МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт им. С.П.Королева

В.В. КУЛИКОВ

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ И РАЗРЫВЫ ФУНКЦИИ

Программированное учебное пособие

Утверждено редакционным
советом 7 марта 1968 года

Куйбышев - 1968

Предлагаемое пособие предназначено для студентов первого курса ВТУЗа. Оно представляет собой попытку моделировать практическое занятие по важной и трудной теме математического анализа „Непрерывность и разрывы функции". Это руководство можно использовать для самостоятельного изучения темы, а также для проведения практического занятия.

Для работы с пособием требуется предварительное знакомство с элементарными функциями и теоремами о бесконечно малых и о пределах. Пособие названо программированным потому, что при изложении материала применяются методы программированного обучения.

Его нужно читать не так, как обычную книгу. Изучив часть материала, нужно, как правило, решить пример или ответить на контрольный вопрос и перейти на ту страницу, номер которой указан после одного из предлагаемых возможных ответов. К такому необычному „путешествию" по страницам можно довольно быстро привыкнуть, а некоторым оно может даже понравиться.

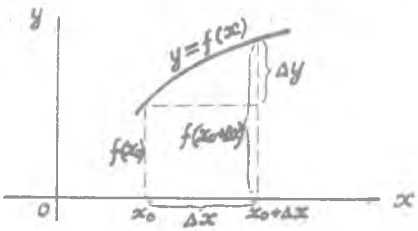
Ответственный редактор – к.ф-м.н. доцент Г.Д.ТРОШИН

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

## § I. Приращение функции

Пусть независимая переменная $x$ сначала принимает значение $x_0$, а затем $x_1$. Разность $x_1 - x_0$ называется приращением аргумента $x$ и обозначается $\Delta x$. Тогда $x_1 = x_0 + \Delta x$. При этом говорят, что мы перешли от $x_0$ к $x_1$, придав аргументу $x$ приращение $\Delta x$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Значение функции в этой точке $f(x_0)$. Придавая аргументу $x$ приращение $\Delta x$, получим точку $x_0+\Delta x$. Новое значение функции будет равно $f(x_0+\Delta x)$.
Разность $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ называется приращением функции в точке $x_0$, вызванным приращением аргумента $\Delta x$, и обозначается $\Delta y$.
Итак, $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
Геометрически это выглядит так:




Следует заметить, что каждая из величин $\Delta x$ и $\Delta y$ может быть как положительной, так и отрицательной. Кроме того, может оказаться, что $\Delta y = 0$ при $\Delta x \neq 0$.

Пример. Найти приращение функции $y=\sin 2x$ в точке $x_0$.

Ответы:

1. $\Delta y = \sin(2x_0+\Delta x)-\sin 2x_0$ стр.5.г.
2. $\Delta y = \sin 2(x_0+\Delta x) - \sin 2x_0$ стр.7.а.

Если вы считаете верным первый ответ, то смотрите стр.5,г; если второй, то смотрите стр.7,а.

## § 2. Определения непрерывности функции в точке и на интервале

Определение I. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, т.е. если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Эти определения эквивалентны: каждое из них можно получить из другого.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на некотором интервале, если она непрерывна в каждой его точке.

Прочитайте еще раз внимательно эти определения и заучите их.

Рассмотрим пример. Доказать, пользуясь определением I, что функция $f(x)=\cos x$ непрерывна в области ее определения.

Решение.

Эта функция определена при всех значениях $x$.

Возьмем произвольное фиксированное значение $x=x_0$ и дадим значению $x_0$ произвольное приращение $\Delta x$. Получим точку $x=x_0+\Delta x$.

Первоначальное значение функции $f(x_0)=\cos x_0$, а новое значение $f(x_0+\Delta x)=\cos(x_0+\Delta x)$. Тогда приращение функции

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0=-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Теперь найдем предел $\Delta y$ при $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{ограниченная функция}}\cdot\underbrace{\sin\frac{\Delta x}{2}}_{\text{бесконечно малая}}=0$$ при любом $x_0$,

так как произведение бесконечно малой величины на ограниченную есть величина бесконечно малая, а ее предел равен 0.

