q}'' \cdot \overline{R'}_n = \overline{R}_m \cdot \widehat{O}^T \cdot \widehat{O} \cdot \widehat{Q} \cdot \widehat{O}^T \cdot \widehat{O} \cdot \overline{R}_n = q_{mn} .$$

Следует заметить, что, вследствие равенства компонентов, инварианты исходного и повернутого тензоров совпадают.

В заключение уточним зависимости между матрицами ортогонального тензора. Используя равенства (3.35), (3.55), имеем

$$\overset{\mathrm{T}}{\mathrm{Q}}{}^{**} = \left(\mathrm{Q}^{**}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \overset{-1}{\mathrm{Q}}{}^{**} = \left(\mathrm{Q}_{**}\right)^{-1}.$$

Отсюда, вследствие (3.67), приходим к равенству

$$\left(\mathrm{O}_{**}\right)^{-1} = \left(\mathrm{O}^{**}\right)^{T} . \tag{3.76}$$

Аналогично можно показать, что

$$\left(\mathrm{O}^{**}\right)^{-1} = \left(\mathrm{O}_{**}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \left(\mathrm{O}^{*}{}_{\cdot *}\right)^{-1} = \left(\mathrm{O}_{*}{}^{\cdot *}\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\left(\mathrm{O}_{*}{}^{\cdot *}\right)^{-1} = \left(\mathrm{O}^{*}{}_{\cdot *}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{3.77}$$

Таким образом, в косоугольном базисе ни одна из матриц ортогонального тензора не является ортогональной в общем случае.

***Замечание**. Если старый и новый базисы представляют собой ортонормированные базисы, то тензор преобразования координат автоматически получится ортогональным, а матрица тензора (единственная) в этом случае является ортогональной.*

Так как матрица A является матрицей ортогонального тензора, то в этом случае имеет место равенство $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$.

3.13. Главные значения и главные направления тензора второго ранга

Особую роль в тензорной алгебре играют *ненулевые* векторы, сохраняющие свое направление при их скалярном умножении на тензор $\widehat{Q}$, т.е. удовлетворяющие равенствам

$$\widehat{Q} \cdot \overline{e}_* = \lambda_* \overline{e}_*, \qquad \overline{e}^* \cdot \widehat{Q} = \lambda^* \overline{e}^*, \tag{3.78}$$

или в другой записи

$$\left(\widehat{Q} - \lambda_* \widehat{E}\right) \cdot \overline{e}_* = \overline{\Theta}, \quad \overline{e}^* \cdot \left(\widehat{Q} - \lambda^* \widehat{E}\right) = \overline{\Theta}. \tag{3.79}$$

Можно записать (3.79) и в компонентном виде

$$\left(q^s_{\cdot t} - \delta^s_t \lambda_*\right) e^t_* = 0, \quad \left(q^s_{\cdot t} - \delta^s_t \lambda^*\right) e^*_s = 0. \tag{3.80}$$

Равенства (3.80) представляют собой системы линейных однородных уравнений относительно компонентов e^t_* и e^*_s векторов $\overline{e}_*$ и $\overline{e}^*$. Эти системы имеют нетривиальное решение при равенстве нулю определителя матрицы коэффициентов, т.е. при выполнении, в конечном счете, равенства.

$$\det\left(\widehat{Q} - \lambda \widehat{E}\right) = 0. \tag{3.81}$$

Уравнение (3.82) оказалось одним и тем же для чисел λ_* и λ^* поэтому «звездочка» в (3.82) отсутствует.

Полином $P(\lambda) = \det\left(\widehat{Q} - \lambda\bar{E}\right)$ называется характеристическим полиномом тензора, а уравнение (3.81) - характеристическим уравнением тензора. Корни уравнения (3.81) называются главными или собственными значениями тензора $\widehat{Q}$.

Векторы $\bar{e}^k$, $\bar{e}_k$, определяемые из уравнений

$$\widehat{Q} \cdot \bar{e}_k = \lambda_k \bar{e}_k, \ \not\Sigma_k \quad ; \ \bar{e}^k \cdot \widehat{Q} = \lambda_k \bar{e}^k, \ \not\Sigma_k, \qquad (3.82)$$

в которых знак $\not\Sigma_k$ означает **не суммировать по k** , называются, соответственно, *правыми и левыми собственными векторами* тензора $\widehat{Q}$, отвечающими собственному значению λ_k, а направления, ими определяемые, - правыми и левыми главными направлениями.

Можно показать, что в трехмерном пространстве характеристическое уравнение (3.81) сводится к виду

$$\lambda^3 - J_1\left(\widehat{Q}\right)\lambda^2 + J_2\left(\widehat{Q}\right)\lambda - J_3\left(\widehat{Q}\right) = 0. \qquad (3.83)$$

Этим доказывается инвариантность собственных значений тензора.

По обобщенной теореме Виета можно теперь определить главные инварианты тензора через его собственные значения

$$\begin{gathered} J_1\left(\widehat{Q}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ J_2\left(\widehat{Q}\right) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ J_3\left(\widehat{Q}\right) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{gathered} \qquad (3.84)$$

Собственные векторы $\bar{e}^s$ и $\bar{e}_k$, отвечающие различным собственным значениям λ_s и λ_k, ортогональны. *Действительно, пусть* $\lambda_s \neq \lambda_k$, *тогда*

$$\left.\begin{array}{l}\bar{e}^s \cdot \hat{Q} \cdot \bar{e}_k = \lambda_s \bar{e}^s \cdot \bar{e}_k \\ \bar{e}^s \cdot \hat{Q} \cdot \bar{e}_k = \lambda_k \bar{e}^s \cdot \bar{e}_k\end{array}\right. \Rightarrow \quad \lambda_s \bar{e}^s \cdot \bar{e}_k = \lambda_k \bar{e}^s \cdot \bar{e}_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_s - \lambda_k)\, \bar{e}^s \cdot \bar{e}_k = 0 \Rightarrow \bar{e}^s \cdot \bar{e}_k = 0\,. \tag{3.85}$$

Приведем еще одно свойство собственных векторов. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - собственные векторы тензора $\hat{Q}$, соответствующие собственному значению m, то вектор $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ – собственный вектор $\hat{Q}$, соответствующий этому же собственному значению. Действительно

$$\begin{aligned}\hat{Q} \cdot \bar{a} = m\bar{a},\ \hat{Q} \cdot \bar{b} = m\bar{b} \Rightarrow\ \hat{Q} \cdot \left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) = \alpha\hat{Q} \cdot \bar{a} + \beta\hat{Q} \cdot \bar{b} = \\ = \alpha m\bar{a} + \beta m\bar{b} = m\left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right).\end{aligned} \tag{3.86}$$

Аналогичное доказательство имеет место для левых собственных векторов.

Из (3.86), в частности, следует то, что собственный вектор имеет неопределенную длину.

