МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.П. РОСТОВА

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2 0 2 0

УДК 519.1(075)
ББК 22.1я7
Р783

Рецензент: канд. физ.-матем. наук, доц. А. П. К о т е н к о;
канд. физ.-матем. наук, доц. О. А. В а с и л ь е в а

Ростова, Елена Павловна

Р783 Основы дискретной математики: учебное пособие / *Е.П. Ростова*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2020. – 88 с.

ISBN 978-5-7883-1573-7

В пособии представлены основы теории множеств, алгебры логики и теории графов: операции над множествами, диаграммы Эйлера–Венна, отношения множеств, бинарные отношения (основные понятия, свойства и особенности графического изображения), булевы функции и их таблицы истинности, дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы, способы описания графов и их применение к задаче нахождения кратчайшего пути.

Предназначено для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика.

Подготовлено на кафедре математических методов в экономике.

УДК 519.1(075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7883-1573-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МНОЖЕСТВА

1.1. Основные определения

Множество – единая совокупность элементов, обладающих одним определяющим свойством.
Множество обозначается заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C* и т.д.

Пример1:
Множеством являются студенты, обучающиеся в одной группе. Тогда определяющим свойством этой группы будет принадлежность студента к данной учебной группе.

Пример 2:
Множество целых положительных чисел образуют множество натуральных чисел. Это множество обозначается $\mathbb{N}$.

Пример 3:
Множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $x^2+ y^2 \leq 4$.

Элемент x принадлежит множеству A, если *x* обладает определяющим свойством множества *A*. Запись: $x \in A$. Элементы множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: *a, c, x, y* и т.д.

Пример 1:
Число -1 принадлежит множеству целых чисел, обозначающемуся $\mathbb{Z}$. Запись выглядит следующим образом: $-1 \in \mathbb{Z}$.

Пример 2:
Число 23 принадлежит множеству натуральных чисел, обозначающемуся $\mathbb{N}$. Запись выглядит следующим образом: $23 \in \mathbb{N}$.

Если *x не является элементом множества A*, то запись выглядит следующим образом: $x \notin A$ или $\overline{x \in A}$.

Пример:
Число -1 НЕ принадлежит множеству натуральных чисел. Запись выглядит следующим образом: $-1 \notin \mathbb{N}$.

Множество A называется *пустым множеством*, если оно не содержит элементов. Запись: $A=\emptyset$.

Универсальное множество – множество, содержащее все мыслимые объекты, участвующие в данном рассуждении, примере, задаче. Обозначается: U (либо I).

1.2. Способы задания множеств

1. Перечисление: $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

   Пример 1:
   $A=\{1, 2, 3, 4\}$ множество A состоит из элементов: 1, 2, 3 и 4.

   Пример 2:
   $B=\{2, 4, 6, 8\}$ множество B состоит из элементов 2, 4, 6 и 8.

2. Указание свойства, характеризующего элементы множества: $A=\{x|Q(x)\}$, где $Q(x)$ – определяющее свойство множества.

   Пример 1:
   Множество A из предыдущего Примера 1 можно задать следующим образом: $A=\{x|x\in \mathbb{N}, x\leq 4\}$.
   Читается запись: множество A есть множество, состоящее из элементов x таких, что x принадлежат множеству натуральных чисел и не больше 4.

   Пример2:
   Множество B из предыдущего Примера 2 можно задать следующим образом:
   $$B=\{x|x=2k, k\in \mathbb{Z}, 2\leq x\leq 8\}.$$
   Читается запись: множество B есть множество, состоящее из элементов x таких, что x являются четным числами, не менее 2 и не более 8.

1.3. Операции над множествами

1. *Объединение множеств* A и B – это множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A или множеству B. Запись: $A\cup B=\{x|x\in A \text{ или } x\in B\}$.

   Пример 1:
   Пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

Пример2:
Пусть $D=\{z|z \in[-2, 6]\}$ и $F=\{y|\ y \in [4, 9]\}$.
Тогда $D\cup F =\{x|\ x\in [-2, 9]\}$.

2. *Пересечение множеств A и B* – это множество элементов, одновременно принадлежащих множеству и *A*, и множеству *B*. Запись: $A\cap B=\{x|x\in A$ и $x \in B\}$.

Пример 1:
Пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A\cap B=\{2, 4\}$.

Пример2:
Пусть $D=\{z|\ z \in[-2, 6]\}$ и $F=\{y|\ y \in [4, 9]\}$.
Тогда $D\cap F=\{x|\ x\in [4, 6]\}$.

Пример 3:
Пусть $G=\{x, y\in\ R^2|\ x^2+ y^2\leq 4\}$ и $S= \{x, y\in\ R^2|y\geq x^2\}$.
Тогда множество $G \cap S$ будет выглядеть следующим образом.

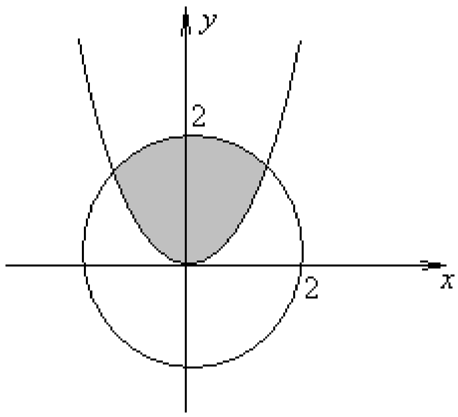


Рис. 1.1. Графическое изображение множества *G*

3. *Вычитание множества B* из множества *A* – это множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству *A* и не принадлежащих множеству *B*. Запись: $A\backslash B=\{x|x\in A$ и $x \notin B\}$.

Пример 1:
Пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A\backslash B=\{1, 3\}$.
И наоборот: $B\backslash A=\{6, 8\}$.

Пример2:
Пусть $D=\{z|\ z \in[-2, 6]\}$ и $F=\{y|\ y \in [4, 9]\}$.
Тогда $D\backslash F =\{x|\ x\in [-2, 4)\}$.
И наоборот: $F\backslash D=\{x|\ x\in(6, 9]\}$.

4. *Симметрическая разность множеств A и B* – множество, состоящее из элементов, принадлежащих только одному из указанных множеств. Запись: $A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. Также вместо значка $\triangle$ используют $\oplus$. Запись: $A\triangle B=\{x|x\in A$ и $x\notin B$ или $x\in B$ и $x\notin A\}$.

   Пример 1:
   Пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A\triangle B=\{1, 3, 6, 8\}$.

   Пример2:
   Пусть $D=\{z|\ z\in[-2, 6]\}$ и $F=\{y|\ y\in[4, 9]\}$.
   Тогда $D\triangle F=\{x|\ x\in[-2, 4)\cup(6, 9]\}$.

1.4. Отношения множеств

1. *Множество A включено в множество B*, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Запись: $A\subseteq B$. Говорят, что A есть подмножество B.

2. *Множество A строго включено в множество B*, если выполняются условия: $A\subseteq B$, $A\neq B$. Запись: $A\subset B$. Говорят, что множество A является собственным подмножеством множества B.

   Пример 1:
   Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и множество натуральных чисел$\mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

   Пример 2:
   Пусть $A=\{x|\ x\in(12, 13)\}$ и $B=\{y|\ y\in(10, 15)\}$. Тогда $A\subset B$.

3. *Множества A и B находятся в общем положении*, если существуют элемент x, принадлежащий только множеству A, элемент y, принадлежащий только множеству B и элемент z, принадлежащий обоим множествам. Запись: $A\between B$.

   Пример 1:
   Пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A\between B$.

   Пример2:
   Пусть $D=\{z|\ z\in[-2, 6]\}$ и $F=\{y|\ y\in[4, 9]\}$. Тогда $D\between F$.

4. Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Запись: $A=B$. В противном случае: $A\neq B$.

Пример:
Пусть $A=\{x|\ x \in \mathbb{Z}, x \in[0, 5]\}$ и $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда $A=B$.

5. Множества A и B *не пересекаются*, если у них нет общих элементов.

Пример:
Пусть $A=\{z|\ z \in[0, 5]\}$ и $B=\{y|\ y \in [6, 10]\}$. Тогда $A \cap B=\emptyset$.

Все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого универсального множества U. *Абсолютным дополнением* множества A называется множество $\bar{A} = U \backslash A$. Можно сказать, что абсолютным дополнением $\bar{A}$ множества A является множество всех элементов, не принадлежащих множеству A.

Пример 1:
Пусть $A=\{x|\ x \geq 0\}$. Тогда $\bar{A}=\{x|\ x<0\}$.

Пример 2:
Пусть $G=\{x, y \in\ R^2|\ x^2+ y^2 \leq 4\}$. Тогда $\bar{G}=\{x, y \in\ R^2|\ x^2+ y^2 > 4\}$.

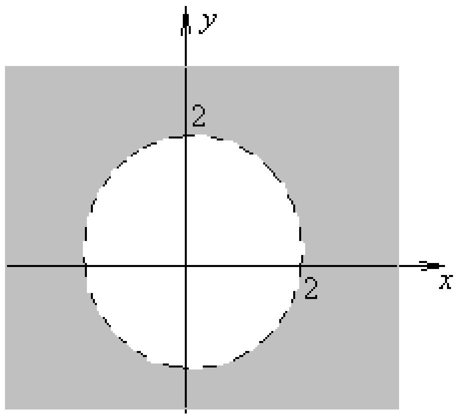


Рисунок 1.2. Графическое изображение множества $\bar{G}$

1.5. Основные тождества алгебры множеств

Для любых подмножеств *A, B, C* универсального множества *U* выполняются следующие тождества:

1. Коммутативность объединения

   $A \cup B = B \cup A.$

2. Коммутативность пересечения

   $A \cap B = B \cap A.$

3. Ассоциативность объединения

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

4. Ассоциативность пересечения

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

5. Дистрибутивность объединения относительно пересечения

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

6. Дистрибутивность пересечения относительно объединения

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

7. Закон де Моргана[1]

   $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$

   $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

8. Закон поглощения

   $A \cup (A \cap B) = A,$

   $A \cap (A \cup B) = A.$

9. $A \cup \emptyset = A.$
10. $A \cap U = A.$
11. $A \cap \emptyset = \emptyset.$
12. $A \cup U = U.$
13. $A \cup \bar{A} = U.$
14. $A \cap \bar{A} = \emptyset.$
15. $A \cup A = A.$
16. $A \cap A = A.$
17. $\bar{\bar{A}} = A.$
18. $\bar{U} = \emptyset.$
19. $A \backslash B = A \cap \bar{B}.$
20. $A \backslash A = \emptyset.$
21. $\left((A \backslash B) \backslash C\right) = A \backslash (B \cup C).$

[1]Огастес де Морган (1806 – 1871) шотландский математик и логик. Изложил в 1847 г. элементы логики высказываний и логики классов, дал первую развитую систему алгебры отношений.

22. $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$.

23. $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

24. $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

25. $U \backslash A = \bar{A}$.

26. $A \backslash U = \emptyset$.

27. $A \backslash \emptyset = A$.

28. $\emptyset \backslash A = \emptyset$.

1.6. Диаграммы Эйлера–Венна

Диаграммы Эйлера–Венна[2] используют для геометрического представления множеств. Множества представляются в виде каких-либо замкнутых фигур. Как правило, для обозначения универсального множества U используется прямоугольник, а для обозначения прочих множеств – круги.

С помощью диаграмм Эйлера–Венна можно проиллюстрировать операции над множествами и отношения множеств.

Объединение множеств A и B: $A \cup B$.

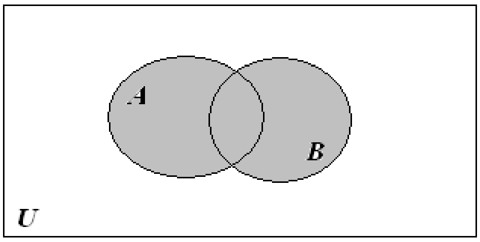


Рисунок 1.3. Объединение множеств

Пересечение множеств A и B: $A \cap B$.

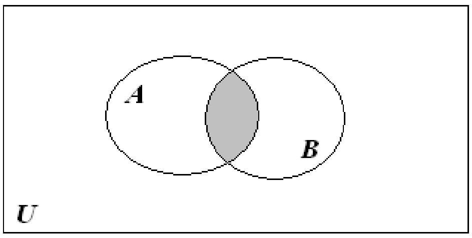


Рисунок 1.4. Пересечение множеств

[2]При решении целого ряда задач Леонард Эйлер (1707–1783) использовал идею изображения множеств с помощью кругов. Особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1834–1923), подробно изложившего их в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. Поэтому такие схемы иногда называют Диаграммы Эйлера–Венна.

Вычитание множеств A и B: $A \setminus B$.

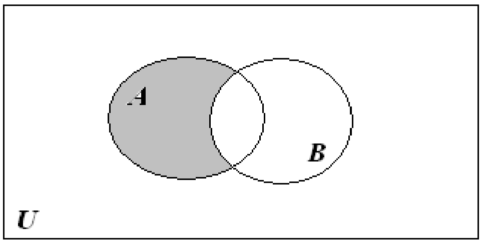


Рисунок 1.5. Вычитание множеств

Вычитание множеств A и B: $B \setminus A$.

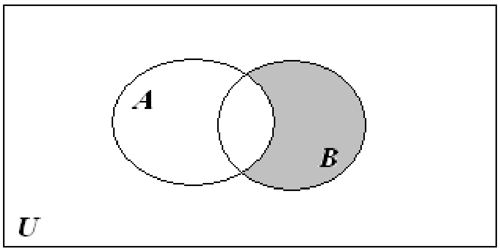


Рисунок 1.6. Вычитание множеств

Симметрическая разность множеств A и B: $A \triangle B$.

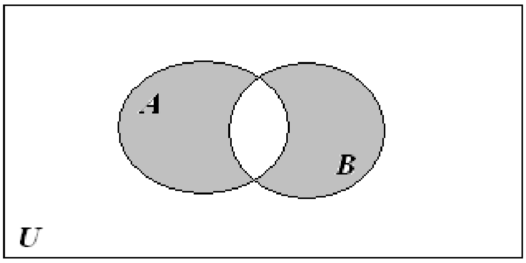


Рисунок 1.7. Симметрическая разность множеств

Множество A включено в множество B: $A \subseteq B$.

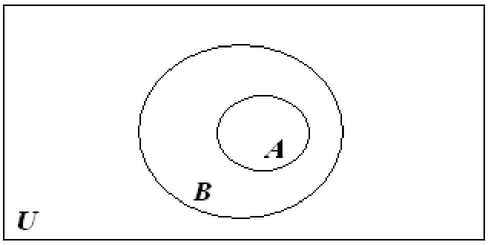


Рисунок 1.8. Включение множества

Множество A совпадает с множеством B: $A=B$.

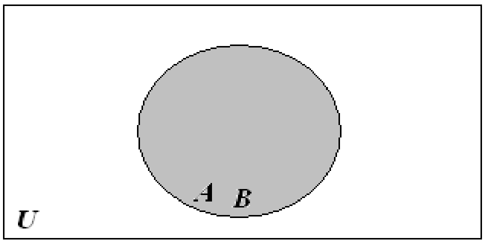


Рисунок 1.9. Совпадение множеств

Множество A не пересекается с множеством B.

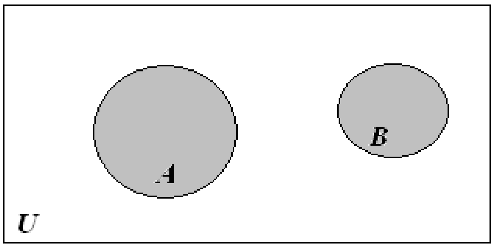


Рисунок 1.10. Множества не пересекаются

Абсолютное дополнение множества A.

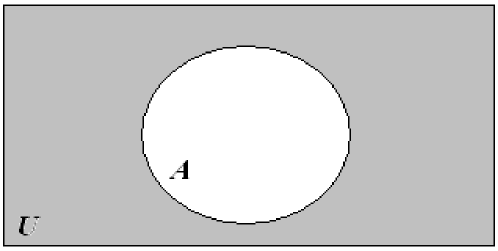


Рисунок 1.11. Абсолютное дополнение

С помощью диаграмм Эйлера–Венна можно доказать основные тождества алгебры множеств.

1.7. Разбиение множества

Разбиение множества X – это совокупность его попарно не пересекающихся непустых подмножеств таких, что любой элемент множества X принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Свойства разбиения множества

Пусть множество A разбито на подмножества $\{A_1, A_1, \ldots A_n\}$, тогда

1. $A_k \neq \emptyset$ для $\forall k = \overline{1, n}$.
2. $A_i \cap A_k = \emptyset$ для $\forall i, k = \overline{1, n}, i \neq k$.
3. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$.
4. $A_k \subseteq A$ для $\forall k = \overline{1, n}$.

Пример:

Пусть X – множество всех студентов 1-го курса. Тогда разбиением этого множества являются учебные группы 1-го курса. Проверим, удовлетворяют, ли они свойствам разбиения.

1. Каждая группа не является пустым множеством $A_k \neq \emptyset$, т.к. в каждой группе есть хотя бы один студент.

2. Пересечение двух множеств, обозначающих две различные группы A_i и A_k, будет пустым $A_i \cap A_k = \emptyset$, так как нет такого студента, который одновременно принадлежал бы разным группам 1-го курса.
3. Объединение всех групп 1-го курса $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$ даст множество студентов 1-го курса.
4. Каждая учебная группа 1-го курса A_k включена во множество студентов 1-го курса $A_k \subseteq A$.

Число Стирлинга[3] $S(n, k)$ – это число возможных разбиений множества, состоящего из n элементов на k частей.

При $n>1 S(n, k)=k\cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1)$.

Таблица 1.1. Числа Стирлинга при $n<7$ и $k<7$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	
2	0	1	1	0	0	0	0	0	
3	0	1	3	1	0	0	0	0	
4	0	1	7	6	1	0	0	0	
5	0	1	15	25	10	1	0	0	
6	0	1	31	90	65	15	1	0	
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
…									

Свойства чисел Стирлинга

1. $S(n, k)=0$ при $k>n$;
2. $S(n, 2)=2^{n-1} - 1$;
3. $S(n, n)=1$;
4. $S(n, n-1)= 0{,}5n(n-1)$.

Пример:

Пусть дано множество $B=\{a, b, c, d\}$. Определить количество возможных разбиений данного множества на 3 части. Получаем: $S(4, 3) = 6$.

Проверим, составив все возможные разбиения множества B на 3 части:

$\{a\}, \{b\}, \{c, d\}$ $\{a\}, \{b, c\}, \{d\}$ $\{a\}, \{b, d\}, \{c\}$

$\{a, c\}, \{b\}, \{d\}$ $\{a, d\}, \{b\}, \{c\}$ $\{a, b\}, \{c\}, \{d\}$

Получили 6 вариантов разбиений множества из 4 элементов на 3 части.

[3]Джеймс Стирлинг (англ. James Stirling, май 1692 – 5декабря1770) – шотландский математик.

Число Белла $B(n)$ – это общее число разбиений множества, состоящего из n элементов.

$$B(n) = S(n, 0) + S(n, 1) + S(n, 2) + \ldots + S(n, n).$$

Таблица 1.2. Числа Белла при $n<7$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$B(n)$	1	1	2	5	15	52	203	877	…

Пример:
Пусть дано множество $D = \{a, b, c,\}$. Определить общее количество разбиений данного множества.
$n = 3$, значит $B(3) = 5$.
Проверим, составив все возможные разбиения множества D:
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$; $\{a\},\{b, c\}$; $\{a, c\}, \{b\}$; $\{a, b\}, \{c\}$; $\{a, b, c\}$.
Получилось 5 вариантов разбиений исходного множества D.

1.8. Декартово произведение

Декартовым[4] (*прямым*) произведением множеств A и B называется множество $A\times B$ упорядоченных пар, в котором первый элемент пары из множества A, а второй элемент пары – из множества B: $A\times B=\{<x, y>|\ x\in A, y \in B\}$.

Пример:
Пусть $A= \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Тогда $A\times B=\{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <2, 5>, <3, 2>, <3, 3>, <3, 4>, <3, 5>\}$.
Изобразить $A\times B$ можно следующим образом (рис. 1).

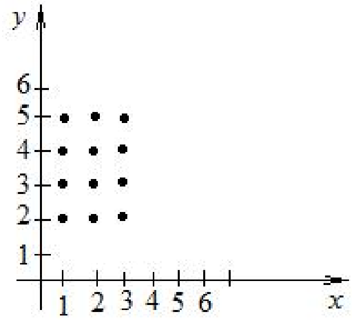


Рисунок 1.12. Графическое изображение декартова произведения

Свойства декартова произведения

1. Некоммутативно

$A\times B \neq B\times A$.

[4] Декарт Рене (1596 – 1659) – французский философ и математик, один из первых создателей формального языка математики.

2. Ассоциативно

   $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)=A\times B\times C.$

3. Дистрибутивно

   $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),$

   $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C).$

Декартово произведение также определяется и для n множеств $X_1, X_2, \ldots X_n$. *Декартово произведение* $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ – это множество упорядоченных наборов вида $<x_1, x_2, \ldots x_n>$, где $x_k\in X_k$, $k=1, 2, \ldots n$.

