

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Б. Б. КОСЕНОК

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МОДУЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 13.03.03 Энергетическое машиностроение, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.03 Прикладная механика, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение, 24.03.05 Двигатели летательных аппаратов, 25.03.01 Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей и специальностям 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей, 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение

САМАРА

Издательство Самарского университета

2021

УДК 519.1(075)
ББК 22.144я7
К711

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Я. Н. К л е б а н о в,
д-р техн. наук, проф. С. В. Ф а л л а л е в

Косенок, Борис Борисович

К711 **Основные положения теории модульного векторного моделирования механизмов:** учебное пособие. – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 96 с.

ISBN 978-5-7883-1647-5

Пособие содержит основные положения теории векторных контуров и их стандартных контуров – элементарных модулей, приведены решения задач о функциях, первых и вторых производных функций элементарных плоских и пространственных модулей – математических моделей контурных систем, обосновывается необходимость использования обратимых модулей и модулей со связями от функций, даются понятия обобщенных кинематических и динамических модульных моделей механизмов, приводятся примеры векторного моделирования кинематических и динамических схем механизмов.

Предназначено для обучающихся и специалистов, проектирующих различные по назначению механизмы.

Подготовлено на кафедре основ конструирования машин Самарского университета.

УДК 519.1(075)
ББК 22.144я7

ISBN 978-5-7883-1647-5

© Самарский университет, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. МОДУЛЬНЫЙ МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНТУРНЫХ СИСТЕМ	6
1.1. Основные понятия векторных моделей.....	9
1.2. Характеристики векторного контура.....	11
1.3. Вариации векторного контура.....	13
1.4. Обоснование использования векторных моделей.....	15
2. ТОПОЛОГИЯ И ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРНЫХ МОДУЛЕЙ	17
2.1. Одноконтурные модули.....	17
2.1.1. Элементарные векторные модули.....	17
2.1.2. Кинематические модульные векторные модели.....	18
2.1.3. Основная кинематическая модульная модель.....	19
2.1.4. Модули с дополнительными внутриконтурными связями.....	23
2.1.5. Элементарные векторные модули со связями от функций векторного контура.....	25
2.2. Многоконтурные модули.....	32
2.2.1. Обратимые модули.....	34
2.3. Аналитическое выражение модулей.....	35
2.3.1. Функции элементарных модулей.....	35
2.3.2. Производные функций элементарных модулей.....	59
3. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДУЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ МОДЕЛИ	69
3.1. Основные задачи динамики.....	69
3.2. Одномассовые динамические модели.....	69
3.3. Приведение массовых характеристик.....	70
3.4. Нагрузки на звенья механизмов.....	72
3.5. Приведение внешних нагрузок.....	74
3.6. Уравнения движения механизмов.....	75
3.7. Переход от кинематической к основной динамической модульной модели.....	77
3.7.1. Основная динамическая модульная векторная модель механизма.....	77

3.7.2. Расчет реакций в шарнирах механизмов с использованием векторных модулей.....	80
3.7.3. Учет влияния трения на реакции в кинематических парах	86
3.8. Программная реализация основных кинематических и динамических модульных моделей	90
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	93
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	94

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели контурных систем создаются при решении различных по содержанию задач теоретической механики, теории механизмов, систем управления, теории размерных цепей и других теоретических и инженерных дисциплин.

Контурные системы рационально моделировать векторными моделями, используя стандартные векторные блоки (модули).

Практический интерес для разработки методики композиции механизмов представляет модульное моделирование механизмов, которое является развитием метода векторного замкнутого контура, известного в нашей стране, как метод В. А. Зиновьева [1, 2] и получившим дальнейшее развитие Б. П. Семеновым, внесшим большой вклад в создание теории векторного моделирования [3–5].

1. МОДУЛЬНЫЙ МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНТУРНЫХ СИСТЕМ

Модульный метод математического моделирования контурных систем, позволяет создавать для существующих и возможных рычажных механизмов математические модели в виде систем векторных замкнутых контуров, которые при решении многих научных и инженерных задач могут компоноваться из стандартных плоских и пространственных векторных блоков – модулей.

Переход от кинематической схемы конкретных механизмов к их векторным моделям представляет практический пример углубления уровня абстракции (Рис. 1.1).

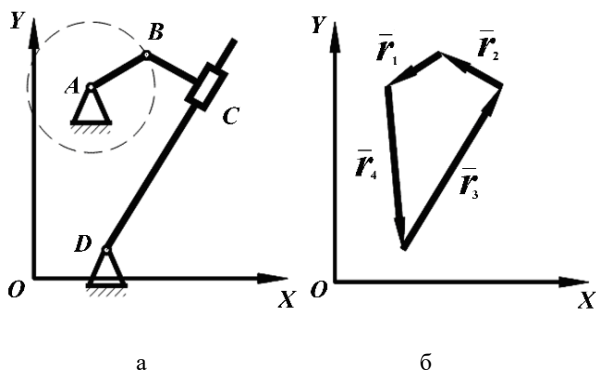


Рис. 1.1 Структурная схема (а) механизма и соответствующий ей векторный контур (б)

Многообразие механизмов определяется теоретически неограниченным множеством структурных и кинематических схем, для каждой из которых есть множество вариантов конструктивной реализации.

Многообразие задач расчета (исследования) механизмов определяет существование двух задач теории механизмов и машин

– анализа и синтеза, а также множество вариантов постановки конкретной задачи исследования.

Традиционно существуют три синтеза, которые, как правило, проводятся последовательно. Структурный синтез – определение структуры механизма подходящей для выполнения заданного назначения. Кинематический синтез – определение параметров схемы по заданным кинематическим свойствам. Динамический синтез – определение параметров схемы по заданным динамическим свойствам.

Динамические модели механизма создаются на основе кинематических моделей, аналитический аппарат которых отличается большим многообразием.

Однако на этапе эскизного проектирования механизма, предназначенного для решения определенной задачи с учетом габаритных, кинематических, динамических и прочих ограничений, часто бывает, не известна его структурная схема. При выборе принципиальной и структурной схемы анализируются прототипы – механизмы, используемые в других отраслях техники, источники патентной информации и т. д. Выбор вариантов для эскизной проработки проводится чаще всего путем субъективных качественных оценок.

Как правило, кинематический синтез механизма рассматривается как выбор его кинематических параметров при наличии различных ограничений или условий, например, достижения коэффициента изменения скорости хода ведомого звена механизма, равного отношению промежутка времени холостого хода к промежутку времени рабочего хода. Основными задачами проектирования механизмов с низшими парами являются задача об осуществлении заданного закона движения и задача о достижении заданной траектории.

Кинематический и динамический синтез механизма, при заданной структурной схеме, и структурный синтез, как по кинематическим, так и по динамическим условиям, можно рассматривать, как частные случаи композиции механизмов – поиска механизмов с требуемыми функциональными свойствами при заданных ограничениях.

Наиболее сложной задачей композиции является задача структурного синтеза механизма с требуемыми характеристиками при геометрических и динамических ограничениях.

Кроме того, при проектировании приходится анализировать различные аспекты, сопутствующие основной задаче композиции механизма. Например, при проектировании авиационных механизмов приходится учитывать не только кинематические и динамические характеристики, но и геометрические ограничения, на общие габариты, на зоны возможных перемещений отдельных его деталей. Учет внешних факторов при создании механизма может привести к необходимости размещения его частей в плоскостях, не соответствующих базовым координатным плоскостям (XY , YZ , ZX общей системы координат механизма), иногда возникает необходимость дополнительных перемещений отдельных звеньев или точек не связанного с общим движением механизма. Иногда требуется получить значения относительных перемещений, например, груза или створки люка относительно неподвижных плоскостей или элементов летательного аппарата.

Проведение различных расчетов при анализе и синтезе механизмов, а также различных сопутствующих им задач, удобнее всего проводить в рамках одной математической модели. Можно почти любой класс задач, любые машины или физические процессы, траектория движения каких-либо тел, задачи точности или надежности, описать математической моделью с любой точностью, достижимой на данном этапе развития науки. Но

описание каждой конкретной задачи или системы приводит к значительным затратам труда ученых и инженеров, да и не дает возможности оценить отличающиеся, иногда даже незначительно, объекты. На практике возможность точного моделирования процесса, как правило, игнорируется, и исследуются лишь частные задачи кинематики и динамики механизмов с идеальными звеньями и связями без учета деформации, процессов трения, износа, температурных деформаций и т.д. Векторные контуры, позволяют моделировать большое множество механизмов (см. работы [11–14]), потому метод модульного моделирования представляется перспективным, в частности, применительно к задачам проектирования механизмов.

1.1. Основные понятия векторных моделей

Вектор – направленный отрезок, характеризуемый длиной и углами направления. В плоскости основными параметрами вектора являются длина r_i и угол направления α_i (Рис. 1.2, а), а в пространстве основными параметрами вектора являются длина r_i , угол возвышения α_i над плоскостью XZ , и угол поворота β_i вокруг оси Y (Рис. 1.2, б).

Контур векторной модели – замкнутая или разомкнутая система (цепь) векторов.

Модуль векторной модели – векторный замкнутый контур или совокупность векторных замкнутых контуров с определенностью между функциями и аргументами.

Элементарный модуль – контур векторной модели, с числом функций, равным числу его измерений контура, не содержащий дополнительных к условию замкнутости внутриконтурных связей, и с аргументами, значения которых известны к моменту начала расчета.

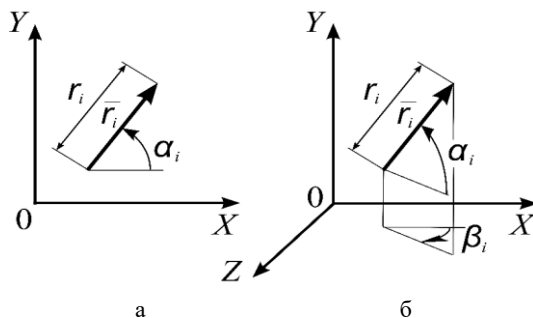


Рис. 1.2. Основные параметры плоского и пространственного векторов

В общем случае, параметры вектора \vec{r}_i пространственного векторного контура могут изменяться в следующий пределах:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r_i < \infty, \\ 0 &\leq \alpha_i \leq 2\pi \text{ или } (-2\pi < \alpha_i \leq 0), \\ 0 &\leq \beta_i \leq 2\pi \text{ или } (-2\pi < \beta_i \leq 0). \end{aligned}$$

В плоском контуре основные параметры вектора \vec{r}_i могут изменяться в следующий пределах:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r_i < \infty, \\ 0 &\leq \alpha_i < 2\pi \text{ или } (-\pi < \alpha_i \leq \pi). \end{aligned}$$

Параметры векторного контура могут быть аргументами, функциями или константами.

Аргумент контура – параметр контура, значение которого изменяется по заданному закону и известно к моменту начала расчета контура.

Функция контура – параметр контура, значение которого неизвестно и изменяется в зависимости от значения аргумента контура.

Константа контура – параметр контура, значение которого не зависит от аргумента контура и не изменяется в процессе расчета контура.

1.2. Характеристики векторного контура

Векторный контур достаточно полно характеризуют следующие основные параметры:

1. *Число измерений* – n ($n = 2$ – плоский контур; $n = 3$ – контур пространственный).
2. *Количество векторов* – m ($m = 2$ замкнутый контур вырождается в линию).
3. *Величина суммарного вектора* – \bar{r}_s (при $\bar{r}_s = 0$ контур замкнут, $\bar{r}_s \neq 0$ – контур разомкнут). Любой разомкнутый векторный контур можно обратить в замкнутый путем добавления замыкающего вектора $r_z = -r_s$, при этом $\alpha_z = \alpha_s + \pi$.
4. *Дополнительные внутриконтурные связи*. Свободный векторный замкнутый контур не имеет дополнительных (к условию замкнутости) связей между векторами контура, его внутриконтурные связи определяют условие замкнутости контура.
5. *Список функций* – выходных параметров неизвестных к моменту начала расчета параметров контура.

Если количество функций контура n_v равно числу его измерений n , для определения функций достаточно использовать лишь условие его замкнутости.

Если количество функций контура n_v превышает числу измерений n , то для определения функций, кроме условия его замкнутости, необходимо задать и $n_v - n$ дополнительных внутриконтурных взаимосвязей между параметрами контура.

6. *Список аргументов* – входных параметров, известных к моменту начала расчета изменяющихся параметров контура. В общем случае, все параметры, кроме функций контура, могут быть его аргументами, т.е. параметрами, величины которых изменяются и известны к моменту начала его исследования (расчета).

В большинстве реальных структур количество аргументов значительно меньше максимально возможного их числа, так как многие параметры векторов контура являются константами, т.е. не изменяются в процессе исследования контура.

7. *Вариант решения.* При заданных значениях констант и аргументов некоторые контуры имеют не одно, а несколько значений функций. Как будет показано далее, вариант решения контура может изменяться в процессе исследования.

Приведенные выше параметры векторного контура дают представление о его структуре и задаче исследования.

Число измерений n , количество векторов в контуре m , величина суммарного вектора \vec{r}_S , список дополнительных внутриконтурных связей $\{\Delta\alpha\}$ составляют *структурную характеристику контура*.

Структурная характеристика не содержит списка аргументов, и, следовательно, не изменяется при переходе к другой задаче исследования.

Отсутствие в структурной формуле сведений о величине суммарного вектора означает, что контур замкнут, т.е. $\vec{r}_S = 0$.

Структурная характеристика, дополненная списками аргументов и функций, а также сведениями о варианте решения контура, составляет *параметрическую характеристику контура*.

Структурная характеристика и формула математической модели исследуемого объекта, например, механизма, могут быть составлены на основе его структурной схемы.

Параметрические характеристики и формула математической модели исследуемого объекта, в частности механизма, могут быть составлены на основе анализа задачи его исследования при знании его структуры. Например, основой для составления параметри-

ческой формулы модели механизма может служить его кинематическая схема. Примеры формул приведены в таблице 1.

Параметрическая характеристика, дополненная значениями аргументов и констант контура, составляет *расчётную характеристику контура*.

Если при заданном списке функций не известны значения аргументов и констант контура, то не всегда заранее можно определить вариант решения контура. В этом случае нужно рассматривать *структурно-параметрическую характеристику контура*, т.е. структурную характеристику контура, дополненную списками функций и аргументов, но без указания варианта его решения.

1.3. Вариации векторного контура

В общем случае, функции могут быть параметрами любых векторов контура, т.е. сочетание чисел i, j, k – индексов векторов обобщенных списков функций могут составить неупорядоченное множество. Изменяя последовательность векторов в контуре можно при тех же параметрах векторов изменить его внешний вид, конфигурацию.

Вариация контура – конфигурация, определяемая последовательностью векторов. Для трехвекторного контура с индексами векторов i, j и k формально можно записать следующие последовательности:

$$i-k-j, j-i-k, k-j-i, \text{ и } i-j-k, j-k-i, k-i-j.$$

Представив эти последовательности в виде круговой диаграммы (рис. 1.3), легко убедится, что они отличаются лишь началом и направлением обхода. Таким образом, трёхвекторный контур имеет единственную вариацию.

Таблица 1.1. Примеры структурных и параметрических формул

Характеристики	Формулы
Структурные	
Плоский, 4-х векторный замкнутый контур без дополнительных внутриконтурных связей	$n = 2, m = 4$
Пространственный, 5-ти векторный разомкнутый контур с 3-мя дополнительными внутриконтурными связями	$n = 3, m = 5,$ $\bar{r}_s \neq 0$ $\Delta\alpha_{1-2}, \Delta\alpha_{3-4},$ $\Delta\alpha_{2-5}$
Параметрические	
Плоский, 3-х векторный замкнутый контур без дополнительных внутриконтурных связей, с функциями α_1, α_3 и аргументом α_2 , с первым вариантом решения задачи о функциях	α_1 → $n = 2, m = 3$ α_1, α_3 $V = 1$
Пространственный, четырёх-векторный замкнутый контур с дополнительной внутриконтурной связью $\Delta\alpha_{2-3}$ с функциями $r_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3$ и аргументами α_1 и α_4 , со вторым вариантом решения задачи о функциях	α_2 → $n = 3, m = 4$ $r_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3$ α_4 → $\Delta\alpha_{2-3}$ $V = 2$

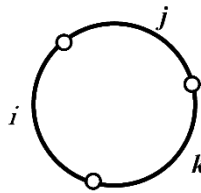


Рис. 1.3. Последовательность векторов в виде круговой диаграммы

Для четырёхвекторного контура с индексами векторов i, j, k и l формально можно записать следующие последовательности:

$i - j - k - l,$	$j - i - k - l,$	$k - i - j - l,$	$l - i - j - k,$
$i - j - l - k,$	$j - i - l - k,$	$k - i - l - j,$	$l - i - k - j,$
$i - k - j - l,$	$j - k - i - l,$	$k - j - i - l,$	$l - j - i - k,$
$i - k - l - j,$	$j - k - l - i,$	$k - j - l - i,$	$l - j - k - i,$
$i - l - k - j,$	$j - l - i - k,$	$k - l - i - j,$	$l - k - i - j,$
$i - l - j - k,$	$j - l - k - i,$	$k - l - j - i,$	$l - k - j - i.$

Круговые диаграммы (рис. 1.4) убеждают в том, что лишь три последовательности векторов из всех приведённых выше являются оригинальными, не приводимыми друг к другу.

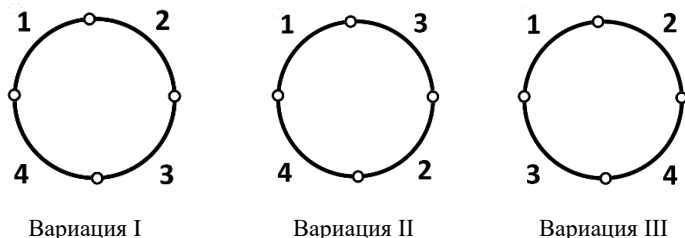


Рис. 1.4. Вариации круговых диаграмм

Таким образом, четырёхвекторный контур имеет три вариации.

Количество вариаций не зависит от числа измерений контура, т.е. одинаково как для пространственных, так и для плоских контуров.

Вариации контура не влияют на взаимосвязи его параметров, но изменяют геометрический смысл основных случаев его исследования.

1.4. Обоснование использования векторных моделей

Векторные модули по своей природе являются геометрическими объектами, и поэтому обладают достаточной абстрактностью и могут

быть использованы везде, где требуется геометрическое отображение постоянных или изменяемых структур, т.е. моделирования контурных систем, при решении задач о расчете геометрических параметрах, их первых и вторых производных.

Инвариантность векторных модулей, во-первых, заключается в возможности их применения при моделировании объектов в задачах различных теоретических и инженерных дисциплин, а во-вторых, в возможности применения в различных задачах исследования одного и того же объекта. В то же время векторные модули наиболее полно адаптированы для задач моделирования механизмов являясь основой их кинематических, силовых и динамических моделей. Таким образом абстрактность метода позволяет при помощи одних и тех же стандартных модулей описывать движение не только механизмов, и центров масс их звеньев, но и производить силовой расчет, т.е. определять реакции в кинематических парах, решать различные задачи динамики механизмов, в частности, задачи определения приведенных массовых характеристик и приведенных нагрузок, нахождения кинематических параметров по заданным динамическим. Кроме того для использования свойства инвариантности векторных моделей в описание векторных моделей введены добавочные характеристики:

1. *Промежуточные аргументы* – аргументы или изменения параметров вектора для построения нескольких положений векторной модели в одном положении основных аргументов. Проводится изменение параметров не только от одного основного положения к другому, но и их изменение в одном положении (от одного значения промежуточных аргументов к другому).

2. *Элементарные векторные модули со связями от функций векторного контура* – это возможность учёта связи параметра вектора с любым параметром любого другого вектора.

2. ТОПОЛОГИЯ И ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРНЫХ МОДУЛЕЙ

Модуль векторной модели – векторный замкнутый контур или минимальная по составу система взаимосвязанных векторных замкнутых контуров с определенностью между функциями и аргументами. Под определенностью между функцией и аргументом будем понимать возможность вычисления значений функций контура по заданным значениям его аргументов и констант.

Все многообразие векторных модулей можно разделить на одноконтурные (простые) и многоконтурные (с обратными связями) [5].

2.1. Одноконтурные модули

2.1.1. Элементарные векторные модули

Элементарный векторный модуль – одноконтурный модуль с числом функций, равным числу измерений контура. Элементарные плоские и пространственные векторные модули, отображающие замкнутые векторные контура со списками функций, приведены в табл. 2.1. Практический интерес для определения точных формул частных производных представляют одно- и (или) двухаргументных модули, для многоаргументных модулей проще использовать численное дифференцирование.

Условие замкнутости полностью определяет все взаимосвязи параметров векторов элементарного модуля.