Пусть у тензора $\hat{Q}$ три различных собственных значения. Тогда можно найти тройку некомпланарных векторов $\overline{e_k}$ и тройку $\bar{e}^k$, удовлетворяющих условию (3.85). Вследствие неопределенности длины собственных векторов можно потребовать также, чтобы выполнялось соотношение

$$\bar{e}^k \cdot \bar{e}_k = 1 \quad \forall_k\,. \tag{3.87}$$

Тогда из (3.85) и (3.87) следует равенство

$$\bar{e}^s \cdot \bar{e}_k = \delta_k^s. \qquad (3.88)$$

Вследствие (1.11), это означает взаимность базисов $\bar{e}_k$ *и* $\bar{e}^k$. Тензор $\hat{E}$ в этом случае может быть представлен в виде

$$\hat{E} = \bar{e}_s \bar{e}^s = \bar{e}^k \bar{e}_k. \qquad (3.89)$$

Замечание. *Наличие трех различных собственных значений не является необходимым условием для того, чтобы у тензора $\hat{Q}$ существовали взаимные базисы левых и правых собственных векторов. По аналогии с операторами простой структуры имеются тензоры $\hat{Q}$ с кратными собственными значениями, имеющие взаимные базисы левых и правых собственных векторов. В дальнейшем будем предполагать, что такие базисы имеют место.*

Для тензора $\hat{Q}$ имеем

$$\hat{Q} = \hat{Q} \cdot \hat{E} = \hat{Q} \cdot \bar{e}_k \bar{e}^k = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \bar{e}_k \bar{e}^k. \qquad (3.90)$$

Если $\bar{a}$ - правый собственный вектор тензор $\hat{Q}$, отвечающий собственному значению α, то он является левым собственным вектором тензора $\hat{Q}^T$ для того же собственного значения. Действительно

$$\bar{a} \cdot \hat{Q}^T = \hat{Q} \cdot \bar{a} = \alpha \bar{a}. \qquad (3.91)$$

Аналогичное утверждение имеет место для левых векторов тензора $\hat{Q}$. Таким образом, правые собственные векторы тензора являются левыми собственными векторами транспонированного тензора, и наоборот, причем собственные значения $\hat{Q}$ и $\hat{Q}^T$ совпадают. Тогда транспонированный тензор представим в виде

$$\overset{\frown}{Q}^T = \overset{\frown}{Q}^T \cdot \overset{\frown}{E} = \overset{\frown}{Q}^T \cdot \bar{e}^k \bar{e}_k = \left(\bar{e}^k \cdot \overset{\frown}{Q}\right)\bar{e}_k = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \bar{e}^k \bar{e}_k \,. \quad (3.92)$$

3.14. Теорема Кейли - Гамильтона

Пусть известны собственные значения λ_k и собственные векторы $\bar{e}_k$, $\bar{e}^k$ тензора $\overset{\frown}{Q}$. Имеем

$$\overset{\frown}{Q}^2 \cdot \bar{e}_k = \overset{\frown}{Q} \cdot \overset{\frown}{Q} \cdot \bar{e}_k = \overset{\frown}{Q} \cdot \lambda_k \bar{e}_k = \lambda_k^2 \bar{e}_k \,,$$

$$\bar{e}^k \cdot \overset{\frown}{Q}^2 = \bar{e}^k \cdot \overset{\frown}{Q} \cdot \overset{\frown}{Q} = \lambda_k \bar{e}^k \cdot \overset{\frown}{Q} = \lambda_k^2 \bar{e}^k \,.$$

Продолжая далее, можно показать, что *собственные векторы тензора* $\overset{\frown}{Q}^n$ *и* $\overset{\frown}{Q}$ *совпадают, а собственные значения* $\overset{\frown}{Q}^n$ *представляют собой n степени собственных значений* $\overset{\frown}{Q}$. Таким образом, если тензор $\overset{\frown}{Q}$ представим в виде (3.90), то

$$\overset{\frown}{Q}^n = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^n \bar{e}_k \bar{e}^k \,, \quad \left(\overset{\frown}{Q}^T\right)^n = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^n \bar{e}^k \bar{e}_k \,, \qquad (3.93)$$

в частности,

$$\overset{\frown}{Q}^3 = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^3 \bar{e}_k \bar{e}^k \,. \qquad (3.94)$$

Собственные значения λ_k - корни характеристического уравнения (3.83), поэтому

$$\lambda_k^3 = J_1\left(\overset{\frown}{Q}\right)\lambda_k^2 - J_2\left(\overset{\frown}{Q}\right)\lambda_k + J_3\left(\overset{\frown}{Q}\right). \qquad (3.95)$$

Подставляя (3.96) в (3.95), придем к соотношению

$$\hat{Q}^3 = J_1(\hat{Q})\sum_{k=1}^{3}\lambda_k^2 \bar{e}_k \bar{e}^k - J_2(\hat{Q})\sum_{k=1}^{3}\lambda_k \bar{e}_k \bar{e}^k + J_3(\hat{Q})\sum_{k=1}^{3}\bar{e}_k \bar{e}^k ,$$

из которого следует равенство

$$\hat{Q}^3 - J_1(\hat{Q})\hat{Q}^2 + J_2(\hat{Q})\hat{Q} + J_3(\hat{Q})\hat{E} = 0 . \qquad (3.96)$$

Таким образом, мы доказали ***теорему Кейли - Гамильтона***: *тензор удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

Пусть тензор $\hat{Q}$ - невырожденный. Из условия $\det\hat{Q} \neq 0$ и соотношений (3.84) следует, что $\lambda_k \neq 0$. Тогда

$$\bar{e}_k = \hat{E}\cdot\bar{e}_k = \hat{Q}^{-1}\cdot\hat{Q}\cdot\bar{e}_k = \lambda_k\hat{Q}^{-1}\cdot\bar{e}_k .$$

Отсюда следует равенство

$$\hat{Q}^{-1}\cdot\bar{e}_k = \lambda_k^{-1}\bar{e}_k . \qquad (3.97)$$

Аналогично доказывается, что

$$\bar{e}^k\cdot\hat{Q}^{-1} = \lambda_k^{-1}\bar{e}^k . \qquad (3.98)$$

Таким образом, *собственные векторы тензор* $\hat{Q}^{-1}$ *и* $\hat{Q}$ *совпадают, а соответствующие собственные значения* $\hat{Q}^{-1}$ *обратны собственным значениям* $\hat{Q}$. Следовательно, имеет место представление

$$\hat{Q}^{-1} = \sum_{k=1}^{3}\lambda_k^{-1}\bar{e}^k\bar{e}_k = \sum_{k=1}^{3}\lambda_k^{-1}\bar{e}_k\bar{e}^k . \qquad (3.99)$$

Кроме того, умножая (3.96) на $\hat{Q}^{-1}$, легко получить еще одну зависимость для обратного тензора

$$\hat{Q}^{-1} = \frac{1}{J_3(\hat{Q})}\left[\hat{Q}^2 - J_1(\hat{Q})\hat{Q} + J_2(\hat{Q})\hat{E}\right]. \tag{3.100}$$