Пример:
Пусть множество X_1 – это порядковые номера студентов группы, множество X_2 – это фамилии студентов группы, множество X_3 – это оценка каждого студента группы за расчетную работу по линейной алгебре, множество X_4 – это оценка за контрольную работу по линейной алгебре. Тогда декартово произведение этих множеств будет состоять и наборов вида: <1, Петров, 4, 5>, <2, Иванов, 3, 3>, <3, Сидоров, 5, 3> и т.д.

Степенью декартова произведения $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ называется число множеств n, входящих в это декартово произведение.
Кортежа – это конечная последовательность $\alpha=<x_1, x_2, \ldots x_n>$, состоящая из элементов множеств $X_1, X_2, \ldots X_n$, $x_k\in X_k$, $k=1, 2, \ldots n$.
Элемент x_k называется *k-й координатой* кортежа или k-й компонентой кортежа.

Пример:
Пусть множество X_1 – это фамилии сотрудников фирмы, множество X_2 – это имена сотрудников фирмы, множество X_3 – это стаж работы сотрудников в годах, множество X_4 – это заработная плата сотрудников (руб.). Тогда кортежи могут иметь вид: <Петров, Константин, 4, 30 000>, <Иванова, Ольга, 3, 27 000>, <Сидоров, Петр, 5, 35 000> и т.д.

Кортеж, не содержащий ни одной координаты, т.е. кортеж длины 0, называется *пустым кортежем*.
Кортежи α и β равны $\alpha = \beta$, если они имеют одинаковую длину и их координаты, стоящие на одинаковых местах, равны:
$\alpha = \beta$ для $\alpha=<x_1, x_2, \ldots x_n>$и $\beta=<y_1, y_2, \ldots y_m>$,если $m=n$ и $x_k= y_k$ для всех $k=1, 2, \ldots n$.

Пример:

Кортежи <1, 2, 3> и <3, 1, 2> различны, хотя имеют одинаковую длину и одинаковые элементы, но элементы стоят в разных последовательностях.

Кортежи $<\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81}>$ и $<1, 2^2, 3^2>$ равны, так как, не смотря на различную запись элементов, при вычислении получаем: $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{16}=2^2$, $\sqrt{81}=3^2$. Значит, кортежи имеют одинаковую длину и на одинаковых местах стоят одинаковые элементы.

График P – это подмножество декартова произведения двух множеств.

Инверсия графика P – это график P^{-1}, в котором внутри каждой пары меняется порядок элементов: $P^{-1}=\{<y, x> \mid <x, y>\in P\}$.

Пример:

Пусть дан график $P=\{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <2, 5>\}$.

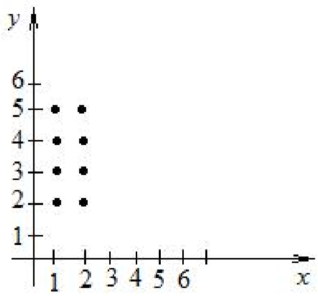


Рисунок 1.13. График *P*

Найти P^{-1}.

Т.к. $<1, 2>\in P$, то $<2, 1> \in P^{-1}$. Аналогично для всех элементов графика *P*.

$P^{-1}=\{<2, 1>, <3, 1>, <4, 1>, <5, 1>, <2, 2>, <3, 2>, <4, 2>, <5, 2>\}$.

Изобразим графически полученный результат.

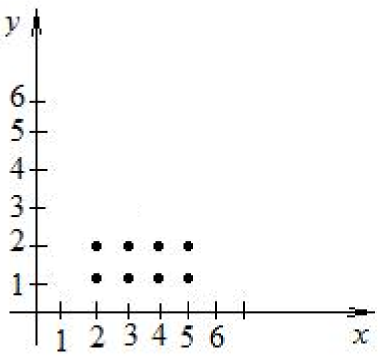
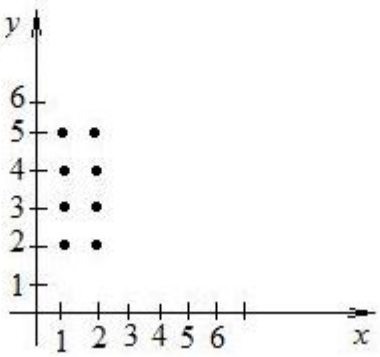


Рисунок 1.14. Инверсия P^{-1}

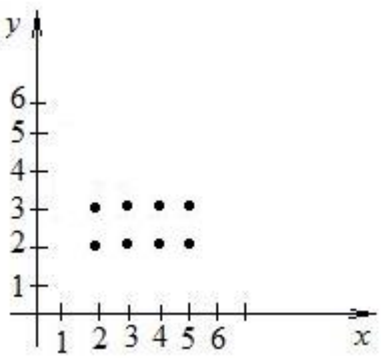
Композиция графиков P и Q–график $P\circ Q$, в котором упорядоченные пары удовлетворяют следующему свойству: существует элемент *z* такой, что выполняется $<x, z>\in P$ и $<z, y>\in Q$: $P\circ Q = \{<x, y> \mid \exists z <x, z>\in P$ и $<z, y>\in Q\}$.

Пример 1:

Пусть даны графики P={<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <2, 5>} и Q={<2, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>, <4, 2>, <4, 3>, <5, 2>,<5, 3>}.



P



Q

Рисунок 1.14. Графики P и Q

Определить композицию $P\circ Q$.

Для исходных P и Q получим: $P\circ Q$={<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>}.

Изобразим полученную композицию $P\circ Q$.

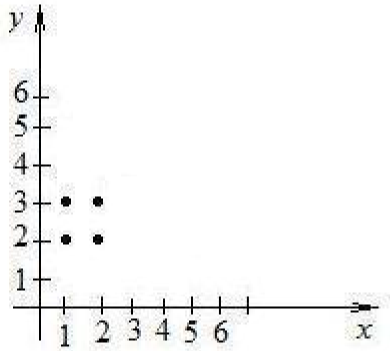


Рисунок 1.15. График композиции $P\circ Q$

Пример 2:

Пусть даны графики P={<1, 3>, <2, 1>, <3, 6>, <4, 4>, <5, 3>} и Q={<1, 4>, <2, 2>, <3, 5>, <4, 6>, <5, 3>, <6, 1>}.

Определить композицию $P\circ Q$.

Для исходных P и Q получим: $P\circ Q$={<1, 5>, <2, 4>, <3, 1>, <4, 6>, <5, 5>}.

Свойства графиков:

1. $(P^{-1})^{-1}=P$,
2. $(P\circ Q)^{-1}= P^{-1}\circ Q^{-1}$.

1.9. Отображение множеств

Соответствие f, сопоставляющее каждому элементу x из множества X один и только один элемент из множества Y, называется *однозначным отображением* множества X во множество Y.

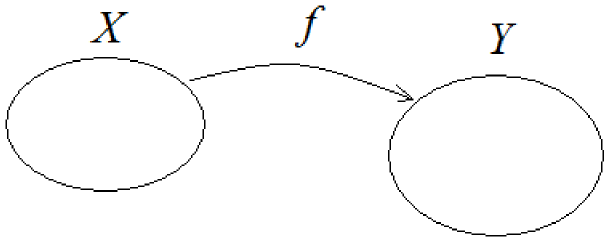


Рисунок 1.17. Отображение f

Полученный при этом элемент множества Y называется *образом* элемента x и обозначается $f(x)$.
Если $f(x)=y$, то элемент x называется *прообразом* элемента y при отображении f.
Совокупность всех прообразов элемента y при отображении f называется *полным прообразом* этого элемента и обозначается $f^{-1}(y)$: $f^{-1}=\{x|\ f(x)=y\}$.

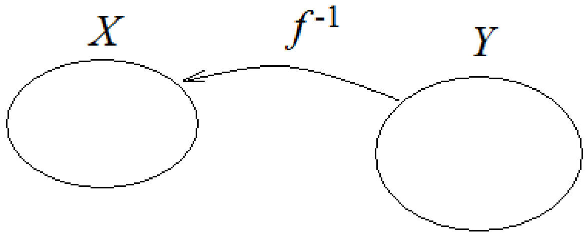


Рисунок 1.18. Полный образ f^{-1}

Каждому подмножеству A множества X ($A\subseteq X$) соответствует его образ $f(A)$ при отображении f. Этот образ состоит из всех элементов y множества Y, которые являются образами какого-либо элемента из A: $f(A)=\{y|y=f(a),\ a\in A\}$.
Множество A называется *областью определения отображения* f, а множество $f(A)$ называется *множеством значений* этого отображения.
Каждому подмножеству B множества Y ($B\subseteq Y$) соответствует его полный прообраз $f^{-1}(B)$ при отображении f. Он состоит из всех элементов x множества X, образы которых принадлежат B: $f^{-1}(B)=\{x|f(x)\in B\}$.
Отображение f называется *сюръективным*, если при отображении множества X в множество Y каждый элемент множества Y имеет прообраз.

Пример:
Пусть задано f:[0; 1]→[0; 3], функция $y = 12(x-0{,}5)^2$.
Из уравнения $y = 12(x-0{,}5)^2$ при $y\in[0; 3]$ определим корни:

$x_1 = 0{,}5 - 0{,}5\sqrt{\frac{y}{3}}$ и $x_2 = 0{,}5 + 0{,}5\sqrt{\frac{y}{3}}$.

Если $y\in(0,\ 3]$, то оба корня принадлежат $(0;\ 1]$, а если $y=0$, то $x_1 = x_2 = 0{,}5\in[0;\ 1]$.

Следовательно, для всех $y\in[0;\ 3]$ уравнение $y = 12(x-0{,}5)^2$ имеет хотя бы одно решение, поэтому рассматриваемая функция сюръективна.

Отображение f называется *инъективным*, если при отображении множества X в множество Y для каждого элемента y множества Y существует не более одного прообраза: $\forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 \neq x_2$ верно $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Пример:

Пусть задано f:[0; 1]→[0; 3], функция $y = 3^x$.

Для произвольного $y\in[0;\ 3]$ уравнение $y = 3^x$имеет не более одного решения x, принадлежащего отрезку [0; 1]. При $y\in[1;\ 3]$ решением является $x = \log_3 y$, а при $y\in[0;1)$ решений нет. Следовательно, $y = 3^x$ инъективна.

Если отображение сюръективно и инъективно, оно называется *биективным* (взаимно однозначным).

Пример:

Пусть задано f:[0; 1]→[0; 3], функция $y = 3\sin\frac{\pi x}{2}$.

Для произвольного $y\in[0;\ 3]$ уравнения $y = 3\sin\frac{\pi x}{2}$ найдется единственное решение $x = \frac{2}{\pi}arcsin\frac{y}{3}$, принадлежащее отрезку [0; 1], поэтому функция $y \to 3\sin\frac{\pi x}{2}$ является биективной.

Примеры решения задач

1. Даны множества A = (0; 10), B = [2; 12], C = (5; 7]. Определите A∪B, A∩B, A∪C, A\C.
   Решение:
   A∪B = (0; 12]

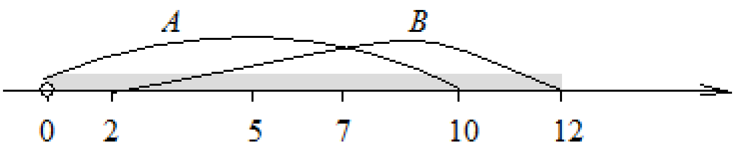


Рисунок 1.20. Множество A∪B

A∩B=[2; 10)

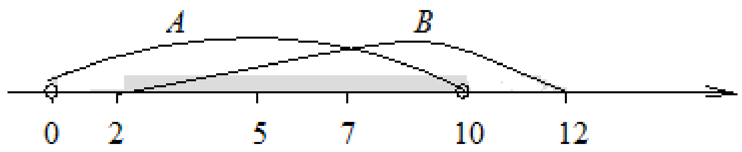


Рисунок 1.21. Множество A∩B

A\C=(0; 5] ∪ (7; 10)

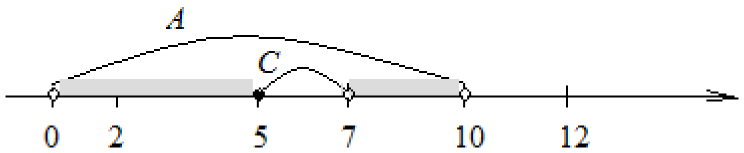


Рисунок 1.22. Множество A\C

2. Пусть известны множества A: $x^2+y^2 \leq 4$ и B: $y \geq x^2$. Определите A∩B и A\B.
   Решение:
   A∩B

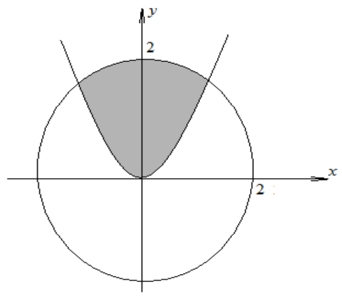


Рисунок 1.23. Множество A∩B

A\B

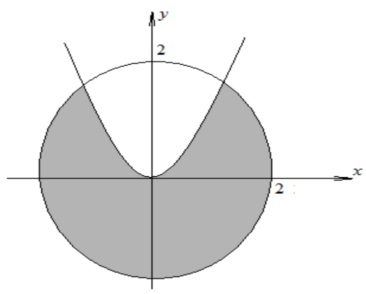


Рисунок 1.24. Множество A\B

3. Используя диаграммы Эйлера–Венна доказать следующее тождество $A\Delta B = B\Delta A$.
   Решение:
   Распишем левую часть тождества $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
   Изобразим данное множество.

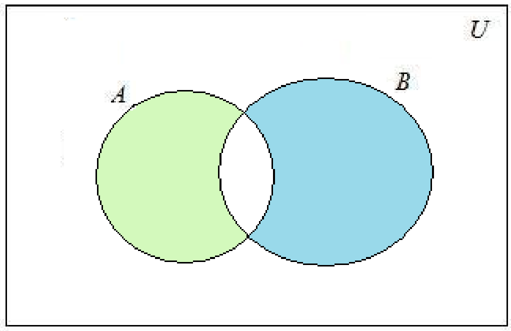


Рисунок 1.25. Множество $A\Delta B$

На рисунке $(A\backslash B)$ закрашено зеленым цветом, а $(B\backslash A)$ – голубым. В итоге закрашенная область – это и есть $A\Delta B$.
Распишем теперь правую часть тождества $B\Delta A = (B\backslash A) \cup (A\backslash B)$.
Изобразим данное множество.
На рисунке $(B\backslash A)$ закрашено желтым цветом, а $(A\backslash B)$ – красным. В итоге закрашенная область – это и есть $B\Delta A$.

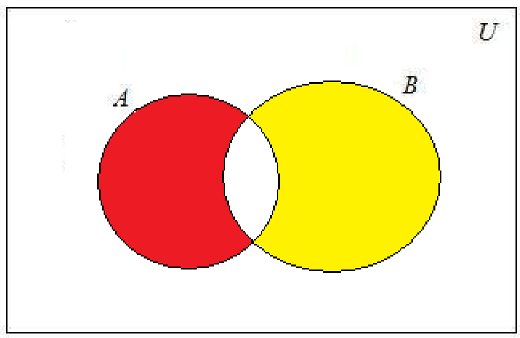


Рисунок 1.26. Множество $B\Delta A$

Таким образом, получили две одинаковых диаграммы, доказывающих верное тождество.

4. Определить декартово произведение $A\times B$, если $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{a, b\}$.
   Решение:
   По определению декартова произведения получим множество упорядоченных пар, в которых на первом месте будет находится элемент множества A, а на втором – элемент множества B:
   $A\times B=\{<1, a>, <1, b>, <2, a>, <2, b>, <3, a>, <3, b>\}$.

5. Пусть дан график $P=\{<2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 2>, <4, 1>, <4, 2>, <5, 1>, <5, 2>\}$. Изобразите график P. Определите и изобразите P^{-1}.
   Решение:
   График P.

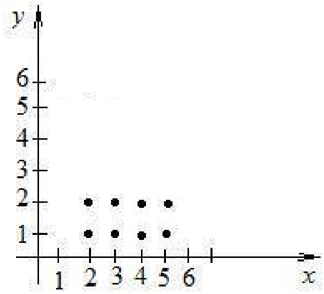


Рисунок 1.27. График P

По определению инверсии, получаем P^{-1} = {<1, 2>, <2, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <1, 4>, <2, 4>, <1, 5>, <2, 5>}.

График инверсии P^{-1}.

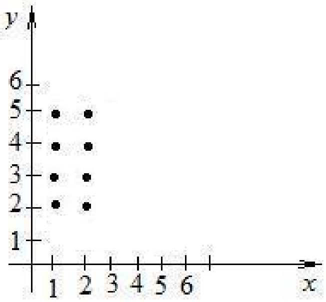


Рисунок 1.28. Инверсия P^{-1}

6. Даны два графика P = {<1, 3>, <2, 1>, <3, 6>, <4, 4>, <5, 3>} и Q = {<1, 4>, <2, 2>, <3, 1>, <4, 6>, <5, 3>, <6, 5>}.
   Определите композицию $P \circ Q$.
   Решение:
   Композиция$P \circ Q$={<1, 1>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6>, <5, 1>}.

7. Известно множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Определите количество разбиений данного множества на 3 части и укажите их.
   Решение:
   По таблице Стирлинга находим $S(4, 3) = 6$. Проверим разбиением:
   {1}, {2}, {3, 4}
   {1}, {2, 3}, {4}
   {1, 2}, {3}, {4}
   {1, 3}, {2}, {4}
   {1, 4}, {2}, {3}
   {1}, {3}, {2, 4}

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите A∪B, A∩B, A∪C, A∩C, C∪B, C∩B, если

а) множество А=(3; 7), множество В=[1; 4] и множество С=(3; 4];
б) множество А=(5; 8), множество В=[1; 6] и множество С=[1; 8);
в) множество А=(- 3; 5), множество В=[0; 7] и множество С=(- 3; 7].

2. Множество А: $y<x+1$, множество В: $y<5-x$, множество С: $y>0$. Определите А∩В∩С.

3. Множество А: $(x-1)^2+y^2\leq 1$, множество В: $y>(x-1)^2$. Определите множества А∩В, А∪В, А\В.

4. Множество А: $y<7-x$, множество В: $y<6+x$, множество С: $y>0$. Определите А∩В∩С.

5. Множество А: $|x|+|y|\leq 5$, множество В: $x^2+y^2>1$. Определите А∪В, А∩В, А\В.

6. Множество А: $x+y<5$, множество В: $y-x>8$, множество С: $x<7$. Определите А∩В∩С.

7. Множество А: $(x+1)^2\leq y$, множество В: $(x-3)^2+y^2\leq 4$. Определите А∪В, А∩В, В\А.

8. Множество А: $y-x<3$, множество В: $x-y>2$, множество С: $y<0$. Определите А∩В∩С.

9. Множество А: $|x-1|+|y|\leq 7$, множество В: $x^2+y^2>4$. Определите А∪В, А∩В, А\В.

10. Используя диаграммы Эйлера–Венна доказать:
    а) А∩(В∩С)=(А∩В)∩С,
    б) А∩(В∪С)=(А∩В) ∪(А∩С),
    в) А∪(В∩С)=(А∪В) ∩(А∪С).

11. В результате опроса 100 студентов, выяснили, что 28 из них учат испанский язык, 30 – немецкий язык, 42 – французский язык, испанский и немецкий изучают – 8 человек, испанский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка учат 3 человека из опрошенных. Определите:
    а) сколько человек из опрошенных не изучают ни одного языка?
    б) сколько студентов изучают только один французский язык?

12. Решите систему уравнений относительно X: $\begin{cases} A\cup X = B\cap X, \\ A\cap X = C\cup X, \\ \bar{A}\backslash X = C\backslash A. \end{cases}$

13. Решите систему уравнений относительно X: $\begin{cases} A\setminus X = X\setminus B, \\ X\setminus A = C\setminus X, \\ \overline{B \cup X} = X\setminus A. \end{cases}$

14. Решите систему уравнений относительно X: $\begin{cases} A \cap X = B\setminus X, \\ X\setminus A = C \cup X, \\ X\setminus C = A \cup B. \end{cases}$

15. Решите систему уравнений относительно X: $\begin{cases} A \cup X = B\setminus X, \\ X\setminus B = C \cup X, \\ \bar{A}\setminus C = X\setminus A. \end{cases}$

16. Изобразите результат операции: $X\times Y$, если $X=\{10,20\}$, $Y=\{0, 5, 6\}$.

17. Изобразите результат операции: $X\times Y$, если $X=\{0,11,12\}$, $Y=\{10,12\}$.

18. Изобразите результат операции: $X\times Y$, если $X=\{0,1,2\}$, $Y=\{2,3\}$.

19. Изобразите результат операции: $X\times Y$, если $X=\{14, 16\}$, $Y=\{0,1,2\}$.

20. Изобразите график $T=\{<1, 5>, <1, 6>, <2, 4>, <2, 5>, <3, 4>, <4, 3>\}$ и его инверсию.

21. Изобразите график $G=\{<1, 4>, <2, 4>, <2, 5>, <3, 5>, <3, 6>, <4, 4>\}$ и его инверсию.

22. Определите композицию графиков T и G из предыдущих примеров.