Таким образом, функция $f(x)=\cos x$ определена в окрестности точки $x_0$ (т.е. в интервале, содержащем точку $x_0$) и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Значит, она непрерывна в точке $x_0$.

В силу произвольности значения $x_0$ доказательство справедливо для любого $x$. Следовательно, функция $f(x)=\cos x$ непрерывна при всех значениях $x$, т.е. во всей области определения функции.

Теперь перейдите на стр.8 и попробуйте решить пример I.

а

Неверно.

Определите область существования функции.
Затем найдите приращение функции $\Delta y$ в произвольной точке $x_0$.
Значение функции $f(x)=3x^2-4$ в точке $(x_0+\Delta x)$ равно

$$f(x_0+\Delta x)=3(x_0+\Delta x)^2-4.$$

Завершите решение примера и переходите к стр.I5.

---

б

Совершенно верно. Вы показали понимание обоих определений непрерывности функции в точке.

Так как функция $y=f(x)$ по условию определена в (-5,0), т.е. в окрестности точки $x=-1$, и $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$ , то она непрерывна в точке $x=-1$ . Значит, согласно определению I,

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(-1+\Delta x)-f(-1)]=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Переходите к стр. II.

---

в

Неправильно.

Проверьте свое решение и вернитесь на стр. 6.

---

г

Неверно. Значение функции $y=\sin 2x$ в точке $x_0+\Delta x$ будет $\sin 2(x_0+\Delta x)$.

Переходите к стр. 7,а.

Выше мы рассмотрели несколько функций, имеющих точки разрыва второго рода.

Теперь возьмем функцию $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{3-x}$.

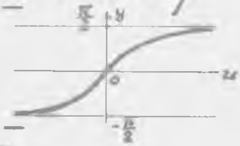
Эта функция элементарная и определена при всех значениях $x$, кроме $x = 3$. Значит, она непрерывна при $x \neq 3$, а $x=3$ – точка разрыва. Выясним, какого она рода.

Для этого найдем $f(3-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{3-x} =$

(Делаем замену $\frac{1}{3-x} = u$. Тогда $u \to +\infty$, если $x \to 3$ и $x<3$.)

$= \lim\limits_{u\to+\infty} \operatorname{arctg} u = \frac{\pi}{2}$.

Вспомните хотя бы график функции $y = \operatorname{arctg} u$



$f(3+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{3-x} = \lim\limits_{u\to-\infty} \operatorname{arctg} u = -\frac{\pi}{2}$.

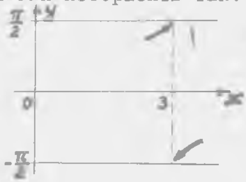
Здесь, как и раньше, положили $\frac{1}{3-x} = u$, но теперь $u = \frac{1}{3-x} < 0$ при $x>3$ и поэтому $u \to -\infty$ при $x \to 3$.

Итак, функция $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{3-x}$ имеет конечные односторонние пределы. Значит, $x=3$ – точка разрыва первого рода.

Напомним, что скачком функции $f(x)$ в точке разрыва $x_0$ (в точке разрыва первого рода) называется разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$.

В нашем примере скачок равен $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$.

График функции вблизи точки $x=3$ можно схематически изобразить так:



Решите задачу.
Определить род точки разрыва функции $y = \frac{\sqrt{1+5x} - 1}{x}$ и найти скачок, если имеется точка разрыва первого рода. Построить график функции вблизи точки разрыва.

Ответы: 1) Точка разрыва второго рода. стр.5,в.
2) Скачок равен 0. стр.20.
3) Скачок равен $\frac{5}{2}$. стр.13,б.

