Министерство высшего и среднего специального образования Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С.П.Королева

В. В. К у л и к о в

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ И РАЗРЫВЫ ФУНКЦИИ
# СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Программированное учебное пособие

Утверждено на редакционном совете института 18/III-1976 г.

Куйбышев I 9 7 6

Пособие предназначено для студентов первого курса. Оно представляет собой разветвленную обучающую программу, рассчитанную на два практических занятия и два домашних задания.

Цель пособия - научить студентов исследовать функции на непрерывность, строить их графики вблизи точек разрыва, сравнивать бесконечно малые и применять эквивалентные бесконечно малые к нахождению пределов и в приближенных вычислениях.

Оно призвано активизировать и индивидуализировать процесс обучения.

Для работы с пособием требуется предварительное знакомство с теоремами о бесконечно малых и о пределах.

Ответственный редактор к.ф-м.н. доцент Г.Д.ТРОШИН

С О Д Е Р Ж А Н И Е

## КАК РАБОТАТЬ С ПОСОБИЕМ

Эту брошюру нельзя читать как обычную книгу. Изучив часть материала или разобрав поясняющий пример, нужно решить задачу или ответить на вопрос. Затем следует перейти на ту страницу, номер которой указан после одного из предлагаемых ответов. Там Вы найдете подтверждение правильности своего решения и дальнейшие указания или в случае ошибки получите необходимую консультацию.

В процессе работы рекомендуется сначала решить предложенную задачу в тетради, а затем выбирать нужный ответ. Что касается поясняющих примеров, то их следует разбирать устно.

Предполагается, что §§1-4 Вы проработаете на занятии. Затем будет дано домашнее задание № 1. На следующем занятии Вы изучаете первые три параграфа второй темы и получаете домашнее задание № 2. Для успешного выполнения домашних заданий в пособии имеются указания к решению задач и подробные решения некоторых из них. Однако указаниями следует пользоваться лишь после того, как сами подумаете над задачей.

А теперь переходите на стр. 5 и за работу.

# З А Н Я Т И Е 1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И РАЗРЫВЫ ФУНКЦИИ

## § 1. Определения непрерывности функции в точке и на интервале

Непрерывность функции выражает общую характерную черту многих явлений и процессов. Чтобы разобраться в понятии непрерывности, рассмотрим график некоторой функции $y=f(x)$


Допустим, что функция не определена лишь при $x=x_2$, т.е **на графике нет точки с абсциссой $x=x_2$**.

Очевидно, при $x=x_1$ и при $x=x_2$ график функции имеет разрыв, а при других значениях $x$, например, при $x=x_0$, линия непрерывна. Выясним, когда функцию следует считать непрерывной и когда разрывной.

Сначала заметим, что в точке $x_0$ функция определена и ее значение $f(x_0)$, а в точке $x_2$ – не определена.

Теперь сравним поведение функции вблизи точек $x_0$ и $x_1$. Из чертежа видно, что если $x \to x_0$, то значения функции $f(x)$ приближаются к числу $f(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$. Однако, если $x \to x_1$, то нельзя указать, к чему стремится $f(x)$. В самом деле, если $x \to x_1$, оставаясь меньше $x_1$ (т.е. $x \to x_1$ слева), то значения функции приближаются к числу $b_1$. Если же $x \to x_1$, оставаясь все время больше $x_1$ (т.е. $x \to x_1$ справа), то $f(x)$ стремится к числу $b_2$.

Итак, если разрыв функции в точке $x_2$ вызван тем, что функция не определена в этой точке, то разрыв в точке $x_1$ связан с отсутствием предела функции при $x \to x_1$ (поскольку левый предел $b_1$ не равен правому пределу $b_2$).

Теперь попытайтесь сформулировать определение функции, непрерывной в точке.

Переходите на стр. 5,а.

2-3652

а

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки (в том числе и в самой точке $x_0$ ) и если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в точке $x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

В противном случае $x_0$ называется точкой разрыва функции $f(x)$. (Напоминаем, что окрестностью точки $x_0$ называется любой интервал, содержащий эту точку).

Определение . Функция $f(x)$ называется непрерывной на некотором интервале, если она непрерывна в каждой его точке.

Прочитайте еще раз эти определения и заучите их.

Теперь ответьте на вопрос.

Известно, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$. Непрерывна ли функция $f(x)$ в точке $x_0$ ?

Ответы: 1) да — стр. 10,г;

2) нет — стр. 11,а.

Если Вы считаете верным первый ответ, то смотрите стр. 10 г; если второй, то переходите на стр. 11,а.

---

б

Пример. Докажем, пользуясь определением, что функция $f(x)=3x^2-4$ непрерывна в области ее определения.

Эта функция определена при всех значениях $x$ .

Возьмем произвольное значение $x=x_0$ и найдем значение функции $f(x_0)$, затем вычислим $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и убедимся, что выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

В нашем случае $f(x_0)=3x_0^2-4$, а $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0}(3x^2-4)=$ (по теоремам о пределах произведения и алгебраической суммы)

$$=\lim_{x \to x_0} 3x^2-\lim_{x \to x_0} 4=3\cdot\lim_{x \to x_0} x\cdot\lim_{x \to x_0} x-4=3x_0^2-4.$$

Итак, видим, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$. Значит, эта функция непрерывна в точке $x_0$. Т.к. точка $x_0$ была взята произвольно, то функция $f(x)=3x^2-4$ непрерывна при любом $x$, т.е. в интервале $(-\infty,\infty)$. Теперь решите задачу 1 на стр. 9,а.

а

Неправильно.

Повторите оба определения непрерывности функции (стр. 6,а и 8).

Какой вывод можно сделать из того, что $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3=f(-1)$ и функция $f(x)$ определена в интервале (-5,0), т.е. в окрестности точки $x=-1$ ?

Что из себя представляет разность $f(-1+\Delta x)-f(-1)$ ?

Завершите решение этой задачи и перейдите на стр. 11,в.

---

б

## Второе определение непрерывности функции

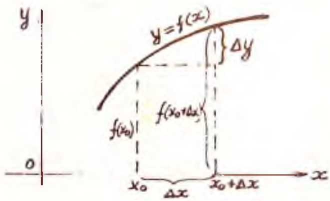
Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ (в том числе и в самой точке $x_0$ ). Значение функции в этой точке $f(x_0)$.

Любую точку $x_1$ из этой окрестности можно записать в виде $x_1=x_0+\Delta x$ , где $\Delta x$ есть число положительное или отрицательное, называемое приращением аргумента $x$ .

Можно сказать, что мы перешли от $x_0$ к $x_1$ , придав аргументу $x$ приращение $\Delta x$ . Тогда новое значение функции будет равно $f(x_0+\Delta x)$.

Разность $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ называется приращением функции в точке $x_0$ , вызванным приращением аргумента $\Delta x$ .

Геометрически это выглядит так:




Очевидно, приращение $\Delta y$ , как и $\Delta x$ , может быть как положительным, так и отрицательным. Кроме того, может оказаться, что $\Delta y=0$ при $\Delta x\neq 0$ .

Теперь попытайтесь сформулировать определение непрерывности функции в точке $x_0$ , используя понятия $\Delta x$ и $\Delta y$ .

Затем перейдите на стр. 8.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, т.е. если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определения 1 и 2 эквивалентны: каждое из них следует из другого.

Рассмотрим пример. Доказать, пользуясь определением 2, что функция $f(x)=\cos x$ непрерывна в области ее определения.

Эта функция определена при всех значениях $x$.

Возьмем произвольное значение $x=x_0$ и дадим ему произвольное приращение $\Delta x$. Получим точку $x=x_0+\Delta x$. Начальное значение функции $f(x_0)=\cos x_0$, а новое значение $f(x_0+\Delta x)=\cos(x_0+\Delta x)$.

Тогда приращение функции будет равно $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$
$$=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0=-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Теперь найдем предел приращения функции $\Delta y$ при $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Big[\underbrace{-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{ограниченная ф-я}}\underbrace{\sin\frac{\Delta x}{2}}_{\text{бесконечно малая}}\Big]=0$$ при любом $x_0$,

т.к. произведение бесконечно малой величины на ограниченную есть величина бесконечно малая, а ее предел равен 0.

Таким образом, функция $y=\cos x$ определена в окрестности точки $x_0$, т.е. в интервале, содержащем точку $x_0$, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Значит, она непрерывна в точке $x_0$. Т.к. точка $x_0$ была взята произвольно, функция $y=\cos x$ непрерывна при всех значениях $x$, т.е. во всей области определения.

Теперь самостоятельно решите задачу 2

на стр. 9, б.

а

Задача 1

Пользуясь определением 1, выяснить, при каких значениях $x$ непрерывна функция $y=\frac{x^2-5}{x+1}$.

Ответы : 1) функция непрерывна на $(-\infty, \infty)$ стр. 11,б;

2) функция непрерывна не при всех значениях $x$. стр. 14,б.

---

б

Задача 2

Известно, что функция $y=f(x)$ определена в интервале (-5,0), ее значение $f(-1)=3$ и, кроме того, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$.

Чему равен $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(-1+\Delta x)-f(-1)]$ ?

Ответы : 1) 0 стр. 11,в;

2) числу, отличному от нуля стр. 7,а.

Если Вы затрудняетесь ответить на этот вопрос, то попробуйте сначала решить задачу 3 (стр. 9,в).

---

в

Задача 3

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а ее приращение

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Чему равен $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ?

Чему равен $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y$ ?

Ответив на эти вопросы,

перейдите на стр. 10,а.

а

Давайте вспомним определения 1 и 2 непрерывности функции в точке (см. стр. 6,а и 8 ).

Т.к. по условию задачи функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ , то согласно определению 1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ , а по определению 2 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Теперь запишите выражение для приращения функции в точке $x_0 = -1$ и приступайте к решению задачи 2 на стр. 9,б.

---

б

Неверно. Видимо, Вы совсем не думали над решением и выбрали ответ наугад. Такое несерьезное отношение к делу приведет к тому, что Вы ничему не научитесь и зря потеряете время.

Вернитесь на стр. 14,а и дайте обоснование своего ответа.

---

в

Неверно.

Здесь оба односторонних предела конечны. Чтобы их найти, необходимо сделать преобразование, позволяющее сократить на множитель, который стремится к нулю.

Вернитесь на стр. 22,в или на стр. 26,а .

---

г

Неверно.

Разве может бесконечный предел совпасть с конечным значением функции $f(x_0)$ ? (Это в случае, когда функция $f(x)$ определена в точке $x_0$ ).

А как решается вопрос в другом случае, когда функция не определена в точке $x_0$ ?

Подумайте и переходите на стр. 11,а.

а

Правильно.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то функция имеет разрыв в точке $x_0$.

В самом деле, если $f(x)$ не определена в точке $x_0$, то функция разрывна независимо от того, чему равен ее предел при $x\to x_0$. Если же функция определена в точке $x_0$, и ее значение $f(x_0)$, то нарушается равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, т.к. предел бесконечен, а $f(x_0)$ - определенное число.

Напоминаем, что символ $\infty$ не является числом.

Переходите к рассмотрению примера на стр. 6, б.

---

б

Вы ошиблись.

Разве функция может быть непрерывной в точке, где она не определена?

Найдите область существования функции и уточните свое доказательство. Затем перейдите на стр. 14, б.

---

в

Совершенно верно.

Вы показали понимание обоих определений непрерывности функции в точке.

Т.к. функция $y=f(x)$ по условию определена в $(-5,0)$, т.е. в окрестности точки $x=-1$, и, кроме того, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$, она непрерывна в точке $x=-1$.

Поскольку $f(-1+\Delta x)-f(-1)$ есть приращение функции в точке $x=-1$, то согласно определению 2 имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(-1+\Delta x)-f(-1)]=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Переходите к § 2 на стр. 13.

(а) Найдите область определения функции. Точка, в которой данная функция не определена, и есть точка разрыва.

Затем определите пределы функции слева и справа в этой точке. При их отыскании нужно вспомнить теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

Вернитесь на стр. 22, а.

---

(б) Умножьте числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{1+5x}+1)$ и сократите на множитель, стремящийся к нулю.

Вернитесь на стр. 22, в.

---

(в) Указания к решению домашних задач.

4. Используйте определения 1 и 2 непрерывности функции в точке. См. решение аналогичной задачи на стр. 9, б.

5. См. примеры на стр. 6, б и 8.

6. Найдите $f(1-0)$, $f(1+0)$, $f(1)$ и приравняйте их.

7. Учтите, что $\lim\limits_{u\to-\infty} \operatorname{arcctg} u=\pi$, а $\lim\limits_{u\to+\infty} \operatorname{arcctg} u=0$.

См. решение подобной задачи на стр. 25.