23. Изобразите графики $P = \{<1, 2>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 3>, <5, 2>, <6, 1>\}$, $Q = \{<1, 3>, <2, 4>, <3, 2>, <4, 3>, <5, 1>, <6, 2>\}$ и их композицию.

24. Определите количество разбиений множества, состоящего из 6 элементов на 3 части.

25. Определите количество разбиений множества, состоящего из 7 элементов на 4 части.

26. Определите количество разбиений множества, состоящего из 5 элементов на 3 части.

27. Определите количество разбиений множества, состоящего из 6 элементов на 5 частей.

28. Определите количество разбиений множества $\{f, p, w, d\}$ на 3 части и на 2 части. Проверьте результаты разбиением.

29. Продолжите таблицу Стирлинга и определите $S(8, 4)$, $S(8, 5)$, $S(9, 3)$, $S(9, 6)$.

30. Определите общее число разбиений множества $\{x, y, t, v, s\}$ и проверьте результат разбиением.

31. Продлите таблицу чисел Белла и рассчитайте $B(8)$ и $B(9)$.

2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Бинарным отношением на множестве A называется пара $\Phi=\langle A, F\rangle$. Здесь A – область задания отношения, F – график отношения, причем $F \subseteq A^2$.
Если $\langle x, y\rangle \in F$, то говорят, что x и y вступают в отношение φ. Запись: $x\ \varphi\ y$.
Если x и y не вступают в отношение φ, тогда запись: $\overline{x\ \varphi\ y}$.

Пример 1:
Пусть A – множество студентов факультета. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что студенты x и y учатся в одной группе.

Пример 2:
Пусть A – множество прямых на плоскости. Две прямые на плоскости l и m имеют хотя бы одну общую точку: $l\varphi m$.

2.1. Свойства отношений

1. *Рефлексивность*
   свойство бинарных отношений, выражающее выполнимость их для пар объектов с совпадающими членами (так сказать, между объектом и его «копией»): отношение φ называется рефлексивным, если для любого объекта x из области его определения выполняется $x\varphi x$: $\forall x \in A\ \ x\varphi x$.
   Примерами рефлексивных отношений являются отношения типа равенства, эквивалентности, подобия и отношения нестрогого порядка (любой предмет не меньше и не больше самого себя).

   Пример 1:
   Пусть A – множество студентов факультета. Запись$x\ \varphi\ y$ обозначает, что студенты x и y учатся в одной группе.
   Тогда отношение φ является рефлексивным, т.к. для любого студента можно сказать, что он учится в одной группе с самим собой.

   Пример 2:
   Пусть A – множество прямых на плоскости. Две прямые на плоскости l и m имеют хотя бы одну общую точку: $l\varphi m$.
   Тогда отношение φ является рефлексивным, т.к. о любой прямой на плоскости можно сказать, что она имеет хотя бы одну общую точку с самой собой.

2. *Нерефлексивность*
   свойство бинарных отношений, выражающее их невыполнимость их для пар объектов с совпадающими членами: отношение φ называется

нерефлексивным, если существует объект x из области его определения, для которого не выполняется $x\,\varphi\,x$: $\exists x \in A|\overline{x\varphi x}$. Обозначается нерефлексивность следующим образом: $\overline{x\varphi x}$.

Пример 1:
Пусть A – множество студентов факультета. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что студент x обыграл студента y в шахматы на турнире[5].
Тогда отношение φ является нерефлексивным, т.к. найдется студент, не обыгравший сам себя.

Пример 2:
Пусть $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x<y$.
Тогда отношение φ является нерефлексивным, т.к. найдется такое число x, для которого неравенство $x<x$ не выполняется.

3. *Симметричность*
свойство бинарных отношений. Отношение φ, определенное на некотором множестве, называется симметричным, если для любых элементов этого множества x и y верно следующее: из того, что x находится в отношении φ к y ($x\varphi y$) следует, что и y находится в этом же отношении к x ($y\ \varphi\ x$): $\forall x, y \in A\ \ x\varphi y\ \Rightarrow y\varphi x$.
Примерами симметричных отношений: отношения типа равенства, отношения родства, соседства и др.

Пример 1:
Пусть A – множество жителей одного дома. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что жильцы x и y являются соседями.
Тогда отношение φ является симметричным, т.к. из того, что x является соседом y следует, что и y является соседом x.

Пример 2:
Пусть A – множество окружностей на плоскости. Запись $r\ \varphi\ t$ обозначает, что окружности r и t касаются друг друга, то есть имеют одну общую точку.
Тогда отношение φ является симметричным, т.к. из того, что r касается t следует, что и t касается r.

4. *Антисимметричность*
свойство бинарных отношений. Отношение φ, определенное на некотором множестве, называется антисимметричным, если для любых элементов этого множества x и y верно следующее: из того, что x

[5] Под турниром здесь и далее будем понимать следующую схему соревнований: «каждый играет с каждым», каждая пара играет один раз, игра идет до победы одного из игроков.

находится в отношении φ к $y(x\ \varphi\ y)$ и y находится в этом же отношении к x $(y\varphi x)$ следует, что эти элементы равны $x=y$: $\forall x,y \in A\ \ x\varphi y, y\varphi x\ \Rightarrow x = y$.
Антисимметричность также можно определить следующим образом. Отношение φ, определенное на некотором множестве, называется антисимметричным, если для любых элементов этого множества x и y верно следующее: из того, что x находится в отношении φ к $y(x\ \varphi\ y)$ и x не равен $yx \neq y$следует, что y не находится в этом же отношении φ к x $(\overline{x\varphi y})$: $\forall x,y \in A\ \ x\varphi y, x \neq y \Rightarrow \overline{y\varphi x}$.

Пример 1:
Пусть A – множество студентов факультета. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что студент x обыграл студента y в шахматы на турнире.
Тогда отношение φ является антисимметричным, т.к. найдутся такие студенты x и y (участники турнира), для которых верно следующее: x обыграл y, а y не обыграл x.

Пример 2:
Пусть $x\in \mathbb{Z}$ и $y\in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x<y$.
Тогда отношение φ является антисимметричным, т.к. найдутся такие числа x и y, для которых не будет выполняться $x<y$ и $y<x$.

5. *Транзитивность*
свойство бинарных отношений: отношение φ называется транзитивным, если для любых элементов x, y и z множества, на котором определено это отношение, из $x\ \varphi\ y$ и $y\ \varphi\ z$ следует $x\ \varphi\ z$: $\forall x,y,z\ \in A\ x\varphi y, y\varphi z\ \Rightarrow x\varphi z$.
Примерами транзитивных отношений являются отношения типа равенства, отношения порядка.

Пример 1:
Пусть $x\in \mathbb{Z}$, $y\in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x=y$.
Тогда отношение φ является транзитивным, т.к. для любых чисел x, y, z верно следующее: из $x = y$ и $y = z$ следует $x=z$.

Пример 2:
Пусть $x\in \mathbb{Z}$, $y\in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x<y$.
Тогда отношение φ является транзитивным, т.к. для любых чисел x, y, z верно следующее: из $x <y$ и $y < z$ следует $x<z$.

6. *Связность*
свойство бинарных (двуместных) отношений: отношение φ называется связным, если для любых неравных элементов x и $y(x \neq y)$ множества,

на котором определено это отношение, либо x находится в отношении φ к y($x\,\varphi\,y$), либо y находится в этом же отношении к x ($y\varphi x$): $\forall x, y \in A\ x \neq y \Rightarrow x\varphi y$ или $y\varphi x$.

Пример 1:
Пусть A – множество студентов, принимавших участие в турнире по шахматам. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что студент x обыграл студента y.
Тогда отношение φ является связным, т.к. для любых двух различных студентов x и y следующее: либо x обыграл y, либо y обыграл x.

Пример 2:
Пусть $x\in \mathbb{Z}$ и $y\in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x<y$.
Тогда отношение φ является связным, т.к. для любых чисел x, y, $x \neq y$ верно следующее: либо $x < y$, либо $y < x$.

Любое отношение может обладать тем или иным свойством из выше перечисленных.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением частичного порядка*.

Пример:
Пусть $x\in \mathbb{N}$ и $y\in \mathbb{N}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что x делится на y $x \vdots y$. То есть при делении x на y остаток = 0.
Проверим, является ли данное отношение φ отношением частичного порядка. Данное отношение рефлексивно, так как $\forall\ x \in \mathbb{N}$ выполняется x: x=1.
Отношение антисимметрично, так как найдутся такие числа x и y, для которых не будет выполняться $x \vdots y \Rightarrow y \vdots x$.
Покажем, что данное отношение является транзитивным $\forall\ x, y, z \in \mathbb{N}$. Пусть $x \vdots y$, то есть $x=k\,y$, где $k \in \mathbb{N}$. Аналогично для $y \vdots z$– $y=m\,z$, $m\in \mathbb{N}$. Значит, $x=k\,y=k\,m\,z$, то есть $x \vdots z$.

Связное отношение частичного порядка называется *отношением линейного порядка.*

Пример:
Пусть $x\in \mathbb{Z}$ и $y\in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x \leq y$.
Проверим, является ли данное отношение φ отношением линейного порядка. Данное отношение рефлексивно, так как $\forall\ x \in \mathbb{Z}$ выполняется $x \leq x$. Также данное отношение является антисимметричным, так как

найдутся такие числа x и y, для которых не будет выполняться $x \le y$ и $y \le x$.

Отношение φ является транзитивным, так как $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Z}$ из условий $x \le y$ и $y \le z$ следует $x \le z$.

Отношение φ связно, так как для любой пары чисел x и y выполняется: $x \le y$ или $y \le x$.

Значит, отношение $x \le y$ является отношением линейного порядка на множестве $\mathbb{Z}$.

Нерефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением строгого порядка*.

Пример:

Пусть рассматривается множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Запись $x\varphi y$ означает, что $x<y$. Определить, является ли данное отношение отношением строгого порядка.

Отношение φ из данного примера является:

- нерефлексивным, т.к. существует такое число x, для которого не выполняется $x<x$;
- антисимметрично, т.к. найдется такая пара x и y, для которой из отношения $x<y$ не следует $y<x$;
- транзитивно, т.к. из $x<y$ и $y<z$ следует, что $x<z$;

Итак, данное отношение $x<y$ нерефлексивно, антисимметрично, транзитивно значит, оно является отношением строгого порядка.

Связное отношение строгого порядка называется *отношением строгого линейного порядка.*

Пример:

Пусть A – множество студентов, принимающих участие в турнире по шахматам. Запись $x\varphi y$ означает, что x по итогам всех игр набрал больше очков, чем y. Определить, является ли данное отношение отношением строгого линейного порядка.

Отношение φ из данного примера является:

- нерефлексивным, т.к. для любого студента x не выполняется $x\varphi x$;
- антисимметрично, т.к. если студент x обыграл студента y ($x\varphi y$), то отсюда не следует, что студент y обыграл студента x ($y\varphi x$), т.е. из $x\varphi y$ не следует $y\varphi x$;
- транзитивно, т.к. если студент x набрал очков больше, чем студент y ($x\varphi y$) и студент y набрал очков больше, чем студент z ($y\varphi z$), то из этого следует, что студент x набрал очков больше, чем студент z ($x\varphi z$), т.е из $x\varphi y$ *и* $y\varphi z \Rightarrow x\varphi z$;

- связно, т.к. любая пара студентов, принимающих участие в турнире, находится в отношении φ: x набрал очков больше, чем $y(x\varphi y)$, или y набрал очков больше, чем $x(y\varphi x)$.

Итак, данное отношение $x\varphi y$ нерефлексивно, антисимметрично, транзитивно и связно, значит, оно является отношением строгого линейного порядка.

Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности.*

Пример:

Пусть рассматриваются натуральные числа, т.е. элементы множества $\mathbb{N}$. Запись $x\varphi y$ обозначает, что $x=y$. Определить, является ли данное отношение отношением эквивалентности.

Данное отношение обладает следующими свойствами:

- рефлексивно, т.к. $x=x$;
- симметрично, т.к. из $x=y$ следует $y=x$;
- транзитивно, т.к. если $x=y$ и $y=z$, то $x=z$.

Значит, можно сказать, что отношение равенства является отношением эквивалентности.

2.2. Особенности графического изображения бинарных отношений

Отметим, что в данном пункте рассматриваются отношения, заданные на множестве вещественных чисел.

1. График рефлексивного отношения всегда содержит диагональ, то есть элементы, расположенные на биссектрисе угла I четверти координатной плоскости.

Рисунок 2.1. График рефлексивного отношения

2. График симметричного отношения симметричен относительно диагонали.

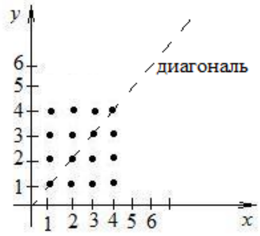


Рисунок 2.2. График симметричного отношения

3. В стрелочной диаграмме рефлексивного отношения все вершины имеют петли.

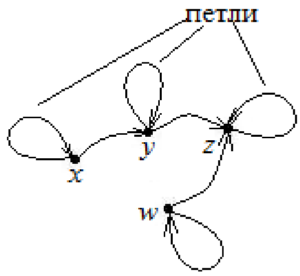


Рисунок 2.3. Стрелочная диаграмма рефлексивного отношения

4. В стрелочной диаграмме симметричного отношения все стрелки парные.

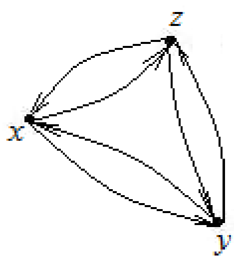


Рисунок 2.4. Стрелочная диаграмма симметричного отношения

5. В стрелочной диагонали транзитивного отношения для любой пары стрелок таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья стрелка, соединяющая начало первой и конец второй.

Рисунок 2.5. Стрелочная диаграмма транзитивного отношения

Примеры решения задач

1. Определите свойства отношения: сумма натуральных чисел x и y делится на 3 без остатка: $x \vdots 3$, $y \vdots 3$.
   Решение:
   Проверим каждое из свойств по порядку.
   Данное отношение
   - нерефлексивно, так как существует x такое, что $2x$ не будет делиться без остатка на 3, то есть $\overline{x\varphi x}$;
   - симметрично, так как если $(x+y)$ делится на 3 $(x+y) \vdots 3$, то и $(y+x)= (x+y)$ тоже делится на 3 $(y+x) \vdots 3$, то есть из $x \varphi y$ следует $y \varphi x$;
   - не является транзитивным, так как из того, что $(x+y)$ делится на 3 и $(y+z)$ делится на 3, не следует, что $(x+z)$ делится на 3 (если $x=3k-y$ и $z=3l-y$, то $x+z = 3k - y+3l - y = 3(k+l) - 2y$ для полученного выражения можно подобрать такое значение y, при котором $x+z$ не делится на 3 без остатка), то есть из $x \varphi y$ и $y \varphi x$ не следует $x \varphi z$;
   - не является связным, так как не для всех пар натуральных чисел верно, что либо $(x+y)$ делится на 3, либо $(y+x)$ делится на 3.
   -

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите свойства отношения: число x больше числа y на 2 (на множестве натуральных чисел).

2. Определите свойства отношения точка A симметрична точке B относительно оси $0x$ (на плоскости $x0y$).

3. Определите свойства отношения: число x делится на число y без остатка (на множестве натуральных чисел).

4. Определите свойства отношения точка A отличается от точки B только в одной координате (на плоскости $x0y$).

5. Проверить какими свойствами (рефлексивность, нерефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, связность) обладает отношение φ.
   а) Φ=<студенты СГАУ, $x\varphi y \leftrightarrow x$ и y учатся в одной группе>,
   б) Φ=<прямые в пространстве, $x\varphi y \leftrightarrow x$ и y имеют хотя бы одну общую точку>,
   в) Φ=<множество окружностей на плоскости, $x\varphi y \leftrightarrow x$ касается y>,
   г) Φ=<N, $x\varphi y \leftrightarrow x$ и y имеют одинаковый остаток от деления на 3>.

6. Определите свойства следующего отношения
   $x \in N, y \in N\ (x\varphi y \Rightarrow x{:}\, y$ кратно 3).

7. Определите свойства следующего отношения
   $x \in N, y \in N\ (x\varphi y \Rightarrow x + y\ кратно\ 2)$.

8. Определите свойства следующего отношения
   $x \in N, y \in N\ (x\varphi y \Rightarrow x \cdot y\ кратно\ 3)$.

9. Определите свойства следующего отношения
   $x \in N, y \in N\ (x\varphi y \Rightarrow x - y\ кратно\ 3)$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать истинно оно или ложно.
Высказывания обозначают латинскими буквами. Всякая буква, обозначающая некоторое высказывание, – это переменная величина, принимающая одно из двух значений – 0 или 1.

3.1. Основные функции алгебры логики. Таблицы истинности

Конъюнкция – логическая операция, по своему применению максимально приближенная к союзу «и». Обозначение: $x\&y$, $x\wedge y$, $x\cdot y$. Также называется логическое «и», логическое умножение. Логическая связка «и», «а», «но», «хотя». В префиксной записи $\min(x, y)$.

Таблица 3.1. Таблица истинности конъюнкции

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция – логическая операция, по своему применению максимально приближенная к союзу «или». Обозначение: $x \vee y, x + y$. Также называется логическое «или», логическое сложение. Логическая связка «или». В префиксной записи $\max(x, y)$.

Таблица 3.2. Таблица истинности дизъюнкции

x	y	$x\vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация. Обозначение: $x \Rightarrow y, x \supset y, x \rightarrow y$. Логическая связка «если x, то y», «из x следует y», «x влечет y».
$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$

Таблица 3.3. Таблица истинности импликации

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Инверсия, отрицание

Обозначение: $\neg x$, $\bar{x}$, $\rceil x$. Также называется отрицанием. Логическая связка «не».

Таблица 3.4. Таблица истинности инверсии

x	$\neg x$
0	1
1	0

Эквивалентность

Обозначение: $x \sim y, x \equiv y, x \leftrightarrow y$. Логическая связка «$x$ эквивалентно y», «xистинно тогда и только тогда, когда y».

$x \sim y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$

Таблица 3.5. Таблица истинности эквивалентности

x	y	$x\sim y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Сложение по модулю два

или антиэквивалентность. Обозначение: $x \oplus y$.

$x \oplus y = \overline{x \sim y}$.

Таблица 3.6. Таблица истинности сложения по модулю два

x	y	$x\oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Штрих Шеффера

или антиконъюнкция. Обозначение: $x|y$.

$x|y = \overline{x \wedge y}$.

Таблица 3.7. Таблица истинности штриха Шеффера

x	y	$x|y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрелка Пирса
или антидизъюнкция. Обозначение: $x \downarrow y$.
$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

Таблица 3.8. Таблица истинности стрелки Пирса

x	y	$x\downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

3.2. Алфавит алгебры логики

Алфавит – это любое непустое множество. В алгебре логики алфавит состоит из:

- переменных, обозначающих высказывания;
- логических символов, обозначающих логические функции;
- скобок.

Формула – это произвольная конечная последовательность символов, которая удовлетворяет следующим правилам:

- любая переменная, обозначающая высказывание, есть формула;
- если A и B – формулы, то формулами являются $A \wedge B, A \vee B, \bar{A}$, $A \sim B, A \to B$;
- других формул нет.

Особенности употребления скобок:

1) внешние скобки не записывают;
2) каждое вхождение знака отрицания относится к наикратчайшей формуле, следующей за ним;
3) не записывают скобки, отсутствие которых не меняет смысл формулы.

Список переменных формулы A – это упорядоченный набор всех переменных, содержащихся в данной формуле.

Пример:
Пусть формула $A = x \to y \vee (z \wedge \bar{x}) \sim t|y$.
Тогда списком формулы A будет (t, x, y, z).

Оценка списка – это сопоставление каждой переменной списка некоторому истинному значению.

Пример:

Список (x, y, z).

Оценки списка в количестве $2^3 = 8$: (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).

Формулы называются *равносильными* (*эквивалентными*), если на любой оценке списка переменных они принимают одинаковое значение. Обозначение $A \equiv B$.

3.3. Булевы функции

Булева[6] *функция* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ от n переменных – это функция, принимающая одно из двух значений (0 или 1), при этом каждая из переменных также принимает одно из двух значений: 0 или 1.

Две булевы функции называются *равными*, если для любого набора переменных они принимают одинаковые значения.

Наборы u и v значений переменных называются *соседними по i-й переменной*, если они отличаются только i-й координатой.

Переменная x_i называется *фиктивной переменной* булевой функцииf, если для любых наборов u и v соседних по i-й переменной, выполняется равенство $f(u)=f(v)$.

Переменная x_iназывается *существенной переменной* булевой функции f, если существует хотя бы одна пара наборов u и v соседних по i-й переменной, такая, что справедливо неравенство $f(u) \neq f(v)$.

Булева функция, полученная с помощью подстановок некоторых функций $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ друг в друга в качестве аргументов, а также с помощью переименования переменных, называется *суперпозицией функций* $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$.

***Правило порядка выполнения действий*:** при чтении и выполнении действий в суперпозиции функций двигаются от внутренних скобок к внешним, как и в алгебраических выражениях. Если скобок нет, тогда действия выполняются в следующей последовательности: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание.