а) Вы считаете, что $\Delta y = \sin 2(x_0 + \Delta x) - \sin 2x_0$.

Правильно.

Теперь найдем приращение функции $y = \sin 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$

I) при $\Delta x = \frac{\pi}{12}$ ; 2) при $\Delta x = -\frac{\pi}{12}$ ; 3) при $\Delta x = \pi$ .

I) $\Delta y = \sin 2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}) - \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) - \sin\pi = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$.

2) $\Delta y = \sin 2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) - \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) - 0 = \frac{1}{2}$ .

3) $\Delta y = \sin 2(\frac{\pi}{2} + \pi) - \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sin 3\pi - \sin\pi = 0 - 0 = 0$

Переходите к стр.4.

---

б) Вы опять допустили ошибку. Видимо, вы несерьезно работали или не разобрались. Поэтому вам нужно вернуться на стр.3 и снова проработать весь материал.

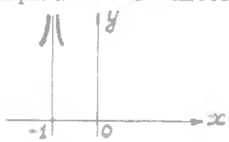
---

в) Верно.

Функция $y = \frac{2}{(x+1)^2}$ не определена в точке $x = -1$ . Точка $x = -1$ есть точка разрыва второго рода, т.к.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{2}{(x+1)^2} = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2}{(x+1)^2} = +\infty$$

Вы верно подметили, что функция $\frac{2}{(x+1)^2}$ является бесконечно большой величиной при $x \to -1$ , причем положительной величиной, т.к. $\frac{2}{(x+1)^2} > 0$ при всех значениях $x$ $(x \neq -1)$ . Поэтому график функции вблизи точки разрыва $x = -1$ имеет следующий вид:




Точку разрыва второго рода будем называть точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен. Значит, можно сказать, что $x = -1$ - точка бесконечного разрыва.

Как вы думаете, есть ли точки разрыва второго рода, которые не являются точками бесконечного разрыва.

Ответы: I) Есть. стр.I2.

2) Нет. стр.I9,б.

Решите самостоятельно пример I.

Пример I.

Доказать, пользуясь определением I, непрерывность функции $f(x)=3x^2-4$ и выяснить, на каком интервале эта функция непрерывна.

Ответы: I. $(-\infty, \infty)$ стр.I5.

2. Функция непрерывна не при всех значениях $x$ .стр.5,а.

Пример 2.

Известно, что функция $y=f(x)$ определена в интервале (-5,0), $f(-1)=3$ и, кроме того, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=3$. Чему равен

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(-1+\Delta x)-f(-1)]\ ?$$

Ответы: I. 0 стр. 5,б.

2. Числу, отличному от 0. стр.I6,а.

Пример 3.

Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси.

Известно, что $f(2)=5$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(2+\Delta x)-5]=0$.

Найти $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Ответы: I. 0 стр. 7,б.

2. Число, отличное от 0. стр.I0,а.

<u>Правильно</u>.

Функция $f(x)=\frac{1}{3-x}$ определена при всех значениях $x$, кроме $x=3$. Значит, $x=3$ – точка разрыва. Чтобы выяснить род точки разрыва, найдем пределы слева и справа.

Предел слева $f(3-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{1}{3-x}=+\infty$.

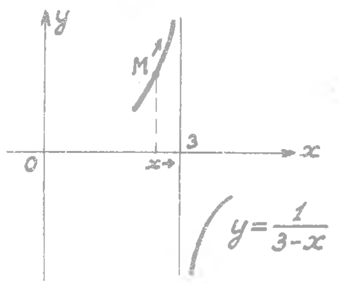
В самом деле, функция $\frac{1}{3-x}$ при $x\to 3$ является бесконечно большой величиной как обратная по отношению к бесконечно малой величине $(3-x)$, причем $\frac{1}{3-x}$ – бесконечно большая положительная величина, т.к. $\frac{1}{3-x}>0$ при $x<3$.