Обобщая формулы (3.93) и (3.99), можно определить для тензора $\hat{Q}$ с положительными собственными значениями тензор $\hat{Q}^{\alpha}$, где α - любое действительное число, следующим образом:

$$\hat{Q}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^{\alpha} \bar{e}_k \bar{e}^k . \tag{3.101}$$

В частности,

$$\hat{Q}^{0} = \sum_{k=1}^{3} \bar{e}_k \bar{e}^k = \hat{E}, \quad \hat{Q}^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{3} \sqrt{\lambda_k}\, \bar{e}_k \bar{e}^k . \tag{3.102}$$

Соотношения (3.84) и (3.99) позволяют вывести связь между инвариантами тензора $\hat{Q}^{-1}$ и $\hat{Q}$

$$\begin{gathered}
J_1(\hat{Q}^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{J_2(\hat{Q})}{J_3(\hat{Q})}, \\
J_2(\hat{Q}^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_3\lambda_1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{J_1(\hat{Q})}{J_3(\hat{Q})}, \\
J_3(\hat{Q}^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{1}{J_3(\hat{Q})}
\end{gathered} \tag{3.103}$$

Замечание. *С помощью формул (3.84) и (3.101) можно доказать и формулы (3.48), (3.49) для инвариантов тензора* $\hat{Q}$.

3.15. Собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

Матрицы тензора $\hat{Q}$ в произвольном базисе вещественного пространства представляют собой матрицы действительных чисел. Из этого следует, что для двух комплексно сопряженных действительных чисел $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ векторы, удовлетворяющие условию (3.79), являются также комплексно сопряженными. Докажем это.

$$\hat{Q}\cdot\left(\bar{a}+i\bar{b}\right)=(\alpha+i\beta)\left(\bar{a}+i\bar{b}\right)\Rightarrow\begin{cases}\hat{Q}\cdot\bar{a}=\alpha\bar{a}-\beta\bar{b}\\ \hat{Q}\cdot\bar{b}=\beta\bar{a}+\alpha\bar{b}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\hat{Q}\cdot\left(\bar{a}-i\bar{b}\right)=\left(\alpha\bar{a}-\beta\bar{b}\right)-i\left(\beta\bar{a}+\alpha\bar{b}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\hat{Q}\cdot\left(\bar{a}-i\bar{b}\right)=(\alpha-i\beta)\left(\bar{a}-i\bar{b}\right).$$

Рассмотрим симметричный тензор $\hat{Q}$. В этом случае каждый правый собственный вектор является и левым собственным вектором для одного и того же собственного значения.

$$\lambda_k\bar{e}_k=\hat{Q}\cdot\bar{e}_k=\bar{e}_k\cdot\hat{Q}^T=\bar{e}_k\cdot\hat{Q}. \qquad (3.104)$$

Докажем, что собственные значения симметричного тензора являются действительными числами.

Предположим, что у тензора в вещественном пространстве имеются два комплексно сопряженных корня характеристического уравнения (многочлен с действительными коэффициентами может иметь либо действительные, либо комплексно сопряженные корни) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$; $\beta \neq 0$. Пусть им соответствуют два комплексно сопряженных вектора

$$\bar{e}_1=\bar{a}+i\bar{b},\quad \bar{e}^2=\bar{e}_2=\bar{a}-i\bar{b}.$$

Найдем их скалярное произведение:

$$\bar{e}^2 \cdot \bar{e}_1 = \left(\bar{a} - \bar{b}i\right) \cdot \left(\bar{a} + \bar{b}i\right) = \bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} \neq 0.$$

Пришли к противоречию со свойством (3.85). Таким образом, предположение не является верным, т.е. у симметричного тензора могут быть только вещественные собственные значения.

В курсе линейной алгебры показано, что *самосопряженный оператор, следовательно, и его аналог - симметричный тензор, всегда имеет систему ортонормированных собственных векторов, являющуюся базисом пространства. Эти векторы удовлетворяют условию*

$$\bar{e}_s \cdot \bar{e}_k = \delta_s^k. \tag{3.105}$$

В трехмерном пространстве возможны три следующих случая.

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. В этом случае триэдр $e_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ единственный в том смысле, что направления, определяемые собственными векторами, однозначно зафиксированы в пространстве

$$\hat{Q} = \lambda_1 \bar{e}_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 \bar{e}_3. \tag{3.106}$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. В этом случае

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \lambda_1 \left(\bar{e}_1 \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \bar{e}_3\right) + \left(\lambda_3 - \lambda_1\right) \bar{e}_3 \bar{e}_3 = \\ &= \lambda_1 \hat{E} + \left(\lambda_3 - \lambda_1\right) \bar{e}_3 \bar{e}_3 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Для данного тензора характерным является одно главное направление, определяемое вектором $\bar{e}_3$.

Остальные два являются неопределенными, поскольку любой вектор, перпендикулярный $\bar{e}_3$ является собственным, соответствующим значению λ_1. Действительно, если $\bar{a} \cdot \bar{e}_3 = 0$, то имеет место равенство

$$\widehat{Q}\cdot\overline{a}=\left(\lambda_1\widehat{E}+\left(\lambda_3-\lambda_1\right)\overline{e}_3\overline{e}_3\right)\cdot\overline{a}=$$
$$=\lambda_1\widehat{E}\cdot\overline{a}+\left(\lambda_3-\lambda_1\right)\overline{e}_3\overline{e}_3\cdot\overline{a}=\lambda_1\overline{a}$$

Поэтому в качестве $\overline{e}_1$ можно выбрать любой единичный вектор, ортогональный вектору $\overline{e}_3$, тогда $\overline{e}_2=\overline{e}_3\times\overline{e}_1$.

3. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$. В этом случае

$$\widehat{Q}=\lambda\widehat{E}. \tag{3.108}$$

У этого тензора, называемого *шаровым,* все векторы - собственные, все направления - главные. Действительно,

$$\widehat{Q}\cdot\overline{a}=\lambda\widehat{E}\cdot\overline{a}=\lambda\overline{a}.$$

Замечание. *В случае несимметричного тензора не всегда можно найти систему собственных векторов, являющуюся базисом пространства. И даже в том случае, когда такая система существует, ее векторы в общем случае не ортогональны.*

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТЕНЗОРАХ

4.1. Симметрирование и альтернирование тензора

Тензор $\widehat{\Omega}$ называется *кососимметричным (антисимметричным)*, если удовлетворяет условию

$$\widehat{\Omega}^T = -\widehat{\Omega}. \tag{4.1}$$

Произвольный тензор $\widehat{Q}$ можно представить в виде суммы

$$\widehat{Q} = \frac{1}{2}\left(\widehat{Q} + \widehat{Q}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\widehat{Q} - \widehat{Q}^T\right) = \widehat{\Sigma} + \widehat{\Omega}. \tag{4.2}$$

Тензоры

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{2}\left(\widehat{Q} + \widehat{Q}^T\right) \tag{4.3}$$

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\widehat{Q} - \widehat{Q}^T\right) \tag{4.4}$$

называются, соответственно, *симметричной частью* $\widehat{Q}$ и *кососимметричной частью* $\widehat{Q}$. Действительно

$$\widehat{\Sigma}^T = \left(\frac{1}{2}\left(\widehat{Q} + \widehat{Q}^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(\widehat{Q}^T + \widehat{Q}\right) = \widehat{\Sigma},$$

$$\widehat{\Omega}^T = \left(\frac{1}{2}\left(\widehat{Q} - \widehat{Q}^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(\widehat{Q}^T - \widehat{Q}\right) = -\widehat{\Omega}.$$

Операцию выделения из тензора его симметричной части называют симметрированием тензора, а операцию выделения его кососимметричной части называют альтернированием тензора.