Действительно, условие замкнутости пространственного m -векторного контура в скалярной форме представляет собой систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m r_i \sin \alpha_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

а, следовательно, и возможность определения любых трех параметров, входящих в ее состав.

Аналогично система двух уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m r_i \cos \alpha_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m r_i \sin \alpha_i = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

позволяет определить две любые функции плоского векторного замкнутого контура.

2.1.2. Кинематические модульные векторные модели

Переход от кинематической схемы к векторной модели механизма связан, прежде всего, с отображением подвижно соединенных звеньев механизма системой взаимосвязанных векторных замкнутых контуров. Пример такого перехода отображен на рис. 2.1. Анализ списков функций векторных замкнутых контуров этой модели позволяет использовать для их определения аналитику элементарных модулей. На этом этапе создания модели механизма избыточная информация, в частности о положении центров масс звеньев и точек приложения внешних нагрузок, игнорируется.

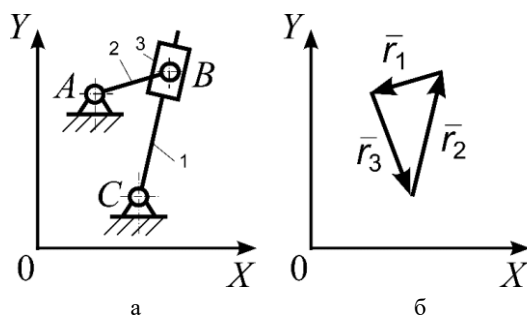


Рис. 2.1. Пример отображения кулисного механизма:
а – структурная схема; б – векторная модель

2.1.3. Основная кинематическая модульная модель

Основная кинематическая модульная модель механизма – один или система взаимосвязанных векторных контуров, отображающая его кинематическую схему.

Основная кинематическая модель обеспечивает решение задачи о движении звеньев механизма. Векторный образ этой модели отображает кинематическую схему исследуемого механизма в наиболее удобной для аналитического описания форме.

Кроме того, создаются и различные модификации основной кинематической модели для решения различных дополнительных задач, например, для определения положений, скоростей и ускорений звеньев какой-либо точки одного из звеньев механизма достаточно ввести в основную кинематическую модель дополнительный векторный контур.

В общем случае, решение любой дополнительной задачи кинематического анализа механизмов приводит к развитию его основной кинематической модели за счет введения дополнительных векторных контуров.

Характеристика типовой математической модели, в общем случае, представляет собой:

- исходные данные (аргументы);
- математические зависимости (аппарат, формулы);
- результаты (функции).

На этапе формирования задачи композиции определяются:

- списки аргументов, связи векторов;
- характеристики всей модели;
- характеристики векторных контуров.

Варианты векторного отображения во многих случаях могут быть скомпонованы из четырех плоских и двадцати пространственных элементарных векторных контуров – модулей,

описывающих множество решений векторных замкнутых контуров (табл. 2.1). Объектами анализа в этом случае являются значения неизвестных параметров векторов – функций модулей.

Описание основной кинематической модульной модели механизма, в состав которой входят лишь элементарные, без дополнительных к условию замкнутости внутриконтурных связей, модули с однородными постоянными межконтурными связями приведено ниже.

1. Общая характеристика модели:

1.1. Число контуров модели;

1.2. Список аргументов модели;

1.3. Тип решаемой задачи: определение положений, определение положений, скоростей, и ускорений;

1.4. Для каждого аргумента модели: массивы значений аргументов, их первых и вторых производных или минимальные и максимальные значение и число равноотстоящих значений.

2. Характеристика контура:

2.1. Тип контура: плоский или пространственный;

2.2. Число векторов контура;

2.3. Список номеров векторов, составляющих контур;

2.4. Описание функций:

U_1, U_2 – для плоского контура;

U_1, U_2, U_3 – для пространственного контура;

2.5. Число межвекторных связей; для каждой межвекторной связи:

- для плоского контура:

$$r_i = r_j + \Delta r_{j-i}, \quad \alpha_i = \alpha_j + \Delta \alpha_{j-i};$$

- для пространственного контура:

$$r_i = r_j + \Delta r_{j-i}, \quad \alpha_i = \alpha_j + \Delta \alpha_{j-i} \quad \text{или} \quad \beta_i = \beta_j + \Delta \beta_{j-i},$$

где i – номер вектора контура, j – номер вектора одного из предыдущих контуров модели.

Таблица 2.1. Элементарные пространственные
и плоские векторные модули

Модуль	Функции			Число решений	Основные аргументы
	u_1	u_2	u_3		
Пространственные					
Пр1	r_i	α_i	β_i	1	x
Пр2	r_i	α_i	r_j	1	x
Пр3	r_i	α_i	α_j	2	x
Пр4	r_i	α_i	β_j	2	x
Пр5	r_i	β_i	r_j	2	x
Пр6	r_i	β_i	α_j	4	x
Пр7	r_i	β_i	β_j	2	x
Пр8	α_i	β_i	r_j	2	x
Пр9	α_i	β_i	α_j	2	x
Пр10	α_i	β_i	β_j	2	x
Пр11	r_i	r_j	r_k	1	x
Пр12	r_i	r_j	α_k	2	x
Пр13	r_i	r_j	β_k	2	x
Пр14	r_i	α_j	α_k	4	x
Пр15	r_i	α_j	β_k	4	x
Пр16	α_i	α_j	α_k	8	x
Пр17	α_i	α_j	β_k	8	x
Пр18	β_i	β_j	r_k	2	x
Пр19	β_i	β_j	α_k	4	x
Пр20	β_i	β_j	β_k	∞	x
Плоские					
	u_1	u_2			
Пл1	r_i	α_i		1	x
Пл2	r_i	r_j		1	x
Пл3	r_i	α_j		2	x
Пл4	α_i	α_j		2	x

Примечание: x – означает, что аргументами могут быть любые параметры векторов, не являющиеся функциями модуля.

Примеры элементарных плоских модулей приведены на рис. 2.2. Основные признаки модулей – функции выделим кружками, а аргументы – обозначим стрелками.

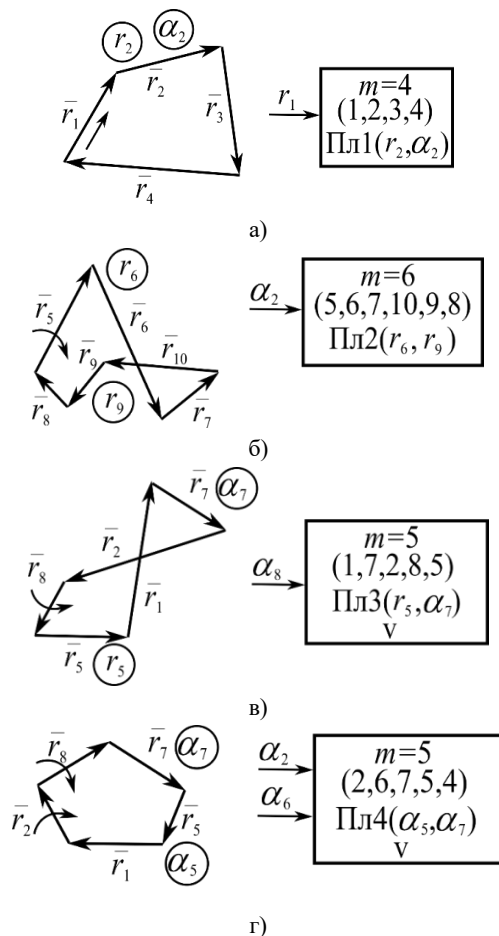


Рис. 2.2. Примеры элементарных модулей (а, б, в, г)

2.1.4. Модули с дополнительными внутриконтурными связями

Модуль с дополнительными внутриконтурными связями – модуль с числом функций, превышающим число его измерений, но равным сумме чисел измерений и дополнительных связей между параметрами контура.

При количестве функций, превышающих число измерений контура, определенность между функциями и аргументами может быть достигнута при дополнительных – к условию замкнутости – связях между параметрами контура.

Например, для пространственного векторного контура с четырьмя функциями необходимо задать одну дополнительную связь между параметрами – функциями, для плоского векторного контура с пятью функциями необходимо три дополнительных связи между функциями и т.д. Примеры плоских модулей с дополнительными внутриконтурными связями приведены на рис. 2.4.

Многообразие теоретически возможных дополнительных внутриконтурных связей параметров ограничим анализом однотипных и разнотипных связей.

Однотипная связь – зависимость между параметрами одного типа, например $r_i = r_i(r_j)$, $\alpha_i = \alpha_i(\alpha_j)$ и $\beta_i = \beta_i(\beta_j)$.

Однотипные связи могут существовать только между различными векторами.

Разнотипная связь – зависимость между параметрами разных типов, например, $r_i = r_i(\alpha_j)$, $\alpha_i = \alpha_i(r_i)$, $\beta_i = \beta_i(\alpha_j)$, $r_i = r_i(\beta_j)$ и т. д.

Разнотипные связи могут существовать между параметрами одного вектора или между параметрами различных векторов.

В плоском контуре могут быть следующие виды дополнительных связей:

- между параметрами одного вектора:

$$r_i = r_i(\alpha_i), \quad \alpha_i = \alpha_i(r_i);$$

- между параметрами различных векторов:

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(r_j); & \alpha_i &= \alpha_i(r_j); \\ r_i &= r_i(\alpha_j); & \alpha_i &= \alpha_i(\alpha_j). \end{aligned}$$

В пространственном контуре прямые дополнительные связи между параметрами теоретически значительно многообразнее:

1. Между параметрами одного вектора:

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(\alpha_i); & \alpha_i &= \alpha_i(r_i); & \beta_i &= \beta_i(r_i); \\ r_i &= r_i(\beta_i); & \alpha_i &= \alpha_i(\beta_i); & \beta_i &= \beta_i(\alpha_i); \\ r_i &= r_i(\alpha_i, \beta_i); & \alpha_i &= \alpha_i(r_i, \beta_i); & \beta_i &= \beta_i(r_i, \alpha_i). \end{aligned}$$

2. Между параметрами двух различных векторов:

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(r_j); & \alpha_i &= \alpha_i(r_j); & \beta_i &= \beta_i(r_j); \\ r_i &= r_i(\alpha_j); & \alpha_i &= \alpha_i(\alpha_j); & \beta_i &= \beta_i(\alpha_j); \\ r_i &= r_i(\beta_j); & \alpha_i &= \alpha_i(\beta_j); & \beta_i &= \beta_i(\beta_j); \\ r_i &= r_i(r_j, \alpha_j); & \alpha_i &= \alpha_i(r_j, \alpha_j); & \beta_i &= \beta_i(r_j, \alpha_j); \\ r_i &= r_i(r_j, \beta_j); & \alpha_i &= \alpha_i(r_j, \beta_j); & \beta_i &= \beta_i(r_j, \beta_j); \\ r_i &= r_i(\alpha_j, \beta_j); & \alpha_i &= \alpha_i(\alpha_j, \beta_j); & \beta_i &= \beta_i(\alpha_j, \beta_j); \\ r_i &= r_i(r_j, \alpha_j, \beta_j); & \alpha_i &= \alpha_i(r_j, \alpha_j, \beta_j); & \beta_i &= \beta_i(r_j, \alpha_j, \beta_j). \end{aligned}$$

Следует отметить также возможность существования в векторных моделях и более сложных дополнительных связей между параметрами трех векторов. В векторных моделях реальных механизмов трудно обнаружить такие связи, но теоретически может существовать или можно создать множество векторных моделей с подобными связями.

Для каждого из типов дополнительной связи параметров замкнутого векторного контура число возможных вариантов в общем случае теоретически не ограничено. Практика моделирования реальных механизмов убеждает в наиболее частом использовании связей вида $r_i = r_j + \Delta r_{j-i}$ или $\alpha_i = \alpha_j + \Delta \alpha_{j-i}$.

Последнее обстоятельство открывает большие возможности использования векторных моделей с нестандартными дополнительными внутриконтурными связями для синтеза новых механизмов.

2.1.5. Элементарные векторные модули со связями от функций векторного контура

Возможность связи параметра вектора с любым параметром любого другого вектора, привело к появлению нового класса элементарных векторных моделей со связями от функций векторного контура. В результате для всех плоских модулей найдены алгоритмы таких решений, и для всех плоских модулей количество вариантов решения увеличилось вдвое. Правда имеются и ограничения – модуль со связями сразу от обеих функций не имеет решения.

Рассмотрим для примера два варианта кулисного механизма, служащего для преобразования вращательного движения звена 2 в поступательное движение звена 3. Структурная схема первого варианта данного механизма, его кинематическая модель приведена на рис. 2.3.

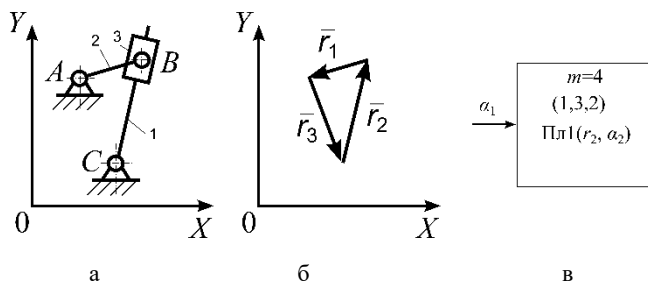


Рис. 2.3. Первый вариант кулисного механизма:
а – структурная схема; б – векторная модель; в – параметрическая формула

Кинематическая модульная векторная модель первого варианта механизма состоит из одного элементарного модуля Пл1. Динамическая модульная векторная модель первого варианта механизма состоит из кинематической модульной векторной модели (тот же элементарный модуль Пл1), дополненной векторными контурами (модулями), определяющими положения центров масс звеньев, точек приложения сосредоточенных внешних нагрузок, а также значениями массовых характеристик звеньев.

Структурная схема второго варианта механизма, его кинематическая и динамическая векторные модели представлены на рис. 2.4. Кинематическая модульная векторная модель второго варианта имеет три неизвестных: длину вектора 3 и углы поворота 3 и 2 векторов при наличии связи между векторами 2–3, то есть данный векторный контур не является элементарным и обладает дополнительной к условию замкнутости внутриконтурной связью.

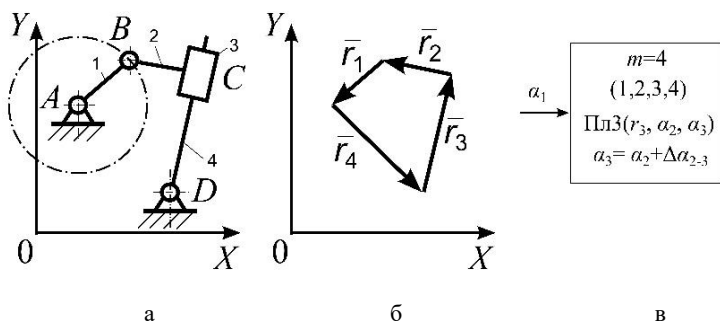


Рис. 2.4. Вариант механизма с рис. 2.3:

а – структурная схема; б – векторная модель; в – параметрическая формула

Такую векторную модель можно разбить на последовательное решение трех элементарных модулей Пл1, Пл3 и Пл4 (см. рис. 2.5, а, б, в):

Пл1 – нахождения суммарного вектора \bar{r}_5 векторов \bar{r}_3 и \bar{r}_2 ;

Пл3 – нахождения длины r_3 вектора \vec{r}_3 в местной системе координат $X'OY'$, ось X' которой направлена вдоль вектора \vec{r}_3 ;

Пл4 – нахождение углов α_3 и α_2 векторов \vec{r}_3 и \vec{r}_2 .

Отсюда следует, что необходимо найти прямой алгоритм решения подобных моделей, чтобы не производить дополнительных преобразований для решения кинематики при решении динамических задач. Для плоских векторных контуров с дополнительными внутриконтурными связями на основе элементарных модулей удалось подобрать стандартный алгоритм их решения.

Введем, для удобства дальнейшего рассуждения, два понятия, характеризующих связи между параметрами: *связующий параметр* – параметр, в зависимости от которого изменяются параметры какого-либо вектора, *зависимый параметр* – параметр, который зависит от параметра связи.

На основе решения данной задачи распишем общий алгоритм решения плоских векторных контуров с внутриконтурными связями. Алгоритм решения зависит от того, какие параметры векторов внутри контура связаны между собой.

Если связующие параметры векторов не являются функциями контура, то достаточно провести упорядочивание списка векторов по цепочке зависимости «связующий параметр – зависимые параметры».

Алгоритм решения подобных модулей будет выглядеть так:

1. Упорядочивание списка векторов по цепочке зависимости;
2. Вычисление всех зависимостей от известных параметров;
3. Решение модуля.

Если связующий параметр – функция, то следует дополнительно учитывать три фактора:

- Тип функции (длина или угол наклона вектора);

- Количество связующих параметров – функций контура;
- Тип решаемого элементарного модуля (Пл1, Пл2, Пл3 или Пл4).

Если связующие параметры – длины векторов, и они являются функциями, то такое связывание имеет, как решение в рамках «жесткой» кинематической модели (когда зависимый параметр изменяется в зависимости от связующих параметров текущего положения механизма), так и как, в рамках так, называемой «инерционной» кинематической модели (когда зависимый параметр изменяется в зависимости от связующих параметров предыдущего положения), например, моделирование пружин, ударных механизмов и т.д.

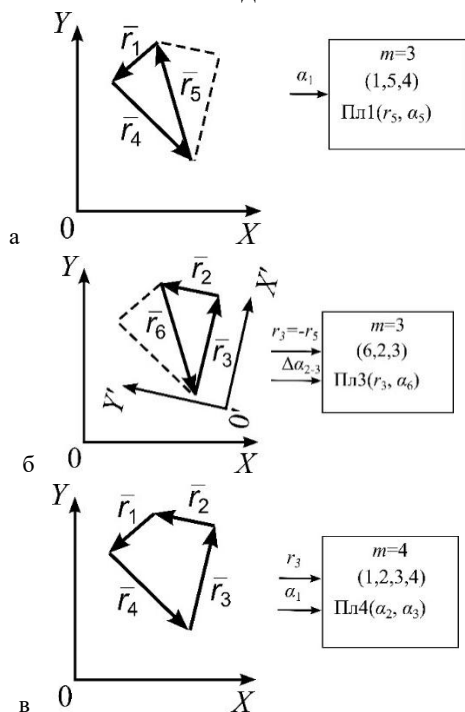


Рис. 2.5. Решение векторной модели второго варианта механизма последовательным расчётом (а, б, в) трёх элементарных модулей

Расчет «инерционной» кинематической модели со связующими параметрами – длинами-функциями не отличается от расчета, когда связующие параметры не изменяются или являются внешними аргументами:

1. Упорядочивание списка векторов по цепочке зависимости.
2. Вычисление всех зависимостей.
3. Решение модуля.

Расчет в «жесткой» кинематической модели со связующими параметрами – длинами-функциями ведётся с использованием назначения для длины-функции равенства единицы, получения суммарного вектора, и пересчета его масштаба от цепочки известных векторов (рассмотрение данного алгоритма приводится далее).

Если углы наклона векторов являются и связующими параметрами, и функциями, то необходимо рассмотреть два случая (модуль ПлЗ):

- одна функция является связующим параметром;
- две функции являются связующими параметрами.

Рассмотрим алгоритмы также и для модуля Пл1 в рамках «жесткой» кинематической модели.

Алгоритм решения модуля **Пл1**(r_1, α_1) с α_1 – связующим параметром:

1. Упорядочивание списка векторов по цепочке зависимости;
2. Вычисление всех зависимостей, независимых от функций;
3. Нахождение суммарного вектора от всех векторов с постоянными и независимыми от функции параметрами (аргументов модели, со связями от постоянных или аргументов) с помощью модуля $\text{Пл1}(r_{\Sigma_{\text{const}}}, \alpha_{\Sigma_{\text{const}}})$.

Количество векторов в контуре уменьшится на $N-K$, где N – первоначальное количество векторов контура, K – количество векторов, зависящих от связующего параметра.

Соответственно эти вектора исключаются и из расчетного списка векторов контура;

4. Переход к местной системе координат с осью X' проходящей вдоль вектора 1 и нахождение суммарного вектора векторов, параметры которых зависят от функции α_1 , с помощью модуля Пл1($r_{\Sigma_1}, \alpha_{\Sigma_1}$);

5. Нахождение в местной координатной системе вектора 1 $X'OY'$ длины r_1 , и угла суммарного вектора $\alpha_{\Sigma_{constI}}$ с помощью модуля Пл3($r_1, \alpha_{\Sigma_{constI}}$) со списком векторов ($\Sigma_1, 1, \Sigma_{constI}$);

6. Нахождение $\alpha_1 = \alpha_{\Sigma_{const}} - (\alpha_{\Sigma_{constI}} - 180^\circ)$.