[6] Джордж Буль (1815 – 1864) – ирландский математик и логик, впервые сформулировавший основные положения алгебры логики.

3.4. Основные равносильности алгебры логики

1. Коммутативные законы
   $x \cdot y = y \cdot x$
   $x \vee y = y \vee x$

2. Ассоциативные законы
   $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
   $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

3. Дистрибутивные законы
   $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$
   $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$

4. Законы идемпотентности
   $x \cdot x = x$
   $x \vee x = x$

5. Тождества с константами
   $x \cdot 0 = 0$
   $x \vee 0 = x$
   $x \cdot 1 = x$
   $x \vee 1 = 1$

6. Законы поглощения
   $x \cdot (x \vee y) = x$
   $x \vee (x \cdot y) = x$

7. Законы де Моргана
   $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
   $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

8. Закон исключенного третьего
   $x \vee \bar{x} = x \oplus \bar{x} = 1$

9. Закон противоречия
   $x \cdot \bar{x} = 0$

10. Закон двойного отрицания
    $\bar{\bar{x}} = x$

11. Правило вычеркивания
    $\bar{x} \cdot y \vee x = y \vee x$

12. Отрицание противоречия
$\overline{\bar{x} \cdot x} = 1$

13. Контрапозиция
$x \to y = \bar{y} \to \bar{x}$

14. Цепное заключение
$(x \to y) \cdot (y \to z) = x \to z$

15. Противоположность
$x \sim y = \bar{x} \sim \bar{y}$

16. Выражение дизъюнкции через конъюнкцию и сумму по модулю два
$x \vee y = xy \oplus y \oplus x$

17. Выражение дизъюнкции через импликацию
$(x \to y) \longrightarrow y = x \vee y$

18. Выражение отрицания через штрих Шеффера, стрелку Пирса, сумму по модулю два и эквивалентность
$x | x = x \downarrow x = \bar{x} = x \oplus 1 = x \sim 0$

19. Выражение конъюнкции через штрих Шеффера
$(x|y)|(x|y) = x \cdot y$

20. Выражение дизъюнкции через стрелку Пирса
$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = x \vee y$

21. Тождества
$x \vee \bar{x} \cdot y = x \vee y$
$x \cdot (\bar{y} \vee x) = x \cdot y$

3.5. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Элементарная конъюнкция – это формула, являющаяся конъюнкцией переменных или их отрицаний.

Пример:
Формулы x, $\bar{x}$, $x \wedge y$, $x \wedge \bar{y} \wedge z$ являются элементарными конъюнкциями.
Формулы $x \vee y \wedge z$, $\bar{x} \oplus y \sim z$, $x \wedge \bar{y} \vee z$ не являются элементарными конъюнкциями, так как кроме конъюнкций содержат и другие функции.

Элементарная дизъюнкция – это формула, являющаяся дизъюнкцией переменных или их отрицаний.

Пример:
Формулы x, $\bar{x}$, $x \vee y$, $x \vee \bar{y} \vee z$ являются элементарными дизъюнкциями.
Формулы $x \vee y \wedge z$, $\bar{x} \oplus y \sim z$, $x \wedge \bar{y} \vee z$ не являются элементарными дизъюнкциями, так как кроме дизъюнкций содержат и другие функции.

Конъюнктивная нормальная форма (*КНФ*) – это формула, являющаяся конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Пример:
Формулы$(x \vee y) \wedge (y \vee \bar{z})$, $(x \vee \bar{y}) \wedge y \wedge (\bar{x} \vee z)$ являются КНФ.
Формулы$(x \sim y) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (y|z)$, $(\bar{x} \oplus y) \wedge (\bar{y} \sim z)$, $(\overline{x \vee y}) \wedge (\overline{y \vee z})$ не являются КНФ.

Дизъюнктивная нормальная форма (*ДНФ*) – это формула, являющаяся дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Пример:
Формулы $xy \vee y \vee \bar{z}$, $x\bar{y} \vee y\bar{x} \vee z$ являются ДНФ.
Формулы $(x \sim y) \vee \bar{x}y \vee (y|z)$, $(\bar{x} \oplus y) \vee (\bar{y} \sim z)$, $(\overline{xy}) \vee (\overline{yz})$ не являются ДНФ.

Для любой формулы *A* можно найти такую формулу *B*, что *B* находится в ДНФ и *A*≡*B*. Тогда формула *B* будет называться дизъюнктивной нормальной формой формулы *A*.
Аналогично и для КНФ. Для любой формулы *A* можно найти такую формулу *B*, что *B* находится в КНФ и *A*≡*B*. Тогда формула *B* будет называться конъюнктивной нормальной формой формулы *A*.
Одна формула *A* может иметь несколько ДНФ и КНФ.

Алгоритм построения ДНФ и КНФ:

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием. Это можно сделать, используя основные равносильности алгебры логики.

2. Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям на знаки отрицания, относящиеся к отдельным переменным. Это можно сделать, используя законы де Моргана.

3. Избавиться от знаков двойного отрицания.
4. Применить, если требуется, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Пример:

Привести формулу$A = ((x \to y) \downarrow (\overline{y \to z}))$к ДНФ.

1. Выразим логические операции $\to$ и $\downarrow$ через $\wedge, \vee$ и $\rceil$, используя $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$ и $x \to y = \bar{x} \vee y$:
   $A = (\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (\overline{\bar{y} \vee z})})$.
2. Избавимся от знака отрицания, относящегося к выражениям, используя законы де Моргана $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ и $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$:
   $A = \left(\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (\overline{\bar{y} \vee z})}\right) = (\overline{\bar{x} \vee y}) \wedge \left(\overline{\overline{\bar{y} \vee z}}\right) = (\bar{\bar{x}} \wedge \bar{y}) \wedge (\overline{\overline{\bar{y} \vee z}})$.
3. Избавимся от двойного отрицания
   $A = (\bar{\bar{x}} \wedge \bar{y}) \wedge \left(\overline{\overline{\bar{y} \vee z}}\right) = (x \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee z)$.
4. Используя закон дистрибутивности, приведем формулу к ДНФ
   $A = (x \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee z) = (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$.
   Упростив, получим ДНФ:
   $A = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$.

3.6. Двойственность формул

Символы конъюнкции и дизъюнкции являются двойственными друг к другу.

Формула A^* называется *двойственной* к формуле A, если она получена заменой всех символов конъюнкции и дизъюнкции на двойственные.

Двойственная к двойственной есть исходная формула $(A^*)^*=A$.

Пример:

Пусть дана формула $B = (x \vee y)(\overline{x \vee y})z$.

Тогда двойственная к исходной формула будет иметь вид $B^* = (xy) \vee (\overline{xy}) \vee z$.

Если две формулы эквивалентны $A \equiv B$, то и двойственные им также эквивалентны $A^* \equiv B^*$.

Если формула A находится в ДНФ, то двойственная к ней A^* – в КНФ и наоборот.

Пример:

Построить двойственную формулу к формуле $A = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$.

Формула A находится в ДНФ, так как является дизъюнкцией элементарных конъюнкций. Построим двойственную к ней и проверим – будет ли она находится в КНФ.

$$A^* = (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z).$$

Полученная формула A^* находится в КНФ, так как является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Пусть (x_1, x_2, x_3, $\dots x_n$) – список переменных и (t_1, t_2, t_3, $\dots t_n$) – его оценка, тогда двойственная к этой оценке будет получена из исходной заменой 0 на 1 и 1 на 0, то есть ложь↔истина.

3.7. СДНФ и СКНФ

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (*СКНФ*) – это формула, для которой выполняются следующие условия:

1) формула находится в КНФ;
2) каждый конъюнктивный член формулы является k-членной дизъюнкцией, причем на i-ом месте этой дизъюнкции стоит i-ая переменная либо ее отрицание;
3) все конъюнктивные члены попарно различны.

Для СДНФ аналогично. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма* (*СДНФ*) – это формула, для которой выполняются следующие условия:

1) формула находится в ДНФ;
2) каждый дизъюнктивный член формулы является k-членной конъюнкцией, причем на i-ом месте этой конъюнкции стоит i-ая переменная либо ее отрицание;
3) все дизъюнктивные члены попарно различны.

Пример:

Определить СКНФ для следующей формулы $A = \bar{y} \wedge ((x \vee z) | \overline{(\bar{y}|\bar{z})})$.

Приведем формулу A к КНФ:

$$A = \bar{y} \wedge \left((x \vee z) \middle| \overline{(\bar{y}|\bar{z})}\right) = \bar{y} \wedge \overline{\left((x \vee z) \wedge \overline{\overline{(\bar{y} \wedge \bar{z})}}\right)}$$

$$= \bar{y} \wedge \overline{\left((x \vee z) \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z})\right)} =$$

$$= \bar{y} \wedge \left(\overline{(x \vee z)} \vee \overline{(\bar{y} \wedge \bar{z})}\right) = \bar{y} \wedge \left((\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}})\right)$$

$$= \bar{y} \wedge \left((\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (y \vee z)\right) =$$

$$= \bar{y} \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{z} \vee z \vee y).$$

Строим СКНФ, для этого из КНФ удаляем третью дизъюнкцию, а к первой дизъюнкции добавляем $x \wedge \bar{x}$:

$$\left(\bar{y} \vee (x \wedge \bar{x})\right) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) = (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z),$$

добавляем к первой и второй дизъюнкциям $z \wedge \bar{z}$:

$$\left((\bar{y} \vee x) \vee (z \wedge \bar{z})\right) \wedge \left((\bar{y} \vee \bar{x}) \vee (z \wedge \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)\right) =$$

$$= (\bar{y} \vee x \vee z) \wedge (\bar{y} \vee x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee z) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z).$$

Преобразуем полученную формулу так, чтобы в каждой элементарной дизъюнкции на i-ом месте стояла i-ая переменная:

$A = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$.

Получили СКНФ для исходной формулы A.

Примеры решения задач

1. Составить таблицу истинности следующей формулы $(x \oplus y) \to (\bar{z} \vee (x|(\bar{y} \wedge \bar{x})))$.

   Решение:

Таблица 3.9. Решение задачи 1

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x \oplus y$	$\bar{y} \wedge \bar{x}$	$x\|(\bar{y} \wedge \bar{x})$	$\bar{z} \vee (x\|(\bar{y} \wedge \bar{x}))$	$(x \oplus y) \to (\bar{z} \vee (x\|(\bar{y} \wedge \bar{x})))$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

2. Проверьте с помощью таблицы истинности противоположность $x \sim y = \bar{x} \sim \bar{y}$.
   Решение:
   Составим таблицу истинности для левой и правой части формулы.

Таблица 3.10. Таблица истинности левой части

x	y	$x \sim y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 3.11. Таблица истинности правой части

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \sim \bar{y}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

Как видно, на одинаковых наборах функции дают одинаковые результаты. Значит, тождество верно.

3. Для заданной функции $f(x, y, z) = (0101\ 1010)$ определить фиктивные и существенные переменные и выразить формулой, содержащей только существенные переменные.
   Решение:
   Выпишем заданную функцию *f* в табличном виде.

Таблица 3.12. Решение задачи 3

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Как видно, для наборов (0, 0, 0) и (1, 0, 0) соседних по переменной x значения функции отличаются $f(0, 0, 0) \neq f(1, 0, 0)$. Значит, переменная x является существенной.

Аналогично переменная z для наборов (0, 0, 0) и (0, 0, 1) дает разные результаты функции f, значит она также существенная переменная.

Переменная y является фиктивной для рассматриваемой функции, так как на всех наборах соседних по переменной y значения функции равны.

Тогда таблица функции, зависящей только от существенных переменных, будет иметь вид.

Таблица 3.13. Таблица функции от существенных переменных

x	*z*	*f*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Данная таблица истинности соответствует функции $f=x\oplus z$.

4. Составьте КНФ следующей формулы $\neg(x \wedge \neg y) \oplus (y \wedge \neg x)$.

Решение:

Преобразуем формулу с использованием основных равносильностей и алгоритма построения КНФ.

1) приведем формулу к виду, использующему только дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание

   $\neg(x \wedge \neg y) \oplus (y \wedge \neg x) = (\neg\neg(x \wedge \neg y) \vee \neg(y \wedge \neg x)) \wedge (\neg(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x);$

2) применим закон де Моргана

   $\neg(y \wedge \neg x) = \neg y \vee \neg\neg x$

   и

   $\neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y$

и получим
$(\rceil\rceil(x \wedge \rceil y) \vee \rceil(y \wedge \rceil x)) \wedge (\rceil(x \wedge \rceil y) \vee (y \wedge \rceil x) =$
$= (\rceil\rceil(x \wedge \rceil y) \vee (\rceil y \vee \rceil\rceil x)) \wedge ((\rceil x \vee \rceil\rceil y) \vee (y \wedge \rceil x))$;

3) избавимся от двойных отрицаний
$(\rceil\rceil(x \wedge \rceil y) \vee (\rceil y \vee \rceil\rceil x)) \wedge ((\rceil x \vee \rceil\rceil y) \vee (y \wedge \rceil x)) =$
$= ((x \wedge \rceil y) \vee (\rceil y \vee x)) \wedge ((\rceil x \vee y) \vee (y \wedge \rceil x))$

4) упростим сначала левую скобку$(x \wedge \rceil y) \vee (\rceil y \vee x)$
по закону ассоциативности
$(x \wedge \rceil y) \vee (\rceil y \vee x) = ((x \wedge \rceil y) \vee \rceil y) \vee x$
по закону поглощения
$((x \wedge \rceil y) \vee \rceil y) \vee x = \rceil y \vee x$
упростим правую скобку$(\rceil x \vee y) \vee (y \wedge \rceil x)$
по закону ассоциативности
$(\rceil x \vee y) \vee (y \wedge \rceil x) = \rceil x \vee (y \vee (y \wedge \rceil x))$
по закону поглощения
$\rceil x \vee (y \vee (y \wedge \rceil x)) = \rceil x \vee y$.

Окончательно получим $(\rceil y \vee x) \wedge (\rceil x \vee y)$. Полученный результат есть КНФ, так как он является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

5. Приведите формулу$(x \to y)|(\bar{x} \downarrow y)$к ДНФ.
Решение:

1) приведем формулу к виду, использующему только дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание
$x \to y = \bar{x} \vee y$
$\bar{x} \downarrow y = \overline{\bar{x} \vee y}$
$(x \to y)|(\bar{x} \downarrow y) = (\bar{x} \vee y)|(\overline{\bar{x} \vee y}) = \overline{(\bar{x} \vee y) \wedge (\overline{\bar{x} \vee y})}$

2) применим закон де Моргана
для всей формулы
$\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge (\overline{\bar{x} \vee y})} = \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \overline{(\overline{\bar{x} \vee y})}$
для первой скобки
$\overline{(\bar{x} \vee y)} = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{y}$

3) избавимся от двойных отрицаний
$\overline{(\overline{\bar{x} \vee y})} = \bar{x} \vee y$
и получим
$(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)$.

4) воспользуемся ассоциативным законом
$(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y) = \big((x \wedge \bar{y}) \vee \bar{x}\big) \vee y,$
дистрибутивным законом
$\big((x \wedge \bar{y}) \vee \bar{x}\big) \vee y = \big((x \vee \bar{x}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x})\big) \vee y,$
по закону исключенного третьего
$\big((x \vee \bar{x}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x})\big) \vee y = \big(1 \wedge (\bar{y} \vee \bar{x})\big) \vee y,$
в силу тождеств с константами
$\big(1 \wedge (\bar{y} \vee \bar{x})\big) \vee y = (\bar{y} \vee \bar{x}) \vee y.$
Полученное выражения находится в ДНФ.

6. Проверьте с помощью таблицы истинности результаты, полученные для примера №1.
   Решение:
   В примере №1 был получен следующий результат:
   $\rceil(x \wedge \rceil y) \oplus (y \wedge \rceil x) = (\rceil y \vee x) \wedge (\rceil x \vee y)$.
   Составим таблицу истинности для исходной формулы, записанной в левой части тождества.

Таблица 3.14. Решение задачи 6

x	y	$\rceil x$	$\rceil y$	$(x \wedge \rceil y)$	$\rceil(x \wedge \rceil y)$	$(y \wedge \rceil x)$	$\rceil(x \wedge \rceil y) \oplus (y \wedge \rceil x)$
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1

   Аналогично составим таблицу истинности для КНФ, записанной в правой части тождества.

Таблица 3.15. Решение задачи 6

x	y	$\rceil x$	$\rceil y$	$\rceil y \vee x$	$\rceil x \vee y$	$(\rceil y \vee x) \wedge (\rceil x \vee y)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1

   Видим, что на одинаковых оценок списка переменных функции тождества принимают одинаковые значения, значит тождество верно.

7. Проверьте с помощью таблицы истинности результаты, полученные для примера №2.
   Решение:
   В примере №2 был получен следующий результат:
   $(x \to y) | (\bar{x} \downarrow y) = (\bar{y} \vee \bar{x}) \vee y$.
   Составим таблицу истинности для исходной формулы, записанной в левой части тождества.

Таблица 3.16. Решение задачи 7

x	y		$x \to y$	$\bar{x} \downarrow y$	$(x \to y) \vert (\bar{x} \downarrow y)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

   Аналогично составим таблицу истинности для ДНФ, записанной в правой части тождества.

Таблица 3.17. Решение задачи 7.

x	y			$\bar{y}\bar{y} \vee \bar{x}$	$(\bar{y} \vee \bar{x}) \vee y$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1

Видим, что на одинаковых оценок списка переменных функции тождества принимают одинаковые значения, значит тождество верно.

8. Привести в СДНФ формулу $\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz$.

Решение:

Преобразуем исходную формулу с помощью известных равносильностей. Воспользуемся законом исключенного третьего и на основе тождеств с константами получим

$\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz = \bar{x}\bar{y} \cdot 1 \vee 1 \cdot y\bar{z} \vee x \cdot 1 \cdot z =$

$\bar{x}\bar{y} \cdot (z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x}) \cdot y\bar{z} \vee x \cdot (y \vee \bar{y}) \cdot z,$

далее применим дистрибутивный закон

$\bar{x}\bar{y} \cdot (z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x}) \cdot y\bar{z} \vee x \cdot (y \vee \bar{y}) \cdot z =$

$= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z.$

Полученная формула находится в СДНФ.

9. Привести в СКНФ формулу $(x \vee z \vee \bar{y})(x \vee z)y$.

Решение:

Воспользуемся тождествами с константами и законом противоречия

$(x \vee z \vee \bar{y})(x \vee z)y = (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee (y \wedge \bar{y}) \vee z)\big((x \wedge \bar{x}) \vee y \vee (z \wedge \bar{z})\big),$

в силу дистрибутивного закона

$(x \vee z \vee \bar{y})(x \vee (y \wedge \bar{y}) \vee z)\big((x \wedge \bar{x}) \vee y \vee (z \wedge \bar{z})\big) =$

$= (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z).$

Избавляемся от одинаковых дизъюнкций

$(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z).$

Получили СКНФ.

10. Построить СДНФ на основе таблицы истинности.

Таблица 3.18. Задание задачи 10

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение:
Выберем наборы, которым соответствует значение f=1.
Выделим для нашего примера эти строке цветом.

Таблица 3.19. Решение задачи 10

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Каждому из этих наборов сопоставляем конъюнкцию переменных либо их отрицаний, при этом для переменных, которым в наборе соответствует 1, записываем сам переменную, а для тех, которым соответствует 0, записываем отрицание переменной.
Для набора (0, 0, 0) получаем $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, для (0, 0, 1) получаем $\bar{x}\bar{y}z$, для (0, 1, 1) получаем $\bar{x}yz$, для (1, 0, 1) получим $x\ \bar{y}\ z$, для (1, 1, 1) получаем xyz.
Полученные конъюнкции соединяем знаком дизъюнкции:
$(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}\bar{y}z) \vee (\bar{x}yz) \vee (x\ \bar{y}\ z) \vee (x\ y\ z)$.

11. Построить СКНФ на основе таблицы истинности

Таблица 3.20. Задание задачи 11

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение:
Выберем наборы, которым соответствует значение f=0.
Выделим для нашего примера эти строке цветом.

Таблица 3.21. Решение задачи 11

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Каждому из этих наборов сопоставляем дизъюнкцию переменных либо их отрицаний, при этом для переменных, которым в наборе соответствует 0, записываем сам переменную, а для тех, которым соответствует 1, записываем отрицание переменной.
Для набора (0, 1, 0) получаем $x \vee \bar{y} \vee z$, для (1, 0, 0) получаем $\bar{x} \vee y \vee z$, для (1, 1, 0) получаем $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$.

Полученные конъюнкции соединяем знаком дизъюнкции:
$(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить таблицу истинности для следующих формул:
   а) $(x \Rightarrow z) \vee (x \Rightarrow (y \wedge x))$,
   б) $x \supset (y \vee z)$,
   в) $z \supset (x \vee y)$,
   г) $(z \supset \bar{y}) \wedge (w \equiv \bar{z}) \wedge (y \supset z)$.

2. Показать, что $A \vee \bar{A}$ есть тождественная истина, а $A \& \bar{A}$ есть тождественная ложь.