8. Учтите, что $\lim\limits_{u\to-\infty} 2^u=0$, а $\lim\limits_{u\to+\infty} 2^u=+\infty$.

Напоминаем, что величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая и наоборот.

9. Исследуйте точки разрыва функции $\frac{1}{\lg x}$ и точку $x=-10$, где меняется формула, задающая функцию.

10. При нахождении односторонних пределов в точке $x=-1$ умножьте члены дроби на выражение, сопряженное числителю.

11. Воспользуйтесь равенством $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$. См. решение задачи на стр. 26, б.

Решения задач 8,9,10 Вы можете проверить на стр. 37 - 39.

## § 2. Непрерывность элементарной функции

Выше мы установили, что каждая из функций $y = 3x^2 - 4$, $y = \frac{x^2-5}{x+1}$, $y = \cos x$ непрерывна в тех точках, в которых она определена. Этот результат обобщается следующей теоремой.

> Всякая элементарная функция непрерывна в области определения.

Напомним, что элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций (степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических, обратных тригонометрических) и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Из приведенной теоремы следует, что если элементарная функция $f(x)$ определена в точке $x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Таким образом, чтобы найти предел функции, непрерывной в точке $x_0$ (в частности, предел элементарной функции, которая определена в точке $x_0$), достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента $x$ его предельное значение $x_0$.

Запомните это правило.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{2-x} + \operatorname{arctg}\frac{2}{x}}{x^2-3}$

Решение. Функция $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2-x} + \operatorname{arctg}\frac{2}{x}}{x^2-3}$ элементарная и определена в точке $x = 2$.

Значит, она непрерывна в этой точке, и предел находится подстановкой:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{\sqrt[3]{2-2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{2}}{2^2-3} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Переходите на стр. 14, а.

а

Попробуйте ответить на вопрос.

Можно ли сразу применить указанное выше правило нахождения предела элементарной функции в следующих случаях:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log_2(1+x)}{\sqrt{5-x}}$

Ответы : I. 1) можно 2) нельзя стр. 10, б;

II. 1) можно 2) можно стр. 18, б;

III. 1) нельзя 2) можно стр. 16, в,

---

б

Правильно, если оказалось, что функция непрерывна при всех значениях $x$, кроме $x=-1$.

Действительно, функция $y=\frac{x^2-5}{x+1}$ определена при $x\neq -1$.

Возьмем произвольное фиксированное значение $x=x_0$ из области определения ( т.е. $x_0\neq -1$ ) и найдем $f(x_0)=\frac{x_0^2-5}{x_0+1}$.

Затем найдем $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-5}{x+1}=$

Применяем теоремы о пределах, в частности, теорему о пределе частного, что возможно, т.к. члены дроби имеют конечные пределы и предел знаменателя $\lim\limits_{x\to x_0}(x+1)=\lim\limits_{x\to x_0}x+1=x_0+1\neq 0$ (поскольку мы взяли $x_0\neq -1$ ).

$$=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}(x^2-5)}{\lim\limits_{x\to x_0}(x+1)}=\frac{x_0^2-5}{x_0+1}.$$

Таким образом, функция определена в окрестности точки $x_0$ (т.е. в некотором интервале, содержащем точку $x_0$ ) и выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Значит, она непрерывна в точке $x_0$ .

В силу произвольности значения $x_0$ ( $x_0\neq -1$ ) доказательство справедливо при любом $x\neq -1$ . Значит, функция непрерывна в своей области определения, а в точке $x=-1$ разрывна.

Переходите на стр. 7, б.

Совершенно верно.

Точки разрыва второго рода не исчерпываются точками бесконечного разрыва.

Например, рассмотрим функцию $y = \cos\frac{1}{x}$. Она не определена лишь при $x=0$. Точка $x=0$ есть точка разрыва второго рода, т.к. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \cos\frac{1}{x}$ не существует, т.е. нет ни конечного предела, ни бесконечного.

Заметим, что предел справа также не существует.

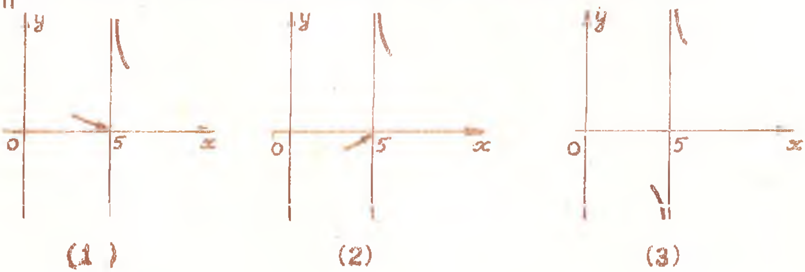
Итак, точка $x=0$ не является точкой бесконечного разрыва.

Проанализировав определения точек разрыва I и II рода (стр. 21), дадим развернутое определение точки разрыва II рода.

Точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$, если хотя бы один из пределов слева или справа в точке $x_0$ не существует или бесконечен.

Теперь решите задачу.

Исследовать точку разрыва функции $y = 2^{\frac{3}{x-5}}$ и определить, какой график ей соответствует (вблизи точки разрыва).




Ответы : (1) стр. 24, б;

(2) стр. 18, в;

(3) стр. 23, а.

Если Вам нужна консультация по вопросу о построении графика функции вблизи точки разрыва, то см. прил. II (стр. 36).

а)

Вы ошиблись.

Функция $y=\frac{2}{(x+1)^2}$ положительна при всех значениях $x$ из области определения. Поэтому ее график будет расположен выше оси ОХ.

Найдите еще раз левый предел функции, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{2}{(x+1)^2}$, и постройте график функции при $x$, близких к (-1), но меньших (-1).

Затем вернитесь к ответам на стр. 19.

---

б)

Неверно.

Хотя функция и определена в точке $x=3$, она не является непрерывной в этой точке, поскольку не существует $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. Убедитесь в этом, найдя односторонние пределы функции $f(3-0)$ и $f(3+0)$.

Затем перейдите на стр. 20,б.

---

в)

Правильно.

В первом примере правило сразу применить нельзя, т.к. функция $\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ не определена в точке $x=0$.

Во втором примере правило применимо: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log_2(1+x)}{\sqrt{5-x}}=$

(подставляем вместо $x$ его предельное значение 1)

$$=\frac{\log_2(1+1)}{\sqrt{5-1}}=\frac{1}{2}$$

Так можно поступать, потому что функция $\frac{\log_2(1+x)}{\sqrt{5-x}}$ — элементарная и определена в точке $x=1$.

Переходите на стр. 17.

## § 3. Исследование на непрерывность функции, заданной несколькими формулами

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 2 \\ x-1 & \text{при } x>2 \end{cases}.$$

Сразу можно отметить, что она непрерывна в интервалах $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$. В самом деле, в интервале $(-\infty, 2)$ $f(x)=1$, а элементарная функция $y=1$ непрерывна в своей области определения (на всей числовой оси), значит, и при $x<2$. Аналогично можно доказать непрерывность функции $f(x)$ на интервале $(2, +\infty)$, в котором она задана формулой $f(x)=x-1$.

Особо исследуем точку $x=2$, где меняется формула, задающая функцию. (В таких точках возможен разрыв функции).

Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x=2$, причем $\underline{f(2)=1}$. Теперь проверим, выполняется ли равенство $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

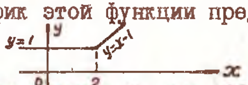
Чтобы вычислить $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, найдем левый и правый пределы функции при $x\to 2$. (Понятие левого и правого пределов дается в прил. 1 на стр. 35 ). Левый предел $f(2-0)$ равен

$f(2-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 1=1$, т.к. слева от точки $x=2$ функция $f(x)=1$.

Правый предел $f(2+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-1)=2-1=1$.

Т.к. существуют пределы слева и справа и они равны, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (когда $x$ стремится к 2 произвольным образом) существует и равен $f(2-0)=f(2+0)$.

Итак, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$, и значение функции в точке $x=2$ тоже равно $\underline{1}$ ( $f(2)=1$ ). Значит, функция $f(x)$ непрерывна и в точке $x=2$. График этой функции представляет собой сплошную линию без разрывов.




<u>Теперь решите задачу на стр. 18, а.</u>

5-3652

а

Задача.

Является ли функция

$$y=\begin{cases} 0 & \text{при } x<3 \\ x-1 & \text{при } x\geqslant 3 \end{cases}$$

непрерывной в точке $x=3$ ? Построить график функции.

Ответы : 1) да стр. 16,б;

2) нет стр. 20,б.

---

б Вы ошиблись в первом примере. Посмотрите, разве функция $y=\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ определена при $x=0$ ?

Переходите на стр. 16,в.

---

в Не совсем так.

Односторонние пределы Вы нашли правильно: $f(5-0)=0$ , $f(5+0)=+\infty$ . А вот чертеж выбран неверно. Вспомните, какие значения (по знаку) принимает показательная функция $y=2^{\frac{3}{x-5}}$ ?

Ответив на этот вопрос, Вы легко найдете на стр. 15 нужный ответ.

---

г

Неверно.

Однако, если Вы установили, что один из односторонних пределов равен $\frac{5}{2}$ , то были на верном пути.

Найдите еще раз другой односторонний предел и определите скачок в точке $x=0$ : $f(0+0)-f(0-0)$ .

Затем вернитесь к ответам на стр. 22,в.

Правильно.

Функция $f(x)=\frac{1}{3-x}$ определена при всех значениях $x$, кроме $x=3$. Значит, $x=3$ – точка разрыва. Чтобы выяснить род точки разрыва, найдем пределы слева и справа.

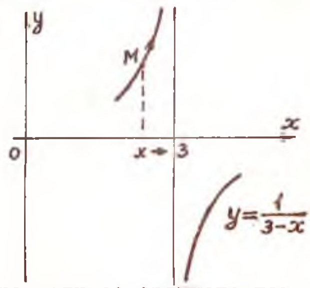
Предел слева $f(3-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{1}{3-x}=+\infty$. В самом деле, функция $\frac{1}{3-x}$ при $x\to 3$ является бесконечно большой величиной как обратная по отношению к бесконечно малой величине $(3-x)$, причем $\frac{1}{3-x}$ – бесконечно большая положительная величина, т.к. $\frac{1}{3-x}>0$ при $x<3$.

Аналогичным образом находим правый предел

$$f(3+0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{1}{3-x}=-\infty.$$

Здесь знак минус объясняется тем, что при $x>3$ функция $\frac{1}{3-x}$ отрицательна.

Значит, точка $x=3$ есть точка разрыва второго рода. График функции в окрестности точки $x=3$ имеет вид :

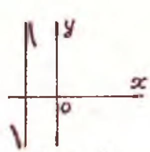



Для построения графика функции вблизи точки разрыва нужно знать левый и правый пределы функции в этой точке. В нашей задаче из того, что левый предел $f(3-0)=+\infty$ следует, что точка $M(x, f(x))$ будет перемещаться по графику неограниченно вверх, когда ее абсцисса $x$ стремится к 3, оставаясь меньше 3 ( т.к. в этом случае ордината точки $M$ неограниченно возрастает). Подобными рассуждениями можно обосновать участок графика при $x>3$.

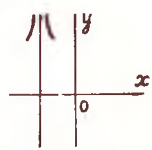
Заметим, что прямая $x=3$ является асимптотой графика функции $y=\frac{1}{3-x}$, а сам график есть гипербола.

Решите задачу.

Установить род точки разрыва функции $y=\frac{2}{(x+1)^2}$ и определить, какой из приведенных чертежей соответствует графику функции вблизи точки разрыва.



черт.1



черт.2

Ответы : 1) точка разрыва I рода, черт. 2 стр. 20,а;

2) точка разрыва II рода, черт. 1 стр. 16,а;

3) Точка разрыва II рода, черт. 2 стр. 27,в.

а) Вы ошиблись. Вспомните классификацию точек разрыва (см. стр. 21) **и вернитесь на стр. 19.**

---

б) Правильно.

Данная функция не является непрерывной в точке $x=3$.

Согласно определению 1, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки $x_0$ (в том числе и в самой точке $x_0$ ) и если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Данная функция определена в точке $x=3$ (и вблизи этой точки), ее значение $f(3)=2$, а вот $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ не существует. Убедимся в этом.

Функция $f(x)$ слева и справа от точки $x=3$ задана разными формулами. Поэтому вопрос о существовании $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ можно решить, находя пределы слева и справа, т.е. $f(3-0)$ и $f(3+0)$.

