МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Оптимальные и адаптивные системы управления лазерными устройствами

Научно-образовательный модуль
в системе дистанционного обучения Moodle

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ
на 2009 – 2018 годы по проекту «Разработка интерактивных дистанционных курсов по дисциплинам «Оптика лазеров»,
«Когерентная оптика», «Оптимальные и адаптивные системы управления лазерными устройствами»»
Соглашение № 1/22 от 03.06.2013 г.

САМАРА
2013

УДК 621.375.8(075)
Б 874

Автор-составитель: **Братченко Иван Алексеевич**

Оптимальные и адаптивные системы управления лазерными устройствами [Электронный ресурс] : научно-образоват. модуль в системе дистанц. обучения Moodle / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. И. А. Братченко. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Научно-образовательный модуль предназначен для бакалавров радиотехнического факультета направления подготовки 200500.62 «Лазерная техника и лазерные технологии» по дисциплине «Оптимальные и адаптивные системы управления лазерными устройствами», изучаемой в седьмом семестре.

Модуль разработан на кафедре лазерных и биотехнических систем

Лекция 1

Общие сведения о системах управления

Предмет «Оптимальные и адаптивные системы управления» знакомит вас с основными принципами построения широкого класса систем автоматического управления, методами формализованного описания и анализа качества функционирования этих систем.

Рассмотрим с вами основные понятия, с которыми оперирует теория управления и которые вы должны хорошо себе представлять и использовать при изучении последующих разделов теории.

Объект управления. Под объектом управления следует понимать объект, на достижение желаемых результатов функционирования которого направлены специально организованные воздействия.

Воздействие. Воздействие есть внешнее влияние на объект управления, вызывающее в последнем изменение его свойств и (или) состояния.

Управление. Управление есть процесс выработки и осуществления управляющих воздействий в виде заданий для целенаправленного изменения каких-либо свойств или параметров объекта управления, под которым мы будем также понимать любой физический объект или процесс, свойства или параметры которых подвергаются изменению посредством определенного физического воздействия на них.

Возмущение – есть внешнее воздействие на любой элемент системы управления, включая объект управления, затрудняющее достижение цели управления. Компенсация действий возмущений на объект управления есть задача автоматического регулирования.

Регулирование. Регулирование – есть регулирующее воздействие на объект управления с целью обеспечения близости фактических значений одного или нескольких параметров объекта управления к их заданным значениям.

Что же требуется для управления, при том, следует отметить, качественного управления.

Во-первых, должно быть известно задание, а именно, какой параметр объекта управления мы хотим изменить, и какое значение этого параметра нас устроит. Следовательно, необходимо задающее устройство.

Во-вторых, необходим инструментарий для непосредственного физического воздействия на объект управления. Другими словами необходимо исполнительное устройство для выполнения задания.

В-третьих, очевидно, необходим контроль над ходом выполнения задания и проверка соответствия результатов исполнения заданию, т.е. необходимо иметь контрольно-измерительные устройства.

Рассмотрим примеры возможных схем управления.

Пример 1. Дачник копает лопатой на своем участке яму определенных известных только ему размеров. Здесь дачник является задающим устройством, а яма – объектом управления. В качестве исполнительного устройства использованы руки и ноги человека, воздействующие на лопату. Изменяемой (регулируемой) величиной являются размеры ямы. Для получения требуемого результата используется мерная линейка, с помощью которой человек измеряет текущие размеры ямы. Здесь органы зрения и мерная линейка служат контрольно-измерительным устройством. Человек перестает копать, когда истинные размеры ямы будут соответствовать заданным, для чего человек мысленно выполняет логическую работу по анализу результатов измерения фактических размеров ямы, в зависимости от которых от продолжает копать или прекращает работу, т.е. в данном случае человек выполняет еще функции сравнивающего устройства.

Представим рассмотренный процесс управления в виде формализованной функциональной схемы некоторой системы управления.

Задающее устройство – дачник, хранящий в памяти требуемые размеры ямы.

Сравнивающее устройство – логика мышления дачника

Регулирующее устройство – логика мышления человека

Исполнительной устройство – руки и ноги человека, воздействующие на лопату

Объект управления – яма

Контрольно-измерительное устройство – зрение человека и мерная линейка.

Так как для обеспечения точных размеров ямы человек вынужден по ходу дела менять режим работы (уменьшать усилия нажатия на лопату и темп работы по мере приближения к заданным размерам), то он в этом случае исполняет еще роль регулирующего устройства.

Как видно из приведенной схемы в процессе управления практически все функции выполняет один человек, т.е. мы имеем дело чисто с ручным управлением процессом копания.

Пример 2. Рабочий по заданию дачника копает на садовом участке яму заданных размеров. Что же в этом случае меняется в нашей функциональной схеме? Дачник здесь исполняет роль только внешнего источника первичной информации для рабочего, который выполняет в дальнейшем все функции системы управления.

Пример 3. При термической обработке изделия в термокамере необходимо автоматически без участия человека поддерживать определенную заданную температуру.

Сейчас мы убедимся в том, что формализованная функциональная схема системы автоматического управления практически идентично той, которую мы рассматривали для системы ручного управления. Действительно:

Задающее устройство – задает требуемое значение температуры в виде сигнала определенной физической природы (например, электрического напряжения, пропорционального значению температуры). Значение температуры может задаваться человеком-оператором с помощью ряда кнопок на пульте управления или вырабатываться автоматически управляющим вычислительным комплексом на основе входной информации об изделии, его свойствах и назначении.

Сравнивающее устройство – производит сравнение значений двух сигналов одной физической природы, соответствующих заданному и фактическому значениям температуры, и вырабатывает разностный сигнал ошибки. Сравнение может осуществляться, как в аналоговом виде сигналов, так и в цифровом.

Регулирующее устройство или просто регулятор – вырабатывает соответствующее регулирующее воздействие на объект управления в зависимости от величины сигнала ошибки – сигнала расстройки. Регулятор может содержать усилитель разностного сигнала ошибки, исполнительное устройство или преобразователь сигнала одной физической природы в другую, более удобную для воздействия на объект управления (например, преобразование электрического сигнала в тепловой сигнал).

Объект управления – термокамера, температура в которой является регулируемым параметром.

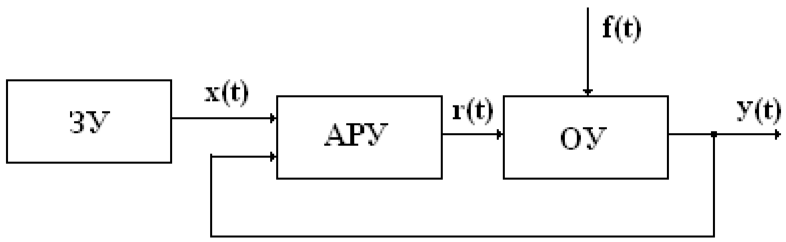
Контрольно-измерительное устройство – преобразует значение фактической температуры в определенный уровень сигнала другой физической природы, аналогичный заданному сигналу. Как правило, устройство содержит чувствительный элемент для пропорционального преобразования значения текущей температуры в сигнал, удобный для последующего измерения, и измерительное устройство для измерения уровня преобразованного сигнала. В качестве контрольно-измерительного устройства может, например, использоваться термопара.

В реальных условиях эксплуатации на регулируемые параметры объекта управления могут влиять *внешние возмущающие воздействия* различного рода, например, температура окружающей среды.

Таким образом, любую систему автоматического управления (САУ) можно рассматривать как совокупность некоторого ряда составных частей – звеньев. Деления на звенья может осуществляться как по функциональному признаку (измерительные, усилительные, преобразовательные, исполнительные и другие элементы), так и по динамическим свойствам.

Системы автоматического управления по принципу действия могут быть классифицированы на системы замкнутые, разомкнутые, комбинированные и адаптивные.

К замкнутым системам относятся системы управления по отклонению, представляющие собой системы с обратной связью и представляющие собой основной тип САУ.



Структурная схема САУ по отклонению

На приведенном рисунке приняты следующие обозначения:

ЗУ – задающее устройство, вырабатывающее управляющее воздействие x(t);

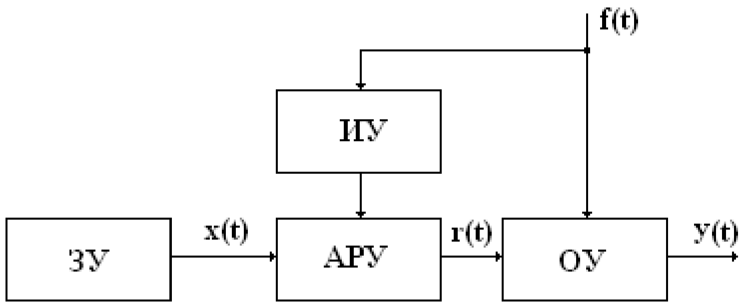
АРУ – устройство автоматического регулирования, вырабатывающее регулирующее воздействие r(t);

ОУ – объект управления:

y(t) – регулируемый параметр объекта управления:

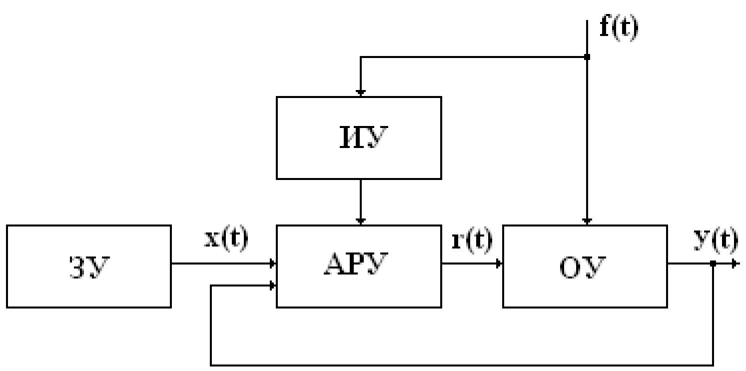
f(t) – внешнее возмущающее воздействие на ОУ.

К разомкнутым системам относятся системы управления по возмущению, в которых регулирующее воздействие вырабатывается в зависимости от результатов измерения возмущения.



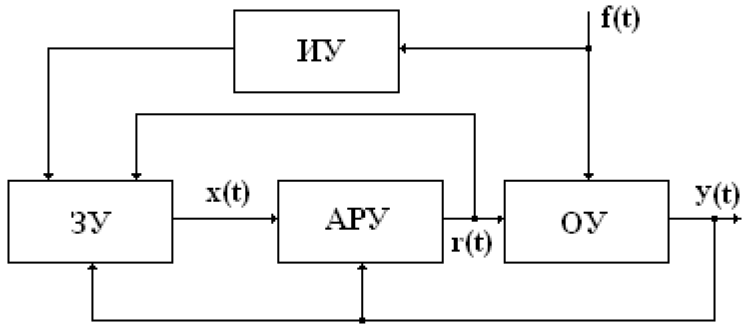
Структурная схема САУ по возмущению

Системы САУ с комбинированным управлением сочетают в себе принципы управления по отклонению и возмущению.



Структурная схема САУ с комбинированным управлением

Адаптивные системы САУ обладают способностью приспособляться в процессе функционирования к изменению окружающей среды и улучшать свои свойства.



Структурная схема адаптивной системы САУ

В зависимости от назначения системы автоматического управления делят на системы стабилизации, программного управления и следящие системы.

Системы стабилизации предназначены для поддержания постоянного значения регулируемой величины, задаваемого ЗУ.

Системы программного управления предназначены для изменения значения регулируемой величины по заранее заданной программе, называемой программой управления.

Следящие системы предназначены для изменения регулируемой величины по закону изменения задающего воздействия.

По виду используемых сигналов САУ можно подразделить на непрерывные и дискретные системы. Дискретные системы можно подразделить на импульсные и релейные.

В зависимости от числа регулируемых параметров системы САУ подразделяются на одномерные и многомерные системы.

При изучении процессов управления все многообразие САУ можно рассматривать как различные комбинации из небольшого количества стандартных элементов – динамических звеньев.

Любой элемент характеризуется связью между его входным и выходным сигналами. Эта связь определяет физические процессы в элементе как в статическом режиме, когда входной и выходной сигналы – постоянные величины, так и в динамическом режиме, при котором входной и выходной сигналы являются некоторой функцией времени.

В статическом режиме взаимосвязь между входной и выходной величинами определяет статические свойства элемента, в динамическом режиме – динамические свойства элемента.

Для формализованного описания динамических свойств элементов используются следующие способы:

дифференциальные уравнения;

передаточные функции W(p), которые представляют собой запись дифференциальных уравнений в операторной форме путем перехода к преобразованиям Лапласа;

временные функции, характеризующие изменение во времени выходного сигнала определенного вида;

частотные характеристики, устанавливающие зависимость между амплитудой и фазой входного и выходного гармонических сигналов при изменении частоты входного сигнала.

Удобство использования формализованного описания динамических свойств заключается в том, что независимо от физической природы элементов их поведение во времени (динамика) может быть описана одинаковыми дифференциальными уравнениями, а, следовательно, одинаковыми передаточными функциями, временными и частотными характеристиками.

Поэтому динамические элементы, которые описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, могут быть формально представлены одним и тем же стандартным типом динамического звена.