7. Нахождение углов векторов, связанных с α_1 :
 $\alpha_i = \alpha_1 + \Delta\alpha_{1i}$.

Вариант решения однозначный, но в связи с тем, что в расчёте используется модуль Пл1, то вариантов решения формально может быть два. На рис. 2.6, а, б показан рычажный механизм и его векторная модель соответствующая модулю Пл1(r_3, α_3) с дополнительной связью от функции контура α_3 : $\alpha_4 = \alpha_3 + \Delta\alpha_{34}$.

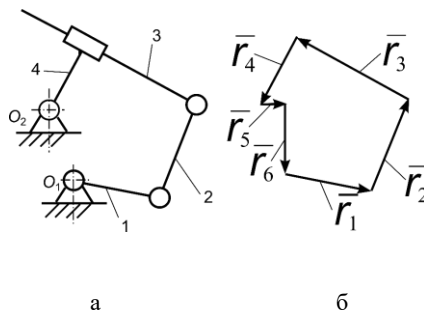


Рис. 2.6. Рычажный механизм и его векторная модель Пл1(r_3, α_3)

Алгоритм решения модуля $\text{Пл1}(r_1, \alpha_1)$ с r_1 – связующим параметром:

1. Упорядочивание списка векторов по цепочке зависимости;
2. Вычисление всех зависимостей, независимых от функций;
3. Нахождение суммарного вектора от всех векторов с постоянными и независимыми от функции параметрами (аргументов модели, со связями от постоянных или аргументов) с помощью модуля $\text{Пл1}(r_{\Sigma_{\text{const}}}, \alpha_{\Sigma_{\text{const}}})$. Количество векторов в контуре уменьшится на $N-K$, где N – первоначальное количество векторов контура, K – количество векторов, зависящих от связующего параметра. Соответственно эти вектора исключаются и из расчетного списка векторов контура;
4. Нахождение угла α_1 , и длины суммарного вектора $\alpha_{\Sigma_{\text{const1}}}$ при $r_1 = 1$ с помощью модуля $\text{Пл3}(\alpha_1, r_{\Sigma_{\text{const1}}})$ со списком векторов $(\Sigma_1, 1, \Sigma_{\text{const1}})$;
5. Нахождение $\Delta r_1 = r_{\Sigma_{\text{const}}} / r_{\Sigma_{\text{const1}}}$;
6. Присвоение $r_1 = \Delta r_1$;
7. Нахождение длин векторов, связанных с r_1 : $r_i = r_1 \Delta r_1 + \Delta r_{1i}$.

На рис. 2.7, а, б показан рычажный механизм и его векторная модель соответствующая модулю $\text{Пл1s}(r_3, \alpha_3)$ с дополнительной связью от функции контура r_3 : $r_4 = r_3 + \Delta r_{34}$.

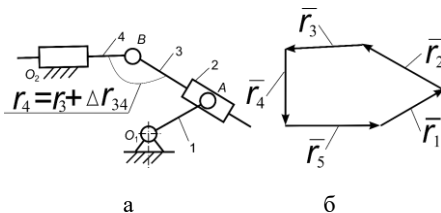


Рис. 2.7. Рычажный механизм и его векторная модель $\text{Пл1s}(r_3, \alpha_3)$

В приведённых моделях были использованы связи типа «прибавить/отнять», но возможно применение и других типов связи «умножить/делить» и т.д. Алгоритмы решения для таких типов связей и решения для модулей для Пл2, Пл3 и Пл4 выходят за рамки и представляют собой достаточно большой раздел теории векторного моделирования. Решение векторных модулей со связями от функций добавляют новые элементарные модули с новыми вариантами решения, которые приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Элементарные плоские векторные модули, со связями от одной из функций модуля

Модуль	Функции		Макс число решений	Основные аргументы
	u_1	u_2		
Пл1s	r_i	α_i	2	х
Пл2s	r_i	r_j	2	х
Пл3s	r_i	α_j	4	х
Пл4s	α_i	α_j	4	х

Примечание: х – означает, что аргументами могут быть любые параметры векторов, не являющиеся функциями модуля.

2.2. Многоконтурные модули

Многоконтурный модуль – система векторных замкнутых контуров минимального состава с определенностью между функциями и аргументами, в состав, которого входит хотя бы один контур с аргументами, зависящими от функций одного из последующих контуров этой системы. Многоконтурный модуль при заданных аргументах невозможно «разобрать» на простые модули.

При моделировании реальных контурных систем, и в частности механизмов высоких классов, не всегда удастся скомпоновать векторную модель на основе простых, одноконтурных моделей. Выделим среди многоконтурных моделей – обратимые и разделимые модули. Ограничимся рассмотрением параметрических формул многоконтурных модулей с одной расчетной целью, т.е. модулей, в состав которых входят первый, промежуточный и последний контуры, образующие линейную последовательность. Первая структурно-параметрическая формула рис. 2.8, а, имеет «обратную связь» $\alpha_4 = \alpha_5 + \Delta\alpha_{5-4}$, т.е. один из параметров первого контура зависит от параметра второго контура. Во второй формуле (рис. 2.8, б) – две «обратные связи»: $r_2 = r_9$ и $\alpha_7 = \alpha_8 + \Delta\alpha_{8-7}$.

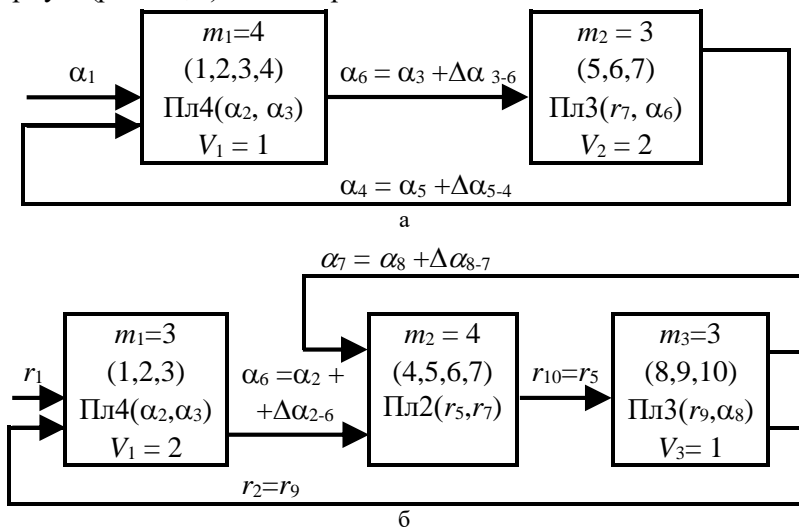


Рис. 2.8. Структурно-параметрические формулы: а – формула с одной «обратной связью»; б – формула с двумя «обратными связями»

Определить функцию первого контура как той, так и другой векторной модели невозможно без учета функций последующих контуров расчетной цепи.

По этой причине в состав этих модулей входят несколько векторных контуров.

2.2.1. Обратимые модули

Обратимый модуль – многоконтурный модуль, с определённой между функциями и аргументами при задании функции последнего контура. В качестве примера рассмотрим многоконтурный плоский модуль со структурно-параметрической формулой приведённой на рис. 2.9, а. Модуль содержит два контура, при этом первый контур имеет аргумент, как контура, так и всего модуля в целом, а одна из функций второго контура является аргументом первого контура модуля. Модуль допускает два варианта обращения. Первый вариант (рис. 2.9, б) позволяет определить значения аргумента и функций модуля при задании значения одной из функций второго контура, вариант рис. 2.9, в – при задании значения другой функции этого контура.

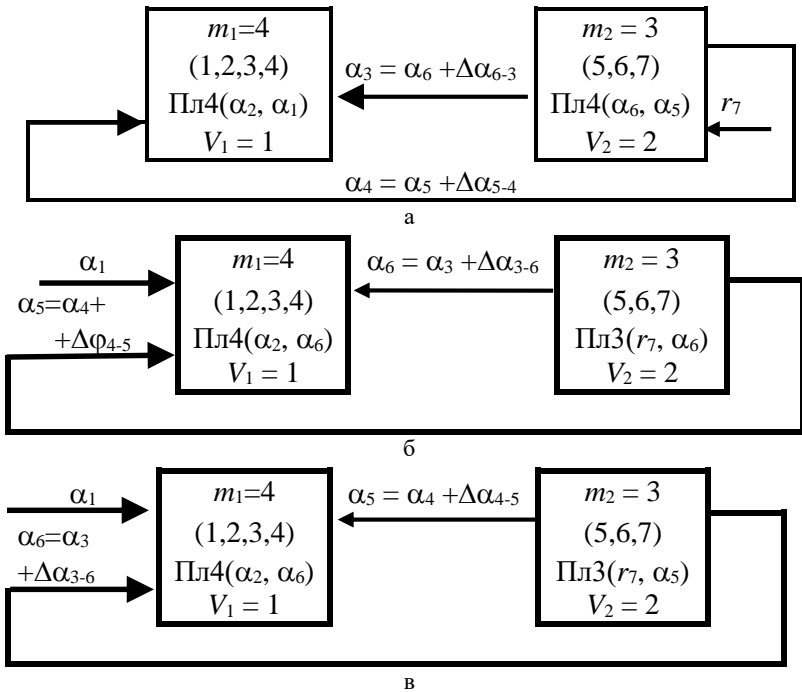


Рис. 2.9. Варианты обращения векторного модуля с рис. 2.8, а

Многоконтурные модули могут быть использованы в частности при моделировании механизмов третьего класса. Классификация обратимых многоконтурных модулей выходит за рамки настоящей работы.

2.3. Аналитическое выражение модулей

2.3.1. Функции элементарных модулей

2.3.1.1. Функции элементарных плоских модулей

Аналитические решения для функций элементарных плоских модулей табл. 2.2 получим из системы уравнений (2.2) условия замкнутости. Используем вариант индексации векторов: $i = 1$, $j = 2$ и $k = 3$.

Плоский модуль Пл1 (функции r_1 и α_1)

Преобразуем (2.2): $r_1 \cos \alpha_1 = -X; r_1 \sin \alpha_1 = -Y;$

где $X = \sum_{i=2}^m r_i \cos \alpha_i$, $Y = \sum_{i=2}^m r_i \sin \alpha_i$.

$$\text{Тогда: } r_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (2.3)$$

$$A_1 = \text{sign}(-Y) \arccos\left(-\frac{X}{r_1}\right). \quad (2.4)$$

Плоский модуль Пл2 (функции r_1 и r_2)

Преобразуем (2.2):

$$r_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + r_2 + X = 0; \quad (2.5)$$

$$r_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + Y = 0; \quad (2.6)$$

где $X = \sum_{i=3}^m r_i \cos(\alpha_i - \alpha_2);$

$$Y = \sum_{i=3}^m r_i \sin(\alpha_i - \alpha_2).$$

т.е. перейдем к системе координат $x_2 O_2 y_2$ (рис. 2.10), тогда из уравнения (2.6) получим:

$$r_1 = -Y / \sin(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (2.7)$$

из уравнения (2.5):

$$r_2 = -X - r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (2.8)$$

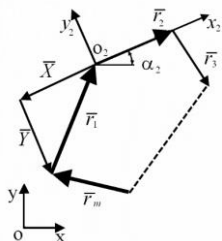


Рис. 2.10. Схема модуля Пл2

Плоский модуль Пл3 (функции r_1 и α_2)

В системе координат $x_1 O_1 y_1$ (рис. 2.11):

$$X = \sum_{i=3}^m r_i \cos(\alpha_i - \alpha_1); \quad Y = \sum_{i=3}^m r_i \sin(\alpha_i - \alpha_1).$$

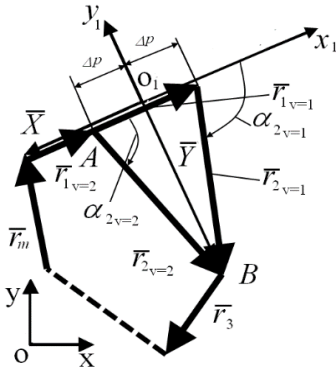


Рис. 2.11. Схема модуля Пл3

Первый вариант решения ($V = 1$) принимаем при $|\varphi_{2_1}| > \pi/2$.

Пусть $k = 1$ при $V = 1$ и $k = -1$ при $V = 2$.

В треугольнике ABO_1

$$\Delta p = \sqrt{r_2^2 - Y^2}.$$

Тогда:

$$r_1 = -X + k \cdot \Delta p; \quad (2.9)$$

$$\alpha_2 = \text{sign}(-Y) \cdot \arccos\left(k \cdot \frac{\Delta p}{r_2}\right) + \alpha_1. \quad (2.10)$$

Плоский модуль Пл4 (функции α_1 и α_2)

Предварительно определим параметры суммарного вектора

$$\bar{p}_{1-2} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2:$$

$$p_{1-2} = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \alpha_{1-2} = \text{sign}(-Y) \cdot \arccos(-X/p_{1-2}),$$

где $X = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i$; $Y = \sum_{i=3}^m r_i \sin \alpha_i$.

Перейдем к системе координат $x_{1-2} O_{1-2}$ (рис. 2.12). В треугольнике со сторонами a , b , c , и противолежащими соответственно углами A , B и C :

$$A = 2 \arccos \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\text{и } B = 2 \arccos \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};$$

где $p = 0,5 \cdot (a + b + c)$.

При $a=r_1$, $b=r_2$ и $c=p_{1-2}$ (рис. 2.12):

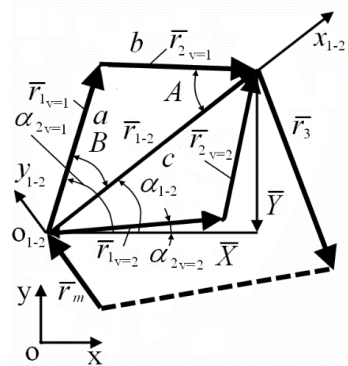


Рис. 2.12. Схема модуля Пл4

$$A = 2 \arccos \sqrt{\frac{s(p-r_1)}{r_2}}; \quad B = 2 \arccos \sqrt{\frac{s(p-r_2)}{r_1}};$$

$$\text{где } p = 0,5(r_1 + r_2 + p_{1-2}); \quad s = \frac{p}{p_{1-2}}.$$

Принимаем первый вариант решения $\nu = 1$ при $\alpha_{1-2} \geq 0$. Пусть $k = 1$ при $\nu = 1$ и $k = -1$ при $\nu = 2$, тогда: $\alpha_i = \alpha_{1-2} + \Delta\alpha_i$, где $i = 1$ или 2 , $\Delta\alpha_1 = k \cdot B$, $\Delta\alpha_2 = -k \cdot A$.

2.3.1.2. Функции элементарных пространственных модулей

Для функций большинства элементарных пространственных модулей, используется метод отображения на плоскости и прямые аналитические решения получены на основе решений для плоских модулей, данные подходы дают геометрическую наглядность решений, и возможность визуального анализа возможных вариантов решения («сборок»).

Также найдены более простые решения и для модулей Пр11, Пр7, Пр18, Пр19, чем при решении методом Гаусса. Для пространственных модулей Пр 7, Пр18, Пр19 решения задач о функциях получены методом отображения на плоскость. Также для частного случая модуля Пр11 (при ортогональности векторов с функциями) решение задачи о функциях получено методом решения линейных уравнений.

Для более полного представления о простоте данных подходов приведено решение методом Гаусса для модуля Пр5, для которого отображение на плоскость реализовать не удалось.

Пространственный модуль Пр1 (функции r_i, α_i, β_i)

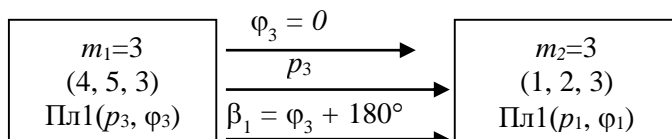
Примем:

$$p_4 = \sum_{i=2}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i; \quad \varphi_4 = 0;$$

$$p_5 = \sum_{i=2}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i; \quad \varphi_5 = 90^\circ;$$

$$p_2 = \sum_{i=2}^m r_i \sin \alpha_i; \quad \varphi_2 = 90^\circ.$$

Тогда нахождение функций будет сведено к решению двух плоских модулей:



Решение единственное.

Пространственный модуль Пр2 (функции r_1, α_1, r_2)

$$r_2 = -\frac{\sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \sin(\beta_i - \beta_1)}{\cos \alpha_2 \sin(\beta_2 - \beta_1)} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} m \\ (1, 2, \dots, m) \\ \text{Пр1}(r_1, \alpha_1, \beta_1) \end{matrix}}$$

Решение единственное.

Пространственный модуль Пр3 (функции r_1, α_1, α_2)

$$\alpha_2 = \pm \arccos \frac{\sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \sin(\beta_i - \beta_1)}{r_2 \sin(\beta_2 - \beta_1)} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} m \\ (1, 2, \dots, m) \\ \text{Пр1}(r_1, \alpha_1, \beta_1) \end{matrix}}$$

Принимаем первый вариант решения ($V = 1$) - при $\alpha_2 \geq 0$.
 Максимальное число решений – 2.

Пространственный модуль Пр4 (функции r_1, α_1, β_2)

$$\beta = \arcsin \frac{-\sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \sin(\beta_i - \beta_1)}{r_2 \cdot \cos \alpha_2} + \beta_1 \left| \begin{matrix} \beta_2 = \beta \\ \text{или} \\ \beta_2 = 180^\circ - \beta \end{matrix} \right| \longrightarrow$$

$\longrightarrow \boxed{\begin{matrix} m \\ (1, 2, \dots, m) \\ \text{Пр1}(r_1, \alpha_1, \beta_1) \end{matrix}}$

Принимаем первый вариант решения ($V = 1$) – при $\beta_{2_{1-2}} \geq \left| \frac{\pi}{2} \right|$.
 Максимальное число решений – 2.

Пространственный модуль Пр5 (функции r_1, β_1, r_2)

Из проекций векторов модуля Пр5 на оси X, Y, Z (рис. 2.13):

$$r_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + r_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + X_3 = 0; \quad (2.11)$$

$$r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 + Y_3 = 0; \quad (2.12)$$

$$r_1 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + r_2 \cos \alpha_2 \sin \beta_2 + Z_3 = 0, \quad (2.13)$$

где $X_3 = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$; $Y_3 = \sum_{i=3}^m r_i \sin \alpha_i$;

$$Z_3 = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i.$$

Выразим из (2.12) r_2 :

$$r_2 = -\frac{Y_3 + r_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

Подставим данную замену в (2.11) и (2.13):

$$r_1 \left(\cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \cos \beta_2 \right) + X_3 - \frac{Y_3}{\operatorname{tg} \alpha_2} \cos \beta_2 = 0; \quad (2.14)$$

$$r_1 \left(\cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \sin \beta_2 \right) + Z_3 - \frac{Y_3}{\operatorname{tg} \alpha_2} \sin \beta_2 = 0. \quad (2.15)$$

Обозначим:

$$A = \cos \alpha_2; \quad B' = -\frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \cos \beta_2; \quad B'' = -\frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \sin \beta_2;$$

$$C' = -X_3 + \frac{Y_3}{\operatorname{tg} \alpha_2} \cos \beta_2; \quad C'' = -Z_3 + \frac{Y_3}{\operatorname{tg} \alpha_2} \sin \beta_2.$$

Подставим данные обозначения в (2.14) и (2.15)

$$r_1 (A \cos \beta_1 + B') - C' = 0; \quad (2.16)$$

$$r_1 (A \sin \beta_1 + B'') - C'' = 0. \quad (2.17)$$

Выразим из (2.16) r_1 :

$$r_1 = \frac{C'}{(A \cos \beta_1 + B')}. \quad (2.18)$$

Подставим замену в (2.17):

$$C' \frac{(A \sin \beta_1 + B'')}{(A \cos \beta_1 + B')} - C'' = 0. \quad (2.19)$$

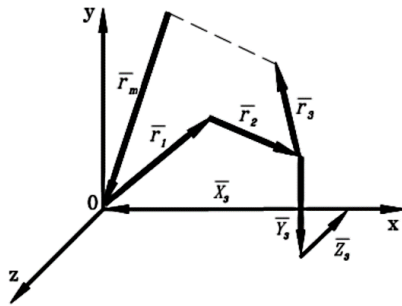


Рис. 2.13. Проекция векторов модуля Пр5

Подставим $\sin \beta_1 = \sqrt{1 - \cos(\beta_1)^2}$ в (2.15) и преобразуем:

$$\begin{aligned}
 A\sqrt{1 - \cos(\beta_1)^2} &= \frac{C''}{C'} A \cos \beta_1 + \frac{C''}{C'} B' - B''; \\
 C'\sqrt{1 - \cos(\beta_1)^2} &= C'' \cos \beta_1 + \frac{C''B' - C'B''}{A}.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Обозначим : $D = \frac{(C''B' - C'B'')}{A}$ и подставим в (2.20)

преобразуем:

$$\begin{aligned}
 C''^2 - C'^2 \cos(\beta_1)^2 &= C''^2 \cos(\beta_1)^2 + 2DC'' \cos \beta_1 + D^2; \\
 (C''^2 + C'^2) \cos(\beta_1)^2 + 2DC'' \cos \beta_1 + D^2 - C'^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \arccos\left(\frac{-2DC'' \pm \sqrt{4D^2C''^2 - 4(C''^2 + C'^2)(D^2 - C'^2)}}{2(C''^2 + C'^2)}\right); \\
 \beta_1 &= \arccos\left(\frac{-DC'' \pm \sqrt{D^2C''^2 - (C''^2 + C'^2)(D^2 - C'^2)}}{(C''^2 + C'^2)}\right); \\
 \beta_1 &= \arccos\left(\frac{-DC'' \pm \sqrt{-D^2C'^2 + C''^2C'^2 + C'^4}}{(C''^2 + C'^2)}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Данное решение очень сложно с точки зрения учета всех частных случаев и не дает геометрически наглядного решения возможных вариантов, то есть нельзя заранее точно определить необходимый вариант.

