МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт им. С.П.Королева

Ю.Н.КАЩЕЕВА

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Программированное учебное
пособие

Рассмотрено и утверждено
редакционным советом института
19 февраля 1971 года

Куйбышев 1971

В предлагаемом пособии рассматриваются некоторые вопросы теории определителей и решение систем линейных алгебраических уравнений.

Изложение ведется с привлечением методов программированного обучения.

Цель пособия - помочь студентам самостоятельно изучить данную тему.

При использовании пособием рекомендуется: основные моменты теории записывать в тетрадь и запомнить; все предложенные упражнения решать также в тетради; проверять решение в ответе; стараться выполнять все самостоятельно и не торопиться заглядывать в ответ, иначе цель достигнута не будет.

Отв. редактор - доцент Г.П.ФЕДОРЧЕНКО

§ I. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Теория определителей, аппарат которой широко используется в аналитической геометрии и других разделах математики, возникла при решении и исследовании систем линейных алгебраических уравнений со многими неизвестными.

Знакомство с использованием определителей начнем с простейшего случая – решения и исследования системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пусть дана система:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 , \\ a_2x + b_2y = c_2 . \end{cases} \qquad (1)$$

Для отыскания решения этой системы, т.е. совокупности таких значений $x = x_0$ и $y = y_0$, которые обращают в тождества оба данных уравнения, преобразуем систему (I) в новую систему, каждое уравнение которой содержит лишь одно неизвестное. Для этого умножим первое из уравнений системы (I) на b_2, второе на $-b_1$ и сложим; затем умножим первое уравнение на $-a_2$, второе на a_1 и снова сложим; получим новую систему:
$$\begin{aligned} (a_1b_2 - a_2b_1)x &= c_1b_2 - c_2b_1 , \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y &= a_1c_2 - a_2c_1 . \end{aligned} \qquad (2)$$

Заметим, если $a_2b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то от системы (2) аналогичными преобразованиями можно вернуться обратно к системе (I). Отсюда следует, что системы (I) и (2) равносильны. Тогда решение системы (I) получаем непосредственно из системы (2):
$$x_0 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} ; \quad y_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (3)$$

Рассмотрим структуру формул (3). Выражения в формулах (3), являющиеся коэффициентами системы (2), называются определителями второго порядка. Для их обозначения вводится символическая запись:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называется элементами определителя; элементы a_1 и b_2 образуют главную диагональ, элементы a_1 и b_2 - побочную. Формула (4) показывает, что определитель второго порядка равен разности между произведением его элементов, стоящих на главной диагонали, и произведением его элементов, стоящих на побочной диагонали.

Вернемся к решению системы.

В новых обозначениях числители формул (3) запишутся в виде:

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

а сами формулы примут вид

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (6)$$

Эти формулы носят название формул Крамера. Крамер - швейцарский математик (1704-1752).

Определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (1), называется определителем системы и часто для краткости обозначается буквой Δ. Для определителей (5) вводятся обозначения Δ_x и Δ_y.

Тогда система (2) запишется кратко так:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \qquad (2')$$

а формулы Крамера примут вид:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (6')$$

Заметим, что определители Δ_x и Δ_y получаются из определителя системы Δ заменой соответственно первого или второго столбца столбцом свободных членов уравнений системы (I).

Итак, если определитель системы Δ отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам (6′).

Запомните этот вывод.

Решите самостоятельно систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0, \\ 3x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ. а) $x_0 = 2, \quad y_0 = 3$

б) $x_0 = -2, \quad y_0 = -3$.

Если Вы получили ответ а), то Ваше решение правильно. Можете пропустить стр. 6 и продолжать читать стр. 7.

Если Вы получили ответ б) или какой-либо другой, сверьте Ваше решение с решением на стр. 10а.

а) Решение примера 3 стр. 9.

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 6a$

I) Система имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$, то есть если $a \neq 2$; b может принимать любые значения, так как определитель системы не зависит от b.