При этом следует отметить, что элементарным динамическим звеном называется звено, динамические свойства которого описываются линейным дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

$$a_2 \cdot y^{(2)}(t) + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_2 \cdot x^{(2)}(t) + b_1 \cdot x^{(1)}(t) + b_0 \cdot x(t) \qquad (1)$$

Здесь: y(t) – временная функция выходного сигнала;

x(t) – временная функция входного сигнала;

$y^{(j)}(t)$ – j-я производная функции y(t);

$x^{(j)}(t)$ – j-я производная функции y(t);

a_m, b_m – постоянные коэффициенты уравнения при соответствующих переменных.

Передаточная функция W(p) есть отношение выходного сигнала к входному сигналу, представленное в операторной форме:

$$W(p) = y/x$$

Представим выражение (1) в операторной форме, для чего заменим знак производной по времени d/dt на оператор Лапласа – p, а именно:

$$y^{(2)}(t) = \mathbf{d}^2 y/\mathbf{dt}^2 = \mathbf{p}^2 y;\ y^{(1)}(t) = \mathbf{d}y/\mathbf{dt} = \mathbf{p}y;$$

$$x^{(2)}(t) = \mathbf{d}^2 x/\mathbf{dt}^2 = \mathbf{p}^2 x;\ x^{(1)}(t) = \mathbf{d}x/\mathbf{dt} = \mathbf{p}x.$$

Произведя соответствующие замены в дифференциальном уравнении, получим следующее уравнение в операторной форме:

$$a_2 \cdot p^2 y + a_1 \cdot py + a_0 \cdot y = b_2 \cdot p^2 x + b_1 \cdot px + b_0 \cdot x\ . \qquad (2)$$

Здесь выражение (1) является оригиналом дифференциального уравнения, а выражение (2) называется его изображением по Лапласу.

Вынесем за скобки в уравнении (2) переменные у и х:

$$y \cdot (a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0) = x \cdot (b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0). \qquad (3)$$

Из уравнения (3) легко находим выражение для передаточной функции:

$$W(p) = y/x = (b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0)/ (a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0) \qquad (4)$$

Если вынести в выражении (4) за скобки постоянные коэффициенты a_0 и b_0, то получим стандартное представление передаточной функции в операторном виде:

$$W(p) = (b_0/a_0) \cdot [(b_2/b_0) \cdot p^2 + (b_1/b_0) \cdot p + 1]/[(a_2/a_0) \cdot p^2 + (a_1/ a_0) \cdot p + 1], \text{ или}$$

$$W(p) = K \cdot (T_{2x} \cdot p^2 + T_{1x} \cdot p + 1)/(T_{2y} \cdot p^2 + T_{1y} \cdot p + 1) \qquad (5)$$

Здесь: T_{2x} и T_{1x} – постоянные времени выражения в скобках числителя;
T_{2y} и T_{1y} – постоянные времени выражения в скобках знаменателя.

В общем виде постоянные времени определяют характер изменения содержащих их функций от времени. Если с течением времени значение функции не меняется, то производная от этой функции будет равна нулю, следовательно, и оператор Лапласа p = 0. И тогда переходная функция, как это следует из выражения (5), будет равна статическому коэффициенту усиления К: W(p = 0) = K, что соответствует уравнению: $y = K \cdot x$.

К временным характеристикам динамических звеньев относят переходную и весовую функции.

Переходная функция h(t) определяет характер изменения во времени выходного сигнала звена, если входной сигнал является единичной ступенчатой функцией x(t) = 1(t):

$$y(t) = h(t) \cdot 1(t). \qquad (6)$$

Весовая функция g(t) (импульсная переходная функция) определяет характер изменения во времени выходного сигнала звена, если входной сигнал является импульсной функцией $x(t) = \delta(t) = 1'(t)$, которая представляет собой производную от единичной ступенчатой функции, т.е. ее кривая на плоскости охватывает площадь, равную 1:

$$y(t) = g(t) \cdot \delta(t) = g(t) \cdot 1'(t) \qquad (7)$$

Для нахождения временных характеристик динамических звеньев необходимо решить дифференциальные уравнения звена при нулевых начальных условиях [y(x = 0)] и соответствующих входных сигналах 1(t) или δ(t).

Весовая функция является производной от переходной функции. Следовательно весовую функцию g(t) можно определить путем аналитического и графоаналитического дифференцирования переходной функции h(t): $g(t) = dh(t)/dt$.

Рассмотрим с вами далее дифференциальные уравнения основных типов элементарных динамических звеньев и их переходные функции.

<u>Интегрирующее звено</u>

Характерная особенность интегрирующего звена заключается в том, что скорость изменения значения выходного сигнала y(t) звена (производная y′(t)) прямо пропорциональна значению выходного сигнала, т.е.:

$$y'(t) = K \cdot x(t). \qquad (8)$$

или в операторной форме:

$$p \cdot y = K \cdot x. \qquad (9)$$

При подаче на вход единичной ступенчатой функции x(t) = 1(t) выражение (8) примет следующий вид: $y'(t) = K$, или $dy = K \cdot dt$. Интегрируя обе части полученного уравнения, получим аналитическое выражение переходной функции интегрирующего звена:

$$y(t) = h(t) = K \cdot t. \qquad (10)$$

Из уравнения (9) можно получить аналитическое выражение передаточной функции интегрирующего звена:

$$W(p) = y/x = K/p. \qquad (11)$$

Из уравнения 10 следует, что весовая функция интегрирующего звена равна его статическому коэффициенту усиления K:

$$g(t) = h'(t) = K \qquad (12)$$

<u>Апериодическое (инерционное) звено</u>

Динамические свойства апериодического звена определяются дифференциальным уравнением первой степени:

$$T\cdot y'(t) + y(t) = K\cdot x(t). \qquad (13)$$

Из данного выражения следует, что динамические свойства звена зависят от аргумента T, называющегося постоянной времени и определяющего длительность переходного процесса от начального значения выходной функции y(t) к установившемуся постоянному ее значению при подаче на вход единичной ступенчатой функции 1(t).

Уравнение (13) может быть также представлено в операторной форме:

$$T\cdot p\cdot y + y = y(T\cdot p + 1) = K\cdot x. \qquad (14)$$

Из уравнения (14) легко получаем аналитическое выражение для передаточной функции апериодического звена:

$$W(p) = y/x = K/(T\cdot p + 1). \qquad (15)$$

Учитывая, что передаточная функция есть ничто иное, как изображение по Лапласу L[g(t)] весовой функции, найдем оригинал весовой функции, представив передаточную функцию в виде произведения изображений простейших функций, оригиналы которых можно найти из справочных таблиц изображений функций.

$$L[g(t)] = W(p) = K/(T\cdot p + 1) = (K/T)\cdot 1/(p + 1/T). \qquad (16)$$

В нашем случае изображение некоторой неизвестной функции f(t) равно L[f(t)] = 1/(p + 1/T), которому соответствует оригинал $f(t) = e^{pt}$, где p – есть ничто иное, как решение (корень) характеристического уравнения, получаемого приравниванием выражения в знаменателе изображения L[f(t)] к нулю: p + 1/T = 0, откуда p = - 1/T. Следовательно, выражение для весовой функции будет иметь вид:

$$g(t) = (K/T)\cdot f(t) = (K/T)\cdot e^{-t/T} \qquad (17)$$

Переходную функцию h(t) можно найти интегрированием правой части выражения (17), которое производим в операторной форме путем умножения изображения весовой функции L[g(t)] на отношение (1/p), представляющее собой передаточную функцию интегрирующего звена со статическим коэффициентом усиления, равным 1:

$$L[h(t)] = L[g(t)]\cdot 1/p = (1/p)\cdot (K/T)\cdot 1/(p + 1/T). \qquad (18)$$

Для отыскания оригинала функции h(t) разложим правую часть выражения (18) на элементарные дроби, используя метод неопределенных коэффициентов.

$$(K/T)/[p\cdot(p + 1/T)] = A/p + B/(p + 1/T) =$$

$$= [A\cdot(p + 1/T) + B\cdot p]/[p\cdot(p + 1/T)], \text{ откуда}$$

$$K/T = A/T + A\cdot p + B\cdot p = A/T + p\cdot(A + B).$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях полученного выражения при одинаковых степенях оператора p, получим:

$$K/T = A/T, \text{ или } A = K;$$

$$A + B = 0, \text{ откуда } B = -A = -K;$$

следовательно:

$$(K/T)/[p\cdot(p + 1/T)] = K/p - K/(p + 1/T) =$$

$$= K\cdot[1/p – 1/(p + 1/T)]. \qquad (19)$$

Переходя от изображений (19) к оригиналам простейших функций, получим выражение для переходной функции апериодического звена:

$$h(t) = K\cdot(1 – e^{-t/T}). \qquad (20)$$

Корень характеристического уравнения в изображении (1/p) элементарной функции f(t) равен нулю (p = 0), поэтому ее оригинал равен:

$$f(t) = e^{pt} = e^{0t} = e^{0} = 1.$$

Колебательное звено

Динамические свойства колебательного звена определяются дифференциальным уравнением второй степени и зависят не только от постоянной времени T, но и от коэффициента кси ξ, называемого коэффициентом демпфирования, характеризующего степень затухания колебаний:

$$T^2\cdot y''(t) + 2\xi\cdot T\cdot y'(t) + y(t) = K\cdot x(t). \qquad (21)$$

Представим уравнение (21) в операторной форме и найдем из него выражение для передаточной функции:

$$T^2 \cdot p^2 \cdot y + 2\xi \cdot T \cdot p \cdot y + y = (T^2 \cdot p^2 + 2\xi \cdot T \cdot p + 1) \cdot y = K \cdot x;$$

$$W(p) = y/x = K/(T^2 \cdot p^2 + 2\xi \cdot T \cdot p + 1). \qquad (22)$$

С целью экономии времени в виду громоздкости вывода формулы для переходной характеристики приводим ее без вывода:

$$h(t) = K \cdot [1 - (e^{-\xi t/T}/r) \cdot \sin(rt/T + \alpha)] \qquad (23)$$

Здесь: $r = \sqrt{1-\xi} > 0$ – условие наличия колебаний в звене;

$\alpha = \mathrm{arctg}(r/\xi)$ – фазовый начальный угол;

$r/(2\pi T) = f$ – частота затухающих колебаний звена.

Весовую функцию $g(t)$ колебательного звена можно найти, взяв производную от переходной функции $h(t)$:

$$g(t) = h'(t) = (K/T) \cdot e^{-\xi t/T} \cdot [(\xi/r) \cdot \sin(rt/T + \alpha) - \cos(rt/T + \alpha)] \qquad (24)$$

Лекция 2

Переходные процессы в САУ

В результате наличия переходных процессов в динамических звеньях САУ требуемое заданное значение регулируемой величины устанавливается не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени, называемого временем регулирования $t_р$. Обычно принято временем регулирования называть промежуток времени, за который значение переходной функции h(t) достигает 95% от своего установившегося значения при $h(t\to\infty) = K$.

Следовательно, по виду кривой переходной функции САУ можно определить время регулирования $t_р$.

Рассмотрим переходную функцию апериодического звена:

$$h(t) = K\cdot(1 - e^{-t/T}).$$

Из приведенной формулы видно, что время регулирования для инерционного звена зависит только от значения постоянной времени T и связано с ней приближенным соотношением: $t_р \approx 3T$, так как

$$h(t) = K\cdot(1 - e^{-t/T}) = K\cdot(1 - e^{-tp/T}) = K\cdot(1 - e^{-3T/T}) = K\cdot(1 - e^{-3}) \approx 0{,}95K.$$

Постоянную времени T инерционного звена можно определить по графику переходной функции h(t), если провести касательную к переходной функции из начала координат. Действительно, производная от любой непрерывной функции в произвольной точке приближенно равна тангенсу угла наклона касательной к этой точке. Для переходной функции апериодического звена справедливо: $h'(t = 0) = (K/T)\cdot e^{-t/T} = (K/T)\cdot e^{-0/T} = K/T = \mathrm{tg}\psi$, где ψ – угол наклона касательной к h(t) в точке t = 0. При t = T значение функции $h(t) = K\cdot(1 – e^{-1}) = 0,632K$.

Для динамических звеньев второго порядка кривые переходных процессов могут иметь как колебательный, так и апериодический характер, который зависит от значения коэффициента демпфирования ξ.

При $\xi < 0$ переходной процесс носит колебательный характер; при $\xi \geq 0$ переходной процесс носит апериодический характер.

Время регулирования $t_р$ для звена второго порядка также измеряется промежутком времени, в течение которого значение переходной функции h(t) достигает 95% от $h(t \to \infty)$, т.е. когда значение h(t) окажется в пределах от $0{,}95K \leq h(t) \leq 1{,}05K$ и в дальнейшем не выходит из них.

Для звеньев второго порядка время регулирования $t_р$ зависит не только от постоянной времени T, но и от параметра ξ. Минимальное значение $t_р$ имеет место при $\xi = 0{,}707$, при котором значения функции h(t) носят затухающий колебательный характер, но не выходят за пределы 1,05K.

При меньших значениях ξ характерным для колебательных переходных процессов является превышение кривой переходного процесса над своим установившимся значением.