Пространственный модуль Пр7 (функции r_1, β_1, β_2)

Из проекций векторов модуля Пр7 на ось Y (см. рис. 2.14):

$$r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 + r_3 \sin \alpha_3 + Y_4 = 0,$$

где $Y_4 = \sum_{i=4}^m r_i \sin \alpha_i$; можно найти r_1 :

$$r_1 = -\frac{r_2 \sin \alpha_2 + r_3 \sin \alpha_3 + Y_4}{\sin \alpha_1}. \quad (2.22)$$

Отображение пространственного контура $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_m$ на плоскости XOY контуром $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4, \vec{p}_5$ (рис. 2.14), с параметрами:

$$\begin{aligned} p_1 &= r_1 \cos \alpha_1; & p_2 &= r_2 \cos \alpha_2; \\ p_3 &= r_3 \cos \alpha_3; & \varphi_3 &= \beta_3; \\ p_4 &= \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i; & \varphi_4 &= 90^\circ; \\ p_5 &= \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i; & \varphi_5 &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Параметрическая формула определения функций r_1, β_1, β_2 модуля Пр7 приведена на рис. 2.15.

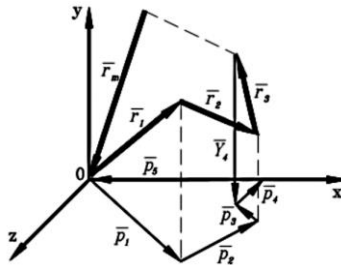


Рис. 2.14. Проекция векторов модуля Пр7

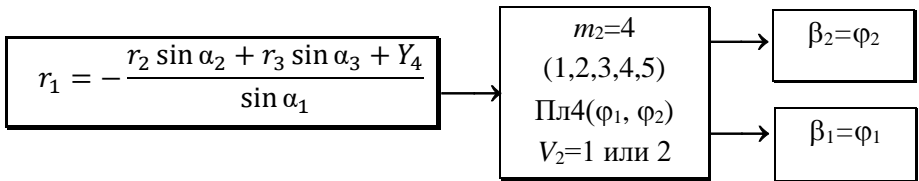


Рис. 2.15. Параметрическая формула модуля Пр7

Первый вариант решения $V = 1$ принимаем при $V_2 = 1$, второй $V = 2$ – при $V_2 = 2$.

Максимальное число решений – 2.

Пространственный модуль Пр8 (функции α_1, β_1, r_2)

Отобразим пространственный контура $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_m$ на плоскости XOY контуром $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{p}_5$, с параметрами:

$$\varphi_2 = \alpha_2; \quad p_3 = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \cos(\beta_i - \beta_2); \quad \varphi_3 = 0;$$

$$p_4 = \sum_{i=3}^m r_i \sin \alpha_i; \quad \varphi_4 = 0; \quad p_5 = \sqrt{r_1^2 - p_4^2}.$$

Параметрическая формула определения функций α_1, β_1, r_2 модуля Пр8 приведена на рис. 2.16.

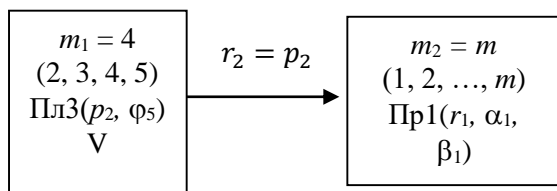


Рис. 2.16. Параметрическая формула модуля Пр8

Принимаем первый вариант решения ($V=1$) – при $\varphi_5 \geq \left| \frac{\pi}{2} \right|$.

Максимальное число решений – 2.

Пространственный модуль Пр9 (функции $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$)

Отобразим пространственный контура $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_m$ на плоскости XOY контуром $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{p}_5$, с параметрами:

$$p_2 = r_2; \quad p_3 = \sum_{i=3}^m r_i \cos \alpha_i \cos(\beta_i - \beta_2); \quad \varphi_3 = 0;$$

$$p_4 = \sum_{i=3}^m r_i \sin \alpha_i; \quad \varphi_4 = 0; \quad p_5 = \sqrt{r_1^2 - p_4^2}.$$

Параметрическая формула определения функций $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ модуля Пр9 приведена на рис. 2.17.

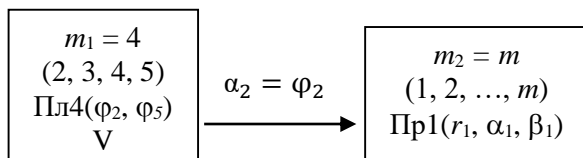


Рис. 2.17. Параметрическая формула модуля Пр9

Принимаем первый вариант решения ($V = 1$) – при $\alpha_2 \geq 0$.
Максимальное число решений – 2.

Пространственный модуль Пр10 (функции $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$)

Решение модуля Пр10 приведена на рис. 2.18.

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{-\sum_{i=2}^m r_i \sin \alpha_i}{r_1} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} m_2 = m \\ (1, 2, \dots, m) \\ \text{Пр7}(r_1, \beta_1, \beta_2) \end{array}}$$

Рис. 2.18. Решение модуля Пр10

Принимаем первый вариант решения ($V = 1$) – при $\beta_{1-2} \geq 0$.
Максимальное число решений – 2.

Пространственный модуль Пр11 (функции r_1, r_2, r_3)

Система уравнений проекций векторов модуля Пр11 на оси X, Y, Z (см. рис. 2.19):

$$r_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + r_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + r_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 + X_4 = 0, \quad (2.23)$$

$$r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 + r_3 \sin \alpha_3 + Y_4 = 0, \quad (2.24)$$

$$r_1 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + r_2 \cos \alpha_2 \sin \beta_2 + r_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 + Z_4 = 0, \quad (2.25)$$

где $X_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$, $Y_4 = \sum_{i=4}^m r_i \sin \alpha_i$,

$$Z_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cdot \cos \alpha_i \sin \beta_i.$$

Обозначим для $j = 1, 2, 3$:

$$A_j = \cos \alpha_j \cos \beta_j, \quad B_j = \sin \alpha_j, \quad C_j = \cos \alpha_j \sin \beta_j.$$

Преобразуем (2.23–2.25):

$$A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3 + X_4 = 0;$$

$$B_1 r_1 + B_2 r_2 + B_3 r_3 + Y_4 = 0;$$

$$C_1 r_1 + C_2 r_2 + C_3 r_3 + Z_4 = 0.$$

По правилу Крамера через определители находим r_1, r_2, r_3 :

$$r_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad r_2 = -\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad r_3 = -\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

где:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} X_4 & A_2 & A_3 \\ Y_4 & B_2 & B_3 \\ Z_4 & C_2 & C_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & X_4 & A_3 \\ B_1 & Y_4 & B_3 \\ C_1 & Z_4 & C_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & X_4 \\ B_1 & B_2 & Y_4 \\ C_1 & C_2 & Z_4 \end{vmatrix}.$$

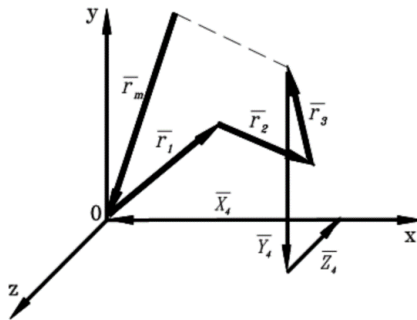


Рис. 2.19. Проекция векторов модуля Пр11

Частный случай пространственного модуля Пр11 (функции r_1, r_2, r_3)

Рассмотрим случай, когда все три вектора, длины которых являются функциями, ортогональны, то есть, если каждый из них перпендикулярен плоскости в которой лежат два других:

$$\alpha_1=0, \beta_1=0, \alpha_2=90^\circ, \beta_2=0, \alpha_3=0, \beta_3=90^\circ.$$

Из уравнений (2.23)-(2.25):

$$r_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + X_4 = 0;$$

$$r_2 \sin \alpha_2 + Y_4 = 0;$$

$$r_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 + Z_4 = 0,$$

где:

$$X_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i,$$

$$Y_4 = \sum_{i=4}^m r_i \sin \alpha_i,$$

$$Z_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i.$$

$$\text{Тогда } r_1 = -X_4, \quad r_2 = -Y_4, \quad r_3 = -Z_4.$$

Частное решение модуля Пр11 в отличии от общего более компактно, что важно при нахождении координат X, Y, Z некоторой точки, как при счете вручную, так и на ЭВМ.

Пространственный модуль Пр12 (функции r_1, r_2, α_3)

Предварительно из системы уравнений (2.1) получена система двух уравнений, не содержащих параметра r_1 ,

$$Y_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 = X_2 \sin \alpha_1, \quad (2.26)$$

$$Y_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 = Z_2 \sin \alpha_1, \quad (2.27)$$

где:

$$X_2 = r_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + X_3; \quad Y_2 = r_2 \sin \alpha_2 + Y_3;$$

$$Z_2 = r_2 \cos \alpha_2 \sin \beta_2 + Z_3; \quad X_3 = r_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 + X_4;$$

$$Y_3 = r_3 \sin \alpha_3 + Y_4; \quad Z_3 = r_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 + Z_4,$$

при:

$$X_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i; \quad (2.28)$$

$$Y_4 = \sum_{i=4}^m r_i \sin \alpha_i; \quad (2.29)$$

$$Z_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i. \quad (2.30)$$

Из уравнений (2.26) и (2.27), может быть получено:

$$\begin{aligned} r_2(\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \alpha_1) = \\ = X_3 \sin \alpha_1 - Y_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1; \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} r_2(\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \cos \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \alpha_1) = Z_3 \sin \alpha_1 - \\ - Y_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_{11}(Z_3 \sin \alpha_1 - Y_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1) = e_{12}(X_3 \sin \alpha_1 - \\ - Y_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где $e_{11} = \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \alpha_1$;

$$e_{12} = \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \cos \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \alpha_1.$$

Расписав (2.33), используя (2.28–2.30), получим:

$$\begin{aligned} e_{11}[(r_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 + Z_4) \sin \alpha_1 - (r_3 \sin \alpha_3 + Y_4) \cos \alpha_1 \sin \beta_1] = \\ = e_{12}[(r_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 + X_4) \sin \alpha_1 - (r_3 \sin \alpha_3 + \\ + Y_4) \cos \alpha_1 \cos \beta_1]; \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} e_{11}r_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 \sin \alpha_1 + e_{11}Z_4 \sin \alpha_1 - \\ - e_{11}r_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - e_{11}Y_4 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 = \\ = e_{12}r_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \sin \alpha_1 + e_{12}X_4 \sin \alpha_1 - \\ - e_{12}r_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - e_{12}Y_4 \cos \alpha_1 \cos \beta_1. \end{aligned}$$

Примем следующие обозначения:

$$a = e_{11}r_3 \sin \beta_3 \sin \alpha_1 - e_{12}r_3 \cos \beta_3 \sin \alpha_1;$$

$$b = e_{11}Z_4 \sin \alpha_1 - e_{12}X_4 \sin \alpha_1;$$

$$c = -e_{11}r_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + e_{12}r_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1;$$

$$d = -e_{11}Y_4 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + e_{12}Y_4 \cos \alpha_1 \cos \beta_1.$$

Получим выражение:

$$a \cos \alpha_3 + b + c \sin \alpha_3 + d = 0. \quad (2.35)$$

Из решений тригонометрических функций от аргумента x существует представление:

$$A \sin(x) + B \cos(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \varphi),$$

где угол φ находится из соотношений:

$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Преобразуя уравнение (2.35), получим:

$$\sqrt{a^2 + c^2} \sin(\alpha_3 + \varphi) + b + d = 0, \quad (2.36)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{c}\right)$.

Решая уравнение (2.37), получим:

$$\alpha_3 = \arcsin\left(-\frac{b+d}{\sqrt{a^2+c^2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{c}\right).$$

Используя (2.31) вычислим r_2 :

$$r_2 = \frac{X_3 \sin \alpha_1 - Y_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \alpha_1}$$

или

$$r_2 = \frac{Z_3 \sin \alpha_1 - Y_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \cos \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \alpha_1}.$$

Тогда r_1 :

$$r_1 = -\frac{r_2 \sin \alpha_2 + Y_3}{\sin \alpha_1}.$$

Пространственный модуль Пр13 (функции r_p, r_2, β_3)

Предварительно из системы уравнений (2.1) получена система двух уравнений, не содержащих параметра r_1 ,

$$Y_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 = X_2 \sin \alpha_1, \quad (2.37)$$

$$Y_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 = Z_2 \sin \alpha_1, \quad (2.38)$$

где:

$$X_2 = r_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + X_3;$$

$$Y_2 = r_2 \sin \alpha_2 + Y_3;$$

$$Z_2 = r_2 \cos \alpha_2 \sin \beta_2 + Z_3.$$

$$X_3 = r_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 + X_4;$$

$$Y_3 = r_3 \sin \alpha_3 + Y_4;$$

$$Z_3 = r_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 + Z_4;$$

$$X_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i; \quad (2.39)$$

$$Y_4 = \sum_{i=4}^m r_i \sin \alpha_i; \quad (2.40)$$

$$Z_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i. \quad (2.41)$$

Тогда из уравнений (2.37) и (2.38) может быть получено:

$$\begin{aligned} r_2 (\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \alpha_1) &= X_3 \sin \alpha_1 - \\ - Y_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1; & \quad (2.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 (\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \cos \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \alpha_1) &= Z_3 \sin \alpha_1 - \\ - Y_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1. & \quad (2.43) \end{aligned}$$

Примем:

$$\begin{aligned} e_{11} (Z_3 \sin \alpha_1 - Y_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1) &= e_{12} (X_3 \sin \alpha_1 - \\ - Y_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1); \end{aligned}$$

где:

$$e_{11} = \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \alpha_1;$$

$$e_{12} = \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \cos \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \alpha_1.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} e_{11} [(r_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 + Z_4) \sin \alpha_1 - (r_3 \sin \alpha_3 + Y_4) \cos \alpha_1 \sin \beta_1] &= \\ = e_{12} [(r_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 + X_4) \sin \alpha_1 - (r_3 \sin \alpha_3 + Y_4) \cos \alpha_1 \cos \beta_1]; \\ e_{11} r_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3 \sin \alpha_1 + e_{11} Z_4 \sin \alpha_1 - e_{11} r_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + \\ + e_{11} Y_4 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 &= \\ = e_{12} r_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \sin \alpha_1 + e_{12} X_4 \sin \alpha_1 - \\ - e_{12} r_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + e_{12} Y_4 \cos \alpha_1 \cos \beta_1. \end{aligned}$$

Примем следующие обозначения

$$a = e_{11} r_3 \cos \alpha_3 \sin \alpha_1;$$

$$b = -e_{12} r_3 \cos \alpha_3 \sin \alpha_1;$$

$$c = e_{11}Z_4 \sin \alpha_1 - e_{12}X_4 \sin \alpha_1 - \\ - e_{11}r_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + e_{12}r_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \\ + e_{11}Y_4 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - e_{12}Y_4 \cos \alpha_1 \cos \beta_1.$$

Получим выражение:

$$a \sin \beta_3 + b \cos \beta_3 + c = 0.$$

Из решений тригонометрических функций от аргумента x существует представление:

$$A \sin(x) + B \cos(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \varphi), \quad (2.44)$$

где угол φ находится из соотношений:

$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Преобразуем уравнение (2.44):

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\beta_3 + \varphi) + c = 0, \quad (2.45)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Решая уравнение (2.45), получим:

$$\beta_3 = -\arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Используя (2.42) вычислим r_2 :

$$r_2 = \frac{X_3 \sin \alpha_1 - Y_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_1}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \alpha_1}$$

или

$$r_2 = \frac{Z_3 \sin \alpha_1 - Y_3 \cos \alpha_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \cos \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \alpha_1}.$$

Тогда r_1 :

$$r_1 = -\frac{r_2 \sin \alpha_2 + Y_3}{\sin \alpha_1}.$$

Пространственный модуль Пр18 (функции β_1, β_2, r_3)

Из проекций векторов модуля Пр18 на ось Y (см. рис. 2.14):

$$r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 + r_3 \sin \alpha_3 + Y_4 = 0,$$

где $Y_4 = \sum_{i=4}^m r_i \sin \alpha_i$,

можно найти r_3 :

$$r_3 = -\frac{r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 + Y_4}{\sin \alpha_3}.$$

Отображение пространственного контура $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_m$ на плоскости XOY контуром $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4, \vec{p}_5$ (см. рис. 2.19), с параметрами:

$$p_1 = r_1 \cos \alpha_1; \quad p_2 = r_2 \cos \alpha_2; \quad p_3 = r_3 \cos \alpha_3; \quad \varphi_3 = \beta_3;$$

$$p_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i; \quad \varphi_4 = -90^\circ;$$

$$p_5 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i; \quad \varphi_5 = 180^\circ.$$

Соответствующим модулю Пл4(φ_1, φ_2), определяет $\beta_1 = \varphi_1$ и $\beta_2 = \varphi_2$.

Параметрическая формула определения функций β_1, β_2, r_3 модуля Пр18 приведена на рис. 2.20.

Первый вариант решения $V = 1$ принимаем при $V_2 = 1$, второй $V = 2$ – при $V_2 = 2$.

Максимальное число решений – 2.

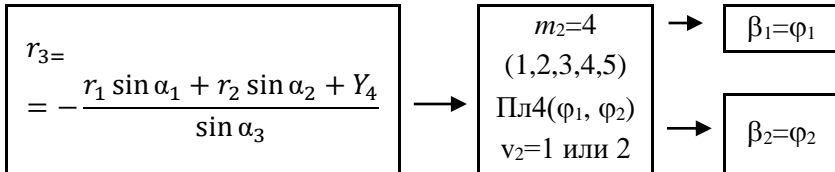


Рис. 2.20. Решение модуля Пр18

Пространственный модуль ПР19 (функции $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$)

Из проекций векторов модуля Пр19 на ось Y (см. рис. 2.19):

$$r_1 \cdot \sin \alpha_1 + r_2 \cdot \sin \alpha_2 + r_3 \cdot \sin \alpha_3 + Y_4 = 0,$$

где $Y_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cdot \sin \alpha_i$.

Можно найти α_3 :

$$\alpha_3 = \arcsin\left(-\frac{r_1 \cdot \sin \alpha_1 + r_2 \cdot \sin \alpha_2 + Y_4}{r_3}\right);$$

или

$$\alpha_3 = 180^\circ - \arcsin\left(-\frac{r_1 \cdot \sin \alpha_1 + r_2 \cdot \sin \alpha_2 + Y_4}{r_3}\right).$$

Отображение пространственного контура $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m$ на плоскости XOY контуром $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{p}_5$ (см. рис. 2.14), с параметрами соответствующим модулю Пл4(φ_1, φ_2):

$$p_1 = r_1 \cos \alpha_1; \quad p_2 = r_2 \cos \alpha_2; \quad p_3 = r_3 \cos \alpha_3; \quad \varphi_3 = \beta_3;$$

$$p_4 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \sin \beta_i; \quad \varphi_4 = -90^\circ;$$

$$p_5 = \sum_{i=4}^m r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i; \quad \varphi_5 = 180^\circ.$$

Определяем $\beta_1 = \varphi_1$ и $\beta_2 = \varphi_2$.

Параметрическая формула определения функций $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ модуля Пр19 приведена на рис. 2.21.

Первый вариант решения $V = 1$ принимаем при $V_2 = 1$, второй $V = 2$ – при $V_2 = 2$.