3. Определить какие из переменных данной функции f являются существенными, а какие фиктивными и выразить формулой, содержащей только существенные переменные.
   а) f=(1001 1011) ,
   б) f=(1000 1001),
   в) f=(000 1010),
   г) f=(1101 0011).

4. Для заданной булевой функции f найти фиктивные переменные, преобразовать данную формулу в эквивалентную ей, но не содержащую фиктивных переменных.
   а) $xy\bar{z} \vee yz \vee x\bar{y} \vee \overline{x \vee \bar{y}}$,

б) $xy\bar{z} \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$,
в) $x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z$,
г) $xy\bar{z} \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee xyz \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z}$.

5. Доказать следующие равносильности:
$x \vee x = x$,
$(x \vee \bar{x})y = y$,
$x \vee (xy) = x$.

6. Выразите $x \vee y$ через $x \to y$.

7. Для заданной функции $f(x, y, z) = (0011\ 1111)$ определить фиктивные и существенные переменные и выразить формулой, содержащей только существенные переменные.

8. Для заданной функции $f(x, y, z) = (0001\ 0001)$ определить фиктивные и существенные переменные и выразить формулой, содержащей только существенные переменные.

9. Для заданной функции $f(x, y, z) = (1110\ 1110)$ определить фиктивные и существенные переменные и выразить формулой, содержащей только существенные переменные.

10. Преобразуйте в КНФ формулу: $y\bar{x} \vee \bar{y}x \vee xz$.

11. Преобразуйте в КНФ формулу: $\bar{y}\bar{x} \vee yz \vee xz$.

12. Преобразуйте в КНФ формулу: $y\bar{x} \vee \bar{y}x \vee x\bar{z}$.

13. Преобразуйте в КНФ формулу: $\bar{y}\bar{x} \vee yx \vee xz$.

14. Преобразуйте в ДНФ формулу: $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(xy \vee z)$.

15. Преобразуйте в ДНФ формулу: $(\bar{x}y \oplus z)(xz \to y)$.

16. Преобразуйте в ДНФ формулу: $(x \sim y) \vee \big(xz \oplus (y \to z)\big)$.

17. Приведите к СДНФ формулу: $x\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee yz \vee \bar{x}y\bar{z}$.

18. Приведите к СДНФ формулу: $\bar{y}z \vee xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x}$.

19. Приведите к СДНФ формулу: $\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$.

20. Приведите к СДНФ формулу: $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee xy \vee x\bar{z}$.

21.По таблице истинности построить СКНФ.

Таблица 3.22. Задание задачи 21

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

22. По таблице истинности построить СДНФ.

Таблица 3.23. Задание задачи 22

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

4.1. Основные понятия теории графов

Граф *G* – это совокупность множества вершин *V* и множества ребер *X*: *G*=<*V*, *X*>, где *V* – непустое множество. Множество *X* состоит из пар элементов множества *V*.

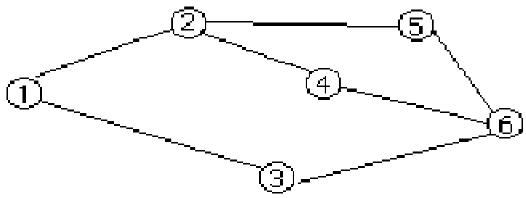


Рисунок 4.1. Граф *G*=<*V*, *X*>

На данном графе (рис. 4.1) шесть вершин, т.е. *V*: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и семь ребер, т.е. *X*: <1, 2>, <1, 3>, <2, 5>, <2, 4>, <3, 6>, <4, 6>, <5, 6>.
Если пары в наборе *X* повторяются, то граф называется ***псевдографом*** или графом с ***кратными ребрами***.

Началом ребра<*v*, *u*> ($v, u \in V$, *G*=<*V*, *X*>) называется вершина *v*.
Концом ребра<*v*, *u*> ($v, u \in V$, *G*=<*V*, *X*>) называется вершина *u*.

Ребро, начало и конец которого совпадают, называется ***петлей***.

Вершины называются ***смежными*** или ***соседними,*** если существует ребро, их соединяющее. То есть вершины v_1 и v_2 смежные, так как $<v_1, v_2> \in X$, где *X* – множество ребер рассматриваемого графа *G*=<*V*, *X*>.

Если вершина является началом или концом ребра, то вершина и ребро называются ***инцидентными***.

Степенью вершины *v* называется число инцидентных ей рёбер. Обозначается $d(v)$.
Вершина, степень которой равна нулю, называется ***изолированной***.
Вершина, степень которой равна единице, называется ***висячей*** или ***тупиковой***.

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и рёбер, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего (это не относится к первому и последнему ребру). Число рёбер в маршруте определяет его ***длину***.

Если вершины в парах множества X не упорядочены, то граф G называют ***неориентированным***.

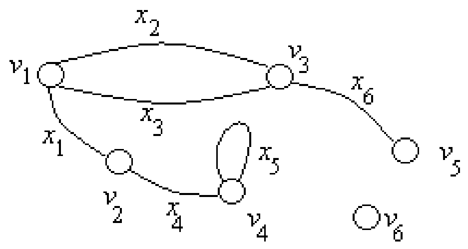


Рисунок 4.2. Граф с кратными ребрами

На графе, изображенном на рисунке 4.2 вершина v_5 является висячей, так как $d(v_5)=1$. Степень вершины v_6 равна нулю $d(v_6)=0$, эта вершина v_6 изолированная. Ребро $x_5= <v_4, v_4>$ является петель. Рёбра $x_2 = <v_1, v_2>$ и $x_3 = <v_1, v_2>$ – кратные. Пример маршрута в графе рисунка 4.2 (v_1, v_3, v_5). Маршрут содержит два ребра, значит, его длина равна 2. Описание маршрута можно уточнить, описав его рёбра и вершины: (v_1, x_2, v_3, x_6, v_5).

Плоский граф

Плоский граф – это граф, который можно изобразить на плоскости так, что его рёбра не пересекаются. Говорят, что граф допускает плоскую укладку.
Граф, изображенный на рисунке 4.1. – плоский.
Существуют и неплоские графы. На рис. 4.3. показаны два таких графа.

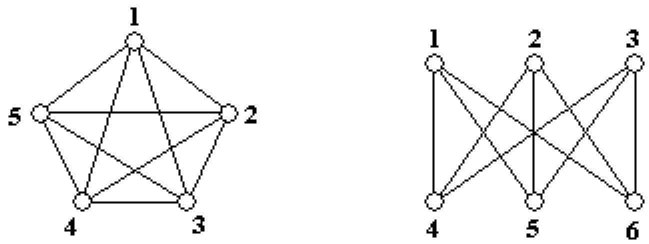


Рисунок 4.3. Неплоские графы

Орграф

Граф называется ***ориентированным (орграфом)***, если все пары в наборе X упорядоченные, т.е. для каждого ребра задано направление. Рёбра в ориентированном графе называются ***дугами***. В ориентированном графе каждая дуга имеет направление, показанное стрелкой.

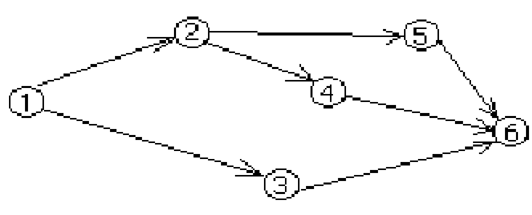


Рисунок 4.4. Ориентированный граф

Маршрут в орграфе называется ***путем***.

В орграфе, изображенном на рис. 4.4 последовательность (v_1, v_3, v_4, v_5) является путем, а последовательность (v_1, v_4, v_2) не является, так как не существует дуги, соединяющей v_4 и v_2.

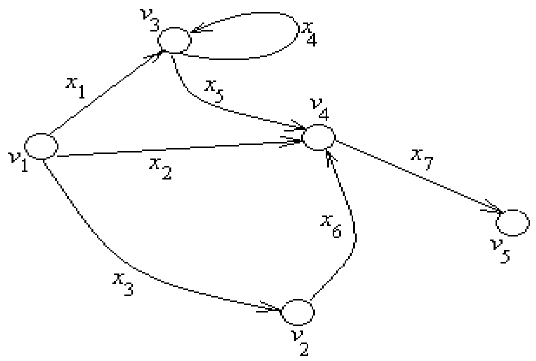


Рисунок 4.5. Ориентированный граф $G'=<V', X'>$

Если вершина является началом дуги, то дуга называется ***исходящей*** из вершины, если концом – дуга называется ***заходящей***.

Полустепенью исхода вершины v называется число $d^-(v)$ дуг, исходящих из этой вершины, ***полустепенью захода*** – число $d^+(v)$ дуг, заходящих в вершину.

Для графа, изображенного на рисунке $4d^-(v_1)=3$, $d^+(v_1)=0$, $d^+(v_4)=3$, $d^-(v_4)=1$.

Цепь в графе – маршрут, все рёбра которого различны. Если все вершины (а тем самым и рёбра) различны, то такая цепь называется ***простой*** (***элементарной***). В цепи $v_0, e_1,...,e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называются ***концами цепи***. Цепь с концами u и v соединяет вершины u и v. Цепь, соединяющая вершины u и v обозначается $<u, v>$. Для ориентированных графов цепь называется ***орцепью***.

Связный граф – граф, между любой парой вершин которого существует как минимум один маршрут.

Сильно связный граф – орграф, в котором из любой вершины можно найти путь в любую другую вершину.

Граф (орграф) называется ***нагруженным***, если для его рёбер (дуг) определена весовая функция, задающая «стоимость» пути. «Стоимость» $l(x)$ или $l(v_i\ ,\ v_j)$ в зависимости от задачи может интерпретироваться как расстояние от пункта i до пункта j, стоимость перевозки, время прохождения данного ребра или дуги x и т. п.

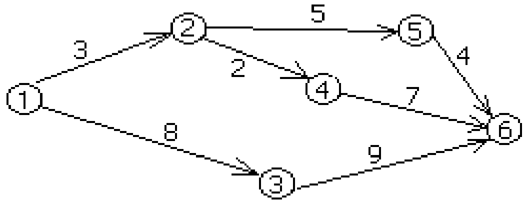


Рисунок 4.6. Ориентированный, нагруженный граф $G''=<V'', X''>$

В графе рис. 4.6 для каждой дуги задана некоторая «стоимость» пути. Например, $l(1,2) = 3$. Это означает, что для того, чтобы попасть из пункта 1 в пункт 2 надо потратить 3 часа, или пройти 3 км, или заплатить 3 усл. ден. единицы и т.п.

4.2. Способы описания и задания графов

1. Графический.

   Данный способ задания подразумевает схематическое изображение графа на рисунке с указанием всех необходимых данных. В качестве примера можно привести рис. 4.1–4.6.

2. Перечисление всех вершин и дуг.

   Вершины: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

   Дуги: x_1<1, 2>, x_2<1, 3>, x_3<2, 5>, x_4<2, 4>, x_5<3, 6>, x_6<4, 6>, x_7<5, 6>.

3. Матрица смежности.

   Если $G=<V, X>$, где V – совокупность вершин (n вершин), а X – совокупность дуг, то матрицей смежности этого графа называется квадратная матрица $A(G)$ порядка $n \times n$, где элемент матрицы либо 0, либо 1, в зависимости от того, смежны ли вершины.

$$A(G)=[a_{ij}], \text{ где } a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если} < v_i, v_j > \in X \ , \\ 0, \textit{если} < v_i, v_j > \notin X \ . \end{cases}$$

Построим матрицу смежности для графа рис. 4.6.

Таблица 4.1. Матрица смежности

$A(G)$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Отметим, что для неорграфа матрица смежности будет симметричной относительно главной диагонали. В данном примере рассмотрен орграф, поэтому матрица $A(G)$ не является симметричной.

4. Матрица инцидентности.

Если G=<V, X> – ориентированный граф, где V – совокупность вершин (n вершин), а X – совокупность дуг (m дуг), то ***матрицей инцидентности*** этого графа называется матрица $B(G)$, размера $n \times m$, где элемент матрицы или 1, или 0, или –1.

$$B(G)=[b_{ij}], \text{ где } b_{ij}=\begin{cases} -1, \text{если вершина } v_i - \text{конец дуги } x_j; \\ 1, \text{если вершина } v_i - \text{начало дуги } x_j; \\ 0, \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } x_j. \end{cases}$$

Построим матрицу инцидентности для графа рис. 4.6.

Таблица 4.2. Матрица инцидентности

B(G) дуги / вершины	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	0	0	0
3	0	-1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	-1	0	1	0
5	0	0	-1	0	0	0	1
6	0	0	0	0	-1	-1	-1

Для неориентированного графа

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \textit{ если веришина } v_i \textit{ инцидентна ребру } x_j, \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

5. Матрица длин дуг (рёбер).

Если G=<V, X> – ориентированный (неориентированный) граф, где V – совокупность вершин (n вершин), а X – совокупность дуг (рёбер), то ***матрицей длин дуг*** (***рёбер***) этого графа называется матрица $C(G)$, размера $n \times n$, где элемент матрицы – это значения весовой функции для каждой из дуг (ребра).

$$C(G)=[c_{ij}], \text{ где } c_{ij}=\begin{cases} l(v_i, v_j), \textit{если } (v_i, v_j) \in X, \\ \infty \quad , \textit{если } (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

Построим матрицу длин дуг для графа рис. 4.6.

Таблица 4.3. Матрица длин дуг

$C(G)$	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	8	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞	2	5	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	9
4	∞	∞	∞	∞	∞	7
5	∞	∞	∞	∞	∞	4
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

4.3. Задача нахождения кратчайшего пути

Рассмотрим решение задачи нахождения кратчайшего пути методом «волны».

Пример

Допустим, в п. 1 находится склад, а в остальных пунктах – строительные площадки компании (рис. 4.7).

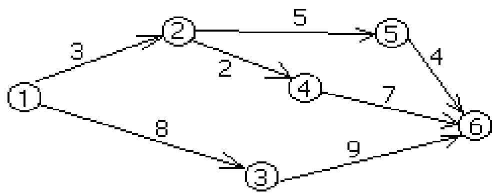


Рисунок 4.7

Показатели на дугах – расстояния в километрах. Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки.

Первый пункт является стартовым и ему присваивается постоянная метка.
Постоянная метка присваивается тем пунктам, если для них определено кратчайшее расстояние.
1. Рассмотрим каждый пункт, в который можно попасть непосредственно из пункта 1.

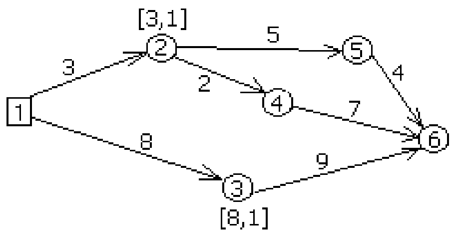


Рисунок 4.8

До п. 2 расстояние в 3 км, до п. 3–8 км. Т.о. пунктам 2 и 3 присвоены временные метки [3,1] и [8,1] соответственно (рис. 4.8). Первое число в метке обозначает расстояние от п.1, второе число – это номер пункта, из которого непосредственно «пришли» в рассматриваемый пункт. Далее рассматриваются все временные метки на предмет нахождения метки с минимальным расстоянием. На данный момент это метка [3,1]. Пункту 2 присваиваем постоянную метку и фиксируем дугу из п.1 в п.2 (рис. 4.9).

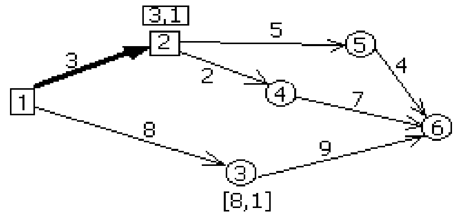


Рисунок 4.9

2. Теперь рассматриваются все пункты, которые ещё не имеют постоянных меток и непосредственно связаны с пунктом 2, т.е. мы рассматриваем п. 4 и п. 5. Достичь п. 4 можно, преодолев 3+2=5 км, а п. 5 – преодолев 3+5=8 км. Т.о. п. 4 и п. 5 присваиваются временные метки [5,2] и [8,2] соответственно (рис. 4.10). Теперь снова рассматриваем временные метки и выбираем из них ту, которая имеет в своём обозначении кратчайшее расстояние, т.е. метку [5,2] для п.4. Эта метка теперь получает статус постоянной, и фиксируем дугу из п.2 в п.4 (рис. 4.11).

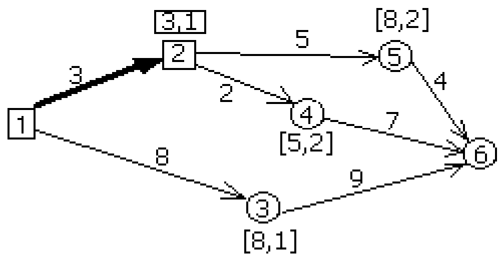


Рисунок 4.10

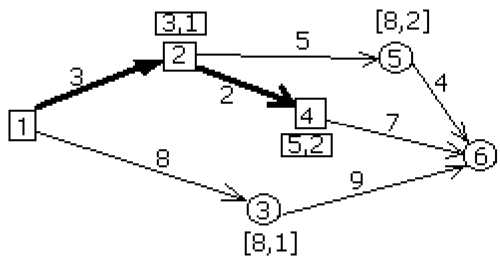


Рисунок 4.11

3. Следующий этап начинается в п. 4, последнем, помеченном постоянной меткой. Как и раньше, рассматриваем каждый пункт без постоянной метки, в который можно попасть непосредственно из п. 4. В этом случае, это единственный п. 6. Для того, чтобы достичь п. 6 надо преодолеть 5+7=12 км.

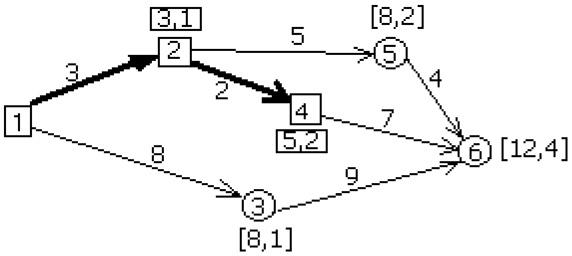


Рисунок 4.12

Временная метка пункта 6 будет иметь вид [12,4] (рис. 4.12). Среди всех временных метках, которые имеются на данный момент, выбираем ту, которой соответствует наименьшее количество километров. Таких пунктов два: п. 5 и п. 3 (до каждого из них длина равна 8 км.). Выбираем любой из этих пунктов, например, п. 5. Эта метка фиксируется, как и путь из п. 2 в п. 5 (рис. 4.20).

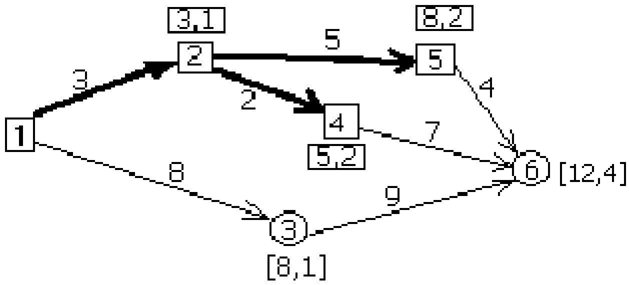


Рисунок 4.20

4. Теперь рассмотрим пункты, в которые можно попасть из п. 5. Таковым является только п. 6, имеющий уже временную метку. Добавляем к этой временной метке ещё одну, относящуюся к п. 5 (рис. 4.20).

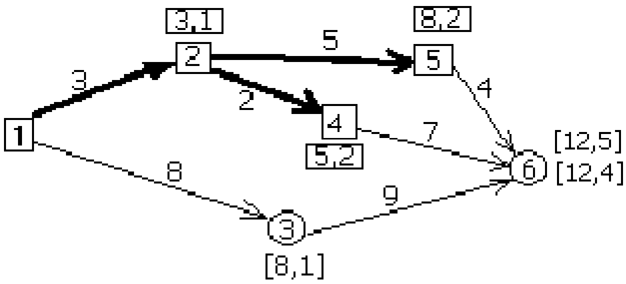


Рисунок 4.21

Из имеющихся трёх временных меток опять выбираем ту, в которой указано минимальная длина пути от п. 1 до данного пункта. Таковой меткой является метка [8,1] для п. 3. Эти пункт и метка получают статус стационарных, и путь из п. 1 в п. 3 фиксируется (рис. 4.22).

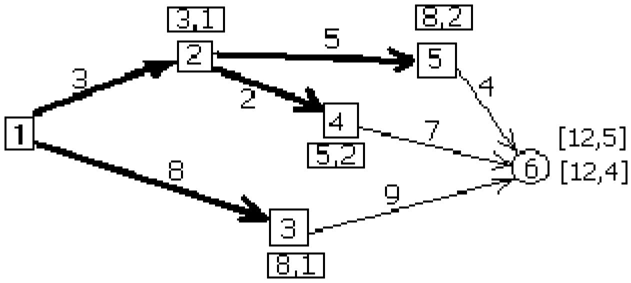


Рисунок 4.22

5. Из фиксированного п. 3 можно попасть в п. 6, у которого уже есть две временные метки, но нет постоянной. Добавляем п. 6 ещё одну временную метку [17,3] (рис. 4.23).