Отношение максимальной величины превышения [$\Delta h_{max} = h_{max} - h(t \to \infty)$] к установившемуся значению $h(t \to \infty)$, выраженное в процентах, называется перерегулированием δh_{max} .

$$\delta h_{max} = \Delta h_{max} \cdot 100\% / h(t \to \infty) = [h_{max} - h(t \to \infty)] \cdot 100\% / h(t \to \infty)$$

Время регулирования t_p и перерегулирование δh_{max} относятся к показателям качества регулирования. Качество регулирования считается удовлетворительным, если $\delta h_{max} \leq (30 - 40)\%$.

Структура любой САУ определяется составом входящих в нее звеньев и способом их соединения. С помощью эквивалентных преобразований любую систему САУ можно привести к стандартному виду, свойства которой будут полностью определяться характером передаточной функции W(p).

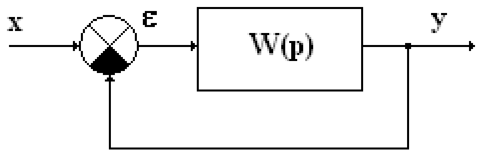


Рис. 1

На рис. 1 представлена структурная схема САУ, состоящая из одного динамического звена с передаточной функцией W(p), охваченного жесткой обратной связью с коэффициентом усиления K_{oc} цепи обратной связи, равным 1.

Передаточную функцию W(p), которая называется передаточной функцией САУ в разомкнутом состоянии, можно представить в виде произведения или суммы передаточных функций элементарных типовых звеньев.

Передаточная функция $W_з(p)$ замкнутой САУ определяется по следующей формуле:

$$W_з(p) = W(p)/[1 + K_{oc} \cdot W(p)].$$

Для САУ, представленной на рис. 1, $W_з(p) = W(p)/[1 + W(p)]$.

По виду W(p) все системы САУ делятся на статические и астатические.

САУ называется статической, если ее передаточная функция в разомкнутом состоянии не содержит множителей (1/p), соответствующих операции интегрирования, т.е.:

$$W(p) = K_o \cdot W_o(p). \quad (1)$$

Здесь: K_o – статический коэффициент усиления системы;

$W_o(p)$ – рациональная дробь, которая при $p \to 0$ стремится к 1.

Например, к статической системе САУ можно отнести систему, состоящую из апериодического звена, охваченного жесткой обратной связью:

$$W(p) = K/(T \cdot p + 1) = K \cdot [1/(T \cdot p + 1)] = K_o \cdot W_o(p)$$

Здесь: $K_o = K$; $W_o(p) = 1/(T \cdot p + 1)$.

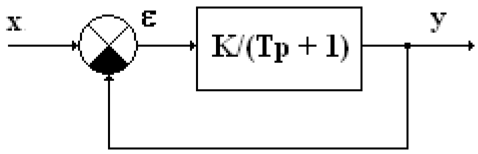


Рис. 2

Основное свойство статических систем наличие установившейся ошибки $\varepsilon_{уст} = x_o - y_{уст} \neq 0$ при $t \to \infty$.

В статических системах установившаяся ошибка системы может быть определена по формуле:

$$\varepsilon_{уст} = x_o/(1 + K_o) \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что с увеличением коэффициента усиления K_o (при x_o = const) статическая ошибка уменьшается, т.е. точность системы увеличивается. Однако увеличение коэффициента усиления приводит к увеличению перерегулирования и колебательности системы. Поэтому в статических системах САУ не всегда возможно получить требуемые качество переходного процесса и точность регулирования.

САУ называется астатической, если ее передаточная функция в разомкнутом состоянии содержит множитель $(1/p^s)$, т.е.:

$$W(p) = K_o \cdot W_o(p)/p^s, \qquad (3)$$

где s – порядок астатизма системы.

Например, к астатической системе САУ первого порядка можно отнести систему, состоящую из интегрирующего звена, охваченного жесткой обратной связью:

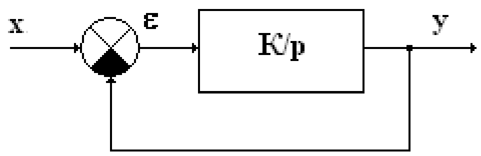


Рис. 3

$$W(p) = K/p = K \cdot (1/p) = K_o \cdot W_o(p)(1/p)$$

Здесь: $K_o = K$; $W_o(p) = 1$; $s = 1$.

В астатических системах установившаяся ошибка $\varepsilon_{уст}$ равна нулю при любом значении коэффициента K_o. Поэтому коэффициент K_o можно выбирать только исходя из требований к качеству переходного процесса.

Как следует из формулы (3), астатизм вводится в систему САУ путем последовательного включения одного или s интегрирующих звеньев. Например, астатическую систему САУ можно получить, если последовательно с инерционным звеном на рис. 2 включить интегрирующее звено:

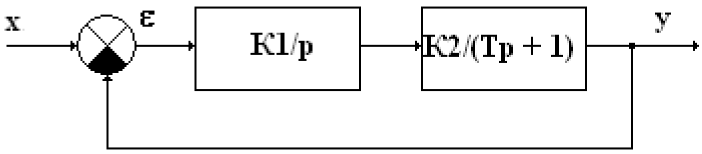


Рис. 4

Принимая во внимание, что передаточная функция системы, состоящей из последовательно включенных звеньев, равна произведению передаточных функций отдельных звеньев, составим формулу для передаточной функции разомкнутой системы САУ, представленной на рис. 4.

$$W(p) = (K1/p)\cdot[K2/(T\cdot p + 1)] = K1\cdot K2\cdot(1/p)\cdot[1/(T\cdot p + 1)].$$

Здесь: $K_o = K1\cdot K2$; $W_o(p) = 1/(T\cdot p + 1)$; $s = 1$.

Передаточная функция для ошибки равна:

$$S(p) = \varepsilon/x = (T\cdot p + 1)\cdot p/[(T\cdot p + 1)\cdot p + K_o] \qquad (4)$$

При постоянном сигнале $x = x_o = \mathrm{const}$ установившееся значение ошибки находим по формуле $\varepsilon_{уст} = S(p = 0)\cdot x_o$. Из формулы (4) следует, что $S(p = 0) = 0$, а, следовательно, и ошибка $\varepsilon_{уст} = 0$ при любых постоянных значениях $x_o \neq 0$ и $K_o \neq 0$.

Лекция 3

Устойчивость линейных систем САУ

САУ называется устойчивой, если с течением времени выходная величина стремится к установившемуся значению при постоянном значении входного сигнала. Линейная САУ называется неустойчивой, если выходная величина неограниченно возрастает с течением времени.

Динамика линейных САУ, как отмечалось нами ранее, описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными вещественными коэффициентами:

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{(n-1)} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_0 \cdot y = b_m \cdot x^{(m)} + b_{(m-1)} \cdot x^{(m-1)} + \cdots + b_0 \cdot x \qquad (1)$$

Равенство (1) выводится из уравнений отдельных звеньев, образующих систему САУ. Параметры же переходного процесса в САУ определяются решением однородного дифференциального уравнения, получаемого путем приравнивания левой части равенства (1) нулю:

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{(n-1)} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_0 \cdot y = 0 \qquad (2)$$

Решение данного уравнения имеет вид: $y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{p_i t}$, (3)

где C_i – постоянные интегрирования;

p_i – корни характеристического уравнения, получаемого путем замены в уравнении (2) знака дифференцирования на оператор Лапласа p:

$$a_n \cdot p^{(n)} + a_{(n-1)} \cdot p^{(n-1)} + \cdots + a_0 = 0 \qquad (4)$$

Как видим, выражение (3) представляет собой сумму экспоненциальных функций. Система будет устойчивой, если выполняется условие:

$$y(t) \to 0, \text{ при } t \to \infty.$$

Это условие будет выполнено только в одном случае, если все экспоненты в правой части равенства (3) будут стремиться к нулю. А любая экспоненциальная функция от времени будет стремиться к нулю, если показатель ее степени будет отрицательным числом. Отсюда можно сделать следующие выводы. Система САУ будет устойчива, если:

1) все корни p_i характеристического уравнения являются действительными отрицательными числами ($p_i < 0$);
2) если имеется пара комплексных и сопряженных корней типа $p_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta$, то в равенство (3) входят слагаемые:

$$C_i e^{(\alpha + j\beta)t} + C_{i+1} e^{(\alpha - j\beta)t} = C_i e^{\alpha t} \cdot e^{j\beta t} + C_{i+1} e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t} =$$

$$= C_i e^{\alpha t} \cdot [\cos(\beta t) + j\sin(\beta t)] + C_{i+1} e^{\alpha t} \cdot [\cos(\beta t) - j\sin(\beta t)].$$

Поэтому при $\alpha < 0$ и $C_i = C_{i+1}$ в график функции y(t) данные слагаемые входят как затухающие по амплитуде косинусоидальные составляющие.

Следовательно, необходимым и достаточным условием устойчивости САУ является наличие отрицательного знака действительной части корней характеристического уравнения. Впервые это условие для механических систем сформулировал и доказал русский ученый А.М. Ляпунов.

При наличии, хотя бы одного корня с положительной действительной частью график функции y(t) будет представлять собой возрастающую экспоненту или косинусоиду, и процесс регулирования будет неустойчивым.

Если хотя бы один из корней ($p_i = 0$), то функция y(t) будет содержать постоянную составляющую $C_i e^{p_i t} = C_i$, что соответствует нахождению САУ на грани устойчивости. В аналогичном состоянии будет находиться система в случае наличия чисто мнимых корней характеристического уравнения.

Рассмотренное условие устойчивости относится к линейным САУ. Но практически все реальные САУ являются нелинейными и только приближенно многие из них можно описать линейными уравнениями. Так, например, Ляпунов доказал, что по устойчивости линеаризованной системы можно судить об устойчивости исходной нелинейной системы.

Однако, для того, чтобы выяснить, устойчива система или нет, не обязательно решать дифференциальное уравнение, что весьма трудоемко при порядке уравнения более 3. Достаточно определить знаки действительных частей корней характеристического уравнения по другим критериям.

С этой целью разработаны различные алгебраические критерии устойчивости систем САУ, в основу которых положен следующий принцип, Поскольку корни p_i характеристического уравнения определяются коэффициентами a_i , то по знакам последних можно приближенно оценить устойчивость систем.

Так алгебраические критерии, предложенные Раусом, Гурвицем и Неймарком, позволяют оценить устойчивость системы с помощью алгебраических операций над коэффициентами характеристического уравнения, в случае, если все они имеют положительные знаки.

Ограничимся с вами рассмотрением критерия устойчивости Гурвица.

По характеристическому уравнению (4) составляется главный определитель n-го порядка Δ_n, для чего по его главной диагонали слева на право выписываются коэффициенты в порядке убывания их индексов, начиная с a_{n-1}. В строках левее главной диагонали выписываются коэффициенты с последовательно убывающими индексами, а правее – с возрастающими. Места коэффициентов с индексами больше n и меньше нуля заполняются нулями.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Из главного определителя последовательным отчеркиванием m строк и m столбцов, начиная с диагонального элемента a_{n-1} с индексом $(n-1)$, находятся определители (диагональные миноры):

$$\Delta_1 = |\grave{a}_{n-1}|; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \ldots; \ \Delta m = \ldots \qquad (6)$$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и все определители от Δ_1 до Δ_n были положительны: $\Delta_1 > 0$; $\Delta_2 > 0$; $\Delta_3 > 0$; … ; $\Delta_m > 0$; …

В частности, для системы третьего порядка критерий Гурвица принимает более простой вид: $a_3 > 0$; $a_2 > 0$; $a_1 > 0$; $a_0 > 0$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a1 \cdot a2 - a0 \cdot a3 > 0. \qquad (7)$$

Наряду с алгебраическими методами оценки устойчивости систем САУ часто применяют частотные методы устойчивости. В практике наиболее широкое применение получил критерий устойчивости Михайлова, основанный на анализе левой части характеристического уравнения (4) замкнутой системы САУ после замены в нем оператора Лапласа p на комплексную переменную jω:

$$V(j\omega) = a_n \cdot (j\omega)^{(n)} + a_{(n-1)} \cdot (j\omega)^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0. \qquad (8)$$

Многочлен V(jω) представляет собой вектор в комплексной плоскости, значение которого определяется величинами действительной N(ω) и мнимой M(jω) составляющих: V(jω) = N(ω) + jM(ω).

При изменении частоты от нуля до бесконечности вершина вектора V(jω) вычерчивает на комплексной плоскости кривую, которая называется годографом или кривой Михайлова. Для построения такого годографа достаточно определить частоты, при которых происходит его пересечение с вещественной и мнимой осями координат.

Частоты ω_m, при которых годограф пересекается с вещественной осью, определяются из уравнения M(ω) = 0. После чего найденные частоты подставляются в выражение для действительной части $N(\omega_m)$.

Частоты ω_n, при которых годограф пересекается с мнимой осью, определяются из уравнения N(ω) = 0. После чего найденные частоты подставляются в выражение для мнимой части $M(\omega_n)$.

Например, для характеристического уравнения третьего порядка (n = 3) многочлен (8) V(jω) принимает следующий вид:

$$V(j\omega) = a_3\cdot(j\omega)^3 + a_2\cdot(j\omega)^2 + a_1\cdot(j\omega) + a_0 =$$

$$= (a_0 - a_2\cdot\omega^2) + j\omega\cdot(a_1 - a_3\cdot\omega^2), \qquad (9)$$

Здесь: $N(\omega) = a_0 - a_2\cdot\omega^2$; $M(\omega) = \omega\cdot(a_1 - a_3\cdot\omega^2)$.