2) Система не имеет решений, если $\Delta \neq 0$, то есть, если $a = -2$, а по крайней мере один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля.

Найдем
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ b & 4 \end{vmatrix} = 4 + ab .$$

При $a = -2$ $\Delta_x \neq 0$, если $b \neq 2$.

3) Система имеет бесчисленное множество решений, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$.

$\Delta = 0$ при $a = -2$.

$\Delta_x = 0$ при $b = 2$.

При $a = -2$ и $b = 2$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$.

А теперь переходите к стр. II.

б) Решение примера I стр. I2.

$$\begin{vmatrix} I & -3 & 9 \\ 8 & 4 & II \\ 3 & I & 5 \end{vmatrix} = -(-3) \begin{vmatrix} 8 & II \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} I & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} I & 9 \\ 8 & II \end{vmatrix} =$$

$$= 3\,(8 \cdot 5 - 3 \cdot II) + 4\,(I \cdot 5 - 3 \cdot 9) - (I \cdot II - 8 \cdot 9) =$$

$$= 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-22) + 6I = 2I - 88 + 6I = -6.$$

Решите пример 2 на стр. I2.

Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными в случае, когда определитель системы равен нулю.

Пусть определитель системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (I)

равен нулю: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

И пусть при этом хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля. Тогда по крайней мере одно из равенств (2^I) становится невозможным, то есть система (2^I) не имеет решений. Но в таком случае и система (I) не имеет решений, так как она эквивалентна системе (2^I) и в случае, если $\Delta = 0$.

Если же $\Delta = 0$, но вместе с тем $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система (I) имеет бесчисленное множество решений. В этом случае одно из уравнений системы есть следствие другого.

В самом деле, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то есть, если

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0\ ,\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0\ ,\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0$$

, то $a_1b_2 = a_2b_1$ или $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$; аналогично из второго и третьего равенств получаем: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ и $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ Таким образом, коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений системы (I) пропорциональны. Это означает, что одно уравнение системы получается из другого путем умножения всех членов другого уравнения на некоторый общий множитель, следовательно, в системе по сути дела есть лишь одно уравнение. Но уравнение вида $a_1x + b_1y = c_1$ имеет бесчисленное множество решений.

Если, например, $b_1 \neq 0$, то, давая произвольные значения мы можем определить y по формуле:

$$y = \frac{-a_1x + c_1}{b_1} .$$

Итак, если определитель системы $\Delta = 0$, но при этом хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля, система не имеет решений.

Если же $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.

Эти выводы следует запомнить.

Пример I. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x - 8y = 10 \end{cases}$.

Решение. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -8 \end{vmatrix} = -40 + 40 = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0 .$$

Система имеет бесчисленное множество решений.

Как легко заметить, второе уравнение системы получается из первого умножением членов уравнения на 2. Таким образом, система сводится к одному уравнению, например, к уравнению

$$3x - 4y = 5 = 0 .$$

Придавая x произвольные значения и находя y по формуле $y = \frac{3x-5}{4}$, получим множество решений.

Например, если положить $x = 0$, то по формуле получаем $y = -\frac{5}{4}$. Или если $x = 3$, то получаем $y = 1$ и так далее.

Решите самостоятельно следующий пример.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 4x + 6y - 7 = 0 \end{cases} .$$

Решив эту систему, посмотрите ответ на стр. 9.

Ответ: система не имеет решений.

Если Ваш ответ совпадает с данным, решайте пример 3.

Если пример вызвал затруднения, смотрите стр. 29а.

Пример 3. Определите при каких a и b система

$$\begin{cases} 3x - ay = 1, \\ 6x + 4y = b, \end{cases}$$

1) имеет единственное решение;

2) не имеет решений;

3) имеет бесчисленное множество решений.

Ответы:

1) Система имеет единственное решение при всех $a \neq -2$ и при любых b.

2) Система не имеет решений при $a = -2$ и при любых $b \neq 2$

3) Система имеет бесчисленное множество решений при $a = -2$ и $b = 2$.