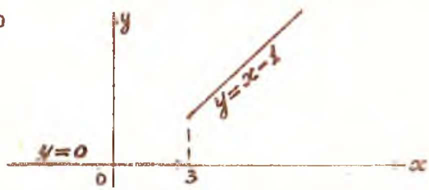
Найдем эти односторонние пределы:

$$f(3-0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} 0 = 0,$$

$$f(3+0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-1)=3-1=2.$$

Т.к. $f(3-0)\neq f(3+0)$, то не существует $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ (т.е. когда $x$ стремится к 3 произвольным образом).

Итак, равенство $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ не выполняется вследствие того, что левая часть не существует. Значит, $x=3$ есть точка разрыва функции. График этой функции представляет собой разрывную линию




Нарисованная у точки (3,0) стрелка указывает, что эта точка не принадлежит графику.

Теперь вернитесь на стр.5, прочитайте ее еще раз, сформулируйте определение 1 непрерывности функции и приступайте к изучению § 4 на стр. 21.

## § 4. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва

Мы знаем, что согласно определению 1, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Очевидно, это равенство возможно, когда каждая из его частей существует.

Как известно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (т.е. предел функции $f(x)$ при произвольном стремлении $x$ к $x_0$) существует тогда и только тогда, когда существуют пределы слева $f(x_0-0)$ и справа $f(x_0+0)$ и они равны между собой.

Итак, для непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий :

1) функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ определенное значение $f(x_0)$ и определена в окрестности этой точки;
2) существуют равные односторонние пределы $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, т.е. существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) эти односторонние пределы равны значению $f(x_0)$
$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

Определение. Функция $f(x)$ называется разрывной в точке $x_0$ ,если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке $x_0$ не удовлетворяет хотя бы одному их условий непрерывности. В этом случае точку $x_0$ называют точкой разрыва функции.

Точки разрыва классифицируют следующим образом.

Определение. Если для функции $f(x)$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ , а равенство $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ нарушается, то $x_0$ называется точкой разрыва 1 рода.

Например, в рассмотренной выше задаче $x=3$ есть точка разрыва 1 рода.

Определение. Всякая точка разрыва не первого рода называется точкой разрыва второго рода.

Запомните эти определения. Решите задачу на стр. 22,а.

а

Задача.

Найти точку разрыва функции $f(x)=\frac{1}{3-x}$ и выяснить, какого она рода.

Построить график функции вблизи точки разрыва.

Ответы : 1) первого рода стр. 27,а;

2) второго рода стр. 19.

Если Вам нужна помощь, то обратитесь к стр. 12,а.

---

б

Вы считаете, что всякая точка разрыва П рода есть точка бесконечного разрыва. Это не так.

Вспомните или посмотрите на стр. 21 определения точек разрыва 1 и П рода. Когда возможен разрыв второго рода? Попробуйте дать развернутое определение точки разрыва второго рода.

Затем перейдите на стр. 15.

---

в

Решите задачу.

Определить род точки разрыва функции $y=\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ и найти скачок, если окажется разрыв первого рода.

Построить схематический график функции вблизи точки разрыва.

Ответы : 1) точка разрыва П рода стр. 10,в;

2) скачок равен 0 стр. 28;

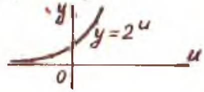
3) скачок равен $\frac{5}{2}$ стр. 18,г.

Если Вас затрудняет вычисление односторонних пределов, то обратитесь к стр. 12,б.

а) Неверно.

Ошибка допущена при нахождении левого предела $f(5-0)$.

Вспомните график показательной функции $y=2^u$




и учтите, что $\lim\limits_{u\to-\infty} 2^u = 0$.

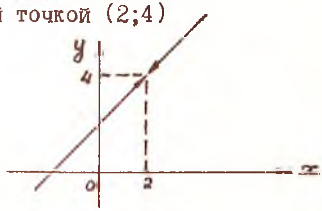
Найдите еще раз левый предел данной функции и вернитесь к ответам на стр.15.

---

б) Верно, в точке $x=2$ функция имеет разрыв 1 рода, и скачок равен 0.

В самом деле, функция не определена лишь при $x=2$, и оба односторонних предела равны 4 : $f(2-0)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(x+2)=4$, аналогично $f(2+0)=4$. Отсюда следует, что а) скачок равен 4-4 = 0, б) существует $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$, и он равен 4.

График функции $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ представляет собой прямую линию $y=x+2$ с выколотой точкой (2;4)




Если дополнительно положить для данной функции $f(2)=4$, т.е. доопределить ее в точке $x=2$, то функция станет непрерывной и в этой точке (т.к. будет иметь место равенство $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$ ). Геометрически это означает, что добавление точки (2; 4) устраняет разрыв графика. Поэтому точку $x=2$ называют точкой устранимого разрыва.

Попробуйте дать определение точки устранимого разрыва.

Затем перейдите на стр. 26,б.

а) Не совсем так.

Функцию $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ мы исследовали раньше и установили, что $x=-1$ – точка разрыва П рода. А может ли точка разрыва П рода быть точкой устранимого разрыва функции? Почему?

Вернитесь на стр. 26,б, прочитайте определение точки устранимого разрыва и завершите решение задачи.

---

б) Правильно.

Функция $y=2^{\frac{3}{x-5}}$ имеет разрыв лишь в точке $x=5$, причем второго рода, т.к. $f(5-0)=0$, а $f(5+0)=+\infty$.

В самом деле, левый предел

$$f(5-0)=\lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} 2^{\frac{3}{x-5}} = \lim_{u\to -\infty} 2^u = 0,$$

[Делаем замену $\frac{3}{x-5}=u$. Тогда новая переменная $u\to-\infty$, если $x\to 5$, оставаясь меньше 5.]

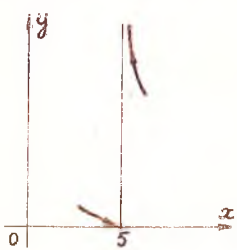
а правый предел

$$f(5+0)=\lim_{\substack{x\to 5\\ x>5}} 2^{\frac{3}{x-5}} = \lim_{u\to +\infty} 2^u = +\infty.$$

(Положим снова $\frac{3}{x-5}=u$. Тогда $u\to+\infty$, если $x\to 5$ и $x>5$)

Поскольку один из односторонних пределов бесконечен, точка $x=5$ является еще и точкой бесконечного разрыва.

График этой функции вблизи точки $x=5$ схематически выглядит так




Следует подчеркнуть, что когда $x\to 5$, оставаясь меньше 5, график функции "подходит" к точке (5,0) сверху, а не снизу, т.к. показательная функция $2^{\frac{3}{x-5}}>0$. Еще укажем, как получается точка (5,0). Ее абсцисса 5 есть точка разрыва, а ордината 0 – левый предел функции в этой точке.

Теперь повторите еще раз определение точки разрыва 1 рода и перейдите на стр. 25.

Точка $x_0$ называется точкой разрыва первого рода, если функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, а равенство $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ нарушается.

Рассмотрим пример.

Исследовать на непрерывность функцию $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{3-x}$.

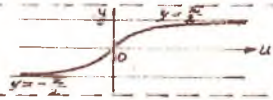
Решение. Эта функция элементарная и определена при всех значениях $x$, кроме $x=3$. Значит, она непрерывна при $x\neq 3$, а $x=3$ – точка разрыва. Выясним, какого она рода. Для этого найдем $f(3-0)$ и $f(3+0)$.

$$f(3-0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{3-x}=$$

(Делаем замену $\frac{1}{3-x}=u$. Тогда $u\to+\infty$, если $x\to 3$ слева)

$$=\lim_{u\to+\infty}\operatorname{arctg}u=\frac{\pi}{2}.$$

Вспомните график функции $y=\operatorname{arctg}u$



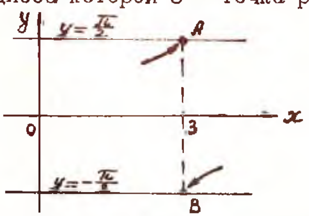

$$f(3+0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{3-x}=\lim_{u\to-\infty}\operatorname{arctg}u=-\frac{\pi}{2}.$$

Здесь, как и выше, положили $\frac{1}{3-x}=u$, но теперь $u=\frac{1}{3-x}<0$ при $x>3$. Поэтому $u\to-\infty$ при $x\to 3$.

Итак, функция $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{3-x}$ имеет в точке $x=3$ конечные односторонние пределы. Значит, $x=3$ – точка разрыва 1 рода.

Теперь построим схематический график функции вблизи точки $x=3$.

Т.к. левый предел $f(3-0)=\frac{\pi}{2}$, то сначала построим точку $A(3,\frac{\pi}{2})$, а затем подведем с левой стороны линию к этой точке. Аналогичным образом подводим график с правой стороны к точке $B(3,-\frac{\pi}{2})$, абсцисса которой 3 – точка разрыва, а ордината $(-\frac{\pi}{2})$ есть $f(3+0)$.




Подумайте, почему график нужно расположить между прямыми $y=-\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}$.

Напомним, что скачком функции $f(x)$ в точке разрыва $x_0$ ( в точке разрыва 1 рода) называется разность

$$f(x_0+0)-f(x_0-0).$$

В нашем примере скачок равен $(-\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{2}=-\pi$.

Переходите на стр. 26,а.

а

Теперь посмотрите на часы. Если до конца занятия осталось более 12 минут и предыдущую задачу ( с функцией $y=2^{\frac{3}{x-5}}$ ) Вы решили сразу без ошибок, то перейдите на стр. 22,в.

В противном случае решите следующую задачу.

Определить род точки разрыва функции $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ и найти скачок, если имеется разрыв первого рода. Построить график функции.

Ответы: 1) точка разрыва П рода — стр. 10,в;
2) скачок равен 0 — стр. 23,б;
3) скачок равен 4 — стр. 29,а.

---

б

Точкой устранимого разрыва функции $f(x)$ будем называть такую точку разрыва первого рода $x_0$ , когда $f(x_0-0)=f(x_0+0)$

Задача.

Можно ли устранить разрывы функций

1) $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

2) $g(x)=\begin{cases} 1+x^2 & \text{при } x<-1 \\ x+3 & \text{при } x>-1 \end{cases}$

3) $\varphi(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\le -1 \\ x+3 & \text{при } x>-1 \end{cases}$

в точке $x=-1$ ?

Ответы : I. 1)можно, 2)можно, 3)нельзя — стр.24,а;
П. 1)можно, 2)нельзя, 3)можно — стр.27,б;
Ш. 1)нельзя, 2)можно, 3)нельзя — стр.29,б.

а) Неверно.

Точку разрыва функции $y=\frac{1}{3-x}$ Вы, наверно, нашли сразу. Это точка $x=3$, т.к. функция определена всюду, кроме $x=3$. Теперь, чтобы выяснить род точки разрыва, найдите еще раз пределы слева и справа, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{1}{3-x}$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{1}{3-x}$. Будут ли они оба конечны?

Постройте график функции, придавая переменной $x$, например, значения 2,5; 2,8; 2,9 и 3,5; 3,2; 3,1; 3,01.

Затем перейдите на стр. 19.

---

б) Плохо. Видимо, Вы совсем не думали над решением задачи. А задача эта последняя. Давайте уж решим её.

Обратите внимание на первую функцию. Её разрыв мы уже исследовали (см. стр. 27, в)

Вернитесь на стр. 26, б.

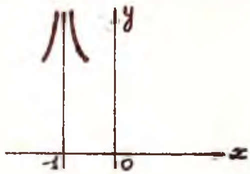
---

в) Верно.

Функция $y=\frac{2}{(x+1)^2}$ не определена в точке $x=-1$. Эта точка есть точка разрыва второго рода, т.к. односторонние пределы бесконечны:
$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{2}{(x+1)^2}=+\infty,\qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{2}{(x+1)^2}=+\infty.$$

Вы правильно подметили, что функция является бесконечно большой величиной при $x\to -1$, причем положительной, т.к. $\frac{2}{(x+1)^2}>0$ при всех значениях $x$ $(x\neq -1)$.

Поэтому график функции вблизи точки разрыва $x=-1$ имеет вид:




Точку разрыва II рода будем называть точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Значит, можно сказать, что $x=-1$ есть точка бесконечного разрыва.

Как Вы думаете, есть ли точки разрыва II рода, которые не являются точками бесконечного разрыва.

Ответы: 1) есть, стр. 15; 2) нет, стр. 22, б.

Верно, в точке $x=0$ функция $y=\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ имеет разрыв 1 рода, и скачок равен 0.

Посмотрите, правильно ли Вы решили эту задачу.

Точка $x=0$ есть точка разрыва, т.к. функция не определена в этой точке (а в сколь угодно близких точках определена).

Попробуем сразу найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ = (умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+5x}-1)(\sqrt{1+5x}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+5x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x(\sqrt{1+5x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+5x}+1}=$$

(Почему этот предел можно найти подстановкой вместо $x$ его предельного значения 0?) $=\dfrac{5}{\sqrt{1+5\cdot 0}+1}=\dfrac{5}{2}$.