Приравнивая к нулю поочередно действительную N(ω) и мнимую M(ω) части уравнения (9), можно найти в аналитической форме значения ω, N(ω) и M(ω):

$$M(\omega) = 0; \quad \left\{ \begin{matrix} \omega_1 = 0; & N(\omega_1) = a_0; \\ \omega_2 = \sqrt{a_1 / a_3}; & N(\omega_2) = a_0 - a_2 \cdot a_1 / a_3. \end{matrix} \right\};$$

$$N(\omega) = 0; \quad \left\{ \omega_3 = \sqrt{a_0 / a_2}; \quad M(\omega_3) = (a_1 - a_3 \cdot a_0 / a_2) \cdot \sqrt{a_o / a_2}. \right\}. \qquad (10)$$

Подставив численные значения коэффициентов a0, a1, a2 и a3 в выражения (10), можно построить на комплексной плоскости годограф Михайлова, по внешнему виду которого определяют устойчивость САУ следующим образом.

САУ будет устойчивой, если годограф Михайлова при изменении частоты от нуля до бесконечности, начиная с точки $M(0) = a_0$, лежащей на вещественной положительной полуоси, охватывает начало координат и последовательно проходит в направлении против часовой стрелки количество квадрантов, равное степени n характеристического уравнения, нигде не обращаясь в нуль и уходя в последнем квадранте в бесконечность.

Если кривая Михайлова проходит через начало координат, то САУ находится на границе устойчивости.

Есть еще ряд частотных критериев устойчивости САУ, к которым мы возможно вернемся после знакомства с частотными характеристиками САУ.

Лекция 4

Частотные характеристики систем

Частотные характеристики САУ характеризуют реакцию систем на синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме.

К частотным характеристикам относятся:

АФЧХ - амплитудно-фазовая частотная характеристика;

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;

ФЧХ – фазовая частотная характеристика;

ЛАЧХ – логарифмическая АЧХ;

ЛФЧХ – логарифмическая ФЧХ.

АФЧХ представляет собой частотную передаточную функцию W(jω), которая получается путем замены в передаточной функции W(p) оператора Лапласа p на комплексную переменную jω. АФЧХ представляет собой вектор на комплексной плоскости в полярных координатах H(ω) и φ(ω), которые являются соответственно АЧХ и ФЧХ:

$$W(j\omega) = H(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)} = N(\omega) + jM(\omega). \qquad (1)$$

Здесь: H(ω) – АЧХ, которая представляет собой зависимость значения модуля вектора АФЧХ от круговой частоты;

φ(ω) – ФЧХ, которая представляет собой зависимость аргумента вектора АФЧХ от круговой частоты;

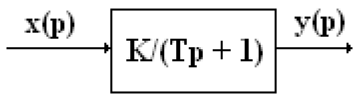
$N(\omega) = H(\omega)\cdot\cos\varphi(\omega)$ – проекция вектора АФЧХ на действительную ось комплексной плоскости;

$M(\omega) = H(\omega)\cdot\sin\varphi(\omega)$ – проекция вектора АФЧХ на мнимую ось комплексной плоскости;

При изменении частоты ω от нуля до бесконечности АФЧХ представляет собой кривую в комплексной плоскости, называемую годографом.

Рассмотрим частотные характеристики отдельных типовых звеньев.

Апериодическое звено.



Основные формулы и соотношения

$$W(j\omega) = K/(1 + j\omega T) = \frac{K\cdot e^{-jarctg(\omega T)}}{\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}} = \frac{K(1-j\omega\cdot T)}{1+(\omega\cdot T)^2}.$$

$$H(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\,\mathrm{arctg}(\omega T);$$

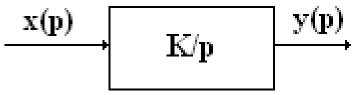
$$N(\omega) = K/[1 + (\omega\cdot T)^2];\ \ M(\omega) = -K\cdot \omega T/[1 + (\omega\cdot T)^2]. \qquad (2)$$

$$\varphi(0) = 0^o;\ \ H(0) = K;\ \ N(0) = K;\ \ M(0) = 0;$$

$$\varphi(\omega = 1/T) = -45^o;\ \ H(T) = K/\sqrt{2};\ \ N(T) = K/2;\ M(T) = -K/2;$$

$$\varphi(\omega \to \infty) = -90^o;\ H(\infty) = N(\infty) = M(\infty) = 0.$$

Интегрирующее звено.



Основные формулы и соотношения

$$W(j\omega) = K/j\omega = K\cdot e^{-j90^o}/\omega;$$

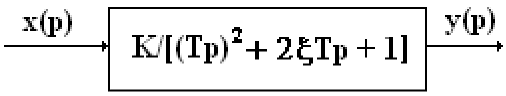
$$H(\omega) = K/\omega;\quad \varphi(\omega) = -90^o;$$

$$N(\omega) = 0;\quad M(\omega) = -K/\omega; \qquad (3)$$

$$\varphi(0) = -90^o;\ \ H(0) = \infty;\ \ N(0) = 0;\ \ M(0) = -\infty;$$

$$\varphi(\omega \to \infty) = -90^o;\ H(\infty) = N(\infty) = M(\infty) = 0.$$

Колебательное звено.



Основные формулы и соотношения

$$W(j\omega) = K/[-(\omega\cdot T)^2 + j2\xi\cdot T\cdot\omega + 1] = \frac{K}{[1-(\omega\cdot T)^2] + j2\xi\cdot T\cdot\omega} =$$

$$= \frac{K\cdot e^{-jarctg\{2\xi T\omega/[1-(\omega T)^2]\}}}{\sqrt{[1-(\omega\cdot T)^2]^2 + 4(\xi\cdot T\cdot\omega)^2}} = \frac{K\{[1-(\omega\cdot T)^2] - j2\xi\cdot T\cdot\omega\}}{[1-(\omega\cdot T)^2]^2 + 4(\xi\cdot T\cdot\omega)^2};$$

$$H(\omega) = \frac{K}{\sqrt{[1-(\omega\cdot T)^2]^2 + 4(\xi\cdot T\cdot\omega)^2}};\ \ \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\{2\xi\cdot T\cdot\omega/[1-(\omega\cdot T)^2]\};$$

$$N(\omega) = K\cdot[1-(\omega\cdot T)^2]/\{[1-(\omega\cdot T)^2]^2 + 4(\xi\cdot T\cdot\omega)^2\};$$

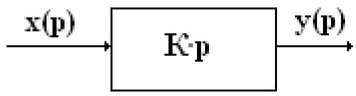
$$M(\omega) = -2K\cdot\xi\cdot T\cdot\omega/\{[1-(\omega\cdot T)^2]^2 + 4(\xi\cdot T\cdot\omega)^2\}; \qquad (4)$$

$$\varphi(0) = 0^o;\ \ H(0) = K;\ \ N(0) = K;\ \ M(0) = 0;$$

$$\varphi(\omega = 1/T) = -\,90^o;\ \ H(T) = K/(2\xi);\ \ N(T) = 0;\ M(T) = -\,K/(2\xi);$$

$$\varphi(\omega \to \infty) = -\,180^o;\ H(\infty) = N(\infty) = M(\infty) = 0.$$

Идеальное дифференцирующее звено.



Основные формулы и соотношения

$$W(j\omega) = jK\cdot\omega = K\cdot\omega\cdot e^{\,j90^o};$$

$$H(\omega) = K\cdot\omega;\ \ \varphi(\omega) = 90^o;$$

$$N(\omega) = 0;\ \ M(\omega) = K\cdot\omega; \qquad (5)$$

$$\varphi(0) = 90^o;\ \ H(0) = 0;\ \ N(0) = 0;\ \ M(0) = 0;$$

$$\varphi(\omega \to \infty) = 90^o;\ H(\infty) = M(\infty) = \infty;\ \ N(\infty) = 0.$$

Кроме перечисленных ранее частотных характеристик при анализе свойств САУ широко используются логарифмические частотные характеристики, к которым относятся:

ЛАЧХ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика;

ЛФЧХ – логарифмическая фазовая частотная характеристика.

ЛАЧХ представляет собой график зависимости $L(\omega) = 20\lg[H(\omega)]$ от десятичного логарифма частоты $\lg(\omega)$. При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе, а по оси ординат $L(\omega)$. Единицей $L(\omega)$ является децибел (дБ), равный одной десятой Бела. $L(\omega) = 20$ означает, что на данной частоте при прохождении сигнала через звено его амплитуда увеличивается в 10 раз.

ЛФЧХ – это график зависимости частотной функции $\varphi(\omega)$ от десятичного логарифма частоты $\lg(\omega)$. При его построении по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе, по оси ординат откладывают $\varphi(\omega)$ в градусах или радианах.

В обоих случаях за единицу масштаба по оси абсцисс принимается декада – это частотный интервал, соответствующий изменению частоты в 10 раз. Ось ординат при построении этих характеристик проводят часто через точку ($\omega = 1$) которая соответствует началу координат $\lg(1) = 0$.

На практике часто кривую линию ЛАЧХ заменяют приближенным графиком, состоящим из нескольких пересекающихся прямых отрезков (асимптот), к которым стремится логарифмическая функция при определенных значениях частот, называемых сопрягающими частотами.

Рассмотрим аналитические выражения для ЛАЧХ и правила построения асимптотических ЛАЧХ для ряда характерных типовых звеньев.

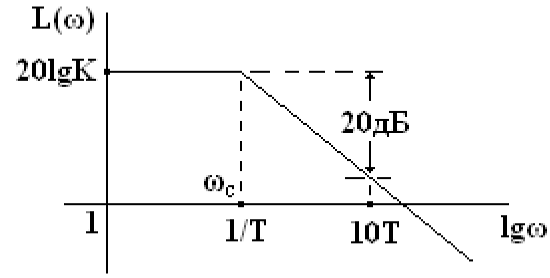
Апериодическое звено. Формула ЛАЧХ согласно (2) принимает следующий вид:

$$L(\omega) = 20\lg[H(\omega)] = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1+(\omega\cdot\grave{O})^2}\ . \qquad (6)$$

В области низких частот $\omega < \omega_c = 1/T$, меньших по значению, чем сопрягающая частота ω_c, $L(\omega) = 20\lg K$. В этой области частот кривая ЛАЧХ заменяется прямой линией, параллельной оси абсцисс и проходящей на уровне 20lgК.

В области высоких частот $\omega > \omega_c$ $L(\omega) = 20\lg K - 20\lg(\omega\cdot T)$. В этой области частот кривая ЛАЧХ заменяется прямой линией, имеющей наклон минус 20 дБ на декаду.

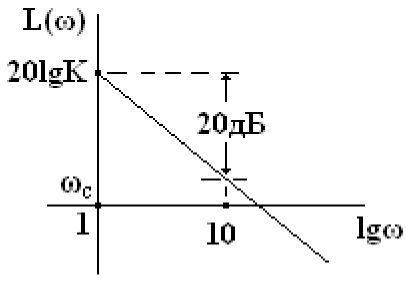
Обе прямые или иначе асимптоты пересекаются в точке, соответствующей сопрягающей частоте $\omega_c = 1/T$.



Интегрирующее звено. Формула ЛАЧХ согласно (3) принимает следующий вид:

$$L(\omega) = 20\lg[H(\omega)] = 20\lg K - 20\lg\omega. \qquad (7)$$

Так как при частоте $\omega = 1$ согласно выражению (7) функция $L(\omega) = 20\lg K$, то естественно асимптота в виде прямой линии с отрицательным наклоном в 20 дБ должна проходить через эту точку при $\omega = \omega_c = 1$.



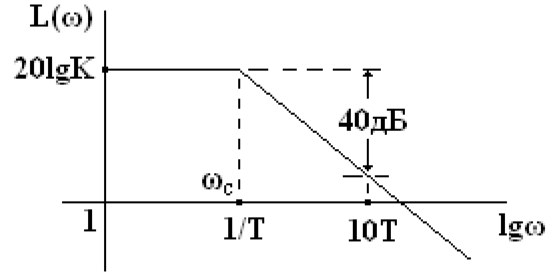
Колебательное звено. Формула ЛАЧХ согласно (4) принимает следующий вид:

$$L(\omega) = 20\lg[H(\omega)] = 20\lg K - 20\lg\sqrt{[1-(\omega\cdot T)^2]^2 + 4(\xi\cdot T\cdot\omega)^2}\ . \qquad (8)$$

В области низких частот $\omega < \omega_c = 1/T$, меньших по значению, чем сопрягающая частота ω_c, $L(\omega) = 20\lg K$, а при значениях частоты $\omega > \omega_c$ можно под корнем пренебречь единицей и слагаемым $4(\xi\cdot\omega\cdot T)^2$. В результате получаем уравнение асимптотической ЛАЧХ:

$$L(\omega) = \begin{Bmatrix} 20\lg K \quad \text{ïðè}\ \omega < 1/T; \\ 20\lg K - 40\lg(\omega\cdot T) \end{Bmatrix}. \qquad (9)$$

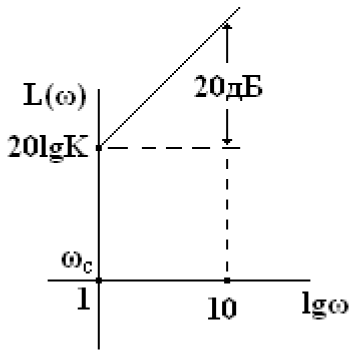
Согласно уравнению (9) асимптотическая ЛАЧХ при $\omega < \omega_c = 1/T$, где ω_c – сопрягающая частота, параллельна оси частот, а при ω_c имеет минус 40 децибел на декаду.