Если Ваши ответы не совпадают с приведенными выше, сверьте свои решения с решениями на стр. 6а.

Если Ваши ответы совпадают с данными, продолжайте чтение со страницы 11.

а) Решение примера стр. 5.

Прежде всего, запишем систему в виде (I), то есть отнесем свободные члены в правую часть:

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-y=3 \end{cases}$$

Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)-3\cdot 2=-7 .$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам (6′).

Найдем Δ_x и Δ_y.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8(-1)-3\cdot 2=-14; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot 3-3\cdot 8=-21 .$$

Решение системы:

$$x_0=\frac{-14}{-7}=2 ;$$

$$y_0=\frac{-21}{-7}=3 .$$

Можете читать стр. 7.

б) Решение примера 2 стр. 12.

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & x \\ -x & -1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x(x^2+1) .$$

Читайте дальше стр. 12, пример 3.

в) Решение примера 4 стр. 18.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

Переходите к стр. 19.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ИХ СВОЙСТВА

Определителем третьего порядка называется число, определяемое следующим равенством:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} .$$

<u>Определение</u>. <u>Минором</u> некоторого элемента определителя третьего порядка называется тот определитель второго порядка, который получится, если из определителя третьего порядка вычеркнуть столбец и строку, содержащие данный элемент.

Так, минором элемента b_1 будет определитель $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Найдите миноры элементов a_2, b_2, c_3 Ответы на стр. 30а.

<u>Определение</u>. Минор данного элемента, взятый со знаком "плюс", если сумма номеров строки и столбца, содержащих этот элемент, - четная, и со знаком "минус", - если эта сумма нечетная, называется <u>алгебраическим дополнением</u> данного элемента.

Так, например, алгебраическим дополнением элемента a_1 определителя Δ будет $+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; алгебраическим дополнением b_1 будет $-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$; алгебраическим дополнением c_1 будет $+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

С каким знаком берется минор можно запомнить из таблицы:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} .$$

Говорят, что равенство (I) дает разложение определителя по элементам первой строки.

Можно доказать, что определитель третьего порядка может быть аналогичным способом разложен по элементам любой строки и любого столбца, то есть имеет место следующее свойство определителей:

определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения.

К равенству (I) можно получить в дополнение еще пять аналогичных равенств.

Запишите, например, разложение определителя по элементам второго столбца. Ответ сверьте на стр. 30б.

Пример I. Вычислить определитель, разложив его по элементам второго столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 8 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ответы: а) − 48; б) − 6; в) − I70; г) − I28.

Если Ваш ответ б), можете решать пример 2; если Ваш ответ а), в) или г), читайте стр. 6б.

Пример 2. Вычислить определитель, разложив его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & x \\ -x & -1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $x\left(x^2+1\right)$. Если Ваш ответ не совпадает с данным, смотрите указания на стр. I0 б. Если − совпадает, решайте пример 3.

Пример 3. Вычислить определитель, разложив по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 0. Если Ваш ответ другой, смотрите стр. 20а; если Ваш ответ совпадает с данным, читайте стр. I4.

а) <u>Решение примера I стр. 16.</u>

К элементам третьего столбца прибавим элементы первого столбца, умноженные на 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1+3\cdot 2 \\ -2 & 3 & 2+(-2)\cdot 2 \\ 4 & 5 & 3+4\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

Продолжайте читать стр. 16, пример 2.

б) <u>Решение примера стр. 18.</u>

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$ прибавим к элементам первого столбца элементы второго столбца, умноженные на 2, получим:

$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$ теперь к элементам последней строки прибавим элементы первой получим:

$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$ этот определитель разложим по элементам первого столбца:

$$= 5\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 5(6-6) = 0 \quad .$$

теперь решайте пример 2 стр. 18.

в) <u>к стр. 15.</u> Выносим за знак определителя множитель 5 элементов первого столбца и множитель 3 элементов второй строки:

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15(6-5) = 15 \quad .$$

Решайте пример 2 стр. 15.