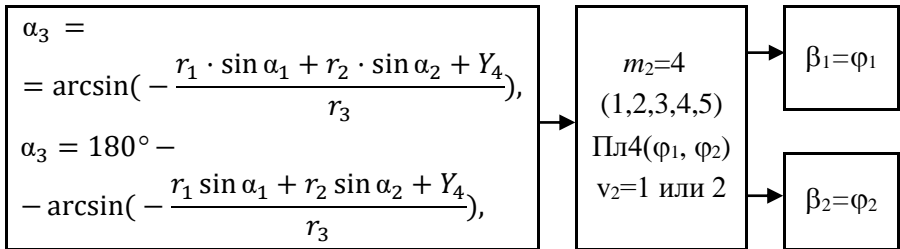


Рис. 2.21. Параметрическая формула Пр19

Принимаем первый вариант решения ($v=1$) при $\beta_{1-2} \geq 0$ и $\alpha_3 \geq \left|\frac{\pi}{2}\right|$.

Максимальное число решений (V) – 4.

Для одноаргументных элементарных пространственных модулей Пр6, Пр11, Пр14-Пр17 применяется метод обращения.

Принимаем одну из функций – u_1 , u_2 или u_3 исходного модуля в качестве аргумента x , а аргумент исходного модуля x – в качестве функции \tilde{u} обращённого модуля.

Эффективное обращение модуля – переход от исходного модуля к модулю, имеющему прямые аналитические решения. Анализ вариантов обращения пространственных модулей, показывает возможность получения аналитических решений задач о функциях для большинства одноаргументных модулей Пр6, Пр14, Пр15, Пр16 и Пр17.

Модуль Пр6 при аргументах α_i , r_i и β_j имеет по три варианта эффективного обращения, при аргументах r_k и β_k – по два варианта, а при аргументе α_k обращение не приводит к желаемому результату, т.к. для полученных в этих случаях обращённых модулей отсутствуют прямые аналитические решения задачи о функциях (см. табл. 2.3).

Модуль Пр14 при аргументах r_j , r_k имеет по три варианта обращения, при аргументах α_i , β_j , β_k и r_l – по два варианта, а при аргументах β_i , α_l , β_l обращение не приводит к желаемому результату (см. табл. 2.4).

Модуль Пр15 при аргументе β_j имеет по три варианта обращения, при аргументах α_i , β_i , r_j , r_k , α_k , и r_l – по два варианта, при аргументе β_l – один вариант, а при аргументе α_l обращение не приводит к желаемому результату (см. табл. 2.5).

Модуль Пр16 при аргументах r_i , r_j , β_j и r_k имеет по два варианта обращения, при аргументе β_i – один вариант, при аргументах β_k , r_l , α_l , и β_l обращение не приводит к желаемому результату (см. табл. 2.6).

Таблица 2.3. Варианты обращений модуля Пр6

Исходный модуль		Обращённые модули								
Аргумент x	Функции u_1, u_2, u_3	Вариант обращения 1: $\bar{x} = \bar{x}(u_1);$ $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x)$			Вариант обращения 2: $\bar{x} = \bar{x}(u_2);$ $\bar{u}_2 = \bar{u}_2(x)$			Вариант обращения 3: $\bar{x} = \bar{x}(u_3);$ $\bar{u}_3 = \bar{u}_3(x)$		
		\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2,}$ \bar{u}_3	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2,}$ \bar{u}_3	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2,}$ \bar{u}_3	Модуль
α_i	r_i, β_i, α_j	r_i	$\alpha_i, \beta_i, \alpha_j$	β_i	r_i, α_i, α_j	α_j	α_j	r_i, β_i, α_j	α_j	r_i, β_i, α_j
r_j			r_j, β_i, α_j		r_i, r_j, α_j			r_i, β_i, α_j		
β_j			$\beta_j, \beta_i, \alpha_j$		r_i, β_j, α_j			r_i, β_i, α_j		
r_k			r_k, β_i, α_j		r_i, r_k, α_j			r_i, β_i, α_j		
α_k			$\alpha_k, \beta_i, \alpha_j$		r_i, α_k, α_j			r_i, β_i, α_k		
β_k			$\beta_k, \beta_i, \alpha_j$		r_i, β_k, α_j			r_i, β_i, β_k		

* - не имеет эффективного обращения.

Таблица 2.4. Варианты обращений Пр14

Исходный модуль		Обращённые модули								
Аргумент X	Функции $u_1,$ $u_2,$ u_3	Вариант обращения 1: $\bar{x} = \bar{x}(u_1);$ $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x)$			Вариант обращения 2: $\bar{x} = \bar{x}(u_2);$ $\bar{u}_2 = \bar{u}_2(x)$			Вариант обращения 3: $\bar{x} = \bar{x}(u_3);$ $\bar{u}_3 = \bar{u}_3(x)$		
		\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2, \bar{u}_3}$	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2, \bar{u}_3}$	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2, \bar{u}_3}$	Модуль
α_i	$r_i,$ $\alpha_j,$ α_k	r_i	$\alpha_i, \alpha_j,$ α_k	Пр16*	α_j	$r_i, \alpha_i,$ α_k	Пр3	α_k	$r_i, \alpha_j,$ α_i	Пр3
β_i			$\beta_i, \alpha_j,$ α_k	Пр17*		$r_i, \beta_i,$ α_k	Пр6*		$r_i, \alpha_j,$ β_i	Пр6*
r_j			$r_j, \alpha_j,$ α_k	Пр3		$r_i, r_j,$ α_k	Пр12		$r_i, \alpha_j,$ r_j	Пр2
β_j			$\beta_j, \alpha_j,$ α_k	Пр9		$r_i, \beta_j,$ α_k	Пр15*		$r_i, \alpha_j,$ β_j	Пр8
r_k			$r_k, \alpha_j,$ α_k	Пр19		$r_i, r_k,$ α_k	Пр2		$r_i, \alpha_j,$ r_k	Пр12
β_k			$\beta_k, \alpha_j,$ α_k	Пр9		$r_i, \beta_k,$ α_k	Пр8		$r_i, \alpha_j,$ β_k	Пр15*
r_l			$r_l, \alpha_j,$ α_k	Пр14*		$r_i, r_l,$ α_k	Пр12		$r_i, \alpha_j,$ r_l	Пр12
α_l			$\alpha_l, \alpha_j,$ α_k	Пр16*		$r_i, \alpha_l,$ α_k	Пр14*		$r_i, \alpha_j,$ α_l	Пр14*
β_l			$\beta_l, \alpha_j,$ α_k	Пр17*		$r_i, \beta_l,$ α_k	Пр15*		$r_i, \alpha_j,$ β_l	Пр15*

* - не имеет эффективного обращения.

Модуль Пр17 при аргументах β_i и β_j имеет по три варианта обращения, при аргументах r_j , α_k и β_l – по два варианта, при аргументе r_i – один вариант, а при аргументах r_k , r_l , и α_l обращение не приводит к желаемому результату (табл. 2.7).

Таблица 2.5. Варианты обращений модуля Пр15

Исходный модуль		Обращённые модули								
Аргумент x	Функции $u_1,$ $u_2,$ u_3	Вариант обращения 1: $\bar{x} = \bar{x}(u_1);$ $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x)$			Вариант обращения 2: $\bar{x} = \bar{x}(u_2);$ $\bar{u}_2 = \bar{u}_2(x)$			Вариант обращения 3: $\bar{x} = \bar{x}(u_3);$ $\bar{u}_3 = \bar{u}_3(x)$		
		\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2,}$ \bar{u}_3	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2,}$ \bar{u}_3	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2,}$ \bar{u}_3	Модуль
α_i	$r_i,$ $\alpha_j,$ β_k	r_i	$\alpha_i, \alpha_j,$ β_k	Пр17*	α_j	$r_i, \alpha_i,$ β_k	Пр4	β_k	$r_i, \alpha_j,$ α_i	Пр3
β_i			$\beta_i, \alpha_j,$ β_k	Пр19		$r_i, \beta_i,$ β_k	Пр7		$r_i, \alpha_j,$ β_i	Пр16*
r_j			$r_j, \alpha_j,$ β_k	Пр15*		$r_i, r_j,$ β_k	Пр13		$r_i, \alpha_j,$ r_j	Пр2
β_j			$\beta_j, \alpha_j,$ β_k	Пр10		$r_i, \beta_j,$ β_k	Пр18		$r_i, \alpha_j,$ β_j	Пр8
r_k			$r_k, \alpha_j,$ β_k	Пр6*		$r_i, r_k,$ β_k	Пр5		$r_i, \alpha_j,$ r_k	Пр12
α_k			$\alpha_k, \alpha_j,$ β_k	Пр9		$r_i, \alpha_k,$ β_k	Пр8		$r_i, \alpha_j,$ α_k	Пр16*
r_l			$r_l, \alpha_j,$ β_k	Пр15*		$r_i, r_l,$ β_k	Пр13		$r_i, \alpha_j,$ r_l	Пр12
α_l			$\alpha_l, \alpha_j,$ β_k	Пр17*		$r_i, \alpha_l,$ β_k	Пр15*		$r_i, \alpha_j,$ α_l	Пр14*
β_l			$\beta_l, \alpha_j,$ α_k	Пр17*		$r_i, \beta_l,$ β_k	Пр18		$r_i, \alpha_j,$ β_l	Пр15*

* - не имеет эффективного обращения.

Для каждого из вариантов можно выполнить переход к пространственному модулю, допускающему отображение на плоскость.

Таблица 2.6. Варианты обращений модуля Пр16

Исходный модуль		Обращённые модули								
Аргумент x	Функции u_1, u_2, u_3	Вариант обращения 1: $\bar{x} = \bar{x}(u_1);$ $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x)$			Вариант обращения 2: $\bar{x} = \bar{x}(u_2);$ $\bar{u}_2 = \bar{u}_2(x)$			Вариант обращения 3: $\bar{x} = \bar{x}(u_3);$ $\bar{u}_3 = \bar{u}_3(x)$		
		\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}, \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_3}$	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}, \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_3}$	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}, \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_3}$	Модуль
r_i	$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$	α_i	r_i, α_j, α_k	Пр14*	α_j	α_i, r_i, α_k	Пр3	α_k	α_i, α_j, r_i	Пр3
β_i			$\beta_i, \alpha_j, \alpha_k$	Пр17*		$\alpha_i, \beta_i, \alpha_k$	Пр16*		$\alpha_i, \alpha_j, \beta_i$	Пр9
r_j			r_j, α_j, α_k	Пр3		α_i, r_j, α_k	Пр14*		α_i, α_j, r_j	Пр3
β_j			$\beta_j, \alpha_j, \alpha_k$	Пр9		$\alpha_i, \beta_j, \alpha_k$	Пр17*		$\alpha_i, \alpha_j, \beta_j$	Пр9
r_k			r_k, α_j, α_k	Пр3		α_i, r_k, α_k	Пр3		α_i, α_j, r_k	Пр14*
β_k			$\beta_k, \alpha_j, \alpha_k$	Пр6*		$\alpha_i, \beta_k, \alpha_k$	Пр17*		$\alpha_i, \alpha_j, \beta_k$	Пр17*
r_l			r_l, α_j, α_k	Пр14*		α_i, r_l, α_k	Пр14*		α_i, α_j, r_l	Пр14*
α_l			$\alpha_l, \alpha_j, \alpha_k$	Пр16*		$\alpha_i, \alpha_l, \alpha_k$	Пр16*		$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_l$	Пр16*
β_l			$\beta_l, \alpha_j, \alpha_k$	Пр17*		$\alpha_i, \beta_l, \alpha_k$	Пр17*		$\alpha_i, \alpha_j, \beta_l$	Пр17*

* - не имеет эффективного обращения.

Например, для модуля Пр9 ($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$) предварительно определяем параметры $p_2, p_3, \varphi_3, p_4, \varphi_4$ и p_5 , затем функции φ_2 , и φ_5 плоского модуля Пл4 (φ_2, φ_5) с последующим определением при $\alpha_2 = \varphi_2$ функций α_1 и β_1 модуля Пр1 (r_1, α_1, β_1), т. е. справедлива следующая структурная формула (см. рис. 2.22).

Таблица 2.7. Варианты обращений модуля Пр17

Исходный модуль		Обращённые модули								
Аргумент x	Функции u_1, u_2, u_3	Вариант обращения 1: $\bar{x} = \bar{x}(u_1);$ $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x)$			Вариант обращения 2: $\bar{x} = \bar{x}(u_2);$ $\bar{u}_2 = \bar{u}_2(x)$			Вариант обращения 3: $\bar{x} = \bar{x}(u_3);$ $\bar{u}_3 = \bar{u}_3(x)$		
		\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1,}{\bar{u}_2, \bar{u}_3}$	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1, \bar{u}_2,}{\bar{u}_3}$	Модуль	\bar{x}	$\frac{\bar{u}_1, \bar{u}_2,}{\bar{u}_3}$	Модуль
r_i	$\alpha_i, \alpha_j, \beta_k$	α_i	r_i, α_j, β_k	Пр15*	α_j	α_i, r_i, β_k	Пр15*	β_k	α_i, α_j, r_i	Пр3
β_i			$\beta_i, \alpha_j, \beta_k$	Пр19		$\alpha_i, \beta_i, \beta_k$	Пр10		$\alpha_i, \alpha_j, \beta_i$	Пр9
r_j			r_j, α_j, β_k	Пр4		α_i, r_j, β_k	Пр15*		α_i, α_j, r_j	Пр3
β_j			$\beta_j, \alpha_j, \beta_k$	Пр10		$\alpha_i, \beta_j, \beta_k$	Пр19		$\alpha_i, \alpha_j, \beta_j$	Пр9
r_k			r_k, α_j, β_k	Пр6*		α_i, r_k, β_k	Пр6*		α_i, α_j, r_k	Пр14*
α_k			$\alpha_k, \alpha_j, \beta_k$	Пр9		$\alpha_i, \alpha_k, \beta_k$	Пр9		$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$	Пр16*
r_l			r_l, α_j, β_k	Пр15*		α_i, r_l, β_k	Пр15*		α_i, α_j, r_l	Пр14*
α_l			$\alpha_l, \alpha_j, \beta_k$	Пр17*		$\alpha_i, \alpha_l, \beta_k$	Пр17*		$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_l$	Пр16*
β_l			$\beta_l, \alpha_j, \beta_k$	Пр19		$\alpha_i, \beta_l, \beta_k$	Пр19		$\alpha_i, \alpha_j, \beta_l$	Пр17*

* - не имеет эффективного обращения.

Для пространственного модуля Пр14 (r_1, α_2, α_3) при аргументе β_2 может быть использована следующая параметрическая формула (см. рис. 2.23).

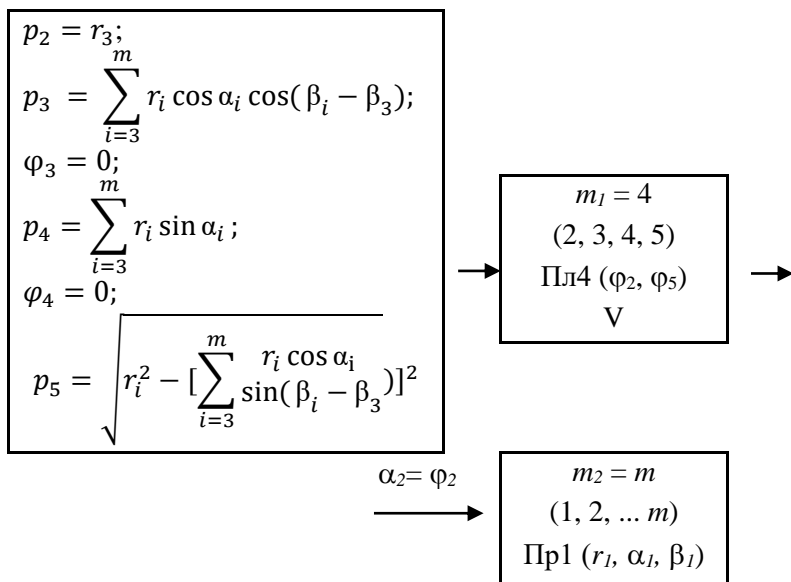


Рис. 2.22. Решение модуля Пр9

Следует признать, что некоторые одноаргументные пространственные модули, как видно из табл. 2.3–2.7, не имеют эффективного обращения, аналитические решения для них следует искать с использованием других методов.

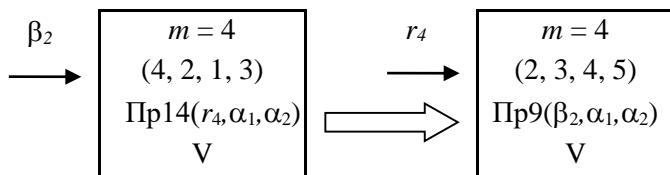


Рис. 2.23. Решение модуля Пр14

В общем случае, большинство одноаргументных элементарных пространственных модулей допускает эффективное обращение с последующим отображением элементарными плоскими модулями. Для

большинства пространственных одноаргументных модулей, ранее не имевших прямых аналитических решений задачи о функциях, аналитические решения получены методом обращения.

2.3.2. Производные функций элементарных модулей

2.3.2.1. Производные первого порядка функций

Для одноаргументной функции

$$\frac{dU(x)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt}; \quad (2.46)$$

для многоаргументной функции

$$\frac{dU(x_1, x_2, \dots, x_k)}{dt} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}. \quad (2.47)$$

Т.е. для определения полной производной функции необходимо определить все её частные производные первого порядка.

Для пространственного элементарного модуля с функциями U_1, U_2, U_3 и аргументами x_1, x_2, \dots, x_k дифференцируем уравнения (2.1–2.3) по аргументу x_j ($1 < j < k$):

$$a_{1_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} + a_{2_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_j} + a_{3_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_j} + b_{1_1} = 0; \quad (2.48)$$

$$a_{1_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} + a_{2_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_j} + a_{3_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_j} + b_{1_2} = 0; \quad (2.49)$$

$$a_{1_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} + a_{2_3} \frac{\partial U_2}{\partial x_j} + a_{3_3} \frac{\partial U_3}{\partial x_j} + b_{1_3} = 0; \quad (2.50)$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (2.51)$$

при этом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1_1} & a_{2_1} & a_{3_1} \\ a_{1_2} & a_{2_2} & a_{3_2} \\ a_{1_3} & a_{2_3} & a_{3_3} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -b_{1_1} & a_{2_1} & a_{3_1} \\ -b_{1_2} & a_{2_2} & a_{3_2} \\ -b_{1_3} & a_{2_3} & a_{3_3} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1_1} & -b_{1_1} & a_{3_1} \\ a_{1_2} & -b_{1_2} & a_{3_2} \\ a_{1_3} & -b_{1_3} & a_{3_3} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1_1} & a_{2_1} & -b_{1_1} \\ a_{1_2} & a_{2_2} & -b_{1_2} \\ a_{1_3} & a_{2_3} & -b_{1_3} \end{vmatrix},$$

где a_{i_s} и b_{1_s} при $i = 1, 2$ или 3 и $s = 1, 2$ или 3 – см. табл. 2.8.

Таблица 2.8 Коэффициенты a_{i_s} и свободные члены b_{1_s}
определителей формулы (2.47)

U_i a_{i_s}	r_k	α_k	β_k	x_k b_{1_s}
a_{i_1}	$\cos \alpha_k \sin \beta_k$	$-r_k \sin \alpha_k \cos \beta_k$	$-r_k \cos \alpha_k \sin \beta_k$	b_{1_1}
a_{i_2}	$\sin \alpha_k$	$r_k \sin \alpha_k$	0	b_{1_2}
a_{i_3}	$\cos \alpha_k \sin \beta_k$	$-r_k \sin \alpha_k \sin \beta_k$	$-r_k \cos \alpha_k \cos \beta_k$	b_{1_3}

Аналогично дифференцируем уравнения (2.4) и (2.5):

$$a_{1_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} + a_{2_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_j} + b_{1_1} = 0; \quad (2.52)$$

$$a_{1_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} + a_{2_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_j} + b_{1_2} = 0. \quad (2.53)$$

Тогда

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (2.54)$$

при этом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{1_1} & a_{2_1} \\ a_{1_2} & a_{2_2} \end{vmatrix}$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -b_{1_1} & a_{2_1} \\ -b_{1_2} & a_{2_2} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1_1} & -b_{1_1} \\ a_{1_2} & -b_{1_2} \end{vmatrix}$,

где a_{i_s} и b_{1_s} при $i = 1$ или 2 и $s = 1$ или 2 – см. табл. 2.9.

Таким образом, частные производные первого порядка функций элементарных модулей могут быть определены из системы уравнений (8.3–8.5) для пространственных, и из системы уравнений (8.6, 8.7) – для плоских модулей.