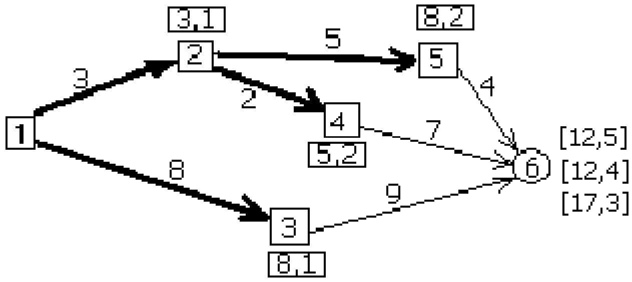


Рисунок 4.23

Т. о. п. 6 имеет три временные метки, т. е. до п. 6 можно пройти тремя путями различной длины. Выбираем кратчайший путь. Таких пути два: через п. 5 и через п. 6. Выбираем любой, потому что длина их одинаковая. Пусть это будет путь, проходящий через п. 4. Тогда фиксируем метку [12,4], п. 6 и путь из п. 4 в п. 6 (рис. 4.24).

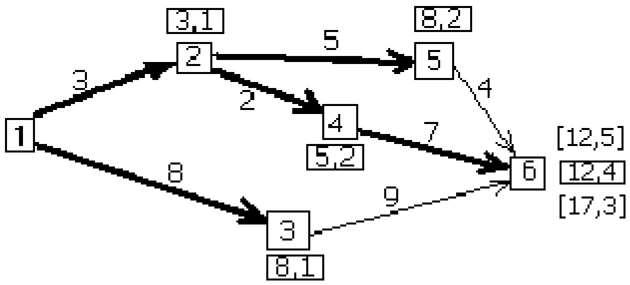


Рисунок 4.24

Теперь можно использовать информацию в постоянных метках для нахождения кратчайшего пути из п. 1 в любой другой пункт. Например, кратчайший путь из п. 1 в п. 4 есть путь 1 – 2 – 4 и длина его 5 км. Используя этот подход, можно определить кратчайшие пути применительно ко всей сети компании, состоящей из её строительных площадок.

Таблица 4.4. Результат решение задачи

Пункт	Кратчайший путь из п.1	Расстояние, км
2	1 – 2	3
3	1 – 3	8
4	1 – 2 – 4	5
5	1 – 2 – 5	8
6	1 – 2 – 4 – 6	12

Примеры решения задач

1. Охарактеризовать граф (рис. 4.25) по следующей схеме:
   1) наличие петель и кратных ребер (дуг);
   2) наличие висячих и изолированных вершин;
   3) ориентированный граф или нет;
   4) нагруженный граф;
   5) описать граф перечислением вершин и ребер (дуг);
   6) матрица смежности;
   7) матрица инцидентности;
   8) матрица длин дуг.

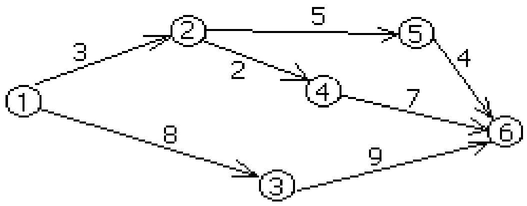


Рисунок 4.25. Задание задачи 1

Решение:
1) граф не имеет петель и кратных рёбер;
2) нет висячих и изолированных вершин;
3) граф является ориентированным;
4) граф нагруженный;
5) вершины: 1, 2, 3, 4, 5, 6; дуги: x_1<1, 2>, x_2<1, 3>, x_3<2, 5>, x_4<2, 4>, x_5<3, 6>, x_6<4, 6>, x_7<5, 6>.
6) Матрица смежности;
7)

Таблица 4.5. Матрица смежности

A(*G*)	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

8) Матрица инцидентности;

Таблица 4.6. Матрица инцидентности

B(G) дуги / вершины	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	0	0	0
3	0	-1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	-1	0	1	0
5	0	0	-1	0	0	0	1
6	0	0	0	0	-1	-1	-1

9) Матрица длин дуг.

Таблица 4.7. Матрица длин дуг

C(G)	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	8	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞	2	5	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	9
4	∞	∞	∞	∞	∞	7
5	∞	∞	∞	∞	∞	4
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Задачи для самостоятельного решения

1. Для данных графов определите:

а) полустепени исхода и захода вершин;

б) наличие тупиковых и изолированных вершин;

в) наличие кратных дуг;

г) наличие петель;

д) определите тип графа (ориентированный, нагруженный).

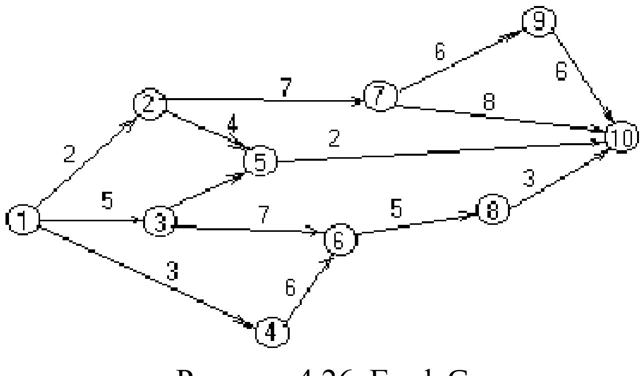


Рисунок 4.26. Граф G_1

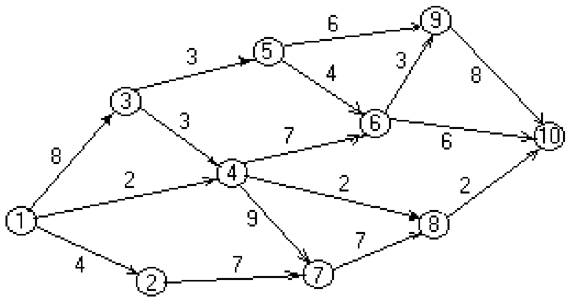


Рисунок 4.27. Граф G_2

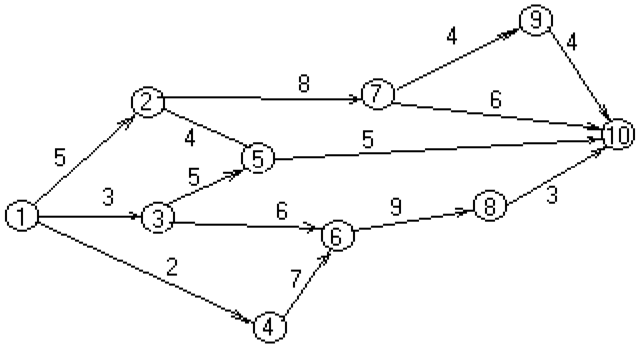


Рисунок 4.28. Граф G_3

2. Построить матрицы смежности, инцидентности и длин дуг для приведенных ниже графов:

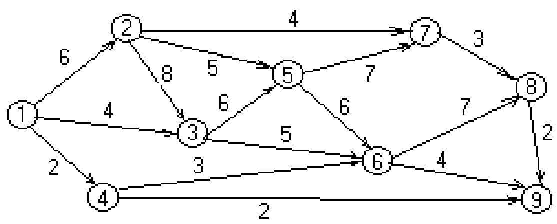


Рисунок 4.29. Граф G_4

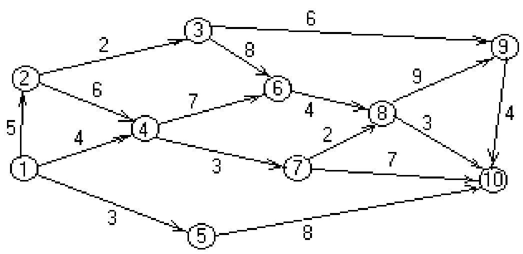


Рисунок 4.30. Граф G_5

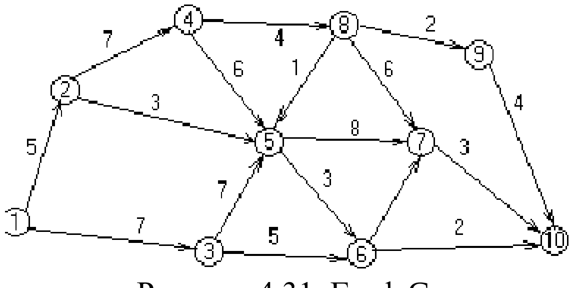


Рисунок 4.31. Граф G_6

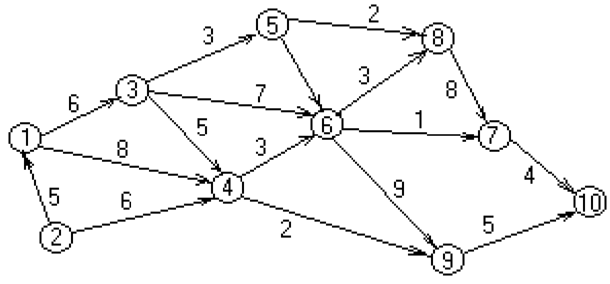


Рисунок 4.32. Граф G_7

3. По заданной матрице смежности построить граф, описанный ею:

Таблица 4.8. Матрица смежности

A(G)	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0

4. По заданной матрице инцидентности построить граф, описанный ею:

Таблица 4.9. Матрица инцидентности

B(G) дуги / вершины	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	-1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	-1	1
3	1	1	-1	0	-1	0	-1	0	0
4	-1	-1	0	1	0	-1	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

5. По заданной матрице длин дуг построить граф, описанный ею:

Таблица 4.10. Матрица длин дуг

C(G)	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	4	∞	5	∞	10	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞
5	∞	4	∞	∞	∞	5	∞
6	∞	∞	2	∞	∞	∞	4
7	∞	∞	∞	∞	5	∞	∞

6. По заданной матрице смежности построить граф, описанный ею:

Таблица 4.11. Матрица смежности

A(G)	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1	0
4	0	0	1	1	0	0
5	0	1	0	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0

7. По заданной матрице инцидентности построить граф, описанный ею:

Таблица 4.12. Матрица инцидентности

B(G) дуги / вершины	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	1	0	1
3	0	-1	-1	0	0	-1	1	0
4	-1	0	0	0	-1	0	0	-1
5	0	0	0	-1	0	0	-1	0

8. По заданной матрице длин дуг построить граф, описанный ею:

Таблица 4.13. Матрица длин дуг

C(G)	1	2	3	4	5	6	7
1	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	3	∞	6	∞	∞	10
3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	8	∞	∞
5	∞	4	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	9	∞	∞	∞
7	∞	∞	∞	∞	∞	12	∞

9. По заданной матрице смежности построить граф, описанный ею:

Таблица 4.14. Матрица смежности

A(G)	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0

10. По заданной матрице инцидентности построить граф, описанный ею:

Таблица 4.15. Матрица инцидентности

B(G) дуги / вершины	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	-1	0	-1
2	1	0	1	-1	0	-1	0
3	0	1	0	0	1	0	0
4	-1	0	-1	0	0	1	0
5	0	-1	0	0	0	0	1

11. По заданной матрице длин дуг построить граф, описанный ею:

Таблица 4.16. Матрица длин дуг

C(G)	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	6	∞	6	∞	∞	10
3	∞	∞	5	∞	∞	2	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞
7	∞	∞	1	∞	∞	12	∞

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решите задачи для самостоятельной работы, выбирая вариант в соответствии с вашим порядковым номером в списке группы.

1. Множества

Задача №1
Определить $A\cap B, A\cap C, B\cup D, C\setminus A, B\setminus D, C\Delta D$ и проиллюстрировать решение графически, если

Вариант	*A*	*B*	*C*	*D*
1	$\lvert x-2\rvert \le 6$	$(x-2)(x-3)<0$	$-x \le 1$	D[*y*] функции $y=\ln(x^2-4x+4)+\dfrac{1}{x^2-6x-9}$.
2	$\lvert x+2\rvert \le 6$	$(x-2)(x+3)<0$	$x\ge 1$	D[*y*] функции $y=\sqrt{x^2+5x-6}+\dfrac{1}{x^2+4x-3}$.
3	$\lvert 2x+4\rvert \ge 8$	$(x+2)(x+3)<0$	$-x\ge 1$	D[*y*] функции $y=\sqrt{x^2+5x+6}-\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.
4	$\lvert 2x-4\rvert \ge 8$	$(x+2)(x-3)<0$	$-x\le -1$	D[*y*] функции $y=\ln(x^2+4x+4)+\dfrac{1}{x^2-6x+8}$.
5	$\lvert x+2\rvert \ge 6$	$(x-2)(x+3)<0$	$-x\ge -1$	D[*y*] функции $y=\ln(x^2+4x-4)+\dfrac{1}{-x^2+6x-9}$
6	$\lvert x-2\rvert \ge 6$	$(x-2)(x-3)>0$	$x\ge -1$	D[*y*] функции $y=\sqrt{-x^2+5x+6}-\dfrac{1}{-x^2-4x-3}$
7	$\lvert 2x+4\rvert \le 8$	$(x+2)(x+3)>0$	$x\le 1$	D[*y*] функции $y=\ln(-x^2+4x-4)+\dfrac{1}{x^2+6x+9}$
8	$\lvert 2x-4\rvert \le 8$	$(x+2)(x-3)>0$	$x\le -1$	D[*y*] функции $y=\sqrt{-x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x^2-4x+3}$
9	$\lvert x+3\rvert \le 4$	$(x-3)(x-1)<0$	$x\le 2$	D[*y*] функции $y=\ln(-x^2-4x-4)+\dfrac{1}{-x^2+6x+9}$
10	$\lvert x-3\rvert \le 4$	$(x-3)(x+1)>0$	$-x\le -2$	D[*y*] функции $y=\sqrt{-x^2-5x-6}-\dfrac{1}{x^2-4x-4}$
11	$\lvert x+3\rvert \ge 4$	$(x+3)(x-1)<0$	$x\le -2$	D[*y*] функции $y=\ln(-x^2-4x+4)-\dfrac{1}{x^2+6x+8}$
12	$\lvert x-3\rvert \ge 4$	$(x+3)(x+1)<0$	$-x\le 2$	D[*y*] функции $y=\sqrt{-x^2+5x-6}-\dfrac{1}{-x^2-4x+3}$
13	$\lvert 2x-2\rvert \le 4$	$(x-3)(x+1)<0$	$x\ge 2$	D[*y*] функции $y=\ln(x^2-5x+6)-\dfrac{1}{x^2-4x-3}$
14	$\lvert 2x+2\rvert \le 4$	$(x-3)(x-1)>0$	$x\ge -2$	D[*y*] функции $y=\sqrt{-x^2+4x+3}-\dfrac{1}{x^2-5x+4}$.
15	$\lvert 2x+2\rvert \ge 4$	$(x+3)(x+3)>0$	$-x\ge 2$	D[*y*] функции $y=\ln(x^2-5x-6)-\dfrac{1}{x^2+5x+4}$
16	$\lvert 2x-2\rvert \ge 4$	$(x+3)(x-1)>0$	$-x\ge -2$	D[*y*] функции $y=\sqrt{-x^2+4x-3}+\dfrac{1}{-x^2-5x-4}$

17	$\|3x+6\|\le 12$	$(x-1)(x-2)<0$	$x \le 3$	D[y] функции $y=\ln(-x^2+2x+3)+\dfrac{1}{-x^2-6x-8}$
18	$\|3x-6\|\le 12$	$(x-1)(x+2)>0$	$x \ge -3$	D[y] функции $y=\sqrt{-x^2-2x+3}-\dfrac{1}{-x^2+6x-8}$
19	$\|3x+6\|\ge 12$	$(x+1)(x-2)<0$	$-x \le 3$	D[y] функции $y=\ln(x^2-2x-3)-\dfrac{1}{x^2-6x+9}$
20	$\|3x-6\|\ge 12$	$(x+1)(x+2)<0$	$x \le -3$	D[y] функции $y=\sqrt{x^2+2x-3}+\dfrac{1}{-x^2-6x-9}$.
21	$\|x+1\| \ge 5$	$(x-1)(x+2)<0$	$-x \ge 3$	D[y] функции $y=\ln(x^2+6x+5)-\dfrac{1}{x^2+6x-9}$
22	$\|x-1\| \ge 5$	$(x-1)(x-2)>0$	$-x \ge -3$	D[y] функции $y=\sqrt{-x^2-6x-5}+\dfrac{1}{-x^2-6x+9}$
23	$\|x+1\| \le 5$	$(x+1)(x+2)>0$	$x \ge 3$	D[y] функции $y=\ln(x^2-6x+5)+\dfrac{1}{-x^2+4x+4}$
24	$\|x-1\| \le 5$	$(x+1)(x-2)>0$	$-x \le -3$	D[y] функции $y=\sqrt{-x^2+6x-5}+\dfrac{1}{-x^2+5x-4}$
25	$\|x+2\| \ge 6$	$(x-3)(x+1)>0$	$x \ge -2$	D[y] функции $y=\ln(x^2-5x+6)-\dfrac{1}{x^2-4x-3}$
26	$\|3x-6\| \le 12$	$(x-2)(x+3)<0$	$x \le -3$	D[y] функции $y=\sqrt{x^2+5x-6}+\dfrac{1}{x^2+4x-3}$.
27	$\|x+2\| \le 6$	$(x+2)(x+3)>0$	$-x \le -2$	D[y] функции $y=\ln(-x^2+4x-4)+\dfrac{1}{x^2+6x+9}$
28	$\|2x-2\| \ge 4$	$(x-3)(x-1)<0$	$-x \le 3$	D[y] функции $y=\sqrt{-x^2+4x+3}-\dfrac{1}{x^2-5x+4}$.
29	$\|2x-4\| \le 8$	$(x+2)(x-3)<0$	$x \ge -1$	D[y] функции $y=\ln(x^2-5x-6)-\dfrac{1}{x^2+5x+4}$
30	$\|x+3\| \le 4$	$(x+3)(x+1)<0$	$x \le -1$	D[y] функции $y=\sqrt{-x^2+5x+6}-\dfrac{1}{-x^2-4x-3}$

Задача №2

С помощью диаграмм Эйлера–Венна доказать следующие тождества алгебры множеств:

Вариант	Тождество 1	Тождество 2
1	коммутативность объединения	$A \cup \emptyset = A$
2	коммутативность пересечения	$A \cap U = A$
3	ассоциативность объединения	$A \cap \emptyset = \emptyset$
4	ассоциативность пересечения	$A \cup U = U$
5	дистрибутивность объединения относительно пересечения	$A \cup \bar{A} = U$
6	дистрибутивность пересечения относительно объединения	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
7	закон де Моргана для отрицания объединения	$A \cup A = A$
8	закон де Моргана для отрицания пересечения	$A \cap A = A$
9	закон поглощении для пересечения A и B	$\bar{\bar{A}} = A$
10	закон поглощении для объединения A и B	$\bar{U} = \emptyset$
11	$\big((A\backslash B)\backslash C\big) = A\backslash(B \cup C)$	$A\backslash A = \emptyset$

12	$A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$	$U \backslash A = \bar{A}$
13	$A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$	$A \backslash U = \emptyset$
14	$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$	$A \backslash \emptyset = A$
15	$A \backslash B = A \cap \bar{B}$	$\emptyset \backslash A = \emptyset$
16	закон поглощении для объединения *A* и *B*	$A \cup \emptyset = A$
17	коммутативность пересечения	$A \cap U = A$
18	$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
19	ассоциативность пересечения	$A \cup U = U$
20	дистрибутивность объединения относительно пересечения	$A \cup \bar{A} = U$
21	$\left((A \backslash B) \backslash C\right) = A \backslash (B \cup C)$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
22	закон де Моргана для отрицания объединения	$A \cup A = A$
23	дистрибутивность пересечения относительно объединения	$A \cap A = A$
24	закон поглощении для пересечения *A* и *B*	$\bar{\bar{A}} = A$
25	закон де Моргана для отрицания пересечения	$\bar{U} = \emptyset$
26	ассоциативность объединения	$A \backslash A = \emptyset$
27	$A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$	$U \backslash A = \bar{A}$
28	$A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$	$A \backslash U = \emptyset$
29	коммутативность объединения	$A \backslash \emptyset = A$
30	$A \backslash B = A \cap \bar{B}$	$\emptyset \backslash A = \emptyset$

Задача №3

Осуществите процедуру разбиение множества по указанному заданию и проверить удовлетворяет ли полученные множества свойствам разбиения

Вариант	Множество	Параметры разбиения
1	жильцы одного многоподъездного дома	жильцы одного подъезда
2	ученики одной школы	ученики одного класса
3	натуральные числа	числа, принадлежащие одному десятку
4	дни одного года	дни одной недели
5	читатели библиотеки нашего ВУЗа	читатели, прочитавшие одинаковую книгу
6	жители г. Самары	прописанные в одном районе города
7	иррациональные числа	числа, имеющие одинаковую целую часть
8	участники шахматного турнира	игроки, сыгравшие друг с другом
9	натуральные числа	четные и нечетные числа
10	жители г.Самара	студенты, обучающиеся (обучавшиеся) в одном ВУЗе
11	множество прямых на плоскости	группы взаимно параллельных прямых

12	жители г. Самары	принадлежащие к одной политической партии
13	правильные дроби	дроби, имеющие одинаковую дробную часть
14	посетители кинотеатра	поклонники одного режиссера
15	натуральные числа	числа, принадлежащие одной сотне
16	множество точек плоскости	точки, принадлежащие одной окружности
17	дни одного года	дни одного месяца
18	множество точек в пространстве R^3	точки, принадлежащие одной плоскости
19	жители г. Самары	родившиеся в один год
20	множество функций $y=f(x)$	функции, имеющие одинаковую область определения
21	читатели библиотеки	поклонники одного автора
22	иррациональные числа	числа, имеющие одинаковую дробную часть
23	студенты 1-го курса СГАУ	студенты, обучающиеся на одном факультете
24	векторы на плоскости	группа сонаправленных векторов
25	десятичные дроби	дроби, имеющие одинаковую дробную часть
26	студенты г. Самары	студенты, посещающие одну спортивную, творческую секцию
27	правильные дроби	дроби, имеющие одинаковую целую часть
28	жители многоэтажного дома	жители одного этажа
29	десятичные дроби	дроби, имеющие одинаковую целую часть
30	команды, участвующие в турнире по футболу	команды, сыгравшие друг с другом

Задача №4

Определите это число возможных разбиений множества, состоящего из n элементов на k частей.