Идеальное дифференцирующее звено. Формула ЛАЧХ согласно (5) принимает следующий вид:

$$L(\omega) = 20\lg[H(\omega)] = 20\lg K + 20\lg\omega. \qquad (10)$$

По аналогии с интегрирующим звеном асимптотическая ЛАЧХ представляет собой прямую, проходящую через точку 20lgK при $\omega_c = 1$ с наклоном плюс 20дб/дек.



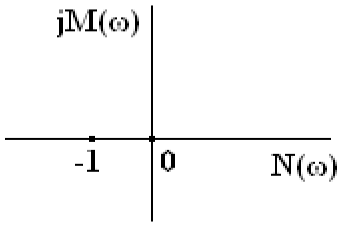
После того, как мы познакомились с частотными характеристиками САУ и правилами их построения, можно вернуться к рассмотрению других частотных критериев устойчивости систем САУ.

Частотный критерий Найквиста. Данный критерий предложен в 1932 году американским ученым Г. Найквистом и позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по АФЧХ разомкнутой системы. Для того, чтобы замкнутая САУ была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы ее

АФЧХ W(jω) при разомкнутой цепи обратной связи не охватывала в комплексной плоскости точку с координатами (- 1; j0).

Если разомкнутая система статическая (не имеет интегрирующих звеньев), то при ω = 0 ее АФЧХ начинается на вещественной оси в точке N(0) = H(0) = K, где К – коэффициент усиления разомкнутой системы. Заканчивается АФЧХ при ω = ∞ вначале координат.

Если система является астатической (имеет интегрирующие звенья), то ее АФЧХ начинается при ω = 0 в бесконечности, поскольку в знаменателе функции W(jω) имеется множитель $(j\omega)^r$, где r – порядок астатизма. Соответственно, при r = 1 и ω = 0 характеристика W(jω) уходит в бесконечность вдоль отрицательной мнимой полуоси, при r = 2 – вдоль отрицательной действительной полуоси, а при r = 3 – вдоль положительной мнимой полуоси.

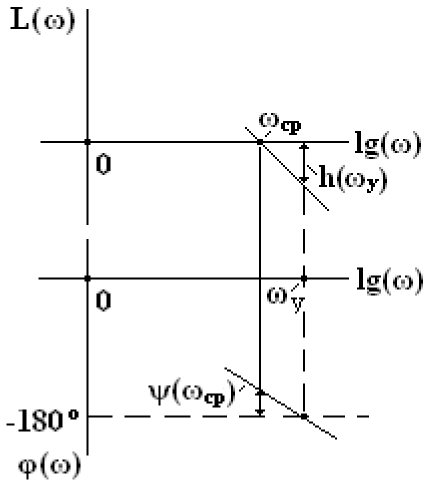


Логарифмический критерий Найквиста. Для оценки устойчивости САУ по данному критерию используются графики ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы САУ. Система САУ считается устойчивой, если при $\varphi(\omega) = -180^o$ кривая ЛАЧХ находится в отрицательной области: $L(\omega) = 20\lg[H(\omega)] < 0$, т.е. ЛАЧХ должна пересечь ось абсцисс раньше, чем фаза, спадая, перейдет за значение -180^o. Систему САУ можно считать также устойчивой, если на частоте среза $\omega_{ср}$, на которой $L(\omega_{ср}) = 20\lg[H(\omega_{ср})] = 0$, значение аргумента $\varphi(\omega_{ср}) > -180^o$.

При оценке устойчивости САУ необходимо определить запас устойчивости, т.е. степень удаленности системы от границы устойчивости. В качестве меры запаса устойчивости используется запас устойчивости по амплитуде h(ω) и запас устойчивости по фазе $\psi(\omega_{ср})$.

Запас устойчивости САУ по амплитуде h(ω) определяется на частоте $\omega_у$, при которой $\varphi(\omega_у) = -180^o$: $h(\omega_у) = -L(\omega_у)$ и показывает допустимое увеличение ЛАЧХ , при котором система окажется на грани устойчивости. Запас по амплитуде представляет собой запас по коэффициенту усиления К разомкнутой системы по отношению его к критическому по устойчивости значению.

Запас устойчивости по фазе $\psi(\omega_{ср})$ определяется на частоте среза $\omega_{ср}$, как: $\psi(\omega_{ср}) = \varphi(\omega_{ср}) + 180^o$ и показывает, на какую величину должно возрасти запаздывание по фазе в системе на частоте среза $\omega_{ср}$, чтобы система оказалась на грани устойчивости.



При проектировании САУ рекомендуется выбирать $\psi(\omega_{ср}) \geq 30^o$, а $h(\omega_у) \geq 6$ дБ, что соответствует примерно двойному запасу коэффициента усиления К по устойчивости.

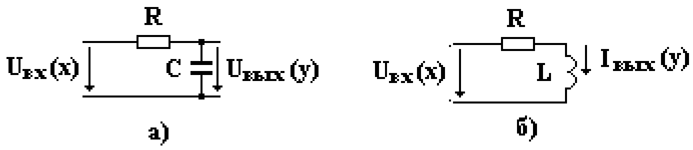
Лекция 5

Электрические модели типовых динамических звеньев

Каждое из рассмотренных нами динамических звеньев может быть представлено в виде электрического, механического или электро-механического аналогов, процессы в которых математически описываются соответствующим одним и тем же дифференциальным уравнением.

Рассмотрим электрические модели наиболее часто встречающихся типовых звеньев.

Апериодическое звено. Апериодическими звеньями являются RC и RL цепи, входные и выходные величины которых связаны соответствующей передаточной функцией.



Для схемы а) напряжение на выходе в комплексном виде равно:

$$U_{вых}(j\omega) = I(j\omega)\cdot x_c/j = I(j\omega)\cdot 1/(j\omega C);$$

$$I(j\omega) = U_{вх}(j\omega)/[R + 1/(j\omega C)] = j\omega C\cdot U_{вх}(j\omega)/(j\omega RC + 1);$$

$$U_{вых}(j\omega) = U_{вх}(j\omega)/(j\omega RC + 1). \qquad (1)$$

Представим уравнение (1) в операторной форме, заменив комплексную переменную jω на оператор Лапласа p:

$$U_{вых}(p) = U_{вх}(p)/(pRC + 1) = U_{вх}(p)/(pT + 1). \qquad (2)$$

Как следует из уравнения (2), передаточная функция схемы а) соответствует передаточной функции типового апериодического звена:

$$W(p) = y/x = U_{вых}(p)/U_{вх}(p) = 1/(pT + 1), \text{ где} \qquad (3)$$

коэффициент усиления К равен 1, а постоянная времени Т равна произведению RC.

Для схемы б) ток на выходе в комплексном виде равен:

$$I_{вых}(j\omega) = U_{вх}(j\omega)/(R + jx_L) = U_{вх}(j\omega)/(R + j\omega L);$$

$$I_{вых}(j\omega) = U_{вх}(j\omega)\cdot(1/R)/[j\omega\cdot(L/R) + 1]. \qquad (4)$$

Заменяя в уравнении (4) комплексную переменную jω на оператор Лапласа p, получим уравнение схемы б) в операторной форме:

$$I_{вых}(p) = U_{вх}(p)\cdot(1/R)/[p\cdot(L/R) +1)] = U_{вх}(p)\cdot K/(pT +1). \quad (5)$$

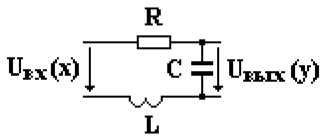
Из выражения (5) следует, что передаточная функция данной схемы устанавливает связь между выходным током и входным напряжением:

$$W(p) = y/x = I_{вых}(p)/U_{вх}(p) = K/(pT +1), \text{ где} \quad (6)$$

коэффициент усиления К равен 1/R, а постоянная времени Т равна отношению L/R.

,25моделировать апериодические звенья с требуемыми характеристиками.

Колебательное звено. Оно представляет собой последовательное соединение RLC элементов:



Представим напряжение на выходе колебательного звена сразу в операторной форме:

$$U_{вых}(p) = I(p)\cdot 1/pC = U_{вх}(p)\cdot(1/pC)/[R + pL + (1/pC)] =$$

$$= U_{вх}(p)/(p^2CL + pRC + 1) = U_{вх}(p)/(p^2T^2 + p2\xi T + 1), \quad (7)$$

где $T^2 = CL$; $2\xi T = CR$.

Тогда передаточная функция колебательного звена:

$$W(p) = y/x = U_{вых}(p)/U_{вх}(p) = 1/(\, p^2T^2 + p2\xi T + 1), \quad (8)$$

где коэффициент усиления равен К = 1.

Коэффициент демпфирования ξ можно найти из следующих соотношений:

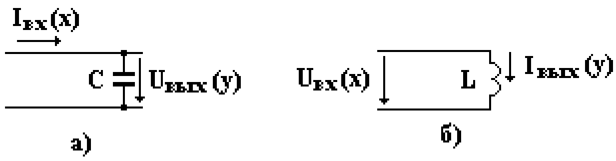
$$T = \sqrt{CL}; \;\; 2\xi\sqrt{CL} = CR,$$

$$\text{откуда } \xi = CR/(2\sqrt{CL}) = 0{,}5\cdot R\cdot C/\sqrt{(C\cdot L)}. \quad (9)$$

Для случая отсутствия активных потерь в колебательном контуре (R = 0) имеем согласно выражению (9): $\xi = 0$, т.е. в контуре имеют место незатухающие колебания. Колебательное звено превращается в апериодическое звено второго порядка, когда $\xi = 1$, т.е. при условии, что $0{,}5\cdot R\cdot C = \sqrt{(C\cdot L)}$ или $R^2\cdot C = 4L$.

Интегрирующее звено.

Идеальными интегрирующими звеньями являются цепи с элементами C и L. В схеме а) входной величиной x является ток заряда конденсатора, а напряжение на нем – выходной величиной y. В схеме б) входной величиной x является напряжение на индуктивности, а ток – выходной величиной y.



Представим напряжение на выходе схемы а) в операторной форме:

$$U_{вых}(p) = I_{вх}(p)\cdot 1/(pC). \qquad (10)$$

Следовательно, передаточная функция данного звена равна:

$$W(p) = y/x = U_{вых}(p)/I_{вх}(p) = (1/C)/p = К/p, \qquad (11)$$

где К = 1/C.

Отличительным свойством интегрирующего звена является то, что после прекращения действия входного сигнала выходной сигнал звена остается на том уровне, на котором был в момент исчезновения входного сигнала. Иначе говоря, интегрирующее звено обладает свойством «запоминать» последнее значение выходной величины, благодаря чему достигается астатизм автоматической системы. Другой особенностью интегрирующего звена является то, что скорость изменения выходной величины y прямопропорциональна значению входной величины x.

В операторной форме уравнение интегрирующего звена по схеме б):

$$I_{вых}(p) = U_{вх}(p)/(pL). \qquad (12)$$

Соответственно, передаточная функция звена равна:

$$W(p) = y/x = I_{вых}(p)/U_{вх}(p) = (1/L)/p = К/p, \qquad (13)$$

где К = 1/L.

Дифференцирующее звено. Идеальными дифференцирующими звеньями являются цепи с конденсатором и элементом индуктивности. Входной величиной x в схеме а) является напряжение, а ток через конденсатор - выходной величиной y. В схеме б) входной величиной x является входной ток, а напряжение на индуктивности – выходной величиной y.

Представим выходной ток схемы а) в операторной форме:

$$I_{вых}(p) = U_{вх}(p)·pC. \qquad (14)$$

Соответственно, передаточная функция данного звена равна:

$$W(p) = y/x = I_{вых}(p)/U_{вх}(p) = pC = Кp, \qquad (15)$$

где К = С.

Особенностью дифференцирующего звена является то, что значение выходной величины y прямопропорциональна скорости изменения входной величины x.

В операторной форме уравнение дифференцирующего звена по схеме б):

$$U_{вых}(p) = I_{вх}(p)·pL. \qquad (16)$$

Соответственно, передаточная функция звена равна:

$$W(p) = y/x = U_{вых}(p)/I_{вх}(p) = pL = К·p, \qquad (17)$$

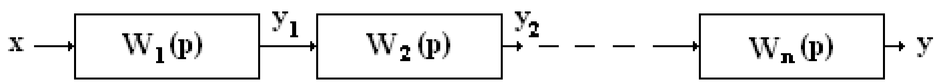
где К = L.