Таблица 2.9. Коэффициенты a_{i_s} и свободные члены b_{1_s} определителей формулы (2.51)

U_i a_{i_s}	r_k	α_k	x_k b_{1_s}
a_{i_1}	$\cos \alpha_k$	$-r_k \sin \alpha_k$	b_{1_1}
a_{i_2}	$\sin \alpha_k$	$r_k \cos \alpha_k$	b_{1_2}

2.3.2.2. Производные второго порядка функций

Дифференцируя выражения (2.42) и (2.43), получим

$$\frac{d^2U(x)}{dt^2} = \frac{\partial^2U}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2U(x_1, x_2, \dots, x_k)}{dt^2} &= \sum_{j=1}^k \left[\frac{\partial^2U}{\partial x_j^2} \left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{d^2x_j}{dt^2} \right] + \\ &+ 2 \sum_{j_1=1}^{k-1} \sum_{j_2=j_1+1}^k \frac{\partial^2U}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \frac{dx_{j_1}}{dt} \frac{dx_{j_2}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Для определения полной производной второго порядка функции необходимо определить все частные производные первого и второго порядков этой функции, как чистые, так и смешанные.

Дифференцируем систему уравнений (2.45–2.47):

$$a_{11} \frac{\partial^2U_1}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + a_{21} \frac{\partial^2U_2}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + a_{31} \frac{\partial^2U_3}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + b_{21} = 0; \quad (2.57)$$

$$a_{12} \frac{\partial^2U_1}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + a_{22} \frac{\partial^2U_2}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + a_{32} \frac{\partial^2U_3}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + b_{22} = 0; \quad (2.58)$$

$$a_{13} \frac{\partial^2U_1}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + a_{23} \frac{\partial^2U_2}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + a_{33} \frac{\partial^2U_3}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + b_{23} = 0. \quad (2.59)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2U_i}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (2.60)$$

при этом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -b_{21} & a_{21} & a_{31} \\ -b_{22} & a_{22} & a_{32} \\ -b_{23} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -b_{21} & a_{31} \\ a_{12} & -b_{22} & a_{32} \\ a_{13} & -b_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -b_{21} \\ a_{12} & a_{22} & -b_{22} \\ a_{13} & a_{23} & -b_{23} \end{vmatrix}$$

и

$$b_{2_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{j_2}} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_{j_1}} + \frac{\partial b_{1_1}}{\partial x_{j_2}};$$

$$b_{2_2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{j_2}} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_{j_1}} + \frac{\partial b_{1_2}}{\partial x_{j_2}};$$

$$b_{2_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i_3}}{\partial x_{j_2}} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_{j_1}} + \frac{\partial b_{1_3}}{\partial x_{j_2}},$$

где $\frac{\partial a_{i_s}}{\partial x_{j_2}}$ и $\frac{\partial b_{1_s}}{\partial x_{j_2}}$ при $i = 1, 2$ или 3 и $s = 1, 2$ или 3 – см. табл. 2.10.

Аналогично дифференцируем уравнения (2.48) и (2.49):

$$a_{1_1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + a_{2_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + b_{2_1} = 0; \quad (2.61)$$

$$a_{1_2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + a_{2_2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} + b_{2_2} = 0.$$

Тогда $\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_{j_1} \cdot \partial x_{j_2}} = \frac{\Delta_i}{\Delta},$ (2.63)

при этом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1_1} & a_{2_1} \\ a_{1_2} & a_{2_2} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} -b_{2_1} & a_{2_1} \\ -b_{2_2} & a_{2_2} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1_1} & -b_{2_1} \\ a_{1_2} & -b_{2_2} \end{vmatrix}.$$

И

$$b_{2_1} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{j_2}} \cdot \frac{dU_i}{dx_{j_1}} + \frac{\partial b_{1_1}}{\partial x_{j_2}};$$

$$b_{2_2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{j_2}} \cdot \frac{dU_i}{dx_{j_1}} + \frac{\partial b_{1_2}}{\partial x_{j_2}},$$

где

$$\frac{\partial a_{i_s}}{\partial x_{j_2}} \text{ и } \frac{\partial b_{1_s}}{\partial x_{j_2}} \text{ при } i = 1 \text{ или } 2 \text{ и } s = 1 \text{ или } 2 \text{ – см. табл. 2.11.}$$

Таблица 2.10 Частные производные $\frac{\partial a_{iS}}{\partial x_{j2}}$ и $\frac{\partial b_{1S}}{\partial x_{j2}}$

выражений $b_{2_1}, b_{2_2}, b_{2_3}$ определителей формулы (2.55)

U_i	r_k			x_{j_1}
x_{j_2}	r_k	α_k	β_k	x_{j_2}
$\frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{j_2}}$	0	$-\sin\alpha_k \cos\beta_k$	$-\cos\alpha_k \sin\beta_k$	$\frac{\partial b_{1_1}}{\partial x_{j_2}}$
$\frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{j_2}}$	0	$\cos\alpha_k$	0	$\frac{\partial b_{2_1}}{\partial x_{j_2}}$
$\frac{\partial a_{i_3}}{\partial x_{j_2}}$	0	$-\sin\alpha_k \sin\beta_k$	$\cos\alpha_k \cos\beta_k$	$\frac{\partial b_{3_1}}{\partial x_{j_2}}$
U_i	α_k			x_{j_1}
x_{j_2}	r_k	α_k	β_k	x_{j_2}
$\frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{j_2}}$	$-\sin\alpha_k \cos\beta_k$	$-r_k \cos\alpha_k \cos\beta_k$	$r_k \cos\alpha_k \cos\beta_k$	$\frac{\partial b_{1_1}}{\partial x_{j_2}}$
$\frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{j_2}}$	$\cos\alpha_k$	$-r_k \sin\alpha_k$	0	$\frac{\partial b_{2_1}}{\partial x_{j_2}}$
$\frac{\partial a_{i_3}}{\partial x_{j_2}}$	$\sin\alpha_k \sin\beta_k$	$-r_k \cos\alpha_k \sin\beta_k$	$-r_k \sin\alpha_k \cos\beta_k$	$\frac{\partial b_{3_1}}{\partial x_{j_2}}$
U_i	β_k			x_{j_1}
x_{j_2}	r_k	α_k	β_k	x_{j_2}
$\frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{j_2}}$	$-\cos\alpha_k \sin\beta_k$	$-r_k \sin\alpha_k \sin\beta_k$	$-r_k \cos\alpha_k \cos\beta_k$	$\frac{\partial b_{1_1}}{\partial x_{j_2}}$
$\frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{j_2}}$	0	0	0	$\frac{\partial b_{2_1}}{\partial x_{j_2}}$
$\frac{\partial a_{i_3}}{\partial x_{j_2}}$	$\cos\alpha_k \cos\beta_k$	$-r_k \sin\alpha_k \cos\beta_k$	$-r_k \cos\alpha_k \sin\beta_k$	$\frac{\partial b_{3_1}}{\partial x_{j_2}}$

Таким образом, частные производные второго порядка функций элементарных модулей могут быть определены из системы уравнений (2.57–2.59) для пространственных, и из системы уравнений (2.61, 2.62) – для плоских модулей.

Таблица 2.11 Частные производные $\frac{\partial a_{iS}}{\partial x_{j_2}}$ и $\frac{\partial b_{1S}}{\partial x_{j_2}}$ выражений b_{2_1}, b_{2_2} определителей формулы (2.63)

U_i	Γ_k		x_{j_1}
x_{j_2}	Γ_k	α_k	x_{j_2}
$\frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{j_2}}$	0	$-\sin \alpha_k$	$\frac{\partial b_{1_1}}{\partial x_{j_2}}$
$\frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{j_2}}$	0	$\cos \alpha_k$	$\frac{\partial b_{2_1}}{\partial x_{j_2}}$
U_i	α_k		x_{j_1}
x_{j_2}	Γ_k	α_k	x_{j_2}
$\frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{j_2}}$	$-\sin \alpha_k$	$-\Gamma_k \cos \alpha_k$	$\frac{\partial b_{1_1}}{\partial x_{j_2}}$
$\frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{j_2}}$	$\cos \alpha_k$	$-\Gamma_k \sin \alpha_k$	$\frac{\partial b_{2_1}}{\partial x_{j_2}}$

Эти общие решения имеют практическое применение для многоаргументных функций, например, в математических моделях приводных манипуляторов.

Для одноаргументных модулей практический смысл имеет и определение частных производных второго порядка функций простым дифференцированием их частных производных первого порядка.

2.3.2.3. Частные решения для производных первого порядка плоских модулей

Общее решение (2.54) представим в следующем виде:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_j} = -\frac{\Delta_{N_1}(x_j, U_2)}{\Delta_N(U_1, U_2)} = -\frac{\bar{\Delta}_p(i_{x_j}, i_2)}{\bar{\Delta}_N(i_1, i_2)},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_j} = -\frac{\Delta_{N_2}(U_1, x_j)}{\Delta_N(U_1, U_2)} = -\frac{\bar{\Delta}_p(i_1, i_{x_j})}{\bar{\Delta}_N(i_1, i_2)}$$

где x_j – аргумент модуля ($j = 1, 2, 3, \dots, k$ – число аргументов модуля);

U_1, U_2 – первая и вторая функции списка функций модуля;

i_1, i_2 – индексы векторов с первой и второй функциями модуля;

i_{x_j} – индекс вектора с аргументом x_j модуля.

Для элементарных плоских модулей существует четыре определителя $\bar{\Delta}_N(i_1, i_2)$:

– для модуля Пл1 (функции r_{i_1}, α_{i_1}):

$$\bar{\Delta}_1(i, i) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_i & -r_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & r_i \cos \alpha_i \end{vmatrix} = r_i (\cos^2 \alpha_i + \sin^2 \alpha_i)$$

или $\bar{\Delta}_1(i) = \Delta_1(i, i) = r_i$.

– для модуля Пл2 (функции r_{i_1}, r_{i_2}):

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_2(i_1, i_2) &= \begin{vmatrix} \cos \alpha_{i_1} & \cos \alpha_{i_2} \\ \sin \alpha_{i_1} & \sin \alpha_{i_2} \end{vmatrix} = \\ &= \cos \alpha_{i_1} \sin \alpha_{i_2} - \cos \alpha_{i_2} \sin \alpha_{i_1} \end{aligned}$$

или $\bar{\Delta}_2(i_1, i_2) = \sin(\alpha_{i_2} - \alpha_{i_1})$.

– для модуля Пл3 (функции r_{i_1}, α_{i_2}):

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_3(i_1, i_2) &= \begin{vmatrix} \cos \alpha_{i_1} & -r_{i_2} \sin \alpha_{i_2} \\ \sin \alpha_{i_1} & r_{i_2} \cos \alpha_{i_2} \end{vmatrix} = \\ &= r_{i_2} (\cos \alpha_{i_1} \cos \alpha_{i_2} + \sin \alpha_{i_1} \sin \alpha_{i_2}) \end{aligned}$$

или $\bar{\Delta}_3(i_1, i_2) = r_{i_2} \cos(\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2})$.

– для модуля Пл4 (функции $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$):

$$\bar{\Delta}_4(i_1, i_2) = \begin{vmatrix} -r_{i_1} \cos \alpha_{i_1} & -r_{i_2} \sin \alpha_{i_2} \\ r_{i_1} \sin \alpha_{i_1} & r_{i_2} \cos \alpha_{i_2} \end{vmatrix} = \\ = r_{i_1} r_{i_2} (-\sin \alpha_{i_1} \cos \alpha_{i_2} + \cos \alpha_{i_1} \sin \alpha_{i_2})$$

или $\Delta_4(i_1, i_2) = r_{i_1} r_{i_2} \sin(\alpha_{i_2} - \alpha_{i_1})$.

Любой из определителей $\Delta_{N_1}(x_j, U_2)$ или $\Delta_{N_2}(U_1, x_j)$ может быть приведен к одному из определителей $\Delta p(j_1, j_2)$ ($p = 1, 2, 3$ или 4).

При приведении определителя Δ_{N_l} к Δp возможны следующие варианты:

1. Аргумент и заменяемая функция однородны, т.е. оба эти параметра являются или линейными или угловыми параметрами векторного контура. В этом случае для модулей Пл2, Пл3 или Пл4 $P \equiv N$ и $\Delta_{N_1}(x_j, U_2) = \Delta_N(i_{x_j}, i_2)$ и $\Delta_{N_2}(U_1, x_j) = \Delta_N(i_1, i_{x_j})$.

Например, для модуля Пл2 (функции r_1, r_2) с аргументом r_3

$$\Delta_{1_1}(p_3, p_2) = \Delta_N(3, 2) \text{ и } \Delta_{2_1}(p_1, p_3) = \Delta_N(1, 2).$$

Модуль Пл1 составляет исключение из этого правила. Так, для модуля Пл1 (функции r_i, α_i) с аргументом α_3
 $\Delta_{1_1}(r_3, \alpha_2) = \Delta_3(1, 3)$.

2. Аргумент и заменяемая функция разнородны, т.е. один из этих параметров является линейным, а другой – угловым параметром векторного контура.

Если список параметров определителя Δ_{N_1} или Δ_{N_2} соответствует одному из четырех списков функций элементарных плоских модулей, то $\Delta_{N_1}(x_j, U_2) = \Delta_N(i_{x_j}, i_2)$ и $\Delta_{N_2}(U_1, x_j) = \Delta_N(i_1, i_{x_j})$.

Если список параметров определителя Δ_{N_1} или Δ_{N_2} имеет обратный порядок следования параметров по сравнению с одним из

четырёх стандартных списков функций, то $\Delta_{N_1}(x_j, U_2) = -\Delta_N(i_2, i_{x_j})$

или $\Delta_{N_2}(U_1, x_j) = -\Delta_N(i_{x_j}, i_1)$.

Например, для модуля Пл4 (функции α_1, α_2) с аргументом r_3
 $\Delta_{4_1}(r_4, \alpha_2) = \Delta_3(3,2)$, но $\Delta_{4_2}(\alpha_1, \alpha_3) = -\Delta_3(3,1)$.

Таблица 2.12 Частные производные $\frac{\partial U_i}{\partial x}$
элементарных плоских модулей

Модуль	x	$\frac{\partial U_1}{\partial x}$	$\frac{\partial U_2}{\partial x}$
Пл1(r_i, α_j)	r_j	$-\cos(\alpha_i - \alpha_j)$	$r_i^{-1} \sin(\alpha_i - \alpha_j)$
	α_j	$r_j \sin(\alpha_i - \alpha_j)$	$-r_i^{-1} r_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)$
Пл2(r_i, r_j)	α_i	$r_i \operatorname{tg}^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$	$r_i \sin^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$
	α_j	$-r_j \sin(\alpha_i - \alpha_j)$	$r_j \operatorname{tg}^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$
	r_k	$\frac{\sin(\alpha_j - \alpha_k)}{\sin(\alpha_i - \alpha_j)}$	$-\frac{\sin(\alpha_i - \alpha_k)}{\sin(\alpha_i - \alpha_j)}$
	α_k	$-\frac{r_k \cos(\alpha_j - \alpha_k)}{\sin(\alpha_i - \alpha_j)}$	$-\frac{r_k \cos(\alpha_i - \alpha_k)}{\sin(\alpha_i - \alpha_j)}$
Пл3(r_i, α_j)	α_i	$r_i \operatorname{tg}(\alpha_i - \alpha_j)$	$-r_i r_j^{-1} \cos^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$
	r_j	$-\cos^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$	$r_i \operatorname{tg}^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$
	r_k	$\frac{\cos(\alpha_j - \alpha_k)}{\cos(\alpha_i - \alpha_j)}$	$\frac{\sin(\alpha_i - \alpha_k)}{r_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)}$
	α_k	$-\frac{r_k \sin(\alpha_j - \alpha_k)}{\cos(\alpha_i - \alpha_j)}$	$-\frac{r_k \cos(\alpha_i - \alpha_k)}{r_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)}$
Пл4(α_i, α_j)	r_i	$r_i^{-1} \operatorname{tg}^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$	$-r_j^{-1} \sin^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$
	r_j	$-r_i^{-1} \sin^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$	$-r_j \operatorname{tg}^{-1}(\alpha_i - \alpha_j)$
	r_k	$\frac{\cos(\alpha_j - \alpha_k)}{r_i \sin(\alpha_i - \alpha_j)}$	$-\frac{\cos(\alpha_i - \alpha_k)}{r_i \sin(\alpha_i - \alpha_j)}$
	α_k	$\frac{r_k \cos(\alpha_i - \alpha_k)}{r_i \sin(\alpha_i - \alpha_j)}$	$\frac{r_k \cos(\alpha_i - \alpha_k)}{r_j \sin(\alpha_i - \alpha_j)}$

Аналогично можно привести и любой определитель Δ_{N_1} , Δ_{N_2} , Δ_{N_3} , для аргумента x_j элементарного пространственного модуля к одному из двадцати основных определителей $\Delta_N(i_1, i_2, i_3)$.

Общий алгоритм вывода формул частных производных первого порядка для плоских и пространственных элементарных модулей кратко сформулируем следующим образом:

1. Привести определитель Δ_{N_i} к определителю Δ_P :

$$\Delta_{N_i} = \Delta_P \text{ или } \Delta_P = -\Delta_{N_i};$$

2. Разделить определитель Δ_{N_i} на определитель Δ_N .

Этот алгоритм используется и для вывода формул частных производных функций элементарных пространственных модулей.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДУЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ МОДЕЛИ

3.1. Основные задачи динамики

При известной кинематической схеме, определенных массовых характеристиках звеньев и заданных внешних нагрузках, зависящих лишь от положения механизма, можно решить две основные задачи динамики:

1. Определить уравновешивающую нагрузку $M_{\text{уп}} = M_{\Sigma} - M_{\Sigma}'$ или $F_{\text{уп}} = F_{\Sigma} - F_{\Sigma}'$ на звено приведения, обеспечивающую достижение заданного его движения:

$$\varphi = \varphi(t) \longrightarrow M_{\text{уп}} = M_{\text{уп}}(t);$$

$$s = s(t) \longrightarrow F_{\text{уп}} = F_{\text{уп}}(t),$$

где M_{Σ}' или F_{Σ}' – приведенная внешняя нагрузка, мощность которой равна сумме мощностей известных внешних нагрузок на все звенья механизма.

2. Определить движение звена приведения при заданных внешних нагрузках на звенья механизма

$$M_{\Sigma} = M_{\Sigma}(\varphi) \longrightarrow \varphi = \varphi(t);$$

$$F_{\Sigma} = F_{\Sigma}(s) \longrightarrow s = s(t).$$

Решение, как первой, так и второй задачи можно представить в виде блок-схемы (рис. 3.1).

3.2. Одномассовые динамические модели

Многозвенные механизмы (рис. 3.2, а) можно заменить одномассовыми динамическими моделями (рис. 3.2, б и рис. 3.2, в).

Приведенная массовая характеристика J_{Σ} или m_{Σ} – эквивалент инертности всех звеньев механизма.

Приведенная нагрузка M_{Σ} или F_{Σ} – эквивалент нагрузок на все звенья механизма.

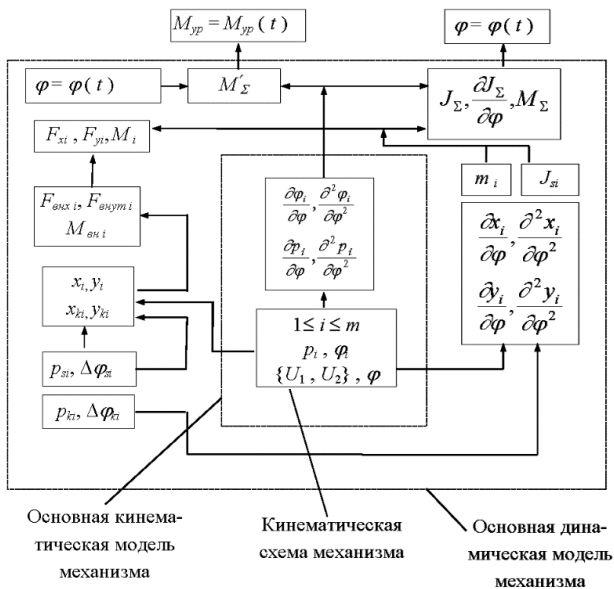


Рис. 3.1. Блок-схема решения задач динамического анализа механизмов

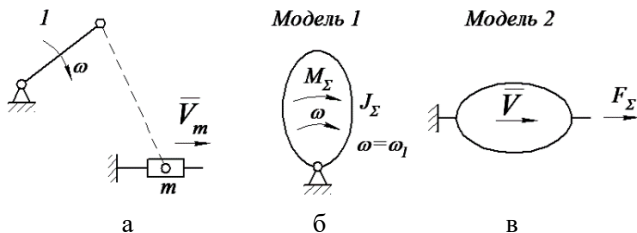


Рис. 3.2. Заменяемый механизм и его одномассовые модели

а) заменяемые механизмы; б) модель 1; в) модель 2

3.3. Приведение массовых характеристик

Кинетическая энергия звена приведения равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма:

$$T_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m T_i. \quad (3.1)$$

Массовую характеристику звена, совершающего сложное движение, определяют два параметра:

$m = \sum_{j=1}^k m_j$ – масса звена, мера инертности поступательного перемещения звена, кг;

$J_s = \sum_{j=1}^k m_j r_j^2$ – момент инерции относительно центра масс s , мера инертности вращения звена, кг m^2 .