Рассмотрим некоторые свойства определителей третьего порядка. Заметим, что все они справедливы и для определителей второго порядка.

Свойство I. Величина определителя не изменится, если каждую строку заменить столбцом с тем же номером.

Это свойство может быть записано так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Справедливость этого свойства легко проверить, вычисляя определитель по формуле (I).

Пример. Дан определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. Проверить на нем свойство I.

В случае затруднения смотрите стр. 30 г.

Замечание. Так как по первому свойству строки и столбцы равноправны, то в дальнейшем будем рассматривать свойства только для столбцов.

Свойство 2. При перестановке двух столбцов определитель меняет лишь знак. Так, например, переставляя первый и второй столбцы, получим:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Это свойство также легко проверить с помощью формулы (I).

Свойство 3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Разложим определитель по элементам третьего столбца:

$$c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = c_1(a_2a_3 - a_2a_3) - c_2(a_1a_3 - a_1a_3) + c_3(a_1a_2 - a_1a_2) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Вычислить устно: $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Указание на стр. 31а.

Свойство 4. Умножение всех элементов какого-либо столбца на число равносильно умножению на это число самого определителя.

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Разложим определитель, стоящий в левой части равенства, по элементам столбца, получим:

$$-kb_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + kb_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - kb_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= k\left(-b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\right) = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Общий множитель всех элементов столбца можно выносить за знак определителя.

Пример 1. Вычислить определитель, используя свойство 4:

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 9 \end{vmatrix}$$

Ответ на стр. 13в.

Пример 2. Какой максимальный множитель можно вынести за знак определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 24 & 8 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ на стр. 29в.

Свойство 5. Определитель равен нулю, если все элементы некоторого столбца равны нулю.

Дан определитель: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$. Докажите это свойство, разложив определитель по элементам третьего столбца.

Свойство 6. Если соответствующие элементы двух столбцов пропорциональны, то определитель равен нулю.

Это свойство есть следствие четвертого и третьего свойств.

Пример. Вычислить устно определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 4 & -10 & -6 \end{vmatrix}$$

Ответ на стр. 30в.

Свойство 7. Если элементы некоторого столбца представляют собой сумму, то определитель может быть представлен в виде двух определителей; у одного определителя элементы рассматриваемого столбца равны первым слагаемым, у другого - вторым. Остальные столбцы не изменены.

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Пример. Воспользовавшись свойствами 7 и 6, вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} mb_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Ответ: 0. В случае затруднения с решением этого примера смотрите указания на стр. 20в.

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо столбца прибавить элементы другого столбца, умноженные на один и тот же произвольный множитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \ell c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \ell c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \ell c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Пример I. Воспользовавшись свойством 8, докажите справедливось равенства:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 9 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 9 & -2 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Если пример вызвал затруднения, читайте стр. 3Iб.

Пример 2. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Воспользуемся свойством 8 и создадим в каком-либо ряду один или два нуля. (Рядом называется строка или столбец).

Например, прибавим к элементам первого столбца элементы второго столбца, получим определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

А теперь разложим определитель по элементам того ряда, где получились нули, то есть по элементам первого столбца:

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1-1) = -4 \quad .$$

Чтобы создать в каком-либо ряду два нуля, можно воспользоваться свойством 8 несколько раз.

Например, вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

Создадим нули в первом столбце, производя операции над строками. Сначала прибавим к элементам первой строки элементы третьей строки, умноженные на -I, затем к элементам второй строки прибавим элементы третьей строки. Получим

$$\begin{vmatrix} 1+(-1) & 17+(-7) & -7+(-1) \\ -1+1 & 13+7 & 1+1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -8 \\ 0 & 20 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} .$$

Затем разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & -8 \\ 0 & 20 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ 20 & 2 \end{vmatrix}$$

здесь можно воспользоваться свойством 4: вынести за знак определителя второго порядка множитель элементов первого столбца -I0 и множитель элементов второго столбца 2:

$$= 1 \cdot 10 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 20\,(1 + 8\,) = 180$$

А теперь решите несколько примеров самостоятельно.