4.2. Вектор, сопутствующий кососимметричному тензору. Свойства сопутствующего вектора

Рассмотрим кососимметричный тензор

$$\hat{\Omega} = \omega^{kn} \overline{R}_k \overline{R}_n = \omega_{st} \overline{R}^s \overline{R}^t . \qquad (4.5)$$

Для этого тензора выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \omega^{kn} = \overline{R}^k \cdot \hat{\Omega} \cdot \overline{R}^n = \overline{R}^k \cdot \left(\overline{R}^n \cdot \hat{\Omega}^T \right) = \\ = \left(\overline{R}^n \cdot \hat{\Omega}^T \right) \cdot \overline{R}^k = -\overline{R}^n \cdot \hat{\Omega} \cdot \overline{R}^k = -\omega^{nk} . \end{gathered} \qquad (4.6)$$

Аналогично можно показать, что $\omega_{st} = -\omega_{ts}$.

С помощью векторов основного и взаимного базисов определим *вектор* $\overline{\omega}$, *сопутствующий кососимметричному тензору* $\hat{\Omega}$, следующим соотношением:

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} \overline{R}_t \times \left(\hat{\Omega} \cdot \overline{R}^t \right) = \frac{1}{2} \overline{R}^k \times \left(\hat{\Omega} \cdot \overline{R}_k \right) \qquad (4.7)$$

Определение (4.7) инвариантно относительно преобразования координат:

$$\begin{gathered} \overline{R'}_t \times \left(\hat{\Omega} \cdot \overline{R'}^t \right) = a^s_{\cdot t} \overline{R}_s \times \left(\hat{\Omega} \cdot b^t_{\cdot k} \overline{R}^k \right) = \\ = a^s_{\cdot t} b^t_{\cdot k} \overline{R}_s \times \left(\hat{\Omega} \cdot \overline{R}^k \right) = \delta^s_k \overline{R}_s \times \left(\hat{\Omega} \cdot \overline{R}^k \right) = \\ = \overline{R}_k \times \left(\hat{\Omega} \cdot \overline{R}^k \right). \end{gathered}$$

Вектор $\overline{\omega}$ можно также определить через компоненты тензора $\hat{\Omega}$:

$$\overline{\omega}=\frac{1}{2}\overline{R}_t\times\omega^{mn}\overline{R}_m\overline{R}_n\cdot\overline{R}^t=\frac{1}{2}\overline{R}_t\times\omega^{mn}\overline{R}_m\delta_n^t=$$
$$=\frac{1}{2}\omega^{mn}\overline{R}_n\times\overline{R}_m=\frac{1}{2}\omega_{mn}\overline{R}^n\times\overline{R}^m. \tag{4.8}$$

Для любого вектора $\overline{x}$ выполняются равенства, выражающие основное свойство вектора $\overline{\omega}$:

$$\hat{\Omega}\cdot\overline{x}=\overline{\omega}\times\overline{x},\ \ \overline{x}\cdot\hat{\Omega}=\overline{x}\times\overline{\omega}. \tag{4.9}$$

Второе равенство (4.10) следует из первого:

$$\overline{x}\cdot\hat{\Omega}=\hat{\Omega}^T\cdot\overline{x}=-\hat{\Omega}\cdot\overline{x}=-\overline{\omega}\times\overline{x}=\overline{x}\times\overline{\omega},$$

поэтому докажем первое.

$$\overline{\omega}\times\overline{x}=\frac{1}{2}\left[\overline{R}_t\times\left(\hat{\Omega}\cdot\overline{R}^t\right)\right]\times\overline{x}=\frac{1}{2}\overline{x}\times\left[\left(\hat{\Omega}\cdot\overline{R}^t\right)\times\overline{R}_t\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\hat{\Omega}\cdot\overline{R}^t\overline{R}_t\cdot\overline{x}-\overline{R}_t\left(\overline{x}\cdot\hat{\Omega}\cdot\overline{R}^t\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\hat{\Omega}\cdot\overline{x}-\overline{x}\cdot\hat{\Omega}\cdot\overline{R}^t\overline{R}_t\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\hat{\Omega}\cdot\overline{x}-\hat{\Omega}^T\cdot\overline{x}\right]=\frac{1}{2}\left[\hat{\Omega}\cdot\overline{x}+\hat{\Omega}\cdot\overline{x}\right]=\hat{\Omega}\cdot\overline{x}$$

Тензор $\hat{\Omega}$ теперь можно представить в виде

$$\hat{\Omega}=\hat{\Omega}\cdot\hat{E}=\hat{\Omega}\cdot\overline{R}^t\overline{R}_t=\overline{\omega}\times\overline{R}^t\overline{R}_t=\overline{\omega}\times\hat{E} \tag{4.10}$$

или в виде

$$\hat{\Omega}=\hat{E}\cdot\hat{\Omega}=\overline{R}^t\overline{R}_t\cdot\hat{\Omega}=\overline{R}^t\overline{R}_t\times\overline{\omega}=\hat{E}\times\overline{\omega}. \tag{4.11}$$

Покажем, что для произвольного вектора $\overline{x}$ выполняется равенство

$$\overline{x} \times \widehat{E} = \widehat{E} \times \overline{x}. \tag{4.12}$$

Имеем

$$\overline{x} \times \widehat{E} = x_m \overline{R}^m \times \overline{R}^k \overline{R}_k = x_m \in^{mkt} \overline{R}_t \overline{R}_k = x_m \overline{R}_t \in^{tmk} \overline{R}_k =$$
$$= x_m \overline{R}_t \overline{R}^t \times \overline{R}^m = \overline{R}_t \overline{R}^t \times x_m \overline{R}^m = \widehat{E} \times \overline{x}$$

Пусть имеется некоторый вектор $\overline{a}$. Докажем, что тензор $\widehat{E} \times \overline{a} = \overline{a} \times \widehat{E}$ - кососимметричен

$$\left(\widehat{E} \times \overline{a}\right)^T = \left(\overline{R}^k \overline{R}_k \times \overline{a}\right)^T = \overline{R}_k \times \overline{a} \overline{R}^k$$
$$= -\overline{a} \times \overline{R}_k \overline{R}^k = -\overline{a} \times \widehat{E} = -\left(\widehat{E} \times \overline{a}\right)$$

Таким образом, *каждому кососимметричному тензору можно поставить в соответствие сопутствующий (ассоциированный) вектор, и обратно, каждому вектору можно поставить в соответствие кососимметричный тензор.*

Произвольный тензор теперь представляется в виде

$$\widehat{Q} = \widehat{\Sigma} + \overline{\omega} \times \widehat{E} = \widehat{\Sigma} + \widehat{E} \times \overline{\omega}. \tag{4.13}$$

Покажем некоторые особенности этого разложения. Поскольку выполняется равенство

$$\overline{x} \cdot \widehat{\Omega} \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot \left(\overline{\omega} \times \overline{x}\right) = 0,$$

то справедливо соотношение

$$\overline{x} \cdot \widehat{\Omega} \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot \widehat{\Sigma} \cdot \overline{x}. - \tag{4.14}$$

Следовательно, при составлении квадратичной формы используется только матрица симметричной части тензора.