ЛЕКЦИЯ 6

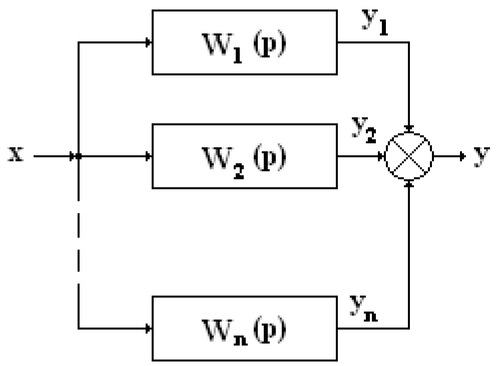
Передаточные функции

Системы САУ в большинстве случаев являются замкнутыми системами. Однако при их анализе (например, устойчивости) и проектировании часто предварительно рассматривается разомкнутая цепь звеньев, которая затем замыкается.

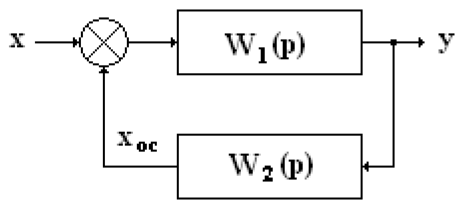
Различают последовательное, параллельное и параллельное с обратной связью соединение звеньев.



а)



б)



в)

Последовательным соединением звеньев называют такое соединение, когда выходная величина предыдущего звена является входной величиной последующего звена (схема а), т.е. $y_{m-1} = x_m$.

Передаточная функция разомкнутой цепи n последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев:

$$W(p) = y(p)/x(p) = W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot\ldots\cdot W_n(p). \qquad (1)$$

Полагая $p = j\omega$, перейдем от передаточных функций в операторном виде к частотным характеристикам.

$$\text{АФЧХ} = W(j\omega) = W_1(j\omega)\cdot W_2(j\omega)\cdot\ldots\cdot W_n(j\omega) = H(\omega)\cdot\exp[\varphi(\omega)] =$$

$$= H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)\cdot\ldots\cdot H_n(\omega)\cdot\exp j[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \ldots + \varphi_n(\omega)]. \qquad (2)$$

$$\text{АЧХ} = H(\omega) = H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)\cdot\ldots\cdot H_n(\omega). \qquad (3)$$

$$\text{ФЧХ} = \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \ldots + \varphi_n(\omega). \qquad (4)$$

$$\text{ЛАЧХ} = L(\omega) = 20\lg H(\omega) = 20\sum_{i=1}^{n}\lg H_i(\omega). \qquad (5)$$

Таким образом, при последовательном соединении звеньев амплитудно-частотные характеристики перемножаются , а логарифмические амплитудно-частотные и фазовые частотные характеристики складываются.

Рассмотрим получение асимптотической ЛАЧХ разомкнутой цепи при последовательном соединении звеньев на следующем примере.

Пусть передаточная функция разомкнутой цепи описывается следующей формулой:

$$W(p) = \frac{k\cdot(T_1\cdot p+1)\cdot(T_2\cdot p+1)}{p\cdot(T_3\cdot p+1)\cdot(T_4^2\cdot p^2+2\xi T_4\cdot p+1)\cdot(T_5\cdot p+1)}. \qquad (6)$$

При этом коэффициент демпфирования ξ принимаем $0{,}5 < \xi < 1$ (при таких значениях ξ можно не учитывать «горб» АЧХ колебательного звена).

Асимптотическую ЛАЧХ можно построить непосредственно по передаточной функции. При этом каждому сомножителю $(Tp + 1)$ в знаменателе соответствует точка излома характеристики при $\omega = 1/T$ с последующим наклоном минус 20 дБ/декаду, а каждому сомножителю такого же типа в числителе соответствует точка излома также при $\omega = 1/T$, но с последующим наклоном плюс 20дБ/декаду. Сомножителю $(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)$ в знаменателе соответствует излом характеристики при $\omega = 1/T$ с наклоном минус 40 дБ/декаду.

Методика построения асимптотической ЛАЧХ сводится к следующему:

1) определяем сопрягающие частоты типовых звеньев в порядке возрастания. Так, например, для случая T1 > T3 > T4 > T2 > T5:

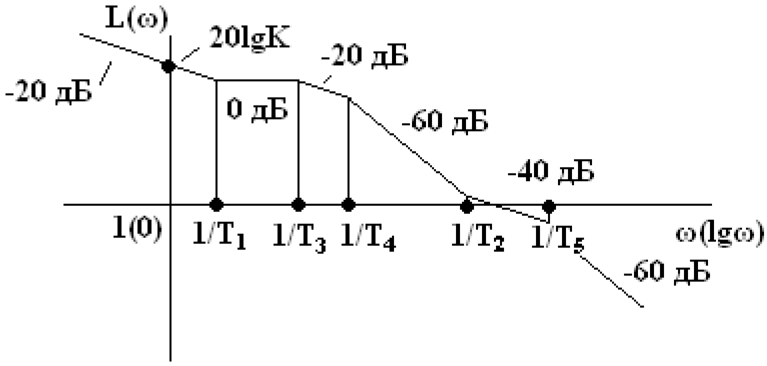
$$\omega_1 = 1/T_1;\ \ \omega_2 = 1/T_3;\ \ \omega_3 = 1/T_4;\ \ \omega_4 = 1/T_2;\ \ \omega5 = 1/T_5;$$

2) вычисляем на частоте $\omega = 1$ ординату $L(1) = 20\lg K$, где К – общий коэффициент усиления разомкнутой системы. Через полученную точку проводим низкочастотную асимптоту ЛАЧХ, представляющую собой прямую с наклоном минус $20\cdot m$ дБ/декаду, где m – число интегрирующих звеньев (в нашем примере согласно формуле (6) m = 1).

3) изменяем наклон асимптот ЛАЧХ на сопрягающих частотах по отношению с наклоном, который имела ЛАЧХ до рассматриваемой частоты.

Фазовая частотная характеристика определяется по выражению:

$$\varphi(\omega) = -90^o + \operatorname{arctg}(\omega T_1) + \operatorname{arctg}(\omega T_2) - \operatorname{arctg}(\omega T_3) - \operatorname{arctg}\frac{2\xi T_4\omega}{1-T_4^2\omega^2} - \operatorname{arctg}(\omega T_5)$$



Параллельным соединением звеньев называется такое соединение, когда на входы всех звеньев подается одна и та же величина, а выходные сигналы суммируются (схема б). Если соединяются n звеньев, то входной сигнал равен: $x = x_1 = x_2 = \ldots x_i = \ldots = x_n$, а выходной сигнал $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Переходя к операторной форме представления выходной функции, получим:

$$y(p) = x(p)\cdot\sum_{i=1}^{n} W_i(p),$$

$$\text{откуда: } W(p) = y(p)/x(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p). \qquad (7)$$

Таким образом, при параллельном соединении звеньев передаточные функции каждого звена суммируются.

Так как передаточная функция W(p) есть ничто иное, как изображение весовой функции, то весовая функция g(t), а, следовательно, и переходная функция h(t) разомкнутой цепи, состоящей из параллельно соединенных n звеньев, равны сумме соответственно весовых и передаточных функций отдельных звеньев:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t); \; h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t). \qquad (8)$$

При параллельном соединении звеньев с обратной связью (схема «в» замкнутой системы САУ) обратная связь может быть положительной, если сигнал обратной связи x_{oc} складывается с входным сигналом x, или отрицательной, если сигнал обратной связи x_{oc} вычитается из x.

При отрицательной обратной связи схема описывается следующим уравнением:

$$y(p) = W_1(p)\cdot[x(p) - x_{oc}(p)]. \qquad (9)$$

Вместе с тем сигнал обратной связи x_{oc} определяется в соответствии с выражением:

$$x_{oc}(p) = W_2(p)\cdot y(p). \qquad (10)$$

Подставляя значение хос из формулы (10) в уравнение (9), получим:

$$y(p) = W_1(p) \cdot [x(p) - W_2(p) \cdot y(p)] \quad (11)$$

Решим уравнение (11) относительно y(p):

$$y(p) \cdot [1 + W_1(p) \cdot W_2(p)] = W_1(p) \cdot x(p). \quad (12)$$

Отсюда:

$$y(p) = W_1(p) \cdot x(p)/[1 + W_1(p) \cdot W_2(p)] = W_з(p) \cdot x(p). \quad (13)$$

Передаточная функция замкнутой системы при отрицательной обратной связи $W_з(p)$ определяется в соответствии с выражением (13):

$$W_з(p) = y(p)/x(p) = W_1(p)/[1 + W_1(p) \cdot W_2(p)] \quad (14)$$

При положительной обратной связи:

$$W_з(p) = y(p)/x(p) = W_1(p)/[1 - W_1(p) \cdot W_2(p)] \quad (14)$$

Лекция 7

Точность систем

Требования к процессу управления. Системы САУ выполняют задачу стабилизации или управления. В первом случае система поддерживает регулируемую величину на заданном уровне, а во втором – с заданной точностью изменяет регулируемую величину по определенному закону.

Режим работы системы, при котором отклонение регулируемой величины от заданного значения не превышает допустимого, называется установившимся режимом. В общем случае, за установившийся режим принимается такой режим, при котором ошибка системы (разность между заданным и фактическим значением регулируемой величины) постоянна во времени. Установившийся режим часто называют невозмущенным движением системы.

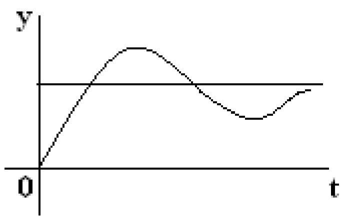
Если на систему действуют возмущающие внешние воздействия, то в системе возникает возмущенное движение, которое называют переходным процессом.

Процесс управления во времени определяется решением уравнения динамики системы:

$$y(t) = y_в(t) + y_{св}(t), \qquad (1)$$

где $y_в(t)$ – вынужденная составляющая, $y_{св}(t)$ – свободная (переходная) составляющая.

За невозмущенное движение принимается вынужденная составляющая $y_в(t)$, представляющая собой установившуюся часть процесса управления. На нее накладывается переходной процесс $y_{св}(t)$, который теоретически длится бесконечно долго, но его влияние практически становится существенно малым через определенное конечное время. После затухания переходной составляющей устанавливается $y_в(t)$.



По графику установившегося процесса определяется точность САУ. При этом установившаяся ошибка системы равна:

$$\varepsilon_{ус}(t) = y_в(t) – x(t), \qquad (2)$$

а полное значение ошибки: $\varepsilon\,(t) = y(t) – x(t)$. (3)

С целью обеспечения нормального протекания процесса управления к системе САУ предъявляются требования по точности, устойчивости и качеству переходного процесса.

Точность системы задается и определяется в установившихся режимах. Устойчивость гарантирует затухание переходного процесса, после чего обеспечивается желаемое качество затухающего переходного процесса.

Точность при типовых воздействиях. Значение установившейся ошибки можно найти по теореме операционного исчисления о конечном значении функции. Суть теоремы звучит так: если известно изображение F(p) функции f(t), то конечное значение оригинала $f(t \to \infty)$ можно вычислить по формуле:

$$f(t \to \infty) = \lim[p \cdot F(p)] \text{ при } p \to 0.$$

Применяя эту формулу для решения поставленной задачи, получим:

$$\varepsilon_{ус} = \lim[p \cdot W_{\varepsilon}(p) \cdot x(p)] \text{ при } p \to 0, \qquad (4)$$

где $W_{\varepsilon}(p)$ – передаточная функция, представляющая собой отношение установившейся ошибки $\varepsilon_{ус}$ к входной величине x.

В общем случае задающее воздействие является сложной функцией времени, при которой вычисление ошибки значительно усложняется. Поэтому реальные управляющие воздействия заменяют типовыми, в качестве которых применяют известную вам ступенчатую функцию $m \cdot 1(t)$, линейную функцию $a \cdot t$ или квадратичную функцию $at^2/2$.

Эти воздействия называются детерминированными или регулярными, поскольку их значения можно вычислить для любого момента времени.

Передаточная функция ошибки замкнутой системы определяется в соответствии с выражением:

$$W_{\varepsilon}(p) = 1/[1 + W(p)], \qquad (5)$$

где W(p) – передаточная функция разомкнутой системы.

Подставляя выражение (5) в уравнение (4), получим:

$$\varepsilon_{ус} = \lim\{p \cdot x(p)/[1 + W(p)]\} \text{ при } p \to 0. \qquad (4)$$

Если W(0) = K, т.е. структурная схема разомкнутой системы не содержит интегрирующих звеньев, то САУ называется статической, где К – статический коэффициент усиления разомкнутой системы.

Астатическими системами первого и второго порядка называют такие, у которых передаточные функции соответственно равны $W(p) = K \cdot W^*(p)/p$ и $W(p) = K \cdot W^*(p)/p^2$, т.е. структурные схемы систем содержат одно или два интегрирующих звена. При этом $W^*(p)$ – передаточная функция без учета интегрирующих звеньев и их коэффициентов усиления.

При вычислении ошибок необходимо иметь в виду, что изображение по Лапласу типовых воздействий для $x = x_o$, $x = a \cdot t$ и $x = at^2/2$ равно соответственно:

$$x(p) = x_o/p; \;\; x(p) = a/p^2; \;\; x(p) = a/p^3. \qquad (5)$$

Рассмотрим ошибки некоторых САУ при типовых воздействиях.