Пример 1. Воспользовавшись свойством 8, преобразовать определитель так, чтобы в каком-либо ряду два элемента стали равными нулю, а затем вычислить полученный определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Ответ: 0. Если ответ совпадает с данным, решайте пример 2, в противном случае смотрите стр. 13б.

Пример 2. Доказать тождество

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} .$$

Если пример вызвал затруднения, читайте стр. 29б, а если нет, — решайте пример 3.

Пример 3. Доказать тождество

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b) .$$

Если пример вызвал затруднения, читайте стр. 20б. Тем, у кого не вызвали затруднения примеры 1, 2 и 3, пример 4 можно пропустить.

Пример 4. Доказать тождество

$$\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

В случае затруднения смотрите стр. 10в.

Для закрепления материала § 2 предлагается решить следующие примеры. (Предварительно проверьте, запомнили ли Вы свойства определителей).

1) Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ ответ: -12.

б) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$ ответ: $-2a^3$.

2) Не раскрывая определитель, доказать справедливость равенства:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 11 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

3) Не раскрывая определитель, решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & x+9 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

ответ: $x = -5$.

4) Не раскрывая определитель, доказать тождество:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_1 & c_2 \\ a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2 \end{vmatrix} =$$

5) Доказать тождества:

а) $$\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \sin\beta & \sin^2\beta \\ 1 & \sin\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = (\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\beta-\sin\gamma)(\sin\gamma-\sin\alpha).$$

б) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\beta & \operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}^2\beta & \operatorname{tg}^2\gamma \end{vmatrix} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma}.$$

Переходите к § 3, стр. 21.

а) Решение примера стр. I2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (2 - 12) - 2(-4 + 9) + 4(8 - 3) = 0$$

Читайте дальше стр. I4.

б) Решение примера стр. I8.

$$abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= abc \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= abc(b-a)(c-a)(c+a-b-a) = abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

Решайте пример 4 стр. I8.

в) к стр. I6.

$$\begin{vmatrix} mb_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$ воспользуемся сначала свойством 7

$$= \begin{vmatrix} mb_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

По свойству 6 оба слагаемых равны нулю.

Продолжайте читать стр. I6.

§ 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Дана система:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается буквой Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Если в определителе Δ коэффициенты при x заменить свободными членами, то получим определитель, который обозначается так:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Заменяя свободными членами коэффициенты при неизвестных y и z , получим аналогично еще два определителя:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} ; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} .$$

Систему (1) путем тождественных преобразований можно привести к виду:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\cdot x = \Delta_x \;; \\ \Delta\cdot y = \Delta_y \;; \\ \Delta\cdot z = \Delta_z \;. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

I) Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение; которое определяется по формулам Крамера:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.}$$

Пример I. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

Ответ на стр. 3Iв.

2) Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то система не имеет решений. В этом случае одно из равенств (2) становится невозможным.

3) Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система или не имеет решения или имеет бесчисленное множество решений.

Выводы I, 2, и 3 следует запомнить.

<u>Пример 2</u>. Дана система:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + z = 0, \\ 6x - 9y + 3z = 1. \end{cases}$$

Вычислите определители Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z

Ответ: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. При вычислении рекомендуется пользоваться свойствами определителей. Указание на стр. 3Iг.

Можно заметить, что третье уравнение этой системы есть линейная комбинация первых двух уравнений. Если умножим все члены второго уравнения на 5 и сложим с членами первого уравнения, то получим третье уравнение. Следовательно, система сводится к двум уравнениям с тремя неизвестными. Такая система имеет бесчисленное множество решений. Для того, чтобы отыскать любое решение из этого множества, рассмотрим либую пару уравнений, например, первые два:

$$\begin{cases} x+y-2z=1, \\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

и выразим какие-либо два неизвестных через третье.