Из соотношения

$$\overline{R}^t \times \left(\widehat{\Sigma} \cdot \overline{R}_t\right) = \overline{R}^t \times \left(\sigma_{mn} \overline{R}^m \overline{R}^n \cdot \overline{R}_t\right) = \sigma_{mn} \overline{R}^n \times \overline{R}^m =$$

$$= -\sigma_{mn} \overline{R}^m \times \overline{R}^n = -\sigma_{nm} \overline{R}^n \times \overline{R}^m = -\sigma_{mn} \overline{R}^n \times \overline{R}^m = 0 \;,$$

следует, что вектор, сопутствующий кососимметричной части некоторого тензора $\widehat{Q}$, можно вычислять по формуле

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} \overline{R}^t \times \left(\widehat{Q} \cdot \overline{R}_t\right) = \frac{1}{2} q^{mn} \overline{R}_n \times \overline{R}_m = \frac{1}{2} q_{mn} \overline{R}^n \times \overline{R}^m . \tag{4.15}$$

В заключение установим связь между компонентами тензора $\widehat{\Omega}$ и вектора $\overline{\omega}$.

$$\omega^k = \overline{R}^k \cdot \overline{\omega} = \overline{R}^k \cdot \frac{1}{2} \omega_{mn} \overline{R}^n \times \overline{R}^m = \frac{1}{2} \omega_{mn} \overline{R}^k \cdot \left(\overline{R}^n \times \overline{R}^m\right) = \frac{1}{2} \in^{knm} \omega_{mn}; \tag{4.16}$$

$$\omega^{mn} = \overline{R}^m \cdot \widehat{\Omega} \cdot \overline{R}^n = \overline{R}^m \cdot \left(\overline{\omega} \cdot \overline{R}^n\right) = -\overline{\omega} \cdot \left(\overline{R}^m \times \overline{R}^n\right) = -\overline{\omega} \cdot \in^{mnk} \overline{R}_k = - \in^{mnk} \omega_k \;. \tag{4.17}$$

Аналогично доказываются формулы

$$\omega_k = -\frac{1}{2} \in_{kmn} \omega^{mn}, \;\; \omega_{mn} = - \in_{mnk} \omega^k . \tag{4.18}$$

В частности, имеем

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\nu_*\left(\omega^{23} - \omega^{32}\right) = \nu_*\omega^{32}, \ \ \omega_{12} = -\nu_*\omega^3.$$

Таким образом, матрицы кососимметричного тензора представляются в виде

$$\Omega^{**} = \nu^*\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\Omega_{**} = \nu_*\begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.19)$$

4.3. Девиатор и шаровой тензор

Тензор

$$\frac{1}{3}J_1\left(\hat{Q}\right)\hat{E} \qquad (4.20)$$

называется *шаровой частью* тензора $\hat{Q}$.

Тензор

$$\operatorname{dev}\hat{Q} = \hat{Q} - \frac{1}{3}J_1\left(\hat{Q}\right)\hat{E} \qquad (4.22)$$

называется *девиатором* $\hat{Q}$.

Разложить тензор на девиатор и шаровую часть означает представить его в виде

$$\hat{Q} = \frac{1}{3}J_1\left(\hat{Q}\right)\hat{E} + \operatorname{dev}\hat{Q}. \qquad (4.22)$$

Обозначим главные значения девиатора через $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ и определим их связь с главными значениями $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ тензора $\hat{Q}$. Составим характеристическое уравнение для девиатора.

$$\det\left[\operatorname{dev}\hat{Q} - \gamma\hat{E}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\left[\hat{Q} - \frac{1}{3}J_1\left(\hat{Q}\right)\hat{E} - \gamma\hat{E}\right] = 0 \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow \det\left[\hat{Q} - \left(\gamma + \frac{1}{3}J_1\left(\hat{Q}\right)\right)\hat{E}\right] = 0$$

В последнем уравнении легко узнается характеристическое уравнение для тензора, поэтому

$$\gamma_k + \frac{1}{3}J_1\left(\hat{Q}\right) = \lambda_k.$$

Таким образом,

$$\gamma_k = \lambda_k - \frac{1}{3}J_1\left(\hat{Q}\right).$$

Используя формулы (3.84), можно прийти к соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{3}\left(2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3\right); \\ \gamma_2 &= \frac{1}{3}\left(2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_1\right); \\ \gamma_3 &= \frac{1}{3}\left(2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2\right). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Главные направления девиатора совпадают с главными направлениями тензора. Действительно, пусть $\bar{e}_k$ - правый собственный вектор тензора $\tilde{Q}$, соответствующий собственному значению λ_k. Тогда

$$\operatorname{dev}\tilde{Q}\cdot\bar{e}_k=\left(\tilde{Q}-\frac{1}{3}J_1\left(\tilde{Q}\right)\tilde{E}\right)\cdot\bar{e}_k=\lambda_k\bar{e}_k-\frac{1}{3}J_1\left(\tilde{Q}\right)\bar{e}_k=$$

$$=\left(\lambda_k-\frac{1}{3}J_1\left(\tilde{Q}\right)\right)\bar{e}_k=\gamma_k\bar{e}_k.$$

Аналогичное доказательство имеет место для левых векторов.

Используя (3.85) и (4.23), можно показать, что справедливы следующие равенства:

$$J_1\left(\operatorname{dev}\tilde{Q}\right)=0;\quad J_2\left(\operatorname{dev}\tilde{Q}\right)=J_2\left(\tilde{Q}\right)-\frac{1}{3}J_1^2\left(\tilde{Q}\right);$$
$$J_3\left(\operatorname{dev}\tilde{Q}\right)=J_3\left(\tilde{Q}\right)-\frac{1}{3}J_1\left(\tilde{Q}\right)J_2\left(\tilde{Q}\right)+\frac{2}{27}J_1^3\left(\tilde{Q}\right). \tag{4.24}$$

Для $J_2\left(\operatorname{dev}\tilde{Q}\right)$ можно получить формулу

$$J_2\left(\operatorname{dev}\tilde{Q}\right)=$$
$$=-\frac{1}{6}\left[\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2+\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2+\left(\lambda_3-\lambda_1\right)^2\right], \tag{4.25}$$

которая доказывает, что второй инвариант девиатора неположителен, причем равенство нулю достигается только для девиатора шарового тензора.