Подставив в выражение (4) значение x(p) для ступенчатого воздействия найдем установившуюся ошибку статической системы САУ при p = 0:

$$\varepsilon_{ус} = p \cdot x(p)/[1 + W(p)] = p \cdot x_o/\{p \cdot [1 + W(p)]\} =$$

$$= x_o/[1 + W(p)] = x_o/[1 + W(0)] = x_o/(1 + K). \qquad (6)$$

Эта ошибка называется статической ошибкой. Она пропорциональна задающему воздействию и уменьшается с увеличением коэффициента К разомкнутой системы. При изменяющихся во времени воздействиях типа $x(t) = a \cdot t$ или $x = at^2/2$ ошибка непрерывно возрастает и при $p \to 0$ $\varepsilon_{ус} \to \infty$.

$$\varepsilon_{ус} = a/[p \cdot (1 + K)]; \;\; \varepsilon_{ус} = a/[p^2 \cdot (1 + K)]. \qquad (7)$$

Наличие статической ошибки является характерным свойством статических САУ.

Астатические системы первого порядка точно отрабатывают ступенчатое воздействие.

$$\varepsilon_{ус} = p \cdot x(p)/[1 + W(p)] = p \cdot x_o/\{p \cdot [1 + K \cdot W^*(p)/p]\} =$$

$$= x_o \cdot p/[p + K \cdot W^*(p)] = 0/[0 + W(0)] = 0/K = 0. \qquad (8)$$

В то же время при отработке линейно возрастающего сигнала эти системы имеют постоянную ошибку $\varepsilon_{ус} = a/K$:

$$\varepsilon_{ус} = p \cdot x(p)/[1 + W(p)] = p \cdot a/\{p^2 \cdot [1 + K \cdot W^*(p)/p]\} =$$

$$= a/[p + K \cdot W^*(p)] = a/[0 + W(0)] = a/K. \qquad (9)$$

Эта ошибка пропорциональна скорости изменения входного сигнала «а», поэтому ее называют скоростной ошибкой, а коэффициент усиления разомкнутой системы К – добротностью системы по скорости.

При отработке квадратичного сигнала отклонение $\varepsilon_{ус} \to \infty$.

$$\varepsilon_{ус} = p \cdot x(p)/[1 + W(p)] = p \cdot a/\{p^3 \cdot [1 + K \cdot W^*(p)/p]\} =$$

$$= a/\{p \cdot [p + K \cdot W^*(p)]\}. \qquad (10)$$

Астатические системы второго порядка точно отрабатывают ступенчатый и линейно возрастающие сигналы. При отработке квадратичного сигнала имеет место ошибка $\varepsilon_{ус}$ = a/K, которая пропорциональна ускорению «a» входного сигнала и обратно пропорциональна коэффициенту усиления разомкнутой системы К, который называется добротностью системы по ускорению, а сама ошибка - ошибка системы по ускорению.

С увеличением коэффициента усиления К разомкнутой системы установившиеся ошибки уменьшаются. Однако с возрастанием К ухудшается устойчивость автоматических систем, т.е. требование к точности противоречит требованию к устойчивости. При заданном относительно большом значении К улучшение устойчивости достигается включением в систему корректирующих устройств.

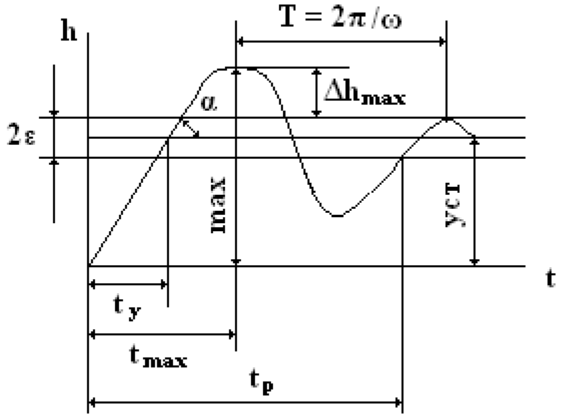
Порядок астатизма системы также влияет на точность системы. Чем выше астатизм, тем точнее система отрабатывает более сложные воздействия. Однако с увеличением порядка астатизма системы ее устойчивость ухудшается. Поэтому системы САУ с порядком астатизма более двух встречаются редко.

Лекция 8

Показатели качества и их коррекция

Качество системы САУ определяется качеством переходного процесса, которое оценивают по переходной функции h(t), представляющей собой реакцию системы на внешнее воздействие типа единичной ступенчатой функции 1(t).

На примере переходной функции колебательного звена рассмотрим основные показатели качества переходного процесса: время регулирования, перерегулирование, частоту колебаний, число колебаний, максимальную скорость и максимальное ускорение регулируемой величины.



Время регулирования t_p определяет длительность переходного процесса. Теоретически переходной процесс длится бесконечно долго, однако он заканчивается практически, как только отклонение регулируемой величины от установившегося значения не будет превышать допустимых пределов $\varepsilon = (3\text{-}5)\%\cdot h_{уст}$. Временем регулирования характеризуют быстродействие системы. Однако иногда быстродействие системы характеризуют временем t_y достижения переходной функцией первый раз установившегося значения или временем t_{max} достижения максимального значения h_{max}.

Перерегулирование Δh_{max} или выброс представляет собой максимальное отклонение регулируемой величины от установившегося значения. Обычно, первый максимум является наибольшим. Относительное перерегулирование определяется следующей формулой:

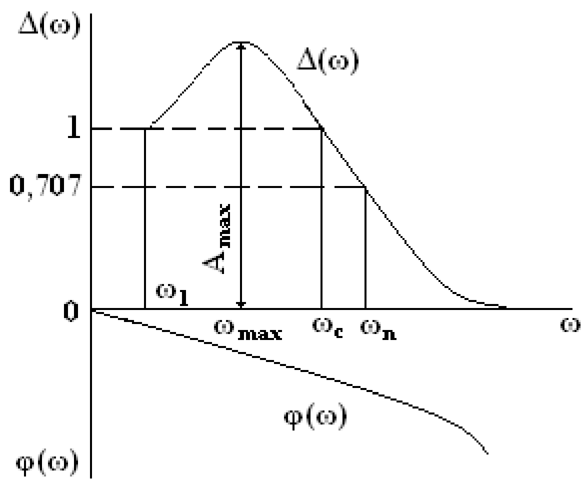
$$\varepsilon = \Delta h_{max}\cdot 100\% / h_{уст}. \quad (1)$$

Время регулирования и перерегулирование тесно связаны между собой. Перерегулирование появляется вследствие того, что система к установившемуся состоянию подходит с определенной скоростью, которая определяется тангенсом угла наклона α касательной в точке, соответствующей времени t_y: $\Delta h/\Delta t = tg\alpha$ при $t = t_y$.

Чем больше эта скорость (круче кривая переходной функции), тем больше будет перерегулирование Δh_{max}. Для уменьшения перерегулирования необходимо снизить скорость, с которой система подходит к установившемуся состоянию, что приведет к увеличению времени регулирования $t_р$. Если система подходит к установившемуся состоянию с нулевой скоростью, то перерегулирования не происходит, но время регулирования значительно возрастает. Таким образом, можно сделать вывод, что, как отсутствие, так и очень большое перерегулирование являются нежелательными. Поэтому перерегулирование допускают в пределах 20-30% от установившегося значения. При этом число полупериодов колебаний переходной функции равно двум-трем.

Качество переходного процесса оценивают на основе анализа кривой переходной функции. Однако на практике при анализе качества регулирования часто используют косвенные оценки, которыми являются некоторые числа, характеризующие отдельные моменты переходного процесса и которые можно найти без построения графика переходного процесса. Рассмотрим некоторые из косвенных оценок.

Частотные оценки. Для оценки используется относительная АЧХ в виде зависимости отношения H(ω)/K от частоты ω: $\Delta(\omega) = H(\omega)/K$.



Относительная АЧХ на резонансной частоте ω_{max} имеет максимум, соответствующий значению $\Delta(\omega_{max}) = \Delta_{max}$. При дальнейшем увеличении частоты система в следствие своей инерционности не успевает реагировать на колебания больших частот и Δ(ω) резко «падает».

Установлено, что чем больше Δ_{max}, тем более колебательным является переходной процесс. Отношение $\Delta_{max}/\Delta(0) = M$ называют показателем колебательности. Для следящих систем $\Delta(0) = 1$, поэтому $M = \Delta_{max}$. Обычно $M = 1{,}2 - 1{,}5$. При малых M система имеет большое время регулирования. При больших M увеличивается перерегулирование и система приближается к границе устойчивости.

Кроме частоты ω_{max} характерными частотами АЧХ являются частота среза $\omega_с$ и полоса пропускания $\omega_п$. Частота среза замкнутой системы $\omega_с$

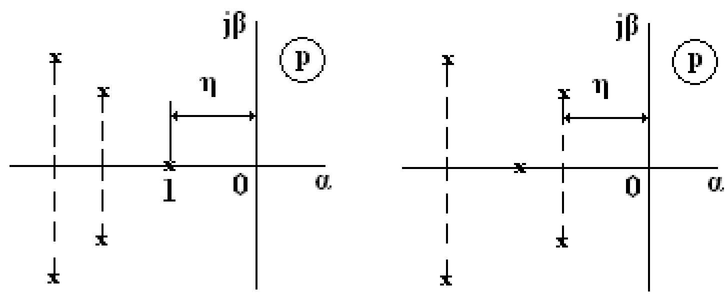
определяется на уровне $\Delta(\omega) = 1$.Для следящих систем частота среза определяет диапазон вынужденных колебаний, которые система пропускает без ослабления. На этой частоте амплитуды входного и выходного колебаний равны. Полоса пропускания $\omega_п$ замкнутой системы определяется на уровне $\Delta(0)/\sqrt{2} = 0{,}707$. Так как в диапазоне частот $(\omega_c - \omega_п)$ АЧХ резко «падает», то числовые значения частот ω_c и $\omega_п$ близки.

Полоса пропускания влияет на точность и быстродействие системы. С увеличением полосы пропускания быстродействие системы растет. Чем больше полоса пропускания, тем больший спектр частот входного сигнала передается без искажений.

О качестве регулирования можно судить по ЛАЧХ. Установлено, что для удовлетворительного качества регулирования участок средних частот, на котором ЛАЧХ пересекает ось абсцисс, должен имеет наклон минус 20 дБ/декаду. Протяженность этого участка влияет на перерегулирование. С его увеличением уменьшается колебательность переходного процесса. Приемлемое качество переходного процесса имеет место, если протяженность этого участка примерно равна декаде. Время регулирования $t_р$ зависит от частоты среза, при которой ЛАЧХ пересекает ось абсцисс. Чем больше частота среза, тем меньше $t_р$.

Корневые оценки. Корневыми называются оценки, которые основываются на расположении корней характеристического уравнения замкнутой системы, которые являются полюсами передаточной функции замкнутой системы и находятся из уравнения $W_з(\omega) = \infty$.

Корневой оценкой качества является степень устойчивости – расстояние η от мнимой оси до ближайшего корня на плоскости корней характеристического уравнения замкнутой системы.



а) б)

Если ближайшим является вещественный корень (схема а), то ему соответствует экспоненциальная составляющая решения для переходного процесса $C_1 = \exp(-\eta \cdot t)$ – апериодическая степень устойчивости η. Время ее затухания $t_п = 3/\eta$ при погрешности 5% характеризует общую длительность переходного процесса, так как все остальные члены решения , соответствующие основным корням затухают быстрее.

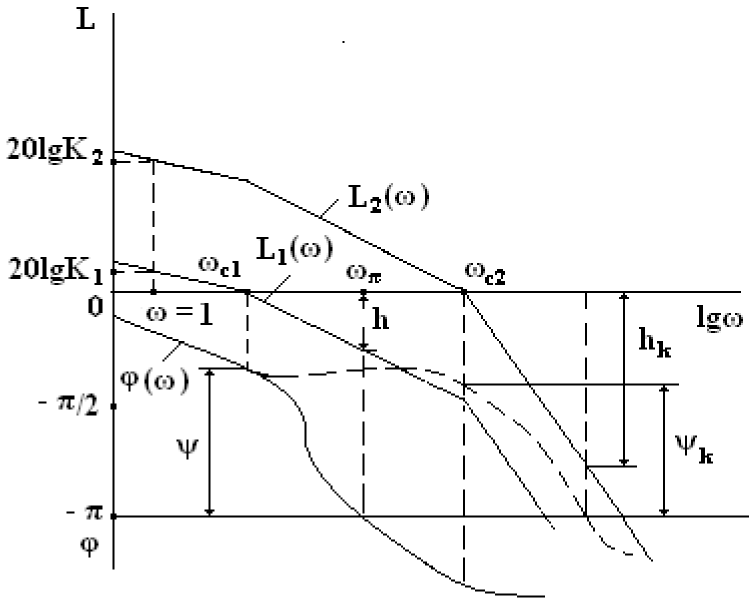
Если же ближайшей к мнимой оси окажется пара комплексных сопряженных корней (схема б), то доминирующей составляющей решения для переходного процесса является $C_1 = \exp(-\eta \cdot t) \cdot \sin(\beta_1 \cdot t + C_2)$, которая называется колебательной составляющей – колебательная степень устойчивости η. При этом оценка длительности переходного процесса остается прежней $t_п = 3/\eta$.