Для линейно перемещающегося звена:

$$T = \frac{m v_s^2}{2}; \quad (3.2)$$

для вращающегося звена при неподвижном центре масс s :

$$T = \frac{J_s \omega^2}{2}; \quad (3.3)$$

для звена, совершающего сложное движение,

$$T = \frac{m v_s^2}{2} + \frac{J_s \omega^2}{2}. \quad (3.4)$$

Для модели 1, используя зависимости (2.62) и (2.63):

$$J_\Sigma \frac{\omega^2}{2} = \sum_{i=1}^m \left(m_i \frac{v_{s_i}^2}{2} + J_{s_i} \frac{\omega_i^2}{2} \right);$$

тогда, принимая во внимание $\frac{v_{s_i}}{\omega} = \frac{\partial s_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial y_i}{\partial \varphi}$ и $\frac{\omega_i}{\omega} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi}$,

$$J_\Sigma = \sum_{i=1}^m \left\{ m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + J_{s_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \right)^2 \right\}. \quad (3.5)$$

Для модели 2 (рис. 3.1) аналогично

$$m_\Sigma = \sum_{i=1}^m \left\{ m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial s} \right)^2 \right] + J_{s_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \right)^2 \right\}. \quad (3.6)$$

Дифференцируем выражения (2.65) и (2.66), считая m_i и J_{s_i} – const:

$$\frac{\partial J_\Sigma}{\partial \varphi} = 2 \sum_{i=1}^m \left[m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \varphi^2} \right) + J_{s_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varphi^2} \right]; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial m_\Sigma}{\partial s} = 2 \sum_{i=1}^m \left[m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial s^2} + \frac{\partial y_i}{\partial s} \frac{\partial^2 y_i}{\partial s^2} \right) + J_{s_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s^2} \right]. \quad (3.8)$$

Массовая характеристика звена приведения и её частная производная зависят от частных производных перемещений (аналогов скоростей и ускорений) звеньев механизма и не зависят от его скорости и ускорения.

3.4. Нагрузки на звенья механизмов

Нагрузка – воздействие на звено, изменяющее его кинетическую энергию.

Исследования движения механизма проводят с учетом внешних нагрузок, гравитации, инертности звеньев, а также прочих факторов, например, трения в кинематических парах.

Учет внешних нагрузок в различных моделях механизмов проводят путем приложения к их звеньям векторов внешних сил $\vec{F}_{\text{вн}}$ и внешних моментов $\vec{M}_{\text{вн}}$. Для плоских механизмов вместо векторов $\vec{M}_{\text{вн}}$, а также $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ часто используют круговые стрелки (рис. 3.3).

Внешние нагрузки могут совершать положительную работу, способствующую движению, или отрицательную – препятствующую движению механизма.

Внешние нагрузки могут зависеть только от положения механизма. На величину внешней нагрузки могут влиять также скорости и ускорения звеньев.

Силы взаимодействия подвижно соединенных звеньев механизма всегда взаимнообратны, их нормальные составляющие работы не совершают, но определяют потери мощности на трение.

Учет гравитации звена обычно проводят введением вектора силы тяжести G , прикладываемого к центру масс звена s , при этом $G = m g$.



Рис. 3.3. Условная замена векторов сил и моментов круговыми стрелками

Гравитация – притяжение тела, обладающего массой, к центру планеты – проявляется в ускорении его свободного падения. В инженерных расчетах ускорение свободного падения g принимают равным $9,81 \text{ м/с}^2$, хотя на земном экваторе $g_э = 9,7803 \text{ м/с}^2$, а на полюсе $g_п = 9,83215 \text{ м/с}^2$.

Учет инертности звена механизма можно проводить введением вектора силы инертности $\bar{\Phi}$, приложенного к его центру масс s противоположно вектору ускорения \bar{a} , и вектора момента инертности $\bar{M}_и$, приложенного к звену противоположно вектору углового ускорения звена $\bar{\varepsilon}$, при этом $\Phi = -ta$, $M_и = -J_s\varepsilon$.

Звено механизма – тело, обладающее массой.

Инерция массы (звена механизма) – сохранение кинетической энергии.

Инерция массы проявляется в стремлении сохранить состояние равномерного движения или покоя.

Инертность массы (звена механизма) – сопротивление изменению кинетической энергии.

Инертность массы проявляется в противодействии изменению состояния её равномерного движения или покоя.

Сила инертности $\bar{\Phi}$ – реакция на поступательное ускорение центра масс s , момент инертности $\bar{M}_и$ – о реакция на вращательное ускорение звена.

Вектор силы инертности $\bar{\Phi}$ и вектор момента инертности $\bar{M}_и$ – фиктивны, введены искусственно, точно также как и вектор силы тяжести G . Эти векторы отображают в привычной графической форме реальное проявление инертности и гравитации.

Следует отметить, что несмотря на внешнее сходство формул $G=mg$ и $\Phi=-ta$, сила тяжести и сила инертности имеют совершенно различную природу и разные свойства.

3.5. Приведение внешних нагрузок

Элементарная работа звена приведения равна сумме элементарных работ звеньев механизма

$$A_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m A_i. \quad (3.9)$$

Для каждого положения механизма все внешние и гравитационные нагрузки на звенья можно привести к центру масс s и отобразить векторами F_{x_i} , F_{y_i} , M_i (рис. 3.4).

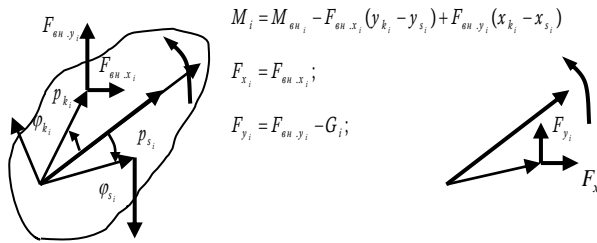


Рис. 3.4. Отображение нагрузок векторами

Пусть внешние нагрузки – функции положения механизма.

Трением в кинематических парах пренебрегаем.

Сложное плоское движение звена можно рассматривать как вращательное относительно его центра масс при поступательных перемещениях последнего вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат.

Для линейно перемещающегося звена:

$$A_i = F_{x_i} \Delta x_i + F_{y_i} \Delta y_i; \quad (3.10)$$

для вращающегося звена при неподвижном центре масс:

$$A_i = M_i \Delta \phi_i; \quad (3.11)$$

для звена, совершающего сложное движение:

$$A_i = F_{x_i} \Delta x_i + F_{y_i} \Delta y_i + M_i \Delta \phi_i. \quad (3.12)$$

Для модели 1 (рис. 3.2, б), используя выражения (3.11) и (3.12):

$$M_{\Sigma} \Delta \varphi = \sum_{i=1}^m [F_{x_i} \Delta x_i + F_{y_i} \Delta y_i + M_i \Delta \varphi],$$

тогда при $\Delta \varphi \rightarrow 0$

$$M_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m \left[F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} + M_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \right]. \quad (3.13)$$

Для модели 2 (рис. 3.2, в) аналогично, используя выражения (3.10) и (3.12):

$$F_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m \left[F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial s} + M_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \right]. \quad (3.14)$$

Приведенная внешняя нагрузка на звено приведения зависит от частных производных перемещений (аналогов скоростей) звеньев механизма и не зависит от его скорости и ускорения.

3.6. Уравнения движения механизмов

Обратимся к теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^m A_i. \quad (3.15)$$

Для вращающегося звена приведения

$$\sum_{i=1}^m A_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\varphi} d\varphi. \quad (3.16)$$

Для линейно перемещающегося звена приведения

$$\sum_{i=1}^m A_i = \int_{s_0}^s F_{\Sigma} ds. \quad (3.17)$$

Для модели 1 (рис. 3.2, б), с учетом выражения (3.16)

$$J_{\Sigma} \frac{\omega^2}{2} - J_{\Sigma_0} \frac{\omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\Sigma} d\varphi. \quad (3.18)$$

Для модели 2 (рис. 3.2, в), с учетом выражения (3.17)

$$m_{\Sigma} \frac{v^2}{2} - m_{\Sigma_0} \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^s F_{\Sigma} ds. \quad (3.19)$$

Уравнения (3.18) и (3.19) – это, уравнения движения механизмов в энергетической форме.

Для модели 2 (рис. 3.2, б) из уравнения (2.77) $\frac{\partial}{\partial s} \left(m_{\Sigma} \frac{v^2}{2} \right) = F_{\Sigma}$

или $\frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial s} \frac{v^2}{2} + m_{\Sigma} \frac{1}{2} 2v \frac{\partial v}{\partial s} = F_{\Sigma}$ получим, принимая во внимание

$$v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{ds}{dt} \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{dv}{dt} = a,$$

$$F_{\Sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial s} v^2 - m_{\Sigma} a = 0. \quad (3.20)$$

Для модели 1 (рис. 3.2,в) аналогично:

$$M_{\Sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{\Sigma}}{\partial \varphi} \omega^2 - J_{\Sigma} \varepsilon = 0. \quad (3.21)$$

Уравнения (3.20, 3.21) – уравнения движения механизмов в дифференциальной форме.

Уравнения (3.20, 3.21) учитывают не только внешние нагрузки, но и инертности звеньев механизма. Дополнительно убедимся в этом.

Просуммируем элементарные работы всех звеньев механизма, учитывая не только внешние и гравитационные нагрузки, но и силы инертности Φ и моменты инертности M_{ii} звеньев. Эта суммарная мощность равна нулю в соответствии с принципом Даламбера-Лагранжа

$$\sum_{i=1}^m \left[F_{x_i} \Delta x_i + F_{y_i} \Delta y_i + M_i \Delta \varphi_i - m_i a_{x_i} \Delta x_i - m_i a_{y_i} \Delta y_i - J_{S_i} \varepsilon_i \Delta \varphi_i \right] = 0.$$

Разделив полученное уравнение на $\Delta \varphi \rightarrow 0$ и, используя выражения:

$$\begin{aligned} a_{x_i} &= \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \varphi^2} \omega^2 + \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \varepsilon, \\ a_{y_i} &= \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial \varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial \varphi^2} \omega^2 + \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} \varepsilon, \\ \varepsilon_i &= \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varphi^2} \omega^2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \varepsilon, \end{aligned}$$

где ω и ε – угловые скорости и ускорения звена приведения,

$$\begin{aligned} \text{получим } \sum_{i=1}^m \left\{ \left[F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} + M_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} - \right. \right. \\ \left. \left. - m_i \left[\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \varphi^2} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 y_i}{\partial \varphi^2} \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} \right) - J_{S_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \right] \omega^2 - \right. \\ \left. \left. - m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} \right) - J_{S_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \right] \varepsilon \right\} = 0. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Анализируя уравнение (3.22) с учетом выражений (3.20), (3.21) и (3.13), убеждаемся в том, что первая его строка – это

приведенный момент M_{Σ} , вторая – произведение $\frac{1}{2} \frac{\partial J_{\Sigma}}{\partial \varphi} \omega^2$, а последняя – произведение $J_{\Sigma} \varepsilon$, то есть уравнение (3.22) обращается в уравнение (3.21).

Таким образом, параметры J_{Σ} и $\frac{\partial J_{\Sigma}}{\partial \varphi}$ в уравнении (3.22) учитывают инертности звеньев механизма.

3.7. Переход от кинематической к основной динамической модульной модели

3.7.1. Основная динамическая модульная векторная модель механизма

Основная динамическая модульная векторная модель механизма – основная кинематическая модульная векторная модель механизма, дополненная векторными контурами (модулями), определяющими положения центров масс звеньев, точек приложения сосредоточенных внешних нагрузок, и значениями массовых характеристик звеньев (рис. 3.5).

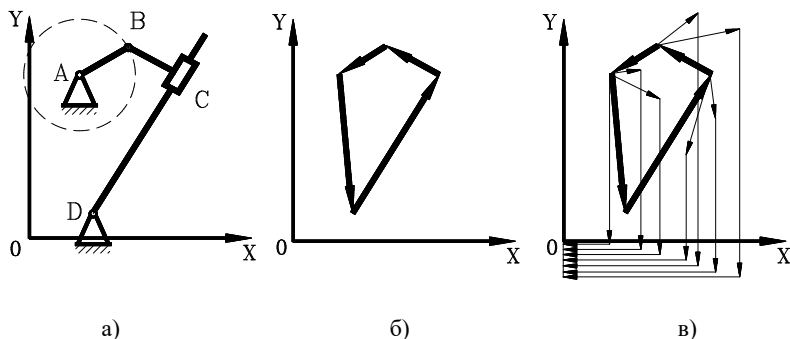


Рис. 3.5. Структурная схема (а), основная кинематическая (б) и динамическая (в) векторные модели 2-го варианта механизма

Динамические модели механизма используются при определении:

- внешних нагрузок для достижения заданного закона движения выходного звена;
- нагрузок на элементы кинематических пар.

Основная динамическая модель также должна быть приспособлена для модификации при решении второй задачи динамики, т.е. для определения законов движения звеньев при заданных внешних нагрузках.

При заданных положениях входного звена динамическая модель определяет не только положение, но и скорости центров масс, точек приложения внешних нагрузок, а также находят решения векторных контуров, описывающих силовое равновесие.

Динамическая модель позволяет перейти от исследования многозвенного механизма к его одномассовой модели, к звену приведения, с переменными, в общем случае, значениями массовой характеристики и нагрузки, определенными для каждого положения.

Для полного описания основной динамической модели механизма приняты следующие характеристики:

1. Основная кинематическая модульная модуль;
2. Для каждого вектора кинематической модели:
 - 2.1. Положение центра масс: длина дополнительного вектора \bar{p}_{S_i} ; угол относительного поворота вектора \bar{p}_{S_i} ;
 - 2.2. Массовые характеристики m_j и J_{S_j} ;
 - 2.3. Положение точки приложения внешней нагрузки F_i ; длина дополнительного вектора $\bar{p}_{ж_i}$ угол относительного поворота вектора $\bar{p}_{ж_i}$;
 - 2.4. Внешние нагрузки $F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_j$.

Для создания модульной динамической модели предварительно внешние нагрузки на звено и нагрузки, учитывающие гравитацию сводятся к суммарной силе \vec{F}_i , приложенной в точке K_i , и к моменту \vec{M}_i , определяется положение центра масс S_i , значения массы m_i и момента инерции J_{S_i} относительно центра масс S_i для i -ого звена.

Параметры точек K_i и S_i задаем во вспомогательной полярной системе координат, начало которой связано с характерной точкой кинематической пары – осью вращения шарнира вращательной пары или точкой пересечения оси направляющей с осью поводка ползуна для поступательной пары. При этом ось X расположена параллельно вектору моделирующему звено в кинематической модели.

Для удобства дальнейших расчетов принимаем движение точек K_i и S_i в координатах X, Y (для плоского механизма) и X, Y, Z (для пространственного механизма). Для нахождения данных координат используем стандартные модули для плоского механизма – Пл2, для пространственного механизма – Пр11. Координаты точек K_i и S_i являются функциями данных модулей.

В результате кинематическая модель механизма дополняется контурами описывающими движение центра масс механизмов и точек приложения нагрузок. В общем случае механизмы могут иметь неограниченное число звеньев образующих множество векторных контуров плюс дополнительные контуры, определяющие состав динамической модульной модели, то есть, в общем случае векторная модель механизма с числом векторов Nv дополнительно увеличивается на $Nm+NF$ – контуров, которые отображают движение точек S_i и K_i , соответствующих элементарным плоским модулям Пл2 или пространственным модулям Пр11. В случае, если не учитывается динамика основания

(вибрация и т.д.), число дополнительных контуров сокращается на количество векторов, описывающих стойку, умноженное на два. Такая развитая кинематическая модель удобна для перехода от основной кинематической к основной динамической модели механизма.

3.7.2. Расчет реакций в шарнирах механизмов с использованием векторных модулей

Задача силового анализа, а именно нахождение уравнивающей нагрузки на звено приведения, решается исходя из принципа равенства нулю суммы элементарных работ или мощностей механизма. Переход от одного положения к другому за разные промежутки времени связаны с различными затратами энергии, и множество механизмов при постоянстве скорости входного звена имеют изменяющиеся скорости движения прочих звеньев. Любое изменение скорости движения реального i -ого звена, обладающего массой m_i и моментом инерции относительно центра массы J_{Si} , связано с преодолением его инертности. Большинство различных по своей структуре стержневых механизмов, включая простейшие кривошип-ползунные и кривошип-коромысловые механизмы обладают именно такими свойствами. Кроме того, необходимо учитывать, что у однозвенной заменяющей схемы для каждого момента времени работы значения суммарного момента M_{Σ} и суммарного момента инерции J_{Σ} могут изменяться.

Уравнение энергетического баланса механизма с учетом сил и моментов инерции всех звеньев механизма с приведением к однозвенной модели расчета выглядеть следующим образом.

Уравнивающая нагрузка – нагрузка определяемая из равенства её элементарной работы сумме элементарных работ (мощностей) внешних нагрузок, сил гравитации, инерционных

нагрузок действующих на механизм, и и приложенная, например, к ведущему звену:

$$M_{ур} \cdot \omega_1 = \sum_{i=1}^n (P(F_i, M_i, G_i) + P(\Phi_j, M_{uj})), \quad (3.23)$$

где $P(F_i, M_i, G_i)$ – работа i -го звена, нагруженного внешними и гравита-ционными силами F_i , G_i , а также моментными нагрузками M_i ;

$P(\Phi_i, M_{ii})$ – работа сопротивления изменению скоростей движения i -го звена, учитываемая введением нагрузок;

$\Phi_i = m \cdot a_{si}$ – силы инерции i -го звена;

$M_{ii} = J_{si} \cdot \varepsilon_{si}$ – момента инерции i -го звена.

Для определения уравновешивающей нагрузки, разложив все действующие силы по осям X , Y основной системы координат механизма (за начало координат можно принять стойку ведущего звена) получим:

$$\sum_{i=1}^n F_i^x \cdot v_{x_i} + \sum_{i=1}^n F_i^y \cdot v_{y_i} + \sum_{i=1}^n \Phi_i^x \cdot v_{x_i} + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \omega_i + \sum_{i=1}^n ((\Phi_i^y - G_i) \cdot v_{y_i}) + \sum_{i=1}^n M_{u_i} \cdot \omega_i + M_{ур} \cdot \omega_1 = 0, \quad (3.24)$$

где F_i^x – проекция на ось X внешней силы действующей на i -ое звено механизма;

F_i^y – проекция на ось Y внешней силы действующей на i -ое звено механизма;

Φ_i^x – проекция на ось X инерционной силы действующей на i -ое звено механизма;

Φ_i^y – проекция на ось Y инерционной силы действующей на i -ое звено механизма;

G_i – сила тяжести от массы i -ого звена механизма;

v_{x_i}, v_{y_i} – скорости перемещения точек приложения сил по осям X и Y ;

$u_{X_{Ц.м.}}, u_{Y_{Ц.м.}}$ – скорости перемещения центров масс по осям X и Y ;
 ω_i, ω_1 – угловые скорости i -ого звена и ведущего звена;
 $M_{ур}$ – уравновешивающий момент.

При определении нагрузок на элементы внутренней вращательной кинематической пары структурной группы Π_2 предварительно все внешние нагрузки, нагрузки, учитывающие гравитацию и инертность звеньев, приводим к суммарным силам \vec{F}_i и \vec{F}_j , которые раскладываем на составляющие $\vec{F}_{Xi}, \vec{F}_{Yi}$ и $\vec{F}_{Xj}, \vec{F}_{Yj}$ (рис. 3.6).

Тогда, если для двух звеньев связанных кинематической неподвижной вращательной пары разнести все приходящие на звенья нагрузки на оси кинематических пар (рис. 3.7), то, рассматривая равновесие этой оси, действие звеньев на нее можно учитывать осевой составляющей.