Вариант	n	k	Вариант	n	k
1	8	2	16	9	2
2	9	3	17	11	3
3	8	4	18	12	4
4	8	5	19	11	5
5	9	6	20	8	6
6	8	7	21	13	2

7	10	3	22	12	3
8	9	4	23	10	6
9	9	5	24	11	4
10	9	7	25	12	5
11	10	2	26	11	7
12	10	7	27	11	2
13	10	4	28	8	5
14	10	5	29	12	6
15	11	6	30	12	7

Задача №5

Определите декартово произведение множеств A и B, постройте график $P=A\times B$, определите P^{-1}, $P\circ P^{-1}$.

Вариант	Множество A	Множество B	Вариант	Множество A	Множество B
1	{1, 2, 3}	{5, 6}	16	$\{m, n\}$	$\{c, f, g\}$
2	{2, 5, 7}	{1, 3}	17	{1, 2}	{1, 2, 3}
3	{1, 2, 8}	{3, 4}	18	{4, 7}	{4, 7, 9}
4	$\{a, b, c\}$	{1, 2}	19	$\{d, s\}$	{3, 5, 8}
5	{5, 6, 7}	$\{f, g\}$	20	$\{k, l, d\}$	$\{r, t\}$
6	$\{c, f, g\}$	$\{m, n\}$	21	{1, 2, 3}	{3, 4}
7	{1, 2, 3}	{1, 2}	22	{4, 7, 9}	{1, 2}
8	{4, 7, 9}	{4, 7}	23	{3, 5, 8}	$\{f, g\}$
9	{3, 5, 8}	$\{d, s\}$	24	{1, 3}	{5, 6, 7}
10	$\{r, t\}$	$\{k, l, d\}$	25	{3, 4}	$\{c, f, g\}$
11	{5, 6}	{1, 2, 3}	26	{1, 2}	{1, 2, 3}
12	{1, 3}	{2, 5, 7}	27	$\{a, b, c\}$	$\{r, t\}$
13	{3, 4}	{1, 2, 8}	28	{5, 6, 7}	{3, 4}
14	{1, 2}	$\{a, b, c\}$	29	$\{c, f, g\}$	{1, 2}
15	$\{f, g\}$	{5, 6, 7}	30	{10, 9}	{3, 5, 6}

Задача № 6

Определить, является ли отображение инъективным, сюръективным, биективным.

Вариант	Отображение f	Область определения	Область значения
1	$(y+3)^2+(x-2)^2=16$	(0, 5)	R
2	$y=\dfrac{-3x^2-5x-4}{x+1}$	(-3, 0)	R
3	$y=\ln(-x+2)$	[-1, 1]	(-2; 2)

4	$y=\frac{3}{2}\sin(x-\frac{\pi}{2})$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$
5	$\|y-1\|=\|x-1\|$	[-1; 1]	[-3; 3]
6	$y=\frac{x-1}{x+2}$	[0, 2]	[-0,5; 0,25]
7	$y=\frac{5x^2-22x-16}{x-5}$	(0, 4)	(0; 30)
8	$(y+3)^2+(x-2)^2=16$	[0, 5]	*R*
9	$y=\ln(-x+1)$	[0; 2]	(-∞; 0]
10	$\|y+1\|=\|x-1\|$	[-5; 3]	[-3; 5]
11	$y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$	[0; 3π]	[-2; 2]
12	$y=\frac{2x-1}{x-1}$	[1,5; 3]	[0; 4]
13	$y=\frac{-x^2-4x-5}{x+3}$	[0; 5]	[-1; -6]
14	$y=\frac{3}{2}\cos(x-\frac{\pi}{6})$	[0; 2π]	[0; π]
15	$y=3(x-1)^2-2$	[-1; 3]	[-2; 10]
16	$\|y-3\|=\|x-2\|$	*R*	*R*
17	$y=\frac{-2x^2+3x+1}{x-2}$	[-1; 1,5]	(-3; 2)
18	$y=\frac{3}{2}(x-2)^2+3$	(0; 3)	(0; 9)
19	$y=\frac{2x-3}{x-1}$	(1; 2]	(-∞; 0)
20	$y=e^{-(x-2)}$	(0; 4)	(0; 8)
21	$\|y+3\|=\|x-1\|$	(0; +∞)	*R*
22	$y=\mathrm{tg}\,(x+\frac{\pi}{4})$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	*R*
23	$y=\frac{x^2+3x-12}{x+5}$	[-10; 0]	*R*
24	$y=2\sin(x+\frac{\pi}{4})$	[0; 3π]	[-2; 2]
25	$(y+2)^2+(x-4)^2=9$	[1; 7]	[-5; -1]
26	$\|y-1\|=\|x+3\|$	(0; +∞)	*R*
27	$y=\frac{-2x^2+6x+3}{x-4}$	(0; 10)	*R*
28	$y=3(x+1)^2-2$	[-3; 3]	[-2; 46]
29	$y=\frac{x+5}{x-2}$	(-∞; 2)	(-∞; 0)
30	$y=e^{-(x-5)}$	(-6; -4)	(0; +∞)

2. Отношения и их свойства

Задача №1
Определите свойства отношения.

Вариант	Отношение φ	Область определения
1	$(x - y)$ кратно 3	$\mathbb{N}$
2	$\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert$	векторы на плоскости
3	$x - y < 3$	[0, 4]
4	$y^2+x^2 \leq 16$	[0, 2]
5	прямые l и m пересекаются	множество прямых на плоскости
6	$x+y<1$	[0, 2]
7	$x>y$	$\mathbb{R}$
8	$\lvert x - y\rvert < 2$	[-1, 1]
9	$x>y + 3$	[0, 4]
10	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert<5$	$\mathbb{R}$
11	x – сын y	жители г. Самары
12	$x \cdot y$ кратно 3	$\mathbb{N}$
13	окружности r и t имеют хотя бы одну общую точку	множество окружностей на плоскости
14	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert<4$	[0, 2]
15	прямые l и m имеют хотя бы одну общую точку	множество прямых на плоскости
16	$\lvert x - y\rvert < 6$	$\mathbb{R}$
17	$x \leq y$	$\mathbb{R}$
18	рейтинг студента x по линейной алгебре выше рейтинга студента y	студенты 1-го курса
19	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert>5$	$\mathbb{R}$
20	$x:y$кратно 3	$\mathbb{N}$
21	x и y – учатся в одной группе	студенты СГАУ
22	x – внук y	жители г. Самары
23	окружности r и t касаются	множество окружностей на плоскости
24	$\vec{a}$ и $\vec{b}$сонаправлены	векторы на плоскости
25	x и yпрочитали одну и ту же книгу	студенты 1-го курса
26	x и y – равновеликие треугольники	множество треугольников на плоскости
27	x старше y	жители г. Самары
28	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=5$	$\mathbb{R}$
29	x и y нравится один учебник по дискретной математике	читатели библиотеки СГАУ
30	x и y – учатся на одном факультете	студенты СГАУ

3. Алгебра логики

Задача №1
Составить таблицу истинности формулы.

Вариант	Формула 1	Формула 2
1	$(x \mid y) \rightarrow (x \downarrow y) \wedge zyx$	коммутативный закон для конъюнкции
2	$(z \vee y \vee \bar{x})(x \mid z) \sim (y \oplus x)$	коммутативный закон для дизъюнкции
3	$xz \vee (y \oplus \bar{x}) \rightarrow zy \vee x$	ассоциативный закон для конъюнкции
4	$(x \vee \bar{y}) \oplus (z \vee y \vee x) \downarrow xz$	ассоциативный закон для дизъюнкции
5	$(xz \rightarrow yx) \downarrow (yz \vee x)$	дистрибутивный закон для конъюнкции относительно дизъюнкции
6	$(x \oplus y) \vee (y \mid z)(x\bar{z} \vee yx)$	дистрибутивный закон для дизъюнкции относительно конъюнкции
7	$(xz \vee yx) \sim (xz \downarrow x \vee yz)$	закон де Моргана для отрицания конъюнкции
8	$(xz \downarrow yx \oplus yz) \vee (z \vee x)$	закон де Моргана для отрицания дизъюнкции
9	$(xz \vee zy \oplus xy) \mid (y \vee x)$	$x \cdot (x \vee y) = x$
10	$(yx \mid yz \downarrow x) \rightarrow (x \vee y)$	$x \vee (x \cdot y) = x$
11	$\overline{xz} \mid (yx \vee zx) \sim (x \vee y)$	$x \vee y = xy \oplus y \oplus x$
12	$(x \vee y \vee z) \mid (xz \oplus xy)$	$(x \rightarrow y) \longrightarrow y = x \vee y$
13	$(z\bar{x}y \vee xy) \sim (x \downarrow yz)$	$(x \mid y) \mid (x \mid y) = x \cdot y$
14	$(xz\bar{y} \vee z\bar{x}) \downarrow (x \vee y)$	$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = x \vee y$
15	$(z \oplus yx) \sim (\bar{x} \vee y \mid zx)$	$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
16	$(x \mid y) \sim (x \downarrow y) \vee zyx$	$x \mid y = \overline{x \wedge y}$
17	$(z \vee y \vee \bar{x}) \downarrow (x \mid z)(\bar{y} \oplus x)$	$x \oplus y = \overline{x \sim y}$
18	$(xz \vee y \oplus \bar{x}) \sim (zy \mid x)$	$x \sim y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$
19	$(x \vee \bar{y}) \sim (z \vee y \vee x)\overline{xz}$	$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$
20	$(x \vee z \rightarrow yx) \sim (yz \mid x)$	$(x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow z) = x \rightarrow z$
21	$(x \oplus y) \sim (y \mid z)(x\bar{z} \vee \overline{yx})$	$x \rightarrow y = \bar{y} \rightarrow \bar{x}$
22	$(x \vee zyx) \mid (\bar{x}z \downarrow x \vee yz)$	$x \vee \bar{x} \cdot y = x \vee y$
23	$(xz \downarrow yx \oplus \overline{yz}) \sim (z \vee x)$	$x \cdot (\bar{y} \vee x) = x \cdot y$
24	$(\overline{xz \vee zy} \downarrow xy) \oplus (y \vee x)$	$\bar{x} \cdot y \vee x = y \vee x$
25	$(yx \mid y)(z \downarrow x) \sim (\overline{x \vee y})$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
26	$\overline{xz} \oplus (yx \vee zx) \rightarrow (x \vee y)$	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
27	$(\overline{x \vee y \vee xz}) \sim (xz \oplus xy)$	$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$
28	$\overline{xz} \mid (y \vee xy) \rightarrow (x \downarrow yz)$	$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$
29	$(x \downarrow z\bar{y} \vee z\bar{x}) \oplus (\overline{x \vee y})$	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
30	$\left(\overline{z \downarrow yx}\right) \sim (\bar{x} \vee yzx)$	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Задача №2

Используя основные равносильности алгебры логики, преобразовать формулу так, чтобы остались только знаки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Проверить эквивалентность полученной формулы и исходной с помощью таблицы истинности.

Вариант	Формула
1	$(x\|y) \to (x \downarrow y) \wedge zyx$
2	$(z \vee y \vee \bar{x})(x\|z) \sim (y \oplus x)$
3	$xz \vee (y \oplus \bar{x}) \to zy \vee x$
4	$(x \vee \bar{y}) \oplus (z \vee y \vee x) \downarrow xz$
5	$(xz \to yx) \downarrow (yz \vee x)$
6	$(x \oplus y) \vee (y\|z)(x\bar{z} \vee yx)$
7	$(xz \vee yx) \sim (xz \downarrow x \vee yz)$
8	$(xz \downarrow yx \oplus yz) \vee (z \vee x)$
9	$(xz \vee zy \oplus xy)\|(y \vee x)$
10	$(yx\|yz \downarrow x) \to (x \vee y)$
11	$\overline{xz}\|(yx \vee zx) \sim (x \vee y)$
12	$(x \vee y \vee z)\|(xz \oplus xy)$
13	$(z\bar{x}y \vee xy) \sim (x \downarrow yz)$
14	$(xz\bar{y} \vee z\bar{x}) \downarrow (x \vee y)$
15	$(z \oplus yx) \sim (\bar{x} \vee y\|zx)$
16	$(x\|y) \sim (x \downarrow y) \vee zyx$
17	$(z \vee y \vee \bar{x}) \downarrow (x\|z)(\bar{y} \oplus x)$
18	$(xz \vee y \oplus \bar{x}) \sim (zy\|x)$
19	$(x \vee \bar{y}) \sim (z \vee y \vee x)\overline{xz}$
20	$(x \vee z \to yx) \sim (yz\|x)$
21	$(x \oplus y) \sim (y\|z)(x\bar{z} \vee \overline{yx})$
22	$(x \vee zyx)\|(\bar{x}z \downarrow x \vee yz)$
23	$(xz \downarrow yx \oplus \overline{yz}) \sim (z \vee x)$
24	$(\overline{xz \vee zy} \downarrow xy) \oplus (y \vee x)$
25	$(yx\|y)(z \downarrow x) \sim (\overline{x \vee y})$
26	$\overline{xz} \oplus (yx \vee zx) \to (x \vee y)$
27	$(\overline{x \vee y \vee xz}) \sim (xz \oplus xy)$
28	$\overline{xz}\|(y \vee xy) \to (x \downarrow yz)$
29	$(x \downarrow z\bar{y} \vee z\bar{x}) \oplus (\overline{x \vee y})$
30	$(\overline{z \downarrow yx}) \sim (\bar{x} \vee yzx)$

Задача №3
Привести к КНФ формулу 1 и к ДНФ формулу 2.

Вариант	Формула 1	Формула 2
1	$xy \vee yz \vee x\bar{z}$	$(xz \vee yx) \sim (xz \downarrow x \vee yz)$
2	$\bar{y}x \vee zx \vee yx$	$(xz \downarrow yx \oplus yz) \vee (z \vee x)$
3	$xz\bar{y} \vee zy \vee x$	$(xz \vee zy \oplus xy) \mid (y \vee x)$
4	$\bar{x}y \vee x\bar{z} \vee \bar{y}z$	$(x \mid y) \to (x \downarrow y) \wedge zyx$
5	$\bar{x}\bar{y} \vee zx \vee yz$	$(z \vee y \vee \bar{x})(x \mid z) \sim (y \oplus x)$
6	$x\bar{z} \vee y\bar{x} \vee z\bar{y}$	$xz \vee (y \oplus \bar{x}) \to zy \vee x$
7	$\bar{y}zx \vee y \vee \bar{z}\bar{x}$	$(yx \mid yz \downarrow x) \to (x \vee y)$
8	$xyz \vee \bar{x}\bar{z} \vee yx$	$\overline{xz} \mid (yx \vee zx) \sim (x \vee y)$
9	$\bar{x}z \vee yxz \vee \bar{y}$	$(x \mid y) \sim (x \downarrow y) \vee zyx$
10	$xz \vee \bar{y}\bar{x} \vee zy$	$(z \vee y \vee \bar{x}) \downarrow (x \mid z)(\bar{y} \oplus x)$
11	$\bar{x}y\bar{z} \vee xy \vee z$	$(xz \vee y \oplus \bar{x}) \sim (zy \mid x)$
12	$x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$	$(x \vee zyx) \mid (\bar{x}z \downarrow x \vee yz)$
13	$z\bar{x} \vee yx \vee \bar{z}\bar{y}$	$(xz \downarrow yx \oplus \overline{yz}) \sim (z \vee x)$
14	$x\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee \bar{y}x$	$(\overline{xz \vee zy} \downarrow xy) \oplus (y \vee x)$
15	$z\bar{y} \vee y\bar{x} \vee x\bar{z}$	$(x \vee \bar{y}) \oplus (z \vee y \vee x) \downarrow xz$
16	$\bar{x}\bar{y} \vee yz \vee x\bar{z}$	$(xz \to yx) \downarrow (yz \vee x)$
17	$\bar{y}x \vee \bar{z}\bar{x} \vee yx$	$(x \oplus y) \vee (y \mid z)(x\bar{z} \vee yx)$
18	$xz\bar{y} \vee \bar{z}y \vee x$	$(x \vee y \vee z) \mid (xz \oplus xy)$
19	$\bar{x}y \vee x\bar{z} \vee yxz$	$(z\bar{x}y \vee xy) \sim (x \downarrow yz)$
20	$\bar{x}\bar{y} \vee zyx \vee yz$	$(xz\bar{y} \vee z\bar{x}) \downarrow (x \vee y)$
21	$x\bar{z} \vee y\bar{x} \vee z\bar{y}$	$(z \oplus yx) \sim (\bar{x} \vee y \mid zx)$
22	$\bar{y}zx \vee yx \vee z\bar{x}$	$(yx \mid y)(z \downarrow x) \sim (\overline{x \vee y})$
23	$x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z} \vee yx$	$\overline{xz} \oplus (yx \vee zx) \to (x \vee y)$
24	$\bar{x}z \vee y\bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}$	$(\overline{x \vee y \vee xz}) \sim (xz \oplus xy)$
25	$x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{x} \vee \bar{z}y$	$(x \downarrow z\bar{y} \vee z\bar{x}) \oplus (\overline{x \vee y})$
26	$\bar{x}y\bar{z} \vee xy \vee z\bar{x}\bar{y}$	$(x \vee \bar{y}) \sim (z \vee y \vee x)\overline{xz}$
27	$xz\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$	$(x \vee z \to yx) \sim (yz \mid x)$
28	$z\bar{x} \vee yx \vee \bar{z}\bar{y}$	$(x \oplus y) \sim (y \mid z)(x\bar{z} \vee \overline{yx})$
29	$x\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee \bar{y}x$	$\overline{xz} \mid (y \vee xy) \to (x \downarrow yz)$
30	$z\bar{y} \vee y\bar{x} \vee x\bar{z}$	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Задача №4
Проверьте с помощью таблицы истинности результаты, полученные для задачи № 2.

Задача №5

Привести к СДНФ формулу, соответствующую вашему варианту.

Вариант	Формула	Вариант	Формула
1	$\bar{x}y\bar{z} \vee xy \vee z$	16	$\bar{x}\bar{y} \vee zx \vee yz$
2	$z\bar{y} \vee y\bar{x} \vee x\bar{z}$	17	$x\bar{z} \vee y\bar{x} \vee z\bar{y}$
3	$\bar{x}\bar{y} \vee yz \vee x\bar{z}$	18	$xy \vee yz \vee x\bar{z}$
4	$\bar{y}x \vee \bar{z}\bar{x} \vee yx$	19	$\bar{y}zx \vee y \vee \bar{z}\bar{x}$
5	$x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$	20	$xyz \vee \bar{x}\bar{z} \vee yx$
6	$z\bar{x} \vee yx \vee \bar{z}\bar{y}$	21	$\bar{x}z \vee yxz \vee \bar{y}$
7	$x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z} \vee yx$	22	$\bar{y}zx \vee yx \vee z\bar{x}$
8	$\bar{x}z \vee y\bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}$	23	$\bar{y}x \vee zx \vee yx$
9	$x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{x} \vee \bar{z}y$	24	$\bar{x}y \vee x\bar{z} \vee yxz$
10	$\bar{x}y\bar{z} \vee xy \vee z\bar{x}\bar{y}$	25	$\bar{x}\bar{y} \vee zyx \vee yz$
11	$xz\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$	26	$xz\bar{y} \vee \bar{z}y \vee x$
12	$z\bar{x} \vee yx \vee \bar{z}\bar{y}$	27	$xz \vee \bar{y}\bar{x} \vee zy$
13	$x\bar{z} \vee y\bar{x} \vee z\bar{y}$	28	$xz\bar{y} \vee zy \vee x$
14	$x\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee \bar{y}x$	29	$x\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee \bar{y}x$
15	$\bar{x}y \vee x\bar{z} \vee \bar{y}z$	30	$z\bar{y} \vee y\bar{x} \vee x\bar{z}$

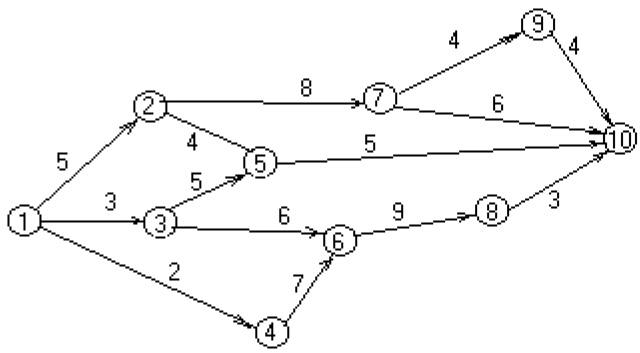
4. Графы

Задача №1

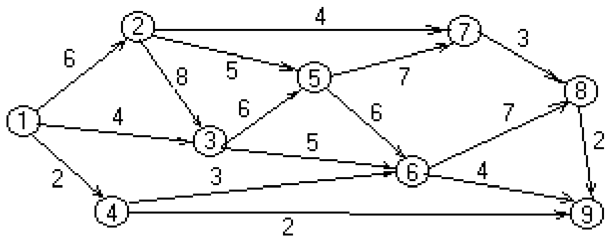
Охарактеризовать граф по следующей схеме:

1) наличие петель и кратных ребер (дуг),
2) наличие висячих и изолированных вершин,
3) ориентированный граф или нет,
4) нагруженный граф,
5) описать граф перечислением вершин и ребер (дуг).