В механике деформируемого твердого тела помимо главных инвариантов используется еще одна тройка инвариантов тензора: первый инвариант $J_1\left(\tilde{Q}\right)$, *интенсивность тензора*

$$\Gamma=\sqrt{-J_2\left(\operatorname{dev}\tilde{Q}\right)} \tag{4.26}$$

и *угол вида состояния* ψ . Этот угол находится из характеристического уравнения для девиатора, которое можно свести к виду

$$\gamma^3 - \Gamma^2\gamma = J_3\left(\operatorname{dev}\hat{Q}\right). \tag{4.27}$$

Решение уравнения (4.28) ищется в тригонометрической форме

$$\gamma = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}\sin\psi, \tag{4.28}$$

которая приводит к уравнению для угла ψ .

$$\frac{-2\Gamma^3}{3\sqrt{3}}\sin 3\psi = J_3\left(\operatorname{dev}\hat{Q}\right). \tag{4.29}$$

Из (4.29) можно найти три значения ψ и по ним три главных значения девиатора

$$\begin{gathered}\gamma_1 = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}\sin\psi, \\ \gamma_2 = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}\sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right), \\ \gamma_3 = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}\sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right), \\ |\psi| \le \frac{\pi}{6}.\end{gathered} \tag{4.30}$$

Если $\hat{T}$ - тензор деформаций, то $J_1\left(\hat{T}\right)$ отвечает за изменение объема тела; Γ - за изменение его формы, а угол ψ - за изменение вида деформированного состояния. Каждому из различных видов деформации соответствуют свои конкретные значения угла вида состояния $\psi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

4.4. Полярное разложение тензора

Тензор $\hat{P}$ называется *неотрицательно определенным, (положительно определенным)*, если для любого не равного нулю вектора $\bar{x}$ справедливо неравенство

$$\bar{x} \cdot \hat{P} \cdot \bar{x} \geq 0 \quad \left(\bar{x} \cdot \hat{P} \cdot \bar{x} > 0\right).$$

Произвольный невырожденный тензор $\hat{T}$ можно представить в виде скалярного произведения симметричного тензора и тензора поворота

$$\hat{T} = \hat{\Lambda} \cdot \hat{O}; \ \hat{T} = \hat{O} \cdot \hat{\Pi}. \tag{4.31}$$

Разложения (4.31) называются *полярными*. Докажем, что они возможны.

Рассмотрим тензор $\hat{P} = \hat{T}^T \cdot \hat{T}$. Докажем, что он является симметричным, невырожденным и положительно определенным. Действительно

$$\hat{P}^T = \left(\hat{T}^T \cdot \hat{T}\right)^T = \hat{T}^T \cdot \hat{T} = \hat{P};$$

$$\det \hat{P} = \det\left(\hat{T}^T \cdot \hat{T}\right) = \det \hat{T}^T \cdot \det \hat{T} = \left(\det \hat{T}\right)^2 > 0,$$

$$\bar{x} \cdot \hat{P} \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \hat{T}^T \cdot \hat{T} \cdot \bar{x} = \left(\hat{T} \cdot \bar{x}\right) \cdot \left(\hat{T} \cdot \bar{x}\right) = \bar{y} \cdot \bar{y} > 0.$$

Замечание. *Аналогично можно показать симметричность, невырожденность и положительную определенность тензора* $\hat{P}_1 = \hat{T} \cdot \hat{T}^T$.

Обозначим

$$\hat{\Pi}^2 = \hat{T}^T \cdot \hat{T} \tag{4.32}$$

Здесь симметричный тензор $\hat{\Pi}$ определяется через собственные значения тензора $\hat{T}^T \cdot \hat{T}$ по формуле

$$\hat{\Pi} = \pm\sqrt{\lambda_1}\,\bar{e}_1\bar{e}^1 \pm \sqrt{\lambda_2}\,\bar{e}_2\bar{e}^2 \pm \sqrt{\lambda_3}\,\bar{e}_3\bar{e}^3. \tag{4.33}$$

Знаки $\pm$ выбираются таким образом, чтобы совпадали знаки определителей тензоров $\hat{\Pi}$ и $\hat{T}$.

Собственные значения положительно определенного тензора также положительны. Действительно

$$\bar{e}_k \cdot \hat{P} \cdot \bar{e}_k = \lambda_k \bar{e}_k \cdot \bar{e}_k = \lambda_k \left|\bar{e}_k\right|^2 > 0 \Rightarrow \lambda_k > 0.$$

Таким образом, извлечение корней в (4.33) возможно. Кроме того, из (4.32) следует

$$\left(\det\hat{\Pi}\right)^2 = \left(\det\hat{T}\right)^2 \Rightarrow \det\hat{\Pi} = \det\hat{T}.$$

Обозначим

$$\hat{O} = \hat{T} \cdot \hat{\Pi}^{-1}, \tag{4.34}$$

чтобы выполнялось второе из равенств (4.31). Докажем, что введенный тензор $\hat{O}$ является тензором поворота. Имеем

$$\hat{O}^T \cdot \hat{O} = \left(\hat{T} \cdot \hat{\Pi}^{-1}\right)^T \cdot \left(\hat{T} \cdot \hat{\Pi}^{-1}\right) = \hat{\Pi}^{-1} \cdot \left(\hat{T}^T \cdot \hat{T}\right) \cdot \hat{\Pi}^{-1} =$$
$$= \hat{\Pi}^{-1} \cdot \hat{\Pi}^2 \cdot \hat{\Pi}^{-1} = \hat{\Pi}^{-1} \cdot \hat{\Pi} \cdot \hat{\Pi} \cdot \hat{\Pi}^{-1} = \hat{E} \cdot \hat{E} = \hat{E}\;;$$

$$\det\hat{O} = \det\left(\hat{T} \cdot \hat{\Pi}^{-1}\right) = \det\hat{T} \cdot \det\hat{\Pi}^{-1} = \left(\det\hat{T}\right)^2 = 1.$$

Два этих равенства и доказывают, что тензор $\hat{O}$, определяемый формулой (4.34), тензор поворота.

Найдем теперь тензор $\hat{\Lambda}$.

Обозначим

$$\hat{\Lambda} = \hat{T} \cdot \hat{O}^T = \hat{T} \cdot \hat{\Pi}^{-1} \cdot \hat{T}^T. \qquad (4.35)$$

Тогда первое равенство (4.31) выполняется. Остается доказать симметричность $\hat{\Lambda}$.

$$\hat{\Lambda}^T = \left(\hat{T} \cdot \hat{\Pi}^{-1} \cdot \hat{T}^T\right) = \hat{T} \cdot \hat{\Pi}^{-1} \cdot \hat{T} = \hat{\Lambda}.$$

Таким образом, доказано, что возможны оба полярных разложения (4.31) тензора $\hat{T}$.