Так как определитель второго порядка при неизвестных x и y отличен от нуля: $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1=-3 \neq 0,$

то можно единственным образом выразить x и y через z.

Для этого решаем систему

$$x+y=1+2z,$$
$$x-2y=-z,$$

как систему двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\Delta'=-3; \quad \Delta'_x = \begin{vmatrix} 1+2z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix} = -2-3z$$

$$\Delta'_y = \begin{vmatrix} 1 & 1+2z \\ 1 & -z \end{vmatrix} = -z-1-2z=-1-3z;$$

$$x=\frac{-2-3z}{-3}=\frac{2}{3}+z;$$

$$y=\frac{-1-3z}{-3}=\frac{1}{3}+z.$$

Итак,

$$x=\frac{2}{3}+z, \quad y=\frac{1}{3}+z. \quad (*)$$

Придавая z произвольные значения, вычисляем соответствующие значения x и y по полученным формулам (*).

Пусть, например, $z=-\frac{1}{3}$, тогда $x=\frac{1}{3}$, $y=0$

Получили решение: $x=\frac{1}{3}$, $y=0$, $z=-\frac{1}{3}$.

Если положить $= 0$, получим решение: $\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \ y=\frac{1}{3}, \\ z=0, \end{cases}$

и т.д.

Пример 3. Дана система: $\begin{cases} x + y - 5z = 1, \\ 2x + 2y - 10z = 2, \\ 3x + 3y - 15z = 3. \end{cases}$

Вычислите определители Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z.

Ответ: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Можно заметить, что коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны. По сути дела имеем лишь одно уравнение. Следовательно, система имеет бесчисленное множество решений.

Чтобы получить любое решение из этого множества, возьмем одно из уравнений системы, например, первое и, придавая произвольные значения двум любым неизвестным, найдем соответствующее значение третьего неизвестного.

$$x + y - 5z = 1$$

Например, если $x = 0$, $y = 6$, то $z = 1$.

Пример 4. Дана система уравнений: $\begin{cases} 2x - y + 7z = 2, \\ 6x - 3y + 21z = 6, \\ -4x + 2y - 14z = 0. \end{cases}$

Вычислите определители Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z.

Ответ: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Легко заметить, что первое и второе уравнения системы эквивалентны. Следовательно, система сводится к такой:

$$\begin{cases} 2x - y + 7z = 2, \\ -4x + 2y - 14z = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x - y + 7z = 2, \\ 2x - y + 7z = 0, \end{cases}$$

а последняя система несовместна. Поэтому и данная система несовместна.

Для закрепления материала § 3 предлагается решить ниже следующие системы. Предварительно рекомендуется проверить, запомнили ли Вы выводы I, 2 и 3. Если - нет, вернитесь к стр. 22, а затем уже решайте примеры.

а) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 10, \\ 3x + y - z = 4. \end{cases}$

Ответ: $x = 1,$
$y = 4,$
$z = 3.$

б) $\begin{cases} x + y - z = 72, \\ x + z - y = 26, \\ y + z - x = 14. \end{cases}$

Ответ: $x = 49,$
$y = 43,$
$z = 20.$

в) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$

Ответ: $x = y = z = 0$

Переходите к стр. 26.

§ 4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ n -го ПОРЯДКА И РЕШЕНИЕ СИСТЕМ n ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ

Определение. Определителем n -го порядка, который обозначается так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots\dots\dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

называется число, равное сумме произведений элементов какого-либо ряда определителя на их алгебраические дополнения.

Алгебраические дополнения элементов определителя любого порядка определяются так же, как для элементов определителя третьего порядка, вычеркивая соответствующие ряды и определяя знак.

Пример I. Разложить по элементам третьей строки определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} I & 2 & -5 & 3 \\ 2 & I & I & 4 \\ I & -I & 3 & I \\ I & I & I & I \end{vmatrix}$$

Получим:

$$\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ +1 & 1 & 1 \end{vmatrix} -1(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Пример 2. Вычислить наиболее рациональным способом определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ на стр. 32а.