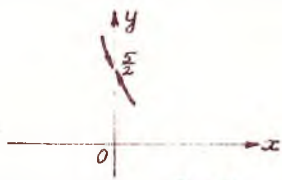
Отсюда следует, что существуют правый и левый пределы, причем

$$f(0+0)=f(0-0)=\frac{5}{2}.$$

Следует заметить, что односторонние пределы можно было найти отдельно ( указанным выше способом).

Итак, $x=0$ - точка разрыва 1 рода, а скачок функции в этой точке равен $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=0$.

График функции вблизи точки разрыва имеет вид:




Если функцию доопределить в точке $x=0$, положив $f(0)=\frac{5}{2}$, то она станет непрерывной и в этой точке (т.к. будет иметь место равенство $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ ). Геометрически это означает, что добавление точки $(0, \frac{5}{2})$ устраняет разрыв графика. Поэтому точку $x=0$ называют точкой устранимого разрыва.

Попробуйте дать определение точки устранимого разрыва.

Затем перейдите на стр. 28,б.

а) Неверно.

Однако, если Вы установили, что один из односторонних пределов равен 4, то были на верном пути.

Найдите еще раз другой односторонний предел ( сначала сократив дробь на $x-2$ ) и определите скачок функции в точке $x=2$, т.е. $f(2+0)-f(2-0)$

Затем вернитесь к ответам на стр. 26, а.

---

б) Правильно.

Согласно определению, точка разрыва $x_0$ является точкой устранимого разрыва функции, если в этой точке односторонние пределы конечны и равны между собой, т.е. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

1) Разрыв функции $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ в точке $x=-1$ устранить нельзя, т.к. $x=-1$ - точка разрыва второго рода. Раньше (см. стр. 27 в) мы установили, что односторонние пределы в этой точке бесконечны.

2) Функция $g(x)=\begin{cases}1+x^2 & \text{при } x<-1\\ x+3 & \text{при } x>-1\end{cases}$ имеет точку устранимого разрыва $x=-1$.

В самом деле, $g(-1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(1+x^2)=2$,

$g(-1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x+3)=2$, значит $g(-1-0)=g(-1+0)$.

Разрыв можно устранить, если доопределить функцию в точке $x=-1$ положив $g(-1)=2$.

3) Функция $\varphi(x)=\begin{cases}x^2 & \text{при } x\le-1\\ x+3 & \text{при } x>-1\end{cases}$, хотя и определена всюду, имеет в точке $x=-1$ разрыв 1 рода. В самом деле,

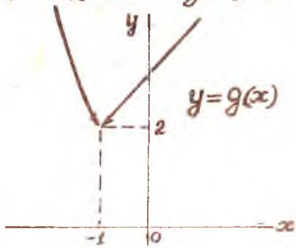
$\varphi(-1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}x^2=1$ $\qquad \varphi(-1+0)=2$.

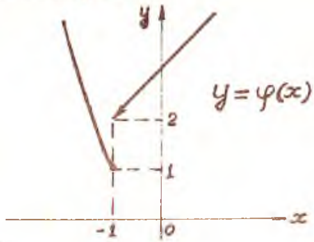
Разрыв устранить нельзя, т.к. $\varphi(-1-0)\ne\varphi(-1+0)$.

Теперь постройте графики функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ и сравните их.

Затем переходите на стр. 30.

Графики функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ выглядят так:



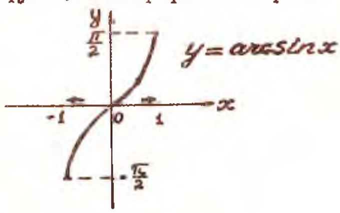

Сравнивая эти графики, мы видим, что если в первом случае добавление новой точки (-1; 2) устраняет разрыв линии (это когда мы доопределяем функцию, полагая $g(-1)=2$ ), то во втором случае никакая новая точка (-1, $y_0$ ), взятая вместо точки (-1; 1), не"склеит" ветви графика функции $y=\varphi(x)$.

## З а к л ю ч е н и е

Рассмотрим элементарную функцию $y=\arcsin x$. Она определена и непрерывна на отрезке $[-1,1]$. Но как следует понимать непрерывность функции в граничных точках $x=-1$ и $x=1$ ?

Т.к. данная функция определена только слева от точки $x=1$, можно рассматривать лишь левый предел $f(1-0)$. Поэтому непрерывность функции $y=\arcsin x$ в точке $x=1$ понимается так: $\lim\limits_{x \to 1} \arcsin x = \arcsin 1$, т.е. $f(1-0)=f(1)$.
Это равенство определяет одностороннюю непрерывность, а именно, непрерывность слева в точке $x=1$.

Аналогично понимается непрерывность функции в точке $x=-1$
Только при $x=-1$ функция непрерывна справа.

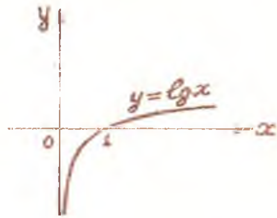



Переходите на стр. 31.

Итак, функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке, причем непрерывность на концах отрезка понимается так: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)=f(b)$.

Еще отметим, что если граничная точка $x_0$ не принадлежит области определения функции, то она является точкой разрыва.

Например, точка $x=0$ есть точка разрыва функции $y=\lg x$, т.к. функция не определена в этой точке ( а в сколь угодно близких точках справа от $x=0$ определена). Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lg x=-\infty$, то $x=0$ есть точка бесконечного разрыва.




Все остальные точки, где функция не определена ( $x<0$ ), не являются точками разрыва потому, что вблизи этих точек функция также не существует. Очевидно, они не будут и точками непрерывности.

Занятие 1 подошло к концу. На стр. 33 помещено домашнее задание № 1, при выполнении которого рекомендуется использовать данное пособие. В нем Вы найдете указания и верные ответы. Кроме того, Вы сможете проверить решение некоторых задач.

Перед выполнением задания Вам следует повторить рассмотренные на занятии определения.

Все они помещены на стр. 32.

## Определения

1. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$ , если она определена в некоторой окрестности этой точки (в том числе и в самой точке $x_0$ ) и если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в точке $x_0$ , т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$ , если она определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0 .$$

3. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.
4. Функция $f(x)$ называется разрывной в точке $x_0$ , если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке $x_0$ не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности. В этом случае точка $x_0$ называется точкой разрыва функции.
5. Если для функции $f(x)$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ , а равенство $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ нарушается, то $x_0$ называется точкой разрыва 1 рода.
В частности, если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ , то $x_0$ – точка устранимого разрыва; если же $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ , то $x_0$ – точка неустранимого разрыва 1 рода.
6. Если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ не существует или бесконечен, то точка $x_0$ называется точкой разрыва П рода.
7. Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой его точке,
8. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$ , если она непрерывна в каждой его точке, причем непрерывность на концах отрезка понимается так: $f(a+0)=f(a)$ , $f(b-0)=f(b)$.

## Домашнее задание № 1

1. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарной функции .
2. Может ли функция иметь разрыв в точке, в которой она определена ?
3. Как можно выделить точки разрыва функции ?
4. Известно, что функция $y=f(x)$ определена при любом $x$ , ее значение $f(2)=5$ и, кроме того, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$. Чему равен $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(2-\Delta x)-f(2)]$ ?
5. Доказать, пользуясь определением, что функция $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ непрерывна в области определения. Установить род точек разрыва. Построить схематично график функции вблизи точек разрыва.
6. Пусть $$f(x)=\begin{cases} x+1, \text{если} & x\le 1; \\ 3+ax^2, \text{если} & x>1. \end{cases}$$ При каком выборе числа $a$ функция $f(x)$ будет непрерывной ? Построить ее график.

Определить род точек разрыва функций. Построить схематично их графики вблизи точек разрыва.

7. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x+2}$
8. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$
9. $$y=\begin{cases} \dfrac{1}{\lg x} & \text{при } x<10 \\ \dfrac{1}{x-8} & \text{при } x\geqslant 10 \end{cases}$$
10. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x^2-1}$
11. Функция $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$ не определена при $x=0$ . Каким должно быть значение $f(0)$ , чтобы доопределенная этим значением функция стала непрерывной при $x=0$ ?

Правильные ответы находятся на стр. 34.

# Ответы

к вопросам и задачам домашнего задания № 1.

1. См. стр. 13
2. Может. См., например, функцию на стр. 18, а.
3. Точками разрыва будут все точки, где функция $f(x)$ не определена (при условии, что она определена вблизи этих точек). Кроме того, разрыв возможен и в точках из области определения, в которых меняется формула, задающая функцию. Всякая такая точка $x_0$ будет точкой разрыва, когда не существует конечного предела функции при $x \to x_0$ или когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
4. 0
5. Функция непрерывна при всех значениях $x$, кроме $x=-2$ и $x=2$. В точках $x=-2$ и $x=2$ разрыв II рода, причем $f(-2-0)=-\infty$, $f(-2+0)=+\infty$, $f(2-0)=-\infty$, $f(2+0)=+\infty$.
6. $a=-1$.
7. $x=-2$ – точка разрыва 1 рода, причем $f(-2-0)=\pi$, $f(-2+0)=0$
8. $x=0$ – точка разрыва 1 рода, причем $f(0-0)=1$, $f(0+0)=0$.
9. Функция имеет три точки разрыва. При $x=0$ – разрыв 1 рода, причем $f(0+0)=0$. При $x=1$ – разрыв II рода, причем $f(1-0)=-\infty$, $f(1+0)=+\infty$. При $x=10$ – разрыв 1 рода, причем $f(10-0)=1$, $f(10+0)=\frac{1}{2}$.
10. $x=-1$ – точка устранимого разрыва,

    $x=1$ – точка разрыва II рода (точка бесконечного разрыва).
11. 3.

Указания к решению задач находятся на стр. 12, в.

Приложение 1

Односторонние пределы функции

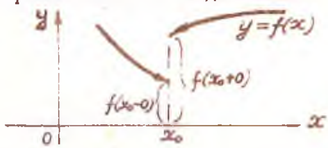
Пусть $x$ стремится к $x_0$, оставаясь все время меньше $x_0$, т.е. слева $\xrightarrow[x \to x_0]{}$. Если при этом условии функция $f(x)$ стремится к конечному или бесконечному пределу, то он называется левым пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Его обозначают так: $f(x_0-0)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Аналогично определяется и правый предел.

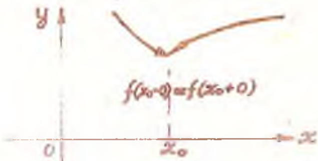
Его обозначения: $f(x_0+0)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

На чертеже это выглядит так:




Левый и правый пределы называют односторонними.

Очевидно, если функция $f(x)$ имеет предел при произвольном стремлении $x$ к $x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то существуют пределы слева и справа, причем они оба равны $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.




Справедливо и обратное: если односторонние пределы равны $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$.

Из этих утверждений следует, что если односторонние пределы различны (как на первом чертеже) или хотя бы один из них не существует, то не существует и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

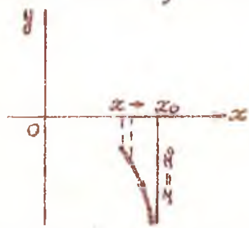
Отметим, что все теоремы о пределах по аналогии переносятся на левые и правые пределы.

Приложение П

## Правило построения схематического графика функции вблизи точки разрыва

1. Прежде всего нужно найти левый и правый пределы функции $f(x)$ в точке разрыва $x_0$.
2. Если, например, левый предел конечен, т.е. $f(x_0-0)=b$ , то сначала нужно построить точку $B$ ( $x_0$ , $b$ ), а затем с левой стороны подводить линию к этой точке.


Если же $f(x_0-0)=+\infty$ или $f(x_0-0)=-\infty$ , то сначала нужно провести вертикальную прямую $x=x_0$ (асимптоту графика). Затем с левой стороны начертить линию, поднимающуюся вверх в первом случае или нисходящую во втором ( когда левый предел $f(x_0-0)=-\infty$ )


При этом линия $y=f(x)$ должна приближаться к прямой $x=x_0$, когда абсциссы точек линии стремятся слева к $x_0$ .

3. Аналогичным образом, используя правый предел $f(x_0+0)$ , следует поступать при построении графика справа от точки $x_0$ .

Пример.

Пусть $f(2-0)=-\infty$ , а $f(2+0)=1$ . Тогда график функции вблизи точки $x=2$ схематично выглядит так


Замечание. Для построения точного графика требуются дополнительные сведения о поведении функции. Это будет рассмотрено позже.