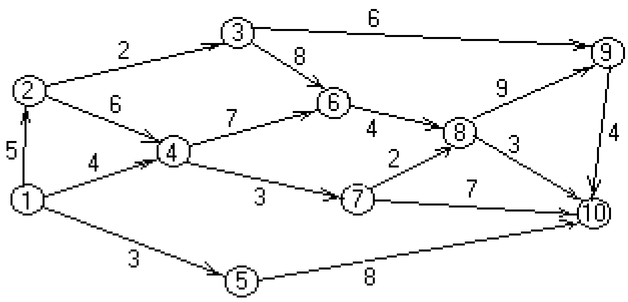
Вариант 1



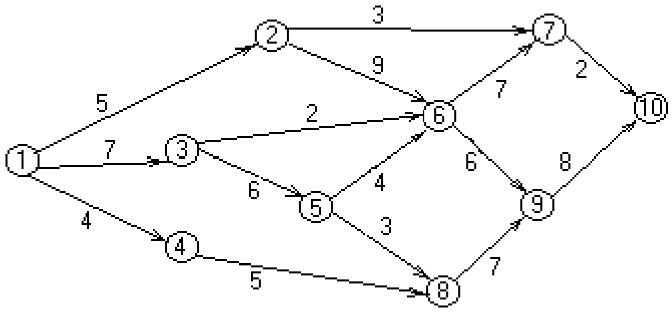
Вариант 2



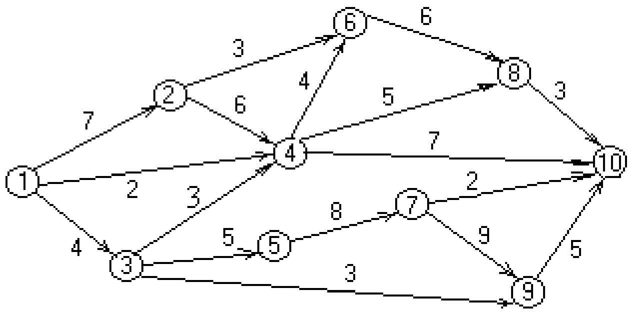
Вариант 3



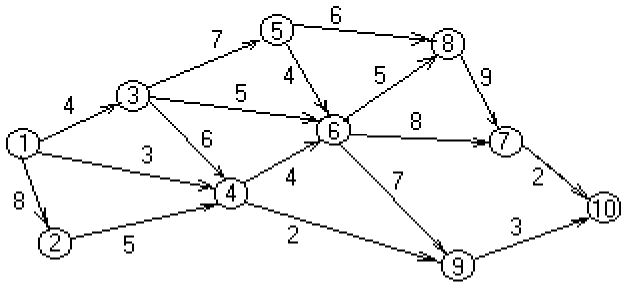
Вариант 4



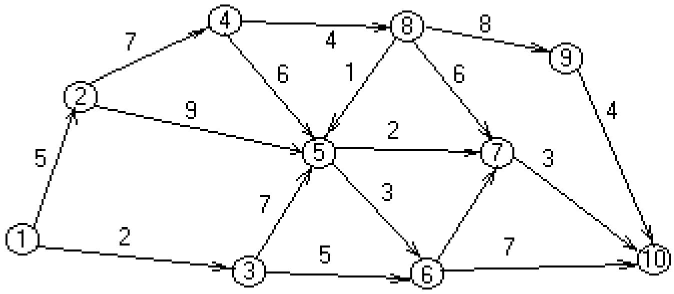
Вариант 5



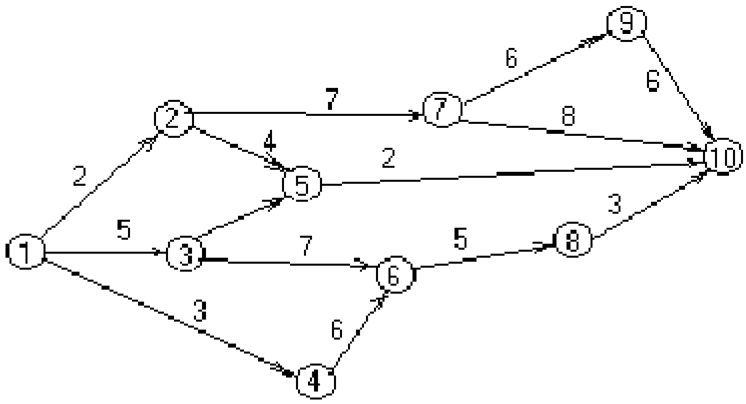
Вариант 6



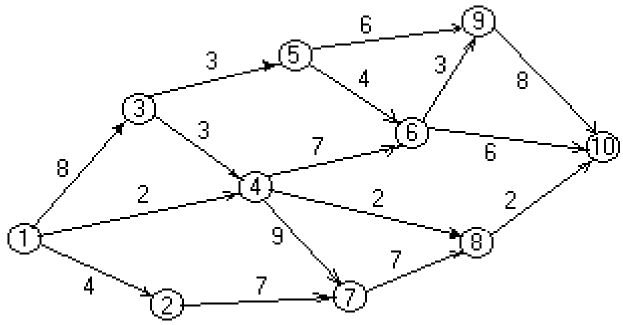
Вариант 7



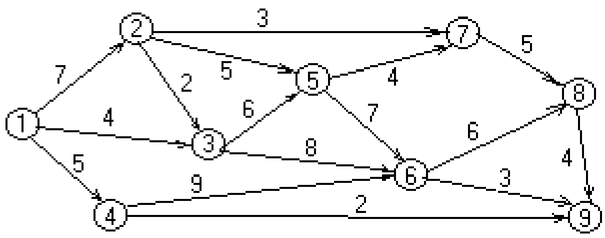
Вариант 8



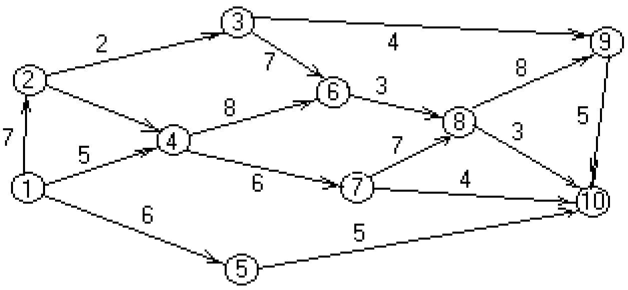
Вариант 9



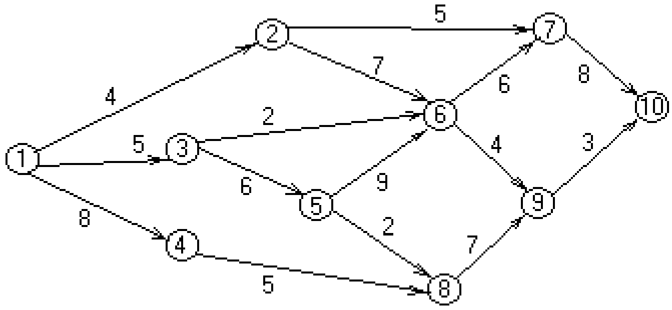
Вариант 10



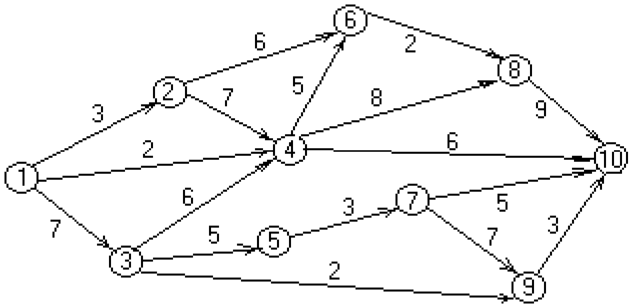
Вариант 11



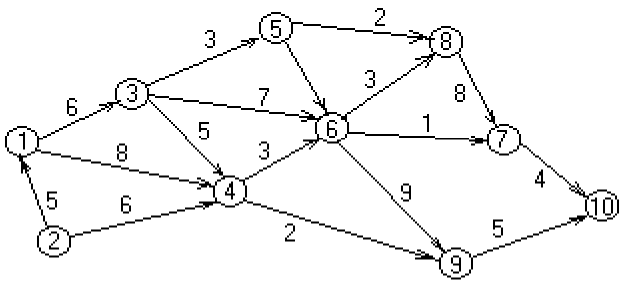
Вариант 12



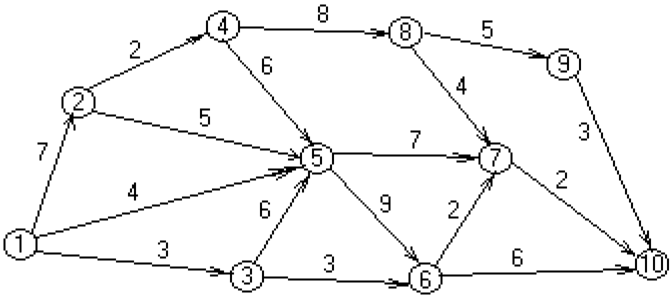
Вариант 13



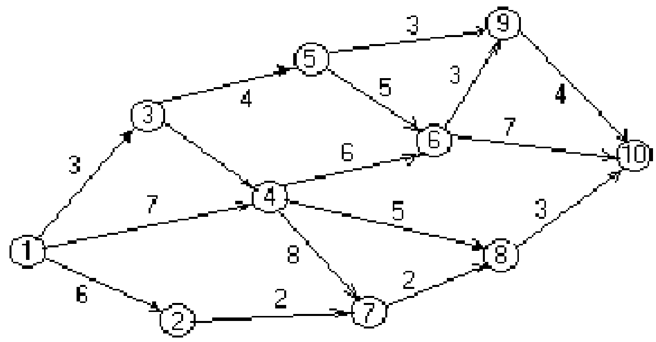
Вариант 14



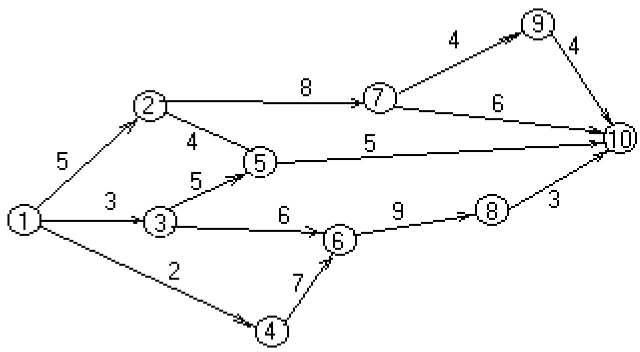
Вариант 15



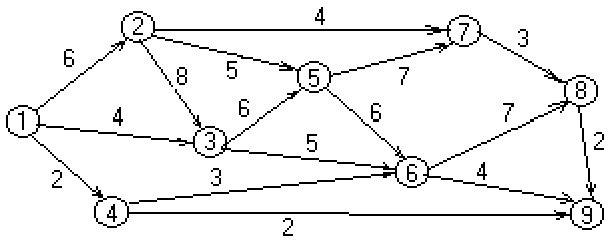
Вариант 16



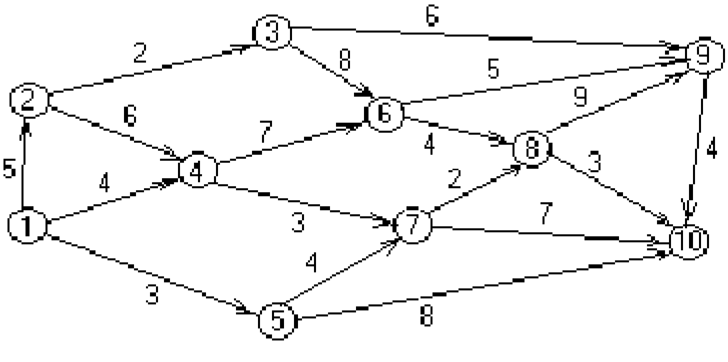
Вариант 17



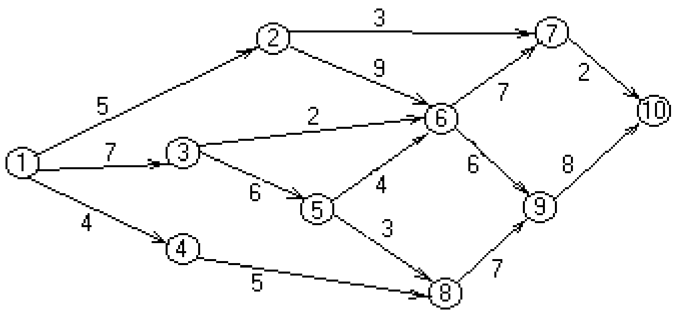
Вариант 18



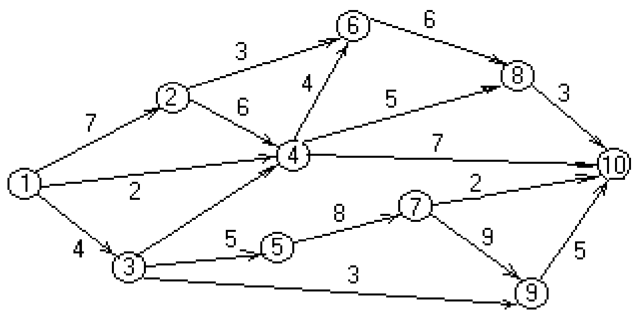
Вариант 19



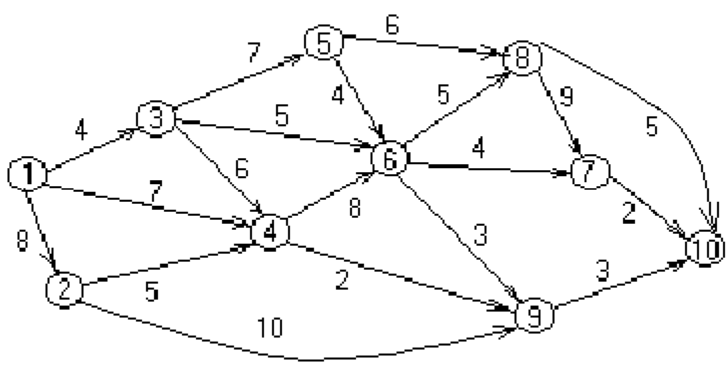
Вариант 20



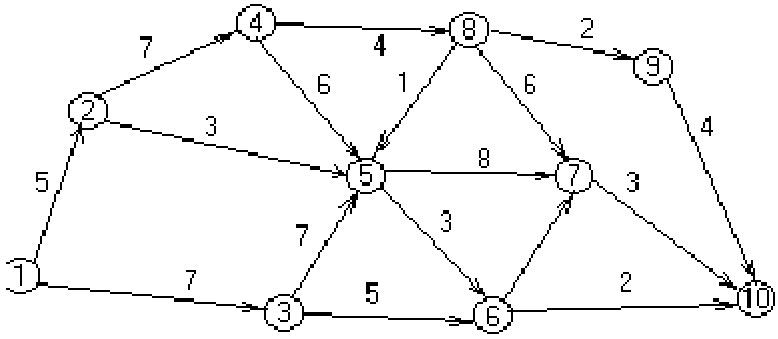
Вариант 21



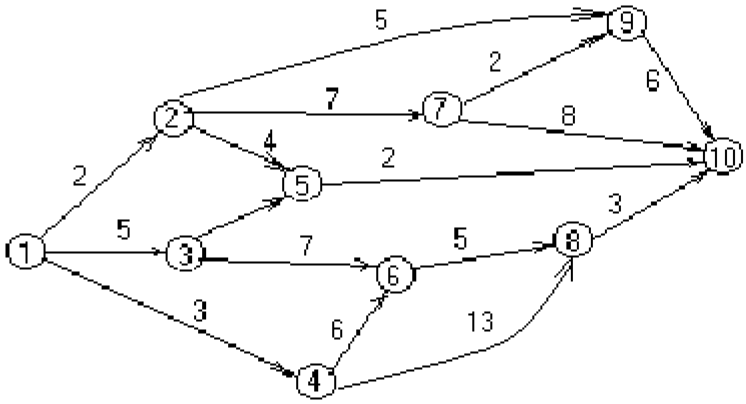
Вариант 22



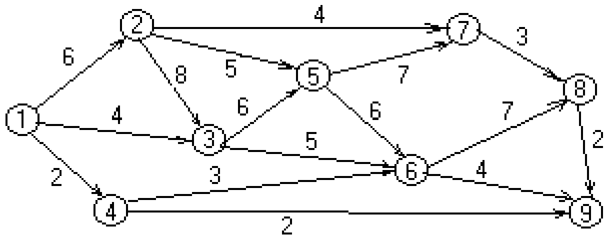
Вариант 23



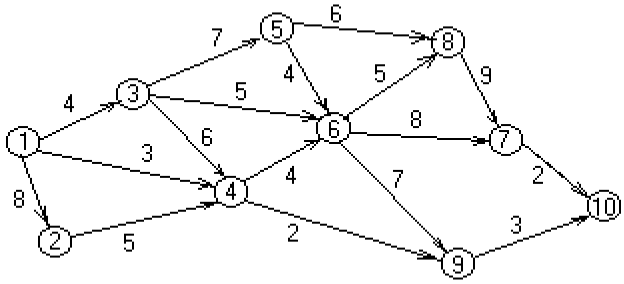
Вариант 24



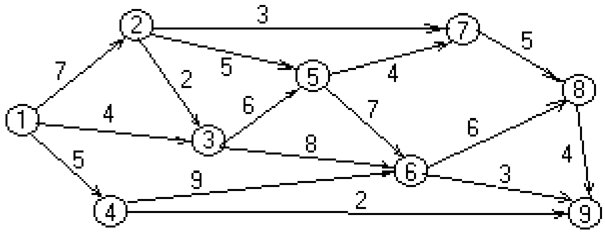
Вариант 25



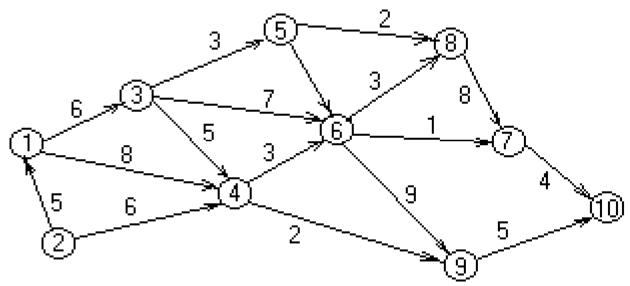
Вариант 26



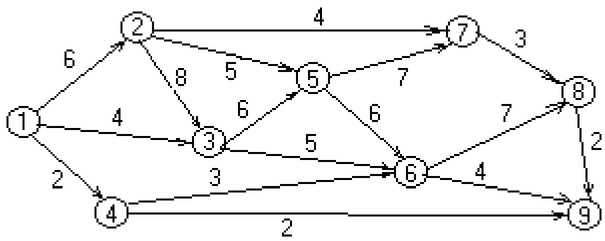
Вариант 27



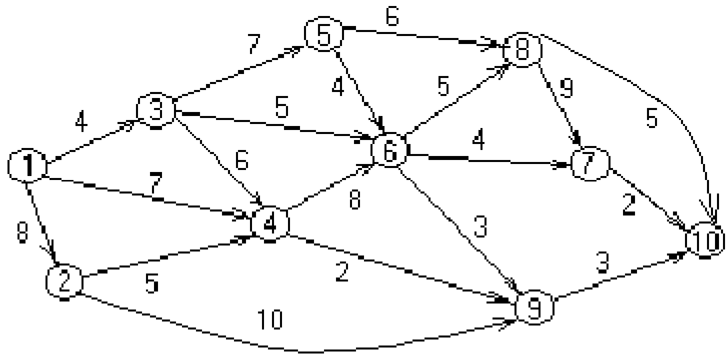
Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30



Задача №2

Построить матрицу смежности, матрицу инцидентности и матрицу длин дуг для графа, соответствующего вашему варианту из предыдущей задачи №1.

Задача №3

Решить задачу отыскания кратчайшего пути для графа, соответствующего вашему варианту из задачи №1.

Учебное издание

Ростова Елена Павловна

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Редактор А.В. Ярославцева
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 15.12.2020. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 5,5.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 16(Р3У)/2020.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.