Замечание *Если $\hat{T}$ — тензор-градиент места, используемый, например, в теории деформируемого твердого тела, то тензор $\hat{\Pi}$ называется правым тензором искажения, $\hat{\Lambda}$ - левым тензором искажения. При этом $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Pi}$ описывают собственно деформацию,* а *$\hat{O}$ - поворот тела как жесткого целого.*

Главные значения левого и правого тензоров искажений совпадают, а триэдры собственных векторов связаны преобразованием поворота. Докажем это.

Тензоры $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Pi}$ - симметричные тензоры, поэтому у каждого из них собственные значения вещественны и имеется ортонормированный триэдр собственных векторов. Пусть

$$\hat{\Pi} \cdot \bar{e}_k = \bar{e}_k \cdot \hat{\Pi} = \lambda_k \bar{e}_k.$$

Тензор $\hat{\Lambda}$ можно выразить через тензор $\hat{\Pi}$

$$\hat{\Lambda} = \hat{T} \cdot \hat{O}^T = \hat{O} \cdot \hat{\Pi} \cdot \hat{O}^T. \qquad (4.36)$$

Имеем следующее равенство для повернутых векторов

$$\tilde{e}_k = \hat{O} \cdot \bar{e}_k. \qquad (4.37)$$

$$\widehat{\Lambda}\cdot\widetilde{e}_k = \widehat{O}\cdot\widehat{\Pi}\cdot\widehat{O}^T\cdot\widehat{O}\cdot\overline{e}_k = \widehat{O}\cdot\widehat{\Pi}\cdot\overline{e}_k = \\ = \widehat{O}\cdot\lambda_k\overline{e}_k = \lambda_k\widehat{O}\cdot\overline{e}_k = \lambda_k\widetilde{e}_k. \tag{4.38}$$

Равенство (4.38) и показывает, что векторы (4.37) являются собственными векторами тензора $\widehat{\Lambda}$, причем собственные значения тензоров $\widehat{\Lambda}$ и $\widehat{\Pi}$ совпадают. Утверждение доказано.

4.5. Изотропные тензоры

Изотропным тензором называется тензор, компоненты которого сохраняют свои значения при преобразовании поворота базисных векторов.

$$\overline{R'}_k = \widehat{O}\cdot\overline{R}_k,\ \overline{R'}^k = \widehat{O}\cdot\overline{R}^k. \tag{4.39}$$

Тензор $\widehat{E}$ - изотропный тензор второго ранга. Действительно

$$g'_{sk} = \overline{R'}_s\cdot\widehat{E}\cdot\overline{R'}_k = \overline{R}_s\cdot\widehat{O}^T\cdot\widehat{E}\cdot\widehat{O}\cdot\overline{R}_k = \\ = \overline{R}_s\cdot\widehat{O}^T\cdot\widehat{O}\cdot\overline{R}_k = \overline{R}_s\cdot\widehat{E}\cdot\overline{R}_k = g_{sk}$$

Аналогично можно показать, что являются неизменными и другие компоненты тензора $\widehat{E}$. Изотропных тензоров второго ранга, отличных от $\lambda\widehat{E}$, не существует.

Рассмотрим тензор Леви-Чивита

$${}^{(3)}\in = \in_{skt}\overline{R}^s\overline{R}^k\overline{R}^t = -\overline{R}^s\in_{stk}\overline{R}^k\overline{R}^t = \\ = -\overline{R}^s\overline{R}_s\times\overline{R}_t\overline{R}^t = -\widehat{E}\times\widehat{E} \tag{4.40}$$

и покажем его изотропность.

Имеем

$$\in'_{skt} = \overline{R'}_s \cdot \left(\overline{R'}_k \times \overline{R'}_t\right) = \sqrt{g'}\, e_{skt} = \sqrt{\det G'_{**}}\, e_{skt} =$$

$$= \sqrt{\det G_{**}}\, e_{skt} = \sqrt{g}\, e_{skt} = \in_{skt} .$$

Изотропность тензора Леви – Чивита также следует из того, что при повороте базисного триэдра объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах, остается одним и тем же. Других изотропных тензоров третьего ранга, отличных от $\lambda^{(3)}\in$, не существует.

Общий вид изотропных тензоров 4 ранга дается формулой

$$\begin{aligned} {}^{(4)}E &= a\,\overline{R}_s \overline{R}^s \overline{R}_k \overline{R}^k + b\,\overline{R}_s \overline{R}_k \overline{R}^k \overline{R}^s + \\ &+ c\,\overline{R}_s \overline{R}_k \overline{R}^s \overline{R}^k \quad ; a, b, c \in \Re \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.6. Физические компоненты вектора и тензора

Пусть некоторый вектор имеет разложение

$$\overline{a} = a^s \overline{R}_s = a_k \overline{R}^k . \tag{4.42}$$

Физическим компонентом $\overline{a}_{(k)} \left(\overline{a}^{(k)}\right)$ *вектора* $\overline{a}$ *в направлении вектора* $\overline{R}_k, \left(\overline{R}^k\right)$ *называется проекция вектора* $\overline{a}$ *на направление вектора* $\overline{R}_k, \left(\overline{R}^k\right)$

$$a_{(k)} = Пр_{\bar{R}_k}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{R}_k}{\left|\bar{R}_k\right|} = \frac{a_k}{\left|\bar{R}_k\right|} = \frac{a_k}{\sqrt{g_{kk}}},$$

$$a^{(k)} = \frac{a^k}{\left|\bar{R}^k\right|} = \frac{a^k}{\sqrt{g^{kk}}}. \qquad (4.43)$$

По аналогии с физическими компонентами вектора вводится понятие *физических компонентов тензора 2 ранга*:

$$g_{(mn)} = \frac{\bar{R}_m}{\left|\bar{R}_m\right|}\cdot\hat{Q}\cdot\frac{\bar{R}_n}{\left|\bar{R}_n\right|} = \frac{g_{mn}}{\left|\bar{R}_m\right|\left|\bar{R}_n\right|} = \frac{q_{mn}}{\sqrt{q_{mm}}\sqrt{q_{nn}}},$$

$$q^{(mn)} = \frac{g^{mn}}{\left|\bar{R}^m\right|\left|\bar{R}^n\right|} = \frac{g^{mn}}{\sqrt{g^{mm}}\sqrt{g^{nn}}},$$

$$q^{(m)}_{\cdot\,(n)} = \frac{g^{m}_{\cdot\,n}}{\left|\bar{R}^m\right|\left|\bar{R}_n\right|} = \frac{q^{mn}}{\sqrt{g^{mm}}\sqrt{g_{nn}}}, \qquad (4.44)$$

$$q_{(m)}^{\cdot\,(n)} = \frac{g_{m}^{\cdot\,n}}{\left|\bar{R}_m\right|\left|\bar{R}^n\right|} = \frac{g_{m}^{\cdot\,n}}{\sqrt{g_{mm}}\sqrt{g^{nn}}}.$$

В случае ортонормированного базиса физические и обычные компоненты тензора совпадают.

4.7. Площади и объемы, порождаемые базисными векторами

Очень часто матрица метрического тензора в тензорной алгебре дается вне связи с базисными векторами. Тем не менее возникает задача определения характеристик, связанных с этими векторами.