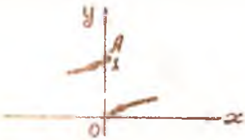
Решения некоторых задач домашнего задания № 1

8. Функция $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ определена при всех значениях $x$, кроме $x=0$. Т.к. эта функция элементарная, она непрерывна в области определения, а в точке $x=0$ имеет разрыв. Точка $x=0$ – точка разрыва 1 рода, т.к. левый и правый пределы конечны. В самом деле, если $x \to 0$ слева, то $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $2^{\frac{1}{x}} \to 0$, и тогда

$$f(0-0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0}=1;$$

если $x \to 0$ справа, то $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $2^{\frac{1}{x}} \to +\infty$, поэтому $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$, т.к. ( $1+2^{\frac{1}{x}}$ ) есть бесконечно большая величина (когда $x \to 0$ и $x>0$ ), а величина, ей обратная, есть бесконечно малая (а предел бесконечно малой равен 0 ).

Итак, при $x=0$ функция имеет разрыв 1 рода, причем неустранимый. График функции вблизи этой точки имеет вид :




Подумайте, почему слева график функции подходит к точке A(0; 1) снизу, а справа подходит к точке (0,0) сверху.

9. Областью определения функции

$$y=\begin{cases} \frac{1}{\lg x} & \text{при } x<10 \\ \frac{1}{x-8} & \text{при } x \geq 10 \end{cases}$$

является совокупность интервалов (0,1), (1, $+\infty$ ). Т.к. при $x=0$ и $x=1$ функция не определена, а вблизи них определена, $x=0$ и $x=1$ – точки разрыва. Еще разрыв возможен при $x=10$, т.к. в этой точке изменяется формула, задающая функцию.

Что касается точки $x=8$, то данная функция определена и непрерывна в ней, т.к. на интервале (0,10) функция задана первой формулой : $y=\frac{1}{\lg x}$. Переходите на стр. 38.

Теперь для выяснения того, какого рода точки разрыва $x=0$ и $x=1$ и есть ли разрыв при $x=10$ , найдем односторонние пределы функции в этих точках.

а) $\underline{x=0}$

Т.к. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lg x = -\infty$ , $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\lg x} = 0$,

причем $\dfrac{1}{\lg x} < 0$ . Значит, $x=0$ - точка разрыва 1 рода.

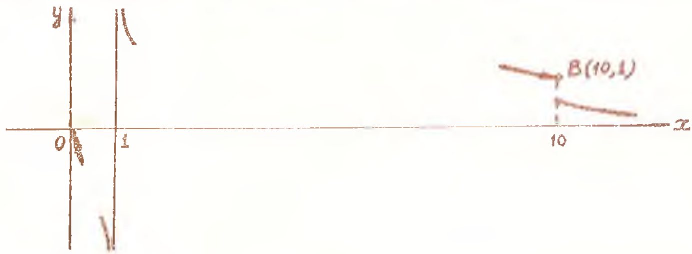
б) $\underline{x=1}$ - точка разрыва П рода (точка бесконечного разрыва), т.к. $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{\lg x} = -\infty$ (поскольку при $x\to 1$ $\lg x \to \lg 1 = 0$ и, кроме того, дробь $\dfrac{1}{\lg x}$ отрицательна при $x<1$ ),

$$f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{\lg x} = +\infty$$

в) При $\underline{x=10}$ функция имеет разрыв 1 рода (неустранимый), т.к. $f(10-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 10\\ x<10}} \dfrac{1}{\lg x} = \dfrac{1}{\lg 10} = 1$ , а

$$f(10+0) = \lim\limits_{x\to 10+0} \frac{1}{x-8} = \frac{1}{10-8} = \frac{1}{2}.$$

Теперь построим схематично график функции вблизи точек разрыва.




10. Функция $y = \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x^2-1}$ является элементарной. Поэтому она непрерывна в своей области определения : $[-2, -1), (-1, 1)$ , $(1, +\infty)$. В точках $x=-1$ и $x=+1$ функция не определена. Значит, это точки разрыва.

(Почему другие точки, где функция не определена, не являются точками разрыва ?).

Переходите на стр. 39.

Найдем односторонние пределы функции в этих точках.

а) $x=-1$.

$$f(-1-0)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x^2-1}=$$

(Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ умножим члены дроби на выражение, сопряженное числителю. Затем сократим на множитель, стремящийся к нулю)

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{x+2-1}{(x^2-1)(\sqrt{x+2}+1)}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+2}+1)}=$$

(Т.к. функция $\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+2}+1)}$ непрерывна в точке $x=-1$, находим ее предел подстановкой вместо $x$ предельного значения -1. См. стр. 13).

$$=\frac{1}{(-1-1)(\sqrt{-1+2}+1)}=-\frac{1}{4}.$$

Аналогично получаем, что $f(-1+0)=-\frac{1}{4}$. Значит, $x=-1$ - точка разрыва 1 рода.

Т.к. $f(-1-0)=f(-1+0)$, разрыв можно устранить, если доопределить функцию, положив $f(-1)=-\frac{1}{4}$.

Тогда будет справедливо равенство

$$f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1).$$

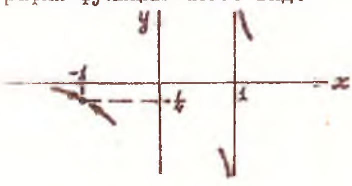
б) $x=1$.

$f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x^2-1}=-\infty$, т.к. предел обратной дроби равен 0.

$f(1+0)=+\infty$.

Значит, $x=1$ - точка разрыва II рода.

Схематический график функции имеет вид:



# ЗАНЯТИЕ 2

## СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Математический анализ представляет собой изучение таких , например, объектов, как функции, при помощи бесконечно малых. Кроме того, в различных физических и технических задачах приходится рассматривать величину, являющуюся суммой бесконечно малых величин, и пренебрегать некоторыми слагаемыми. Это позволяет выделить главную часть суммы, т.е. такую, которая оказывает наибольшее влияние. Поэтому нужно научиться сравнивать бесконечно малые (б.м.) между собой.

### § 1. Определения

Пусть даны две бесконечно малые при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) $\alpha = \alpha(x)$ , $\beta = \beta(x)$ .

Для того чтобы сравнить $\alpha$ и $\beta$ между собой, берут предел их отношения.

Подумайте (или вспомните), какие здесь возможны случаи, и ответьте на вопросы.

1. Когда $\alpha(x)$ называется бесконечно малой высшего порядка, чем $\beta(x)$ ?

2. В каком случае $\alpha(x)$ будет бесконечно малой низшего порядка, чем $\beta(x)$ ?

3. Когда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка ?

Дайте определение эквивалентных бесконечно малых.

В правильности своих ответов Вы можете убедиться, прочитав стр. 42.

Определения.

I. Если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то $\alpha$ называется бесконечно малой высшего порядка, чем $\beta$.

Обозначение: $\alpha = o(\beta)$ (читается: " $\alpha$ есть $o$ малое от $\beta$ ").

В этом случае можно сказать, что $\alpha$ стремится к нулю "быстрее", чем $\beta$.

2. Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то $\alpha$ называется бесконечно малой низшего порядка, чем $\beta$.

В этом случае $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ и, значит, $\beta$ имеет высший порядок малости, чем $\alpha$.

3. Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C$, где $C$ - число, отличное от нуля, то $\alpha$ и $\beta$ называются бесконечно малыми одного порядка.

В этом случае ни одна из них не может стать чрезмерно меньше другой.

Если $C = 1$, то $\alpha$ и $\beta$ называются эквивалентными бесконечно малыми.

Замечание. Может оказаться, что $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ не существует. Тогда $\alpha$ и $\beta$ не сравнимы между собой. В частности, с нулем нельзя сравнивать другие бесконечно малые величины, т.к. на нуль делить нельзя.

Эти определения Вам нужно хорошо запомнить. А теперь рассмотрим пример.

Сравнить две бесконечно малые $\alpha_n = \frac{1}{n}$ и $\beta_n = \frac{1}{n!}$ (где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, т.е. $n!$ есть произведение всех натуральных чисел от I до $n$).

С возрастанием $n$ обе величины стремятся к нулю. Однако, сопоставляя, например, значения $\alpha_6 = \frac{1}{6}$ и $\beta_6 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{720}$, $\alpha_7 = \frac{1}{7}$ и $\beta_7 = \frac{1}{5040}$, можно заметить, что величина $\beta_n$ приближается к нулю быстрее, чем величина $\alpha_n$. Докажем это. Для сравнения $\alpha_n$ и $\beta_n$ найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{n} = \infty$.

Значит, $\alpha_n$ есть б.м. низшего порядка, чем $\beta_n$, а $\beta_n = \frac{1}{n!}$ - б.м. высшего порядка, чем $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Переходите на стр. 43,а.

а

Задача. При $x \to 1$ функции $\alpha(x) = 100\frac{x-1}{x+1}$ и $\beta(x) = \sqrt{x} - 1$ бесконечно малы. Сравнить их.

Ответы: 1. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка стр.46,в

2. $\alpha(x)$ есть б.м. низшего порядка, чем $\beta(x)$ стр.44,б

Если у Вас получился первый ответ, то см. стр.46,в ; если второй, то переходите на стр. 44,б .

Если Вам нужна помощь, то обратитесь к стр. 48,а .

---

б

Правильно. При всех значениях $k>1$ функция $x^k$ будет бесконечно малой высшего порядка, чем $x$, т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^k}{x} = \lim_{x\to 0} x^{k-1} = 0$$ (поскольку показатель степени $k-1>0$ )

Если же $0<k<1$ , то при $x\to 0$ функция $x^k$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем $x$ , т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^k}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{1-k}} = \infty$

(поскольку $1-k>0$ )

Часто оказывается полезной количественная оценка порядка малости одной бесконечно малой относительно другой, принимаемой за эталон.

Определение 4. Бесконечно малая $\beta(x)$ называется бесконечно малой $k$-го порядка относительно бесконечно малой $\alpha(x)$ , если $\beta(x)$ и $[\alpha(x)]^k$ – бесконечно малые одного порядка, т.е. если $\lim\frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ .

Так, например, при $x\to 0$ функция $\beta = x^k$ есть бесконечно малая $k$-го порядка по отношению к $\alpha = x$ . В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{(\alpha)^k} = \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{(x)^k} = 1 .$$

В частности, при $x\to 0$ $2x^5$ есть бесконечно малая 5-го порядка относительно $x$ , а функция $\sqrt{x}$ – порядка 0,5.

**Переходите** на стр. 44,а.

а

Обычно, сравнивая бесконечно малые при $x \to a$, в качестве эталона берут самую простую из них $x-a$.

Решите задачу.

Определить при $x \to 1$ порядок малости относительно ( $x-1$ ) функции $\beta = 3(x-1)^2 + (x-1)^4$.

Ответы : 1) $K = 4$ стр. 48,в;

2) $K = 3$ стр. 54,б;

3) $K = 2$ стр. 50,б.

---

б

Неверно.

Вы допустили ошибку при нахождении $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или сделали неверный вывод. Воспользуйтесь указаниями на стр. 48,а и повторите определения на стр. 42.

---

в

Неверно.

Прежде всего повторим определения.

$\alpha$ и $\beta$ называются бесконечно малыми одного порядка, если

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \ldots$ (см. стр.42 ).

Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то $\alpha$ называется бесконечно малой (высшего или низшего?) порядка, чем $\beta$ (см. стр. 42).

Если у Вас оказалось, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\arcsin x)^2}{2x} = C \neq 0$ то следует проверить решение. При этом нужно учесть, что если $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$, то $(\arcsin x)^2 \sim x^2$, т.к.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\arcsin x)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Исправив свое решение, перейдите на стр. 58,б.

**а**

Неверно.

Вам следует повторить определения 1-3 на стр. 42 и проверить вычисление $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\arcsin x)^2}{\operatorname{arctg} 2x}$. При этом можно учесть, что если $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$, то $(\arcsin x)^2 \sim x^2$.

Вернитесь на стр. 53,*в*.

---

**б**

Неверно. Проверьте начало своего решения.

Заметив, что при $x \to 2$ функции $2x-4=2(x-2)$ и $(x-2)^3$ являются бесконечно малыми, можно для упрощения данной функции сначала заменить переменную, полагая $x-2=t$. Тогда при $x \to 2$ новая переменная $t \to 0$, и мы получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(2x-4)}{\sqrt{1+(x-2)^3}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{\sqrt{1+t^3}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{При } t \to 0 \\ \sin 2t \sim 2t, \\ \sqrt{1+t^3}-1 \sim \frac{t^3}{2}\end{array}\right]$$

Завершите решение задачи, используя теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

Затем переходите на стр. 49,*б*.