Свойства определителей любого порядка - такие же как у определителей третьего порядка и доказываются аналогично.

С помощью определителей n -го порядка по формулам Крамера решается система n линейных уравнений с n неизвестными.

Дана система
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составляем определители Δ, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, ..., Δ_{x_n} .

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

. . . .

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_n \end{vmatrix} .$$

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое запишется по формулам Крамера:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad \ldots; \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.}$$

Если определитель системы равен нулю, то она или не имеет решения или имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - x_4 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ на стр. 32б.

На этом работа с пособием закончена.

а) <u>к стр. 8.</u> Подсчитаем определитель системы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$$

Так как $\quad = 0$, то система либо совсем не имеет решения, либо имеет их бесчисленное множество. Найдем Δ_x и Δ_y.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 7 \cdot 3 = 9 \neq 0$$

$\Delta_x \neq 0$, система не имеет решений.

Решите пример 3 на стр. 9.

б) к стр. 18. Вычтем из элементов второй и третьей строк элементы первой строки, а затем разложим полученный определитель по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Решайте пример 3 на стр. 18.

в) к стр. 15. Выносим из первого столбца множитель 3, из второго столбца множитель 4, из второй строки множитель 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 24 & 8 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 24 & 8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Продолжайте читать стр. 15.

а) <u>к стр. II.</u> Минор элемента a_2 есть определитель:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

Минор элемента b_2 есть определитель: $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

Минор элемента c_3 есть определитель: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Продолжайте читать стр. II.

б) <u>к стр. I2.</u>

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Теперь решайте примеры на стр. I2

в) <u>к стр. I5.</u> Определитель равен нулю, так как элементы первой и третьей строк пропорциональны.

Читайте стр. I6.

г) <u>к стр. I4.</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

разложим по элементам первой строки:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

разложим по элементам первого столбца:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 40-4=36.$$

Продолжайте читать стр. I4.

а) к стр. 14. Определитель равен нулю, так как первая и вторая строки одинаковы.

Переходите к стр. 15.

б) к стр. 16.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 9 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9+1\cdot 2 \\ -2 & 9 & 2+(-2)\cdot 2 \\ 3 & 6 & 3\quad 3\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 9 & -2 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Решайте пример к стр. 16.

в) к стр. 22. $x=3, \quad y=z=1$.

$\Delta=60; \quad \Delta_x=180; \quad \Delta_y=\Delta_z=60$

Продолжайте читать стр. 22.

г) к стр. 22. Например:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \end{vmatrix} =$$

прибавим к элементам второго столбца элементы третьего столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

так как столбцы пропорциональны.

Продолжайте читать стр. 22.

а) к стр. 26. Наиболее рационально разложить определитель по элементам того ряда, где больше всего нулей, в данном случае по элементам третьего столбца.

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

в полученных определителях третьего порядка получим в каком-либо ряду нули

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40 .$$

Переходите к стр. 27.

б) к стр. 28. $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_3 = 0$; $x_4 = -\frac{1}{3}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9; \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6; \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И.Привалов. Аналитическая геометрия, Физматгиз, Москва, 1962.

2. Н.В.Ефимов. Краткий курс аналитической геометрии, "Наука", Москва, 1965.

3. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1954.

4. Г.Н.Коржавин, Т.И. Прилуцкая, Л.И.Холина. Определители и система линейных уравнений, Новосибирский электротехнический институт, Новосибирск, 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

Ю.Н.КАЩЕЕВА

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Программированное учебное пособие

Редактор И.С.Колышева
Корректор Л.В.Сидорова

Подписано в печать 5.X.1971 г. ЕО 00375 Объем 2,25 п.л.
Тираж 1000 экз. Формат бумаги 60х84 1/16. Цена 10 коп.
Куйбышевский авиационный институт им. С.П.Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.
Областная типография им. Мяги, г. Куйбышев, ул.Венцека,
60. Заказ № 6374.