Напомним формулы, выведенные в разделе 2.3:

$$g = \det G_{**};\ v_* = \overline{R}_1 \cdot \left(\overline{R}_2 \times \overline{R}_3\right) = \sqrt{g}\,,$$

$$v^* = \overline{R}^1 \cdot \left(\overline{R}^2 \times \overline{R}^3\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

Докажем еще одну полезную формулу:

$$\begin{aligned}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{c}\times\overline{d}\right) &= \overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\left(\overline{c}\times\overline{d}\right)\right) = \\ &= \overline{a}\cdot\left(\overline{c}\,\overline{b}\cdot\overline{d} - \overline{d}\,\overline{b}\cdot\overline{c}\right) = \\ &= \left(\overline{a}\cdot\overline{c}\right)\left(\overline{b}\cdot\overline{d}\right) - \left(\overline{a}\cdot\overline{d}\right)\left(\overline{b}\cdot\overline{c}\right).\end{aligned} \tag{4.45}$$

В частности,

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right|^2\left|\overline{b}\right|^2 - \left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)^2. \tag{4.46}$$

Из соотношения (4.46) следуют формулы для площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{R}_2$, $\overline{R}_3$.

$$P^1 = \left|\overline{R}_2 \times \overline{R}_3\right| = \left|v_* \overline{R}^1\right| = \sqrt{v_*^2\, \overline{R}^1 \cdot \overline{R}^1} = \sqrt{g\, g^{11}}, \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}P^1 &= \sqrt{\overline{R}_2 \cdot \overline{R}_2\, \overline{R}_3 \cdot \overline{R}_3 - \left(\overline{R}_2 \cdot \overline{R}_3\right)^2} = \\ &= \sqrt{g_{22}g_{33} - \left(g_{23}\right)^2}\end{aligned} \tag{4.48}$$

Можно получить аналогичные формулы и для P^2 с P^3.

Можно также определить косинусы углов между базисными векторами

$$\cos\left(\overline{R}_m \wedge \overline{R}_n\right) = \frac{\overline{R}_m \cdot \overline{R}_n}{\left|\overline{R}_m\right|\left|\overline{R}_n\right|} = \frac{g_{mn}}{\sqrt{g_{mm}}\sqrt{g_{nn}}},$$

$$\cos\left(\overline{R}^m \wedge \overline{R}^n\right) = \frac{g^{mn}}{\sqrt{g^{mm}}\sqrt{g^{nn}}}. \tag{4.49}$$

Таким образом, матрица G_{**} и обратная ей матрица G^{**} позволяют определить все эти характеристики базисных триад.

4.8. Вектор тензора

Вектором $\overline{q}$ симметричного тензора второго ранга $\hat{Q}$, действующим на площадке пространства $\Re_3$, называется скалярное произведение этого тензора на вектор единичной нормали $\overline{n}$ к этой площадке, т.е.

$$\overline{q} = \overline{n} \cdot \hat{Q} = \hat{Q} \cdot \overline{n}. \tag{4.50}$$

Вектор $\overline{q}$ можно разложить на две составляющие

$$\overline{q} = \overline{q}_n + \overline{q}_\tau,$$

одна из которых $\overline{q}_n$ перпендикулярна к площадке, а другая $\overline{q}_\tau$ ей параллельна.

Проекция вектора $\overline{q}$ на направление $\overline{n}$ определяется по формуле

$$q_n = \overline{q} \cdot \overline{n} = \overline{n} \cdot \hat{Q} \cdot \overline{n}. \tag{4.51}$$

Соответственно, нормальная составляющая этого вектора

$$\bar{q}_n = q_n \bar{n} = \bar{n} \cdot \hat{Q} \cdot \bar{n}\bar{n}. \tag{4.52}$$

Касательная составляющая вектора, действующая на площадке

$$\begin{aligned} \bar{q}_\tau &= \bar{q} - \bar{q}_n = \bar{n} \cdot \hat{Q} - \bar{n} \cdot \hat{Q} \cdot \bar{n}\bar{n} \\ &= \bar{n} \cdot \hat{Q} \cdot \left(\hat{E} - \bar{n}\bar{n}\right) = q_\tau \bar{\tau} \end{aligned} \tag{4.53}$$

Здесь $\bar{\tau} \perp \bar{n}$ - единичный вектор, лежащий в плоскости площадки. Вектор $\bar{q}_\tau$ можно определить по формуле

$$\bar{q}_\tau = \left(\bar{n} \times \bar{q}\right) \times \bar{n} = \bar{n} \times \left(\bar{q} \times \bar{n}\right). \tag{4.54}$$

Действительно,

$$\left(\bar{n} \times \bar{q}\right) \times \bar{n} = \bar{n} \times \left(\bar{q} \times \bar{n}\right) = \bar{q}\bar{n} \cdot \bar{n} - \bar{n}\bar{q} \cdot \bar{n} = \bar{q} - \bar{n} q_n = \bar{q}_\tau .$$

Рассмотрим частный случай, когда площадка выбрана ортогональной единичному собственному вектору $\bar{e}_k$:

$$\hat{Q} \cdot \bar{n} = \hat{Q} \cdot \bar{e}_k = \lambda_k \bar{e}_k .$$

Тогда на этой площадке

$$q_n = \lambda_k, \;\; q_\tau = 0, \;\; \bar{q} = \bar{q}_n .$$

Таким образом, для таких площадок касательная составляющая вектора равна нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее пособие ни в коей мере не претендует на то, чтобы заменить фундаментальные работы по тензорной алгебре.

Автор сочтет свою задачу выполненной, если читатель, изучивший пособие, научится оперировать с тензорами, преобразовывать инвариантную форму записи тензорных равенств в компонентную, и наоборот. Хочется надеяться, что проводимая в пособии параллель с матричной формой записи поможет читателю в усвоении материала пособия. Автор также надеется, что пособие послужит читателю базой для освоения курса механики сплошной среды и окажет помощь в дальнейшем изучении тензорной алгебры и тензорного анализа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лурье, А.И.* Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. - М.: Наука, 1980.- 446 с.

2. *Победря, Б.Е.* Лекции по тензорному исчислению / Б.Е. Победря. - М.: Изд-во МГУ, 1974. - 207 с.

3. *Сокольников, И.* Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред / И. Сокольников. - М.: Наука, 1971. - 376 с.

4. Введение в нелинейную механику. Ч.1. Необходимые сведения их тензорного исчисления: метод. указания / сост. П.В. Трусов, Ю.И. Няшин. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1992. - 104 с.

5. *Горлач, Б.А.* Тензорная алгебра в косоугольном базисе: учеб. пособие / Б.А. Горлач, Н.А. Калугин. – Самара: Изд-во СГАУ, 2000. – 76 с.

Учебное издание

Калугин Николай Александрович

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Редакторская обработка Ю. Н. Литвинова
Компьютерная верстка Н. А. Калугин
Доверстка Ю. Н. Литвинова

Подписано в печать 16.02.2009 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л 5,0
Тираж 100 экз. Заказ [illegible]. Арг. С – 22/2009

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.