---

**в**

Вы ошиблись. При $x \to \pi$ данная функция $\sin 3x \operatorname{ctg} 4x$ есть произведение бесконечно малой и бесконечно большой величин (неопределенность вида $0 \cdot \infty$). На каком основании Вы решили, что такое произведение стремится к $\infty$ ? Ведь здесь нельзя сразу применить ни теорему о пределе произведения, ни какое-либо свойство бесконечно больших (или бесконечно малых) величин.

Если Вы считали, что $\sin 3x \sim 3x$, то здесь допущена ошибка, т.к. при $x \to \pi$ величина $3x$ не является бесконечно малой ($3x \to 3\pi$).

Представьте данную функцию в виде отношения бесконечно малых $\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$ и подумайте еще. Вернитесь на стр. 53,*б*.

(а) Очень плохо.

Соотношение $\sin 3x \sim 3x$ неверно при $x \to \pi$, т.к. в этом случае $3x$ стремится к $3\pi$, а не к нулю.

Кроме того, неверно и соотношение $\cos x \sim x$ (как при $x \to \pi$ так и при $x \to 0$). Напоминаем, что $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x = \cos \pi = -1$.

Вам следует повторить определение и основные эквивалентности (стр.51) и затем вернуться к задаче на стр. 55,а.

---

(б) Вы правы, если оказалось, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg} 3x} = -\frac{2}{3}$.

При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби – функции бесконечно малые. Заменим каждую из них эквивалентной более простой величиной.

Т.к. при $x \to 0$ $\ln(1-2x) \sim (-2x)$ и $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\cancel{x}}{3\cancel{x}} = -\frac{2}{3}.$$

Если эту задачу Вы решили сразу и правильно, то перейдите на стр.47,в. В противном случае решите задачу на стр. 47,б.

---

(в) Правильно.

При $x \to 1$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости, т.к. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{100(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} =$

(умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x}+1$)

$$= \lim_{x \to 1} \frac{100}{x+1} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}} =$$

Функция $\frac{100(\sqrt{x}+1)}{x+1}$ непрерывна в точке $x=1$, т.к. она элементарная и определена в точке $x=1$. Поэтому предел можно найти подстановкой значения $x=1$ в выражение функции.

Возможен и другой способ: применение теорем о пределах.

$$= \frac{100(1+1)}{1+1} = 100.$$

Теперь решите задачу на стр. 47,а.

а

Задача. При каких значениях $k$ функция $x^k$ будет бесконечно малой высшего порядка, чем $x$ (если $x \to 0$)?

Ответы : 1) $k<0$ стр. 48,б;
2) $k>0$ стр. 54,а;
3) $k>1$ стр. 43,б;
4) $k \geq 2$ стр. 56,а.

---

б

Задача.

Найти $$\lim_{x\to 5} \frac{\ln[1-2(x-5)]}{\operatorname{tg} 3(x-5)}.$$

Ответ : $-\frac{2}{3}$.

Если Ваш ответ совпадает с данным, то решайте задачу на стр.47,в. Если же задача вызвала затруднения, то смотрите стр. 56,в.

---

в

Задача.

Найти $$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(2x-4)}{\sqrt{1+(x-2)^3}-1}$$

Ответы : 1) $\infty$ стр.49,б;
2) ответ, отличный от приведенного стр.45,б.

Если эта задача Вас затрудняет, то сначала решите более простую на стр. 47,б.

а

Чтобы сравнить две бесконечно малые, нужно найти предел их отношения. Для вычисления $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ умножьте числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x}+1$, сопряженное ( $\sqrt{x}-1$ ). Затем сократите на множитель, стремящийся к нулю.

Вернитесь на стр. 43,а.

---

б

Неверно.

Предлагаемые задачи сначала нужно решать, а затем выбирать ответы. Вы же совсем не думали над решением и выбрали ответ наугад. Ведь при $k<0$ функция $x^k$ (например, $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$) будет не бесконечно малой при $x \to 0$, а бесконечно большой величиной.

Рассмотрите $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^k}{x}$ и определите, при каких значениях $k$ этот предел будет равен 0.

Вернитесь к стр. 47,а.

---

в

Неверно, т.к. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\beta}{(x-1)^4}$ не равен числу, отличному от нуля.

В самом деле, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3(x-1)^2+(x-1)^4}{(x-1)^4} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^2[3+(x-1)^2]}{(x-1)^4}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3+(x-1)^2}{(x-1)^2} = \infty ,$$

т.к. предел числителя равен 3, а предел знаменателя - нулю.

Вам следует выяснить, при каком значении $k$ справедливо равенство $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3(x-1)^2+(x-1)^4}{(x-1)^k} = C$,

где $C$ есть некоторое число, отличное от нуля.

Вернитесь на стр. 44,а.

а) Вы ошиблись. Известно, что $\ln(1+u) \sim u$ при $u \to 0$. Поэтому при $x \to 0$ функция $\ln(1-2x)$ эквивалентна бесконечно малой ( $-2x$ ), а не $2x$, т.к. $1-2x$ есть сумма $1$ и ( $-2x$ ).

Исправьте свое решение и переходите на стр. 46,б.

---

б) Верно.

При $x \to 2$ члены дроби стремятся к нулю, и, кроме того, функции ( $2x-4$ ) и ( $x-2$ )$^3$ являются бесконечно малыми. Поэтому

$\sin(2x-4) \sim 2x-4$ и $\sqrt{1+(x-2)^3}-1 \sim \frac{(x-2)^3}{2}$

[ Т.к. $\sin u \sim u$ , $\sqrt{1+u}-1 \sim \frac{u}{2}$ при $u \to 0$ ]

Тогда $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(2x-4)}{\sqrt{1+(x-2)^3}-1} =$ (сформулируйте применяемую теорему).

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{2(x-2)}{\frac{(x-2)^3}{2}} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{4}{(x-2)^2} = \infty$ , т.к.

$\frac{(x-2)^2}{4}$ - бесконечно малая при $x \to 2$ , а величина $\frac{4}{(x-2)^2}$ , обратная к бесконечно малой, есть величина бесконечно большая.

Теперь Вам следует выбрать дальнейший путь:

а) перейти на стр. 53,б , если последние две задачи Вы решили сразу;

б) перейти на стр. 55,а (к более простому заданию) в противном случае.

---

в) Правильно. Сначала приведем неопределенность вида $0 \cdot \infty$ к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ . $\lim\limits_{x \to \pi} \sin 3x \,\mathrm{ctg}\, 4x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{\mathrm{tg}\, 4x} \overset{(\frac{0}{0})}{=}$

[ Делаем замену переменной: $x - \pi = u$ , значит $x = u + \pi$ .
Тогда, если $x \to \pi$ , то $u \to 0$ . ]

$= \lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin 3(u+\pi)}{\mathrm{tg}\, 4(u+\pi)} = \lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin(3u+3\pi)}{\mathrm{tg}(4u+4\pi)} =$ (По формулам приведения)

$= \lim\limits_{u \to 0} \frac{-\sin 3u}{\mathrm{tg}\, 4u} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{u \to 0} -\frac{3u}{4u} = -\frac{3}{4}$ . Переходите на стр. 53,в.

а

Вы ошиблись.

Алгебраическая сумма ( $\operatorname{arctg}x - x^2$ ) при $x \to 0$ будет эквивалентна $\operatorname{arctg}x$ , а не $-x^2$. В самом деле, $x^2$ есть бесконечно малая второго порядка относительно $x$ , а $\operatorname{arctg}x$ – первого (т.к. $\operatorname{arctg}x \sim x$ при $x \to 0$ ).

Поэтому $\operatorname{arctg}x$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем $x^2$. (В этом можно убедиться и непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty \ )$$

Значит, $\operatorname{arctg}x - x^2 \sim \operatorname{arctg}x$ при $x \to 0$ .

Аналогичным образом можно установить, чему эквивалентен числитель $(\arcsin x)^2 + 2x$ .

Завершите решение и вернитесь на стр. 55,в.

---

б

Правильно. Прочитайте внимательно объяснение.

Наша задача состоит в нахождении такого значения показателя $K$ , при котором $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\beta}{(x-1)^K}$ равен какому-то числу $C \neq 0$ .

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2+(x-1)^4}{(x-1)^K}$ и преобразуем дробь в такое произведение, чтобы один множитель зависел от $K$ и имел наиболее простой вид, а остальные множители имели конечные пределы, отличные от нуля.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2[3+(x-1)^2]}{(x-1)^K} = \lim_{x\to 1}(x-1)^{2-K}[3+(x-1)^2] = \begin{cases} 0\cdot 3 = 0, & \text{если } K<2 \\ \infty, & \text{если } K>2 \\ 1\cdot 3 = 3, & \text{если } K=2 \end{cases}$$

Значит, лишь при $K=2$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\beta}{(x-1)^K} = C \neq 0$ . Поэтому функция $\beta = 3(x-1)^2 + (x-1)^4$ есть бесконечно малая второго порядка по отношению к ( $x-1$ ).

Вы, наверное, заметили, что $\beta$ является суммой двух бесконечно малых разного порядка (второго и четвертого). Попробуйте обобщить полученный результат: порядок малости алгебраической суммы величин разного порядка определяется (наименьшим или наибольшим?) из порядков малости слагаемых.

Переходите на стр. 51.

## § 2. Эквивалентные бесконечно малые и их применение к вычислению пределов

Определение. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x\to a$ (или при $x\to\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Эквивалентность бесконечно малых $\alpha$ и $\beta$ будем обозначать так: $\alpha\sim\beta$.

Примеры. Основные эквивалентности

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\sin u\sim u$ | при $u\to 0$ | , т.к. $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$. |
| 2. | $\operatorname{tg} u\sim u$ | при $u\to 0$ | |
| 3. | $\ln(1+u)\sim u$ | при $u\to 0$ | |
| 4. | $\sqrt[n]{1+u}-1\sim\frac{u}{n}$ | при $u\to 0$ | |

Здесь в качестве **u** может быть как независимая переменная, так и любая функция $u(x)$, стремящаяся к нулю.

Доказательство того, что $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$ и $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$, приведено в [1], [2], [3].

Мы докажем частный случай соотношения 4, а именно: $\sqrt[3]{1+u}-1\sim\frac{u}{3}$ при $u\to 0$. Для нахождения $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+u}-1}{\frac{u}{3}}$ умножим сначала члены дроби на такое выражение, чтобы в числителе получилась разность кубов $\lim\limits_{u\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+u}-1)(\sqrt[3]{(1+u)^2}+\sqrt[3]{1+u}+1)}{\frac{u}{3}(\sqrt[3]{(1+u)^2}+\sqrt[3]{1+u}+1)}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{3(\cancel{1}+u-\cancel{1})}{\cancel{u}(\sqrt[3]{(1+u)^2}+\sqrt[3]{1+u}+1)}=$

[Т.к. полученная функция непрерывна в точке $u=0$ (см. стр. 13), то ее предел можно найти подстановкой предельного значения аргумента в выражение функции]

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{(1+0)^2}+\sqrt[3]{1+0}+1}=\frac{3}{3}=1.$$

Значит, при $u\to 0$ $\sqrt[3]{1+u}-1\sim\frac{u}{3}$.

Аналогичным образом доказывается соотношение 4 при любом натуральном $n$.

Теперь самостоятельно докажите, что $\operatorname{tg} u\sim u$ при $u\to 0$.

Затем перейдите на стр. 52.

$tg\,u \sim u$ при $u \to 0$, т.к. $\lim\limits_{u\to 0} \frac{tg\,u}{u} = 1$.

В самом деле, $\lim\limits_{u\to 0} \frac{tg\,u}{u} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1}{\cos u} =$

$= \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{\cos u} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1$.

Имеют место следующие теоремы об эквивалентных бесконечно малых.

Теорема 1. Если $\alpha \sim \beta$, то их разность $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha$ и чем $\beta$.

Теорема 2. Если разность двух бесконечно малых $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha$ или $\beta$, то $\alpha \sim \beta$.

Теорема 3. Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то $\lim \frac{f\cdot\alpha}{g\cdot\beta} = \lim \frac{f\cdot\alpha_1}{g\cdot\beta_1}$, где $f$ и $g$ - любые функции. Или - предел отношения не изменится, если бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, заменить эквивалентными величинами.

В самом деле, $\lim \frac{f\cdot\alpha}{g\cdot\beta} = \lim \left(\frac{f\alpha_1}{g\,\beta_1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta}\right) =$

(По теореме о пределе произведения)

$$= \lim \frac{f\cdot\alpha_1}{g\cdot\beta_1} \cdot 1 \cdot 1 = \lim \frac{f\cdot\alpha_1}{g\cdot\beta_1}.$$

Теорема 4. Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$.

Эти теоремы следует запомнить. В ряде случаев они упрощают нахождение пределов (например, когда имеются неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $0 \cdot \infty$).