Колебательность переходного процесса определяется величиной $\mu = \beta/\eta$, где β и η – соответственно мнимая и вещественная части корней характеристического уравнения. Эта величина характеризует быстроту затухания колебаний за каждый период. Чем больше величина μ, называемая колебательностью, тем слабее затухания колебаний в переходном процессе.

Для уменьшения амплитуд отклонений в переходном процессе желательно, чтобы нули передаточной функции замкнутой системы $W_з(p)$, представляющие собой значения p, при котором $W_з(p) = 0$, располагались вблизи ее полюсов.

Понятие о коррекции. Основная задача корректирующих устройств в улучшении точности и качества переходных процессов систем САУ. Кроме того, корректирующие устройства предварительно используются для обеспечения устойчивости неустойчивых систем.

Для уменьшения ошибок в установившемся режиме необходимо повышать коэффициент усиления K системы в разомкнутом состоянии. Но с увеличением K, как мы с вами уже отмечали ранее, уменьшается запас устойчивости САУ. С возрастанием K увеличивается и частота среза ω_c ($\omega_{c2} > \omega_{c1}$).



Большим значениям ω_c соответствуют меньшие значения запаса устойчивости по фазе ψ. При $\omega_c = \omega_{c2}$ система неустойчива из-за вносимого инерционными звеньями системы запаздывания колебаний по фазе, которое растет с увеличением частоты.

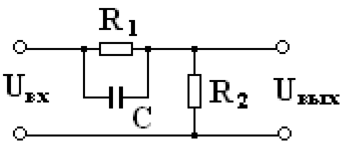
Для того, чтобы при увеличении К система оставалась устойчивой и обеспечивала требуемый запас устойчивости по фазе ψ и амплитуде h, необходимо частично компенсировать запаздывание в полосе частот, которая расположена около частоты среза ω_{c2}, соответствующей увеличенному коэффициенту $К_2$ системы, и тем самым деформировать ЛФЧХ системы, приподняв ее вверх (штриховая кривая). Такую деформацию ЛФЧХ можно осуществить, включив последовательно элементам системы устройство, которое вносило бы опережение по фазе синусоидальных колебаний.

Коррекция САУ осуществляется с использованием последовательных и параллельных корректирующих устройств.

Последовательные корректирующие устройства. К числу последовательных корректирующих устройств относится дифференцирующая фазоопережающая цепь, которая называется форсирующей цепью.

Передаточная функция этой цепи имеет следующий вид:

$$W(p) = U_{вых}(p)/U_{вх}(p) = R_2 \cdot (1 + pR_1 \cdot C)/(R_2 + R_1 + pR_1 \cdot R_2 \cdot C) \qquad (2)$$



Разделим числитель и знаменатель дроби (2) на сумму сопротивлений $(R_1 + R_2)$, в результате получим

$$W(p) = \frac{\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot (1 + pR_1 \cdot C)}{1 + \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot pR_1 \cdot C}. \qquad (3)$$

Обозначим отношение $R_2/(R_1 + R_2)$ как K – статический коэффициент усиления, произведение $(R_1 \cdot C)$ как постоянную времени T_1, а $К \cdot T_1 = T_2$. Здесь постоянные времени характеризуют соответственно опережение T_1 и отставание T_2 (поскольку $К < 1$, то $T_2 < T_1$). Подставив в формулу (3) соответствующие замены, получим стандартное изображение передаточной функции форсирующего звена:

$$W(p) = К \cdot (1 + p \cdot T_1)/(1 + p \cdot T_2). \qquad (4)$$

ЛАЧХ данного звена имеет вид:

$$L(\omega) = 20\lg H(\omega) = 20\lg K + 20\lg\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T_1^2} - 20\lg\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T_2^2}. \qquad (5)$$

ЛФЧХ форсирующего звена:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(\omega T_1) - \mathrm{arctg}(\omega T_2). \qquad (6)$$

Примечание: $L(\omega) = 20\lg K$ в диапазоне частот $(0 – 1/T_1)$, $(20\lg K + 20дБ/дек)$ в диапазоне частот $(1/T_1 - 1/T_2)$ и $(20\lg K + 20дБ) = const$ в диапазоне частот $\omega > 1/T_2$. Фазовый угол $\varphi(\omega)$ с ростом частоты до ω_{max} изменяется от 0^o до $+45^o$, а затем вновь падает до 0^o.

Опережение создается благодаря тому, что $T_1 > T_2$. Частоту ω_{max}, при которой цепь создает максимальное опережение, находим из условия $d\varphi(\omega)/d\omega = 0$: $\omega_{max} = 1/\sqrt{T_1 \cdot T_2}$.

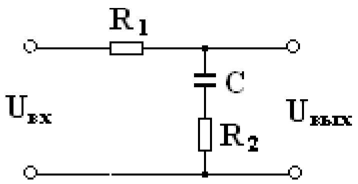
Подставляя в формулу (6) выражение для ω_{max}, определяем значение фазового угла, соответствующее данной частоте:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(T_1 / \sqrt{T_1 \cdot T_2}) - \mathrm{arctg}(T_2 / \sqrt{T_1 \cdot T_2}) = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \qquad (7)$$

Из формулы (7) следует, что получение больших углов опережения связано с уменьшением коэффициента усиления цепи К. Для компенсации ослабления вносимого фазоопережающей цепью, необходимо увеличивать коэффициент усиления системы другими ее элементами.

Для уменьшения влияния помех САУ целесообразно корректировать, используя интегрирующее устройство, которое позволяет увеличивать К, не повышая ее частоты среза.

Передаточная функция наиболее распространенной пассивной интегрирующей цепи имеет следующий вид:



$$W(p) = U_{вых}(p)/U_{вх}(p) = (pR_2 \cdot C + 1)/(pR_1 \cdot C + pR_2 \cdot C + 1). \qquad (8)$$

Обозначим произведение $R_2 \cdot C$ как T_2 – постоянная времени опережения контура, $C \cdot (R_1 + R_2) = T_1$ – постоянная времени отставания. Подставив замены в выражение (8), получим:

$$W(p) = (1 + p \cdot T_2)/(1 + p \cdot T_1). \qquad (9)$$

Наличие отставания, вносимого интегрирующим устройством, является недостатком корректирующего устройства. Однако при соответствующем выборе параметров этого устройства область отставания может быть смещена в диапазон низких частот значительно левее частоты среза системы, поэтому запас устойчивости системы при включении интегрирующего звена практически не уменьшается.

ЛАЧХ данного звена имеет вид:

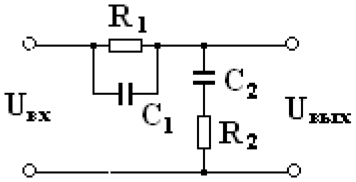
$$L(\omega) = 20\lg H(\omega) = 20\lg\sqrt{1+\omega^2\cdot \grave{O}_2^2} - 20\lg\sqrt{1+\omega^2\cdot T_1^2}\ . \quad (10)$$

ЛФЧХ интегрирующего звена:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(\omega T_2) - \mathrm{arctg}(\omega T_1). \quad (11)$$

Примечание: $L(\omega) = 0$ в диапазоне частот $(0 - 1/T_1)$, (- 20дБ/дек) в диапазоне частот $(1/T_1 - 1/T_2)$ и (- 20дБ) = const в диапазоне частот $\omega > 1/T_2$. Фазовый угол $\varphi(\omega)$ с ростом частоты до ω_{max} изменяется от 0^o до некоторого отрицательного максимума (больше – 90^o), а затем вновь падает до 0^o.

На практике для коррекции САУ часто применяют интегро-дифференцирующие цепи.



Передаточная функция этой цепи имеет вид:

$$W(p) = U_{вых}(p)/U_{вх}(p) = (1 + p\cdot T_1)\cdot(1 + p\cdot T_2)/[\ (1 + p\cdot T_3)\cdot(1 + p\cdot T_4)], \quad (12)$$

где $T_1 = R_1\cdot C_1$; $T_2 = R_2\cdot C_2$; $T_3 + T_4 = R_1\cdot C_1 + (R_1 + R_2)\cdot C_2$; $T_3 \cdot T_4 = T_1 \cdot T_2$.

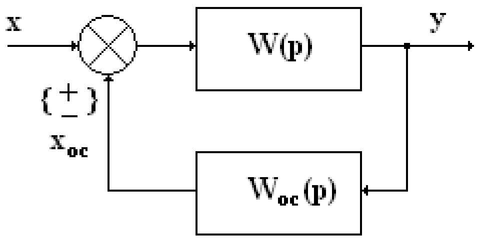
ЛФЧХ интегро-дифференцирующего звена:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(\omega T_2) + \mathrm{arctg}(\omega T_1) - \mathrm{arctg}(\omega T_3) - \mathrm{arctg}(\omega T_4). \quad (13)$$

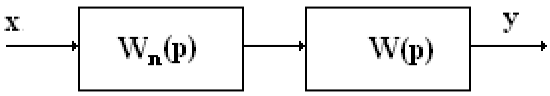
Примечание: $L(\omega) = 0$ в диапазоне частот $(0 - 1/T_3)$, (- 20дБ/дек) в диапазоне частот $(1/T_3 - 1/T_1)$, (- 20дБ) = const в диапазоне частот $(1/T_1 - 1/T_2)$, (+ 20дБ/дек) в диапазоне частот $(1/T_2 - 1/T_4)$ и 0 в диапазоне частот $\omega > 1/T_4$. Фазовый угол $\varphi(\omega)$ с ростом частоты имеет два максимума: отрицательный более - 90^o и положительный менее 90^o, а также нулевой угол в средней части диапазона частот $(1/T_1 - 1/T_2)$.

Используя последовательную интегро-дифференцирующую цепь можно значительно повысить коэффициент усиления системы и увеличить ее частоту среза, а следовательно повысить точность системы в установившемся и переходном режимах.

Параллельные корректирующие устройства. Параллельное корректирующее устройство выполняет функции обратной связи, которая охватывает один из элементов прямой цепи системы.



Передаточная функция этой части системы $W_{охв}(p) = W(p)/[1 + W(p)\cdot W_{oc}(p)]$ может быть представлена в следующем виде: $W_{охв}(p) = W(p)\cdot W_n(p)$, где $W_n(p) = 1/[1 + W(p)\cdot W_{oc}(p)]$ – передаточная функция последовательно включенного звена, эквивалентного параллельному корректирующему устройству с передаточной функцией $W_{oc}(p)$.



Таким образом, если удается повысить показатели качества, используя последовательные корректирующие устройства, то такое же повышение показателей качества можно осуществить и, используя параллельные корректирующие устройства. Если известно $W_n(p)$, то можно найти $W_{oc}(p)$:

$$W_{oc}(p) = [1 - Wn(p)]/[W_n(p)\cdot W(p)]. \qquad (14)$$

Если в какой-либо области частот выполняется условие $|W(j\omega)\cdot W_{oc}(j\omega)| >> 1$, то

$$W_{охв}(j\omega) = W(j\omega)/[1 + W(j\omega)\cdot W_{oc}(j\omega)] \approx 1/W_{oc}(j\omega), \qquad (15)$$

т.е. передаточная функция части системы, охваченной обратной связью, в этой области частот полностью определяется передаточной функцией параллельного корректирующего устройства. Благодаря этому применением параллельных корректирующих устройств удается изменить частотные характеристики систем САУ в желаемом направлении.

Корректирующие обратные связи делятся на жесткие и гибкие. Жесткая обратная связь действует на систему в переходном и установившемся режимах, т.е. $W_{жос}(0) \neq 0$, и реализуется она безинерционным ($W_{жос} = K_{oc}$) или инерционным [$W_{жос}(p) = K_{oc}/(T_{oc}p + 1)$] звеньями.

Гибкая обратная связь действует лишь в переходных режимах. Реализуется она дифференцирующим [$W_{гос}(p) = K_{oc}p$] или инерционно-дифференцирующим звеном [$W_{гос}(p) = K_{oc}p/(T_{oc}p + 1)$]. При охвате интегрирующего звена [$W_\delta(p) = K/p$] отрицательной жесткой обратной связью ($W_{жос} = K_{ос}$) получим:

$$W(p) = K/(p + K \cdot K_{ос}) = K_1/(T_1 p + 1), \quad (16)$$

где $K_1 = 1/K_{ос}$: $T_1 = 1/K \cdot K_{ос}$.

Таким образом, под действием жесткой обратной связи теряется интегрирующее свойство звена и оно превращается в апериодическое с коэффициентом усиления, который полностью определяется только обратной связью. Постоянная времени T_1 мала при большом коэффициенте усиления звена К.

При охвате инерционного интегрирующего звена гибкой обратной связью:

$$W(p) = K/[p \cdot (Tp + 1); \quad W_{ос}(p) = K_{ос} \cdot p;$$

$$W_{охв}(p) = K/[p \cdot (Tp + 1 + K \cdot K_{ос})] = K_1/[p \cdot (T_1 p + 1), \quad (17)$$

где $K_1 = K/(1 + K \cdot K_{ос})$; $T1 = T/(1 + K \cdot K_{ос})$.

Т.е. в этом случае сохраняется тот же тип интегрирующего звена, но с уменьшенной инерционностью.