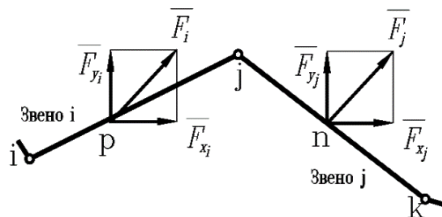


Рис. 3.6. Суммарные нагрузки на i -ое и j -ое звенья

Разнесем нагрузки $\vec{F}_{Xi}, \vec{F}_{Yi}$ и $\vec{F}_{Xj}, \vec{F}_{Yj}$ пропорционально расстоянию от точек приложения нагрузок до шарниров:

$$F_{Xii} = \frac{F_{Xi} \cdot h_i}{L}, \quad (3.25)$$

$$F_{Yii} = \frac{F_{Yi} \cdot h_i}{L}, \quad (3.26)$$

$$F_{Xij} = \frac{F_{Xj} \cdot (L - h_i)}{L}, \quad (3.27)$$

$$F_{Yij} = \frac{F_{Yj} \cdot (L - h_i)}{L}. \quad (3.28)$$

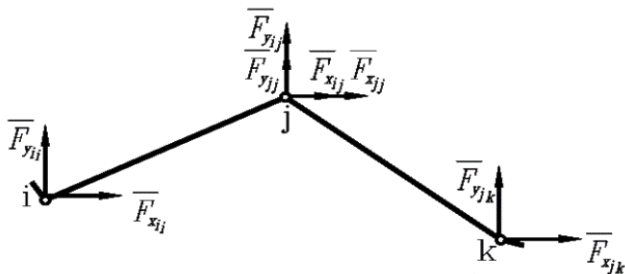


Рис. 3.7. Перенос нагрузок на ось кинематической пары

Моменты раскладываются на пары сил, приложенные в шарнирах:

$$F_{ii}^M = F_{ij}^M = \frac{M_i}{L}, \quad (3.29)$$

где L – плечо равное длине i -ого звена; h_i – расстояние от i -го шарнира до точки приложения силы.

Исследуем равновесие оси j -ой кинематической пары с заменной “отброшенных” звеньев i и j заменяющими их реакциями \bar{F}_{Oij} и \bar{F}_{Ojj} .

Для аналитического определения величин F_{Oij} и F_{Ojj} используем элементарных плоский модуль $\text{Pl2}(F_{Oij}, F_{Ojj})$, геометрический образ и параметрическая формула которого приведены на рис. 3.8. Тогда, как показано на рис. 3.9:

$$\bar{F}_{ij} = \bar{F}_{Xjj} + \bar{F}_{Yjj} + \bar{F}_{Ojj} \quad (3.30)$$

или

$$\bar{F}_{ji} = \bar{F}_{Xij} + \bar{F}_{Yij} + \bar{F}_{Oij}. \quad (3.31)$$

Для определения реакций на элементы поступательной пары двухповодковой группы звеньев (рис. 3.10) применим другой решение. При определении нагрузок на элементы внутренней поступательной кинематической пары структурной группы Π_2

предварительно все внешние нагрузки, нагрузки учитывающие гравитацию и инертность звеньев, приводим к суммарным силам F_i и F_j . Суммарные силы F_i и F_j раскладываем на составляющие F_{xi} , F_{yi} и F_{xj} , F_{yj} (рис. 3.11).

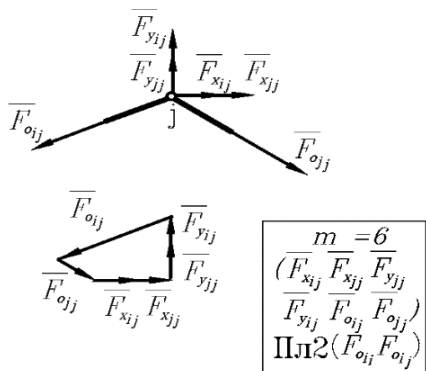


Рис. 3.8. Замена звеньев силами, направленными вдоль их осей

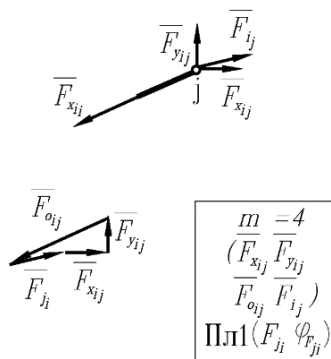


Рис. 3.9. Реакция в шарнире j от звена i

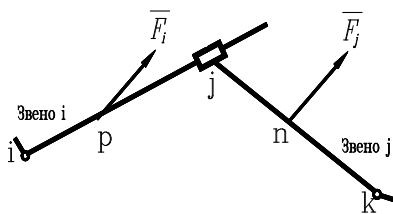


Рис. 3.10. Структурная группа Π_2 с внутренней поступательной парой

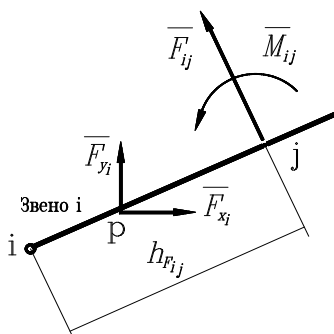


Рис. 3.11. Разложение суммарных нагрузок на i -ое и j -ое звенья по осям X и Y

Реакции F_{ij} и M_{ij} найдем из совместного решения двух уравнений моментного равновесия сил и моментов, действующих

на звено i относительно шарнира i (рис. 3.12) и моментного равновесия сил и моментов, действующих на звено j относительно шарнира k (рис. 3.13).

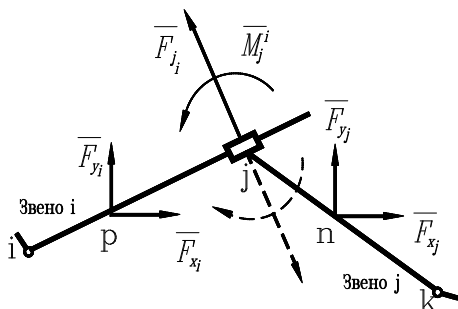


Рис. 3.12. Силы, действующие на звено i

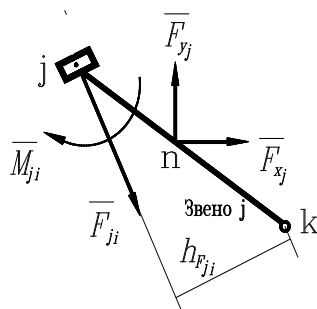


Рис. 3.13. Силы, действующие на звено j

Рассмотрим суммы моментов:

$$\sum M_{i(i)} = 0,$$

$$\sum M_{k(j)} = 0.$$

Распишем данные уравнения:

$$M_i(\bar{F}_{x_i}) + M_i(\bar{F}_{y_i}) + F_{ij} \cdot h_{F_{ij}} + M_{ij} = 0,$$

$$M_k(\bar{F}_{x_j}) + M_k(\bar{F}_{y_j}) + F_{ji} \cdot h_{F_{ji}} + M_{ji} = 0.$$

Заменим F_{ji} и M_{ji} на $-F_{ij}$ и $-M_{ij}$:

$$M_i(\bar{F}_{x_i}) + M_i(\bar{F}_{y_i}) + F_{ij} \cdot h_{F_{ij}} + M_{ij} = 0,$$

$$M_k(\bar{F}_{x_j}) + M_k(\bar{F}_{y_j}) - F_{ij} \cdot h_{F_{ji}} - M_{ij} = 0.$$

Тогда:

$$F_{ij} = -\frac{M_i(\bar{F}_{x_i}) + M_i(\bar{F}_{y_i}) + M_k(\bar{F}_{x_j}) + M_k(\bar{F}_{y_j})}{h_{F_{ij}} - h_{F_{ji}}}, \quad (3.32)$$

$$M_{ij} = -\left(M_i(\bar{F}_{x_i}) + M_i(\bar{F}_{y_i}) + F_{ij} \cdot h_{F_{ij}}\right). \quad (3.33)$$

Полученные динамические модели позволяют расширить проектировочные возможности за счет использования векторного разложения реакций в кинематических парах, с разгрузением звеньев от внешних нагрузок.

3.7.3. Учет влияния трения на реакции в кинематических парах

Любой векторный замкнутый контур имеет несколько вариаций в зависимости от порядка следования векторов. Для каждой из вариаций векторного контура может быть создано множество вариантов конструктивно-кинематических схем механизма. Так, например, шарнирный четырехзвенник имеет три вариации векторного контура, которые могут быть реализованы в виде 1296 вариантов, отличающихся сочетаниями конструктивных вариантов различных кинематических пар. Проведение экспертной оценки вариантов механизмов, удовлетворяющих на первом этапе её проведения ограничениям по габаритам, связано с анализом их кинематического и динамического совершенства. В тоже время, недооценка влияния процессов трения на этапе экспертной оценки иногда приводит к существенным трудностям его практической реализации.

Расчёт обобщенной модульной динамической модели механизма должно вестись с учетом трения в кинематических парах. Дополним расчет реакций в кинематических парах известной методикой [10].

В поступательной паре (рис. 3.14) полная реакция между звеньями отклоняется за счет силы трения F^{np}_{12} от нормали n на угол φ , называемый углом трения, в сторону, противоположную относительной скорости V_{12} .

В кинетостатическом расчете с учетом трения удобно определять отдельно нормальную F^n_{12} составляющую полной

реакции, обозначая ее (как и в силовом расчете без учета трения) F_{12} , и силу трения F_{mp12} , учитывая их связь между собой:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{F_{12}^{mp}}{F_{12}^n} = f, \quad (3.34)$$

$$F_{12}^{mp} = f F_{12} = F_{12} \operatorname{tg}(\varphi), \quad (3.35)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(f)$.

Число неизвестных при выполнении силового расчета остается прежним – это величина и точка приложения реакции.

Во вращательной паре (рис 3.15) вал 1 находится в опоре под действием внешнего момента M и вращается с постоянной угловой скоростью ω_{12} .

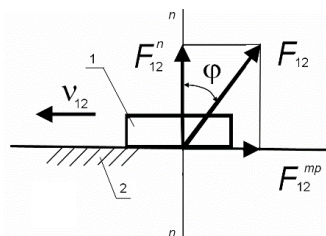


Рис. 3.14. Смещение реакции в поступательной паре при наличии трения между звеньями

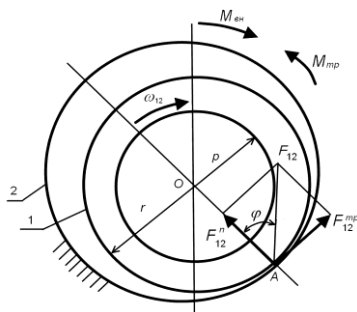


Рис. 3.15. Реакция между звеньями во вращательной паре с учетом трения между звеньями и учет момента трения M_{mp}

При вращении вала в направлении ω_{12} при наличии трения между валом и опорой, вал будет набегать на опору. Предположим, что вал «набегает» на опору в точке А. Полная реакция F_{12} будет отклоняться от нормали на угол трения φ .

Опустим из центра вала O перпендикуляр на направление полной реакции F_{12} и проведем окружность радиуса ρ .

Реакция F_{12} будет направлена по касательной к этой окружности, называемой кругом трения. При этом момент трения будет равен:

$$\begin{aligned} M_{12}^{mp} &= F_{12}^{mp} \cdot r = f \cdot F_{12} \cdot r \cdot \cos(\varphi) = F_{12} \cdot r \cdot \sin(\varphi) = \\ &= F_{12} \cdot p. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Так как углы трения малы, то можно считать что $\sin(\varphi)$ приблизительно равен $\operatorname{tg}(\varphi)$. Тогда радиус круга трения будет приближенно равен

$$p = r \cdot \operatorname{tg}(\varphi) = r \cdot f,$$

где f – коэффициент трения во вращательной паре.

Особенностью векторных моделей механизма является то, что кинематический и динамический расчет такой модели можно вести без определения самих кинематических пар, а для учета трения в кинематических парах использовать в качестве характеристики движения наличие или отсутствие линейной или угловой скорости вектора, что достаточно для поступательных пар, но в тоже время для вращательных пар математическая векторная модель должна дополняться, как коэффициентом трения, так и радиусом соприкосновения r , что само по себе может является признаком принадлежности пары к вращательным или поступательным парам.

Кроме того, особенностью векторных моделей является то, что соединение двух векторов может содержать не только отдельно поступательную или вращательную пару, но и совмещенные вращательную и поступательную пары (если длина поводка поступательной пары равна нулю) (рис. 3.16).

В этом случае, целесообразно вводить в векторную модель дополнительный вектор с длиной, равной нулю (рис. 3.17), но который позволяет рассчитывать отдельно такое соединение, как поступательную и вращательную пару.

В результате можно сделать вывод, что учет трения при векторном моделировании механизмов, не требует дополнительных расчетов

по сравнению с традиционными методиками расчета, кроме необходимости учитывать совмещенные кинематические пары с помощью дополнительного вектора, замещающим поводок ползуна с нулевой длиной.

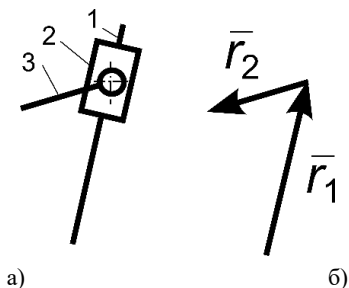


Рис. 3.16. Совмещенные вращательная и поступательная пары (а) и векторы, отображающие данное соединение (б)

Тогда потери на трение, можно оценить, как и принято в типовом расчете, вычислив:

$$P_{тр} = \sum P_{тр_i}^{вр} + \sum P_{тр_i}^{пост}, \quad (3.37)$$

где $P_{тр_i}^{вр} = fF_{(i-1)i}r(\omega_{i-1} + \omega_i)$ – потери мощности во вращательной паре; $P_{тр_i}^{пост} = fF_{(i-1)i} \cdot v_i$ – потери мощности в поступательной паре.

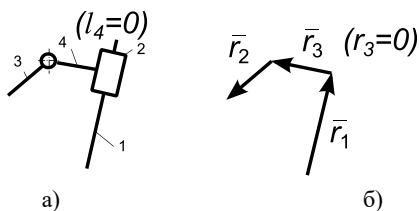


Рис. 3.17. Совмещенные вращательная и поступательная пары с поводком 4 (а) и векторы, отображающие данное соединение, с вектором 3 нулевой длины (б)

Соответственно, цикловой КПД механизма будет равен:

$$\eta = \frac{P(M_{ур}) - P_{тр}}{P(M_{ур})}, \quad (3.38)$$

где $P(M_{ур})$ – суммарная мощность от уравновешивающего момента.

3.8. Программная реализация основных кинематических и динамических модульных моделей

На кафедре «Основы конструирования машин» Самарского государственного аэрокосмического университета создан пакет программ «КДАМ» [9], представляющий собой математическую модель кинематического и динамического поведения механизмов.

Работа с программным обеспечением кинематического анализа механизма состоит из создания основной кинематической модульной модели.

Программное обеспечение основной модульной кинематической модели механизма используется для решения следующих задач:

1. Создание параметрической и расчетной формул векторной модели.
2. Определение значений функций и их 1-х и 2-х производных.
3. Построение планов положений механизма в векторной форме.
4. Построение диаграмм различных зависимостей параметров и их 1-х и 2-х производных векторов.
5. Определение разности углов между векторами и т.д.

Пакет используется при кинематическом анализе механизма, а также входит в состав объединенной программы кинематического и динамического анализа механизмов.

Работа с программным обеспечением динамического анализа механизмов состоит из создания основной динамической модульной модели механизма, состоящей из его основной кинематической модульной модели, дополненной для каждого звена относительными координатами центра масс и точки приложения внешней нагрузки, а также значениями массовых характеристик m и J_S и внешних нагрузок \vec{F} и \vec{M} . Основная кинематическая модель автоматически самой программой дополняется контурами, определяющими движения точек приложения внешних сил и центров масс звеньев вдоль координатных осей OX и OY расчетной системы координат. При силовом анализе для каждого звена производится определение суммарной нагрузки, её разнос по элементам кинематических пар, и определение нагрузок на элементы кинематических пар. Основная динамическая модульная модель плоского механизма для выбранного звена приведения позволяет определить приведенную массовую характеристику m_Σ или J_Σ , приведенную нагрузку F_Σ или M_Σ , нагрузки на элементы кинематических пар и используется для оценки динамического совершенства вариантов механизмов в процессе их композиции.

Программное обеспечение основной динамической векторной модульной модели механизма используется при решении следующих задач:

Определение значения координат общего центра масс механизма и центра масс каждого звена в отдельности.

Определение уравнивающих силы и момента.

Определение реакций в шарнирах механизма.

Построение годографов реакций в шарнирах механизма.

Определение разности углов между направлением векторов и направлением действия реакций в шарнирах.

Построение графиков приведенных моментов, сил, инерционных характеристик.

Реализовано в КДАМе:

- Моделирование элементарных плоских и пространственных векторных модулей;
- Моделирование плоских векторных модулей со связями от функций модуля;
- Возможность использования «промежуточных» аргументов;
- Кинематический анализ – решение задач о положениях, скоростях и ускорениях;
- Учет инерционных характеристик и трения в кинематических парах;
- Учет активных сил и моментов, прикладываемых к векторам;
- Динамический анализ – решение задач динамики, нахождение реакций в кинематических парах;
- Анализ изменения параметров модели на кинематические и динамические характеристики;
- Параметрический синтез модели механизма по кинематическим и динамическим критериям.

Добавочные специализированные модули:

- построение индикаторной диаграммы для двух и четырехтактного рабочего цикла ДВС;
- построение гармонического закона движения для аргумента модели;
- расчет компрессора;
- расчет параметров зубчатого соединения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные подходы к моделированию механизмов в виде векторных модулей позволяют получить важные прикладные результаты.

Векторные модели доступны для понимания не только узкоориентированным специалистам, но и тем разработчикам, которые только эпизодически решают задачи по механизмам, а развитое программное обеспечение позволяет это делать быстро и эффективно.

В учебном процессе при изучении теории механизмов и машин, программное обеспечение векторного моделирования не заменяет, а помогает обучению общим методам исследования механизмов, излагаемых в лекционном курсе.

Векторные модели инвариантны по своей абстрактной природе. Они применимы для решения задач геометрии, кинематики и динамики механизмов. Программное обеспечение векторных модулей в учебном процессе позволяет лучше усвоить курс теории механизмов и машин, а в инженерной практике – эффективно решать не только традиционные задачи анализа и синтеза, но и задачи композиции (придумывание, поиска) нестандартных механизмов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Зиновьев, В.В. Аналитические методы расчета плоских механизмов / В.В. Зиновьев. – Москва, Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 204 с.
2. Зиновьев, В.В. Векторный метод в структурном и кинематическом исследовании механизмов / В.В. Зиновьев // Изв. вузов. – Машиностроение. – 1958. – №6. – С. 3-9.
3. Семёнов, Б.П. Модули математических моделей: методическое пособие / Б.П. Семёнов. – Куйбышев: КуАИ, 1985. – 44 с.
4. Семёнов Б.П. Модульное моделирование механизмов / Б.П. Семёнов, А.Н. Тихонов, Б.Б. Косенок. – Самара: СГАУ, 1996 – 86 с.
5. Семёнов, Б.П. Методы и средства динамического синтеза механизмов авиационных энергоустановок / Б.П. Семенов, Б.Б. Косенок. – Самара: СНЦ РАН, 2010. – 281 с.
6. Ассур, Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации / Л.В. Ассур; под ред. И.И. Артоболевского. – Москва: Изд-во АН СССР, 1952. – 592 с.
7. Косенок, Б.Б. Программа КДАМ (Кинематический и динамический анализ механизмов) / Б.Б. Косенок, В.П. Тукмаков // Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2010616342 по заявке № 2010614593 от 29 июля 2010 г.
8. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов / И.И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Наука, 2009. – 639 с.

9. Савинов, А.П. Теория механизмов и машин в авиастроении: учебное пособие / А.П. Савинов, В. М. Ястребов, Н.П. Коробова. – Самара: СГАУ, 2006. – 173 с.
10. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование: учебное пособие / Под ред. Г.А. Тимофеева. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012 – 169 с.
11. Семенов, Б.П. Кинематика двигателей внутреннего сгорания и трансмиссий: курс лекций / Б.П. Семенов. – 2-е изд. – Самара: СГАУ, 2003. – 116 с.
12. Косенок, Б.Б. Кинематический анализ векторной модели основного механизма орбитального двигателя / Б.Б. Косенок. – Самара: Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2007. – Т.9. – №3. – С. 696-700.
13. Косенок, Б.Б. Динамический анализ основного механизма орбитального двигателя на основе его векторной модели / Б.Б. Косенок // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – Самара, 2011. – Т.13. – №4. – С. 259-263.
14. Косенок, Б.Б. Разработка методики моделирования зубчатых передач на основе метода математического моделирования векторных замкнутых контуров / Б.Б. Косенок // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – Самара, 2009. – Т. 11. – №3. – С. 202-204.

Учебное издание

Косенок Борис Борисович

**ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ
ТЕОРИИ МОДУЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ**

Учебное издание

Редактор А.В. Ярославцева
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 26.08.2021. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 6,0.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ № . Арт. – 10(P2У)/2021.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.