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

Здесь числитель и знаменатель стремятся к нулю, т.е. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия используем соотношения: $\sin 5x \sim 5x$, $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{3}$ при $x \to 0$.

Тогда согласно теореме 3 получаем

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{\frac{x}{3}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

(Сокращаем на $x$, что допустимо, т.к. $x \to 0$, но $x \neq 0$).

$$= \lim\limits_{x\to 0} 15 = 15.$$

Теперь повторите (сначала никуда не заглядывая) теорему 3 и основные эквивалентности (стр.51) и приступайте к решению задачи на стр. 53,а.

(а)

**Задача.**

Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg} 3x}$

Ответы : 1) $\frac{2}{3}$ стр. 49,а;

2) ответ, отличный от приведенного стр. 46,б.

---

(б)

**Задача.**

Найти $\lim\limits_{x \to \pi} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 4x$

Ответы : 1) $\infty$ стр. 45,в;

2) $12\pi^2$ стр. 54,в;

3) $\frac{3}{4}$ стр. 57,а;

4) $-\frac{3}{4}$ стр. 49,в.

---

(в)

**Задача.**

Считая $x \to 0$, сравнить бесконечно малые $\alpha = (\arcsin x)^2$ и $\beta = \operatorname{arctg} 8x$.

Ответы : 1) $\alpha$ и $\beta$ одного порядка малости стр. 45,а;

2) $\alpha$ высшего порядка, чем $\beta$ стр. 58,в.

Для решения этой задачи необходимы новые эквивалентности. Попытайтесь установить их. Если это Вам не удастся сделать, то обратитесь к прил. III на стр. 67.

а

Неверно.

Если взять, например, $k=\frac{1}{2}$, то окажется, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^k}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\infty$$

(т.к. величина $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, обратная для бесконечно малой $x^{\frac{1}{2}}$, есть бесконечно большая). Значит, функция $x^k$, где $k=\frac{1}{2}$, есть бесконечно малая величина не высшего, а низшего порядка, чем $x$.

Вернитесь на стр. 47,а и определите такие значения $k$, при которых $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^k}{x}=0$

---

б

Неверно.

При $k=3$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\beta}{(x-1)^k}=\infty$, а нам нужно найти такое значение показателя $k$, чтобы $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\beta}{(x-1)^k}$ оказался каким-то числом, отличным от нуля.

Повторите определение 4 на стр. 43,б и подумайте над решением задачи.

Вернитесь на стр. 44,а.

---

в

Неверно.

Во-первых, Вы допустили ошибку, заменив бесконечно малую $\sin 3x$ величиной $3x$, которая не является бесконечно малой при $x\to\pi$ (т.к. $3x\to 3\pi$).

Кроме того, соотношение $ctg\,4x \sim 4x$ вообще лишено смысла как при $x\to\pi$, так и при $x\to 0$, ибо $ctg\,4x$ есть бесконечно большая величина, а $4x$ стремится к $4\pi$ (или к 0, если $x\to 0$).

Видимо, с этой задачей Вы не справитесь. Оставьте ее и перейдите к более простой на стр. 55,а.

а

Задача.

Найти $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{x \cos x}$

Ответы : 1) $-3$ стр. 58,а;

2) $0$ стр. 57,в;

3) $\frac{3}{\pi}$ стр. 46,а.

---

б

Задача.

Считая $x \to 0$, сравнить бесконечно малые $\alpha = (\arcsin x)^2$ и $\beta = 2x$.

Ответы : 1) $\alpha$ и $\beta$ одного порядка малости. стр. 44,в;

2) $\alpha$ высшего порядка, чем $\beta$. стр. 58,б.

Если Вам нужна помощь, то обратитесь к стр. 62,в.

---

в

Задача.

Найти $\lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin x)^2 + 2x}{\operatorname{arctg} x - x^2}$

Ответы : 1) $\infty$ стр. 50,а;

2) $2$ стр. 60,б;

3) $-1$ стр. 62,б.

Если Вам требуются дополнительные факты, то обратитесь к прил. III на стр. 67.

а

Не совсем так.

Разве только при $k \geq 2$ функция $x^k$ будет бесконечно малой величиной высшего порядка, чем $x$ ?

Вернитесь на стр. 47,а и подумайте еще.

---

б

Вы ошиблись. Посмотрите начало решения :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+(\sin 5x-\sin x)}-1}{\ln(1+3\operatorname{tg}x^2+x^3)} = \left[\begin{array}{l}\text{Т.к. при } u\to 0\\ \sqrt{1+u}-1 \sim \frac{u}{2}\\ \ln(1+u)\sim u\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x-\sin x}{2}}{3\operatorname{tg}x^2+x^3} = \ldots$$

Преобразуйте числитель по формуле

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и замените знаменатель эквивалентной бесконечно малой.

Решив задачу, перейдите на стр. 63,а.

---

в

К стр. 47,б

Как и в предыдущей задаче, числитель и знаменатель дроби являются бесконечно малыми.

Если $x\to 5$ , то функция $3(x-5)\to 0$ , т.е. является бесконечно малой величиной. Поэтому $\operatorname{tg}3(x-5)\sim 3(x-5)$.

Точно так же $\ln[1-2(x-5)]\sim -2(x-5)$ при $x\to 5$ .

Т.к. предел отношения бесконечно малых не изменится, если заменить их эквивалентными, то

$$\lim_{x\to 5}\frac{\ln[1-2(x-5)]}{\operatorname{tg}3(x-5)} = \lim_{x\to 5}\frac{-2\cancel{(x-5)}}{3\cancel{(x-5)}} = -\frac{2}{3}.$$

Эта задача сразу приводится к предыдущей, если положить $x-5=t$ . Тогда, если $x\to 5$ , то новая переменная $t\to 0$ , и мы получаем

$$\lim_{x\to 5}\frac{\ln[1-2(x-5)]}{\operatorname{tg}3(x-5)} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-2t)}{\operatorname{tg}3t} = \ldots = -\frac{2}{3}.$$

Переходите к стр. 47,в.

а

Неправильно.

Соотношения $\sin u \sim u$ и $\operatorname{tg} u \sim u$ справедливы лишь при $u \to 0$. А у нас $3x$ и $4x$ не являются бесконечно малыми при $x \to \pi$, т.к. $3x \to 3\pi$, а $4x \to 4\pi$.

Сделайте замену переменной $x - \pi = u$ и воспользуйтесь формулами приведения, например, $\sin(3u+3\pi) = \sin(3u+\pi) =$
$= -\sin 3u$.

Вернитесь на стр. 53,б.

---

б

Неверно.

Функция $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$ не эквивалентна $o(\alpha(x))$,

т.к. $$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{o(\alpha(x))} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{o(\alpha)} = \lim \left(\frac{\alpha}{o(\alpha)} + 1\right) = \infty.$$

Докажите, что $\beta(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to a$ и перейдите на стр. 60,а.

---

в

Верно.

Т.к. данная функция элементарная и определена в точке $x = \pi$, то она непрерывна в этой точке ( см. стр. 13 ). Поэтому предел можно найти подстановкой в выражение функции значения $x = \pi$.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{x \cos x} = \frac{\sin 3\pi}{\pi \cos \pi} = \frac{0}{-\pi} = 0.$$

Если эту задачу Вы решили сразу без ошибок, то перейдите на стр. 53,б.

В противном случае переходите на стр. 55,б.

(а) Неправильно.

Хотя функция $\sin 3x$ есть бесконечно малая, соотношение $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to \pi$ неверно, т.к. $3x$ не является бесконечно малой при $x \to \pi$ ( $3x \to 3\pi$ )

| |
|---|
| Запомните, что $\sin u(x) \sim u(x)$ лишь в том случае, когда $u(x) \to 0$. |

Найдите предел знаменателя и завершите решение задачи. Затем вернитесь на стр. 55,а.

---

(б) Правильно.

При $x \to 0$ функция $\alpha = (\arcsin x)^2$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\beta = 2x$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$

Действительно, при $x \to 0$ $\arcsin x \sim x$

(док-во приведено в прил. III на стр. 67).

Тогда нетрудно убедиться, что $(\arcsin x)^2 \sim x^2$.

Поэтому $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\arcsin x)^2}{2x} =$

(заменяем числитель более простой эквивалентной бесконечно малой)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Этот предел можно было найти и так:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\arcsin x)^2}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \arcsin x}{2x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Переходите на стр. 59,а.

---

(в) Верно.

При $x \to 0$ функция $\alpha = (\arcsin x)^2$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\beta = \operatorname{arctg} 2x$. В самом деле,

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\arcsin x)^2}{\operatorname{arctg} 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{2x} = 0.$ [Т.к. при $x \to 0$ $\arcsin x \sim x$, то $(\arcsin x)^2 \sim x^2$ (убедитесь в этом); кроме того $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$.]

Заметим еще, что $\alpha = (\arcsin x)^2$ есть бесконечно малая второго порядка относительно $x$ (а также относительно $2x$ или $\operatorname{arctg} 2x$), поскольку $(\arcsin x)^2 \sim x^2$. Переходите на стр. 59,а.

(а)

**Задача.** Функция $\beta(x)=\alpha(x)+o(\alpha(x))$, где $o(\alpha(x))$ есть бесконечно малая при $x\to a$ высшего порядка, чем $\alpha(x)$. Какой бесконечно малой эквивалентна сумма $\beta(x)$?

Ответы: 1) $\beta\sim\alpha$ стр. 60,а;

2) $\beta\sim o(\alpha)$ стр. 57,б.

---

(б) **Задача.**

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 5x-\sin x}-1}{\ln(1+3\operatorname{tg}x^2+x^3)}$

Ответы: 1) $\infty$ стр. 63,а;

2) ответ, отличный от приведенного стр. 56,б.

---

(в) При $x\to 0$ из соотношения $\sqrt[3]{1+x}-1\sim\frac{x}{3}$ следует равенство $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}$, которое будет тем точнее чем меньше $|x|$.

Тогда $\sqrt[3]{1,006}=\sqrt[3]{1+0,006}\approx 1+\dfrac{0,006}{3}=1,002$,

$$\sqrt[3]{0,997}=\sqrt[3]{1-0,003}\approx 1+\frac{-0,003}{3}=0,999 .$$

Второй результат точнее, т.к. $|-0,003|=0,003<0,006$.

Переходите на стр. 64.

---

(г) Не совсем так.

Из соотношения $e^u-1\sim u$ при $u\to 0$ получаем, что $e^{\sin 3x}-1\sim\sin 3x$ при $x\to 0$. Но бесконечно малая $\sin 3x\sim 3x$ (а не $x$). Значит, $e^{\sin 3x}-1\sim 3x$. Отсюда следует, что при достаточно малых значениях $|x|$ $e^{\sin 3x}-1\approx 3x$.

Исправьте свою ошибку и перейдите на стр. 63,б.

а) Верно, $\beta(x) \sim \alpha(x)$ :

Т.к. по условию разность $\beta - \alpha = o(\alpha)$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha$, то по теореме 2 об эквивалентных бесконечно малых (стр. 52 ) имеем, что $\beta \sim \alpha$. В этом можно было убедиться непосредственно :

$$\lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim\left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Итак, сумма конечного числа бесконечно малых разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка. Это слагаемое, эквивалентное всей сумме бесконечно малых, называется главной частью суммы.

Запомните это. Переходите на стр. 55,в.

---

б) Правильно.

Т.к. $(\arcsin x)^2$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $2x$, то сумма $(\arcsin x)^2 + 2x$ при $x \to 0$ будет эквивалентна слагаемому низшего порядка, т.е. $2x$.

Аналогичным образом получаем, что $\operatorname{arctg} x - x^2 \sim \operatorname{arctg} x$ при $x \to 0$.

(Поскольку $-x^2$ есть бесконечно малая второго порядка относительно $x$, а $\operatorname{arctg} x$ - того же, что и $x$, заключаем, что $\operatorname{arctg} x$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем $-x^2$ ).

Тогда $$\lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin x)^2 + 2x}{\operatorname{arctg} x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} x} = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{arctg} x \sim x \\ \text{при } x \to 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

Сделаем обобщение : $$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) + o(\alpha(x))}{\beta(x) + o(\beta(x))} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$
т.к. $\alpha + o(\alpha) \sim \alpha$ и $\beta + o(\beta) \sim \beta$.

Теперь посмотрите на часы. Они идут? Если до конца занятия осталось больше 10 минут, то решите еще одну задачу на стр. 59,б.

В противном случае переходите к § 3 на стр. 61.

## § 3. Применение эквивалентных бесконечно малых в приближенных вычислениях

Известно, что разность $\alpha(x)-\beta(x)$ двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha(x)$ и чем $\beta(x)$. Таким образом, если $\alpha \sim \beta$ при $x \to a$, то $\alpha-\beta = o(\beta)$ ( и $\alpha-\beta = o(\alpha)$ ). Значит, $\alpha=\beta+o(\beta)$, где бесконечно малая $\beta$ является главной частью суммы, т.е. главной частью величины $\alpha$. Поэтому для значений $x$, достаточно близких к $a$, имеет место приближенное равенство $\alpha(x)\approx\beta(x)$ (*).

Отметим, что абсолютная погрешность равенства (*) $|\alpha-\beta|$ и относительная погрешность $\left|\frac{\alpha-\beta}{\beta}\right|$ стремятся к нулю при $x\to a$. Поэтому равенство $\alpha(x)\approx\beta(x)$ будет тем точнее, чем ближе $x$ к $a$.

Пример.

Т.к. $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$, то при достаточно малых значениях $|x|$ можно считать, что $\ln(1+x)\approx x$.

Тогда $\ln 1{,}0002 = \ln(1+0{,}0002) \approx 0{,}0002$,

$$\ln 0{,}997 = \ln(1-0{,}003) \approx -0{,}003 .$$

Задача.

Найти приближенно ( без таблиц ) значение функции $e^{\sin 3x}$ при $x = 0{,}001$.

Ответы : 1) 1,001 стр. 59,г;

2) 1,003 стр. 63,б.

Если для решения Вам необходимы дополнительные сведения, то обратитесь к прил. III на стр. 67.

В случае затруднения обратитесь к стр. 62,а.

(а)

Рассмотрите функцию $e^{\sin 3x}-1$ при $x \to 0$ и найдите ей эквивалентную. Для этого нужно использовать соотношение $e^u-1 \sim u$ при $u \to 0$, из которого получается приближенное равенство $e^u-1 \approx u$ или $e^u \approx 1+u$.

Вернитесь к задаче на стр. 61.

---

(б)

Неверно.

Сумма бесконечно малых разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка. А Вы заменили каждую сумму бесконечно малой высшего порядка.

Исправьте свою ошибку и вернитесь на стр. 55,в.

---

(в)

К стр. 55,б.

Чтобы сравнить две бесконечно малые, нужно найти предел их отношения.

Для вычисления $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\arcsin x)^2}{2x}$ может потребоваться еще одна эквивалентность.

Попытайтесь установить ее. Если это Вам не удастся сделать, то сначала обратитесь к прил. III на стр. 67, а затем вернитесь к задаче на стр. 55,б.

(а)

Вы получили верный ответ.

Убедитесь еще в правильности своего решения.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin 5x-\sin x}-1}{\ln(1+3\operatorname{tg}x^2+x^3)}=\left[\begin{array}{l}\text{Т.к. при } u\to 0\\ \sqrt{1+u}-1\sim\frac{u}{2}\\ \ln(1+u)\sim u\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x-\sin x}{2}}{3\operatorname{tg}x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{2}\cos 3x\cdot\sin 2x}{3\operatorname{tg}x^2+o(3\operatorname{tg}x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot\sin 2x}{3\operatorname{tg}x^2}=\left[\begin{array}{l}\text{Т.к. при } x\to 0\\ \sin 2x\sim 2x\\ \operatorname{tg}x^2\sim x^2\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot 2x}{3\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 3x}{3x}=\infty,$$

поскольку числитель стремится к 2 , а знаменатель - к нулю.

Переходите на стр. 61 к § 3.

---

(б)

Совершенно верно , $e^{\sin 0,003}\approx 1,003.$

В самом деле, $e^{\sin 3x}-1\sim\sin 3x$ при $x\to 0$

( т.к. $e^u-1\sim u$ при $u\to 0$ ), а $\sin 3x\sim 3x$ .

Значит, $e^{\sin 3x}-1\sim 3x$ при $x\to 0$ .

Отсюда следует, что при достаточно малых значениях $|x|$

$e^{\sin 3x}-1\approx 3x$ или $e^{\sin 3x}\approx 1+3x$ .

Подставляя $x$ = 0,001, получаем

$$e^{\sin 0,003}\approx 1+3\cdot 0,001=1,003.$$

Решите еще одну простую задачу.

Найти приближенно $\sqrt[3]{1,006}$ и $\sqrt[3]{0,997}$.

Какой из полученных результатов будет точнее ?

Свое решение проверьте на стр. 59,в.

## Заключение

Мы рассмотрели сравнение бесконечно малых функций и установили следующие эквивалентности (или асимптотические равенства) при $u \to 0$:

$$\sin u \sim u \qquad (\text{или } \sin u = u + o(u)),$$

$$\operatorname{tg} u \sim u, \quad \ln(1+u) \sim u, \quad \sqrt[n]{1+u} - 1 \sim \frac{u}{n},$$

$$\arcsin u \sim \operatorname{arctg} u \sim e^u - 1 \sim u.$$

Эти соотношения нашли применение при отыскании пределов и в приближенных вычислениях.

Следует заметить, что сравнение бесконечно больших величин производится аналогичным образом. Только, если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$, то функцию $u(x)$ называют бесконечно большой низшего порядка, чем $v(x)$, и пишут $u = o(v)$. В этом случае также говорят, что бесконечно большая величина $v(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем $u(x)$.

Бесконечно большие $u(x)$ и $v(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$.

Например, всякий многочлен

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ при $x \to \infty$

эквивалентен старшему члену $a_0 x^n$ (если $a_0 \neq 0$).

В самом деле,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{a_0 x^n} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}\right) = 1 + 0 + \ldots + 0 = 1,$$

т.к. $\frac{1}{x}, \ldots, \frac{1}{x^n}$ – бесконечно малые при $x \to \infty$.

Эквивалентные бесконечно большие как и эквивалентные бесконечно малые можно применять при нахождении пределов.

Наше занятие подошло к концу.

На стр. 65 помещено домашнее задание № 2, при выполнении которого рекомендуется использовать данное пособие.

## Домашнее задание № 2

1. При $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малы. Сравнить произведение $\alpha \cdot \beta$ с каждой из них.

2. При каком значении постоянной $D$ функция $(1 - \cos x)$ эквивалентна функции $Dx^2$ при $x \to 0$ ?

3. Определить порядок малости объема шара, если радиус шара $r$ есть бесконечно малая 1-го порядка. Каков порядок малости радиуса шара относительно объема этого шара?

Найти пределы :

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x^2 - a^2}$.

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 10x + x^2}{\operatorname{tg} 3x - x^4}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 3x + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{x} + \ln(1 - x)}$.

8. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \ln \dfrac{x + a}{x}$.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\arcsin\sqrt{x}} - 1 + x}{\operatorname{tg}(\sqrt{1 + 2x} - 1)}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

11. Вычислить приближенно :

а) $\arcsin 0{,}001 + \operatorname{arctg} 0{,}002 + \sqrt[5]{1{,}01}$ ;

б) $\sqrt[3]{8{,}24}$

12. Пусть $x \to \infty$ . Принимая $x$ за бесконечно большую 1-го порядка, определить порядок роста функции $f(x) = \dfrac{x^5}{x + 2}$ .

Ответы и указания находятся на стр. 66.

Р е ш е н и я

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{x}+\ln(1-x)}$$

Подставляя в числитель и в знаменатель вместо $x$ значение $0$, заключаем, что их пределы равны нулю, т.е. имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Сравним между собой бесконечно малые слагаемые в числителе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\arcsin 3x}=\left[\begin{array}{c}\text{Т.к. при } x\to 0\\ \operatorname{tg}x\sim x\\ \arcsin 3x\sim 3x\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0.$$

Значит, $\operatorname{tg}^2 x=o(\arcsin 3x)$, т.е. $\operatorname{tg}^2 x$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\arcsin 3x$. Т.к. сумма бесконечно малых разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка, то

$$\arcsin 3x+\operatorname{tg}^2 x\sim\arcsin 3x \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Точно так же можно установить, что

$$\sqrt{x}+\ln(1-x)=\sqrt{x}+o(\sqrt{x})\sim\sqrt{x} \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

[Это можно обосновать и так: $\ln(1-x)\sim(-x)$, значит $\ln(1-x)$ есть бесконечно малая 1-го порядка относительно $x$, а $\sqrt{x}$ - порядка 0,5. Поэтому $\ln(1-x)=o(\sqrt{x})$]

Тогда $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{x}+\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x+o(\arcsin 3x)}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{x}}= \text{(сокращаем на } \sqrt{x}\text{ )}$$
$$=\lim_{x\to 0}3\sqrt{x}=0.$$

9. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin\sqrt{x}}-1+x}{\operatorname{tg}(\sqrt{1+2x}-1)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Числитель представляет сумму двух бесконечно малых. Сравним их (чтобы выделить главную часть суммы)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin\sqrt{x}}-1}{x}=\left\{\begin{array}{c}e^u-1\sim u\\ \text{при } u\to 0\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{x}=\left\{\begin{array}{c}\arcsin\sqrt{x}\sim\sqrt{x}\\ \text{при } x\to 0\end{array}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

(т.к. величина $\frac{1}{\sqrt{x}}$, обратная для бесконечно малой $\sqrt{x}$, есть бесконечно большая).

Перейдите на стр. 69.

Значит, первое слагаемое есть бесконечно малая низшего порядка, чем второе.

Поэтому $(e^{\arcsin\sqrt{x}}-1)+x \sim e^{\arcsin\sqrt{x}}-1 \sim \arcsin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin\sqrt{x}}-1+x}{tg(\sqrt{1+2x}-1)} = \left\{\begin{matrix} tg u \sim u \\ при\ u\to 0\end{matrix}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}-1} =$

$\left\{\begin{matrix}\sqrt{1+u}-1 \sim \frac{u}{2} \\ при\ u\to 0\end{matrix}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\frac{2x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

11.б . Для вычисления $\sqrt[3]{8{,}24}$ воспользуемся приближенным равенством $\sqrt[3]{1+x}-1 \approx \frac{x}{3}$ или $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{x}{3}$, которое дает хорошие приближения при достаточно малых значениях $/x/$. Поэтому подберем такое число, близкое к 8,24, из которого извлекается точно (и легко) корень третьей степени. Таким числом будет 8.

Тогда $\sqrt[3]{8{,}24} = \sqrt[3]{8+0{,}24} = \sqrt[3]{8(1+0{,}03)} = 2\sqrt[3]{1+0{,}03} \approx$

$\approx 2\left(1+\frac{0{,}03}{3}\right) = 2{,}02$

12.Бесконечно большая величина $u(x)$ имеет $k$-й порядок роста относительно бесконечно большой $v(x)$, если $\lim\frac{u(x)}{[v(x)]^k} = C \neq 0$.

Найдем такое значение показателя $k$, чтобы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}$ оказался каким-то числом $C$, отличным от нуля.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{(x+2)\cdot x^k} =$

Подобно бесконечно малым, бесконечно большие величины можно заменять эквивалентными при нахождении предела отношения бесконечно больших.

Заменим $x+2$ эквивалентной бесконечно большой $x$.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x\cdot x^k} = \lim_{x\to\infty} x^{4-k} = \begin{cases}\infty, & \text{если } k<4 \\ 0, & \text{если } k>4 \\ 1, & \text{если } k=4.\end{cases}$$

Значит, при $x\to\infty$ функция $f(x)=\frac{x^5}{x+2}$ есть бесконечно большая 4-го порядка относительно $x$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Никольский С.М. Курс математического анализа, том I. М, "Наука", 1973.

2. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. М., Л., "ФМ", 1963.

3. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики, том I. М., "Высшая школа", 1973.

4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М., "Наука", 1973.

5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М., "Высшая школа", 1966.

6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под ред. Б.П. Демидовича. М., "Наука", 1970.

7. Сборник задач по курсу высшей математики. Под ред. Г.И. Кручковича. М., "Высшая школа", 1973.

8. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., "Педагогика", 1972.

9. Куликов В.В. Непрерывность и разрывы функции. Куйбышевский авиационный институт, 1968.

Владимир Владимирович К у л и к о в

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И РАЗРЫВЫ ФУНКЦИИ
СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Программированное
учебное пособие

Редактор Н.В.К а с а т к и н а
Технический редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор О.В.У д а ч и н а

ЕО 00179. Подписано в печать 12.У.1976 г.
Формат 60х84 1/16. Бумага тип. № 3. Физ.п.л. 4,5 п.л.
Усл.печ.л. 4,18. Уч.-изд. 3,6. Тираж 1200 экз.
Цена 20 коп. Заказ № 3652

Куйбышевский авиационный институт им. С.П.Королева.
Куйбышев, Молодогвардейская, 151.

Ротапринт областной типографии им. Мяги.
Куйбышев, Венцека, 60.