Аналогичным образом находим правый предел:

$$f(3+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{1}{3-x}=-\infty .$$

Знак (–) объясняется тем, что при $x>3$ функция $\frac{1}{3-x}<0$.

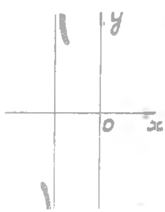
Значит, точка $x=3$ есть точка разрыва второго рода. График функции в окрестности точки $x=3$ имеет вид :



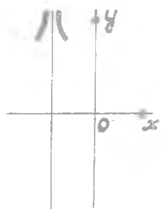

Чтобы построить асимптотически график функции вблизи точки разрыва, нужно знать левый и правый пределы функции в этой точке. В нашем примере из того, что $f(3-0)=+\infty$, следует, что точка $M(x,f(x))$ будет перемещаться по графику неограниченно вверх, когда ее абсцисса $x$ стремится к 3, оставаясь меньше 3 (т.к. в этом случае ордината $y=f(x)$ неограниченно возрастает). Подобными рассуждениями можно обосновать участок графика при $x>3$. В данном примере прямая $x=3$ является асимптотой графика функции $y=\frac{1}{3-x}$, а сам график есть гипербола.

Вы хорошо справились с предложенной задачей. Теперь решите такую.

Установить род точки разрыва функции $y=\frac{2}{(x+1)^2}$ и определить, какой из приведенных чертежей соответствует графику функции вблизи точки разрыва.




черт.1.




черт.2.

<u>Ответы</u>: 1) Точка разрыва I рода, черт.2. стр.14,б.

2) Точка разрыва 2 рода, черт.I. стр.10,в.

3) Точка разрыва 2 рода, черт.2. стр.7,в.

3- 2528

(а)

Вы правы, если оказалось, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$.

В самом деле, по условию функция $f(x)$ определена при всех значениях $x$ (значит, она определена в окрестности точки $x$ = 2) и

$$\lim_{\Delta x\to 0}[\underbrace{f(2+\Delta x)-f(2)}_{\Delta y}]=\lim_{\Delta x\to 0}[f(2+\Delta x)-5]=0$$, т.е.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Значит, функция непрерывна в точке $x$ = 2. Поэтому, согласно второму определению непрерывности, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=5$.

Переходите к стр.II.

Если вы получили другой ответ, то найдите свою ошибку и перейдите к стр.II.

---

(б) Вы допустили две ошибки.

Вернитесь на стр.II и подумайте еще.

---

(в) Вы ошиблись.

Функция $y=\frac{2}{(x+1)^2}$ положительна при всех значениях $x$ из области определения.

Найдите еще раз $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{2}{(x+1)^2}$ и постройте график функции при $x$, близких к (-I), но меньших (-I).

Вернитесь на стр.9 и выберите другой ответ.

---

(г) Не совсем так.

Один пример вы решили верно, а вот при решении другого (более простого) вы допустили ошибку, находя левый предел. Проверьте свое решение и вернитесь на стр.I2.

## § 3. Непрерывность элементарной функции

Выше мы доказали, что каждая из функций $y=\cos x$ и $y=3x^2-4$ непрерывна в тех точках, в которых она определена.

Имеет место следующая теорема.

Всякая элементарная функция непрерывна в области определения.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге I (см.список литературы на стр.29).

Напомним, что элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y=f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Из приведенной теоремы следует, что если элементарная функция $f(x)$ определена в точке $x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Таким образом, чтобы найти предел функции, непрерывной в точке $x_0$ (в частности, предел элементарной функции, которая определена в точке $x_0$), достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента $x$ его предельное значение $x_0$.

Например, вычислим $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2-x}+\operatorname{arctg}\frac{2}{x}}{x^2-3}$.

Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2-x}+\operatorname{arctg}\frac{2}{x}}{x^2-3}$ - элементарная и определена в точке $x=2$. Значит, она непрерывна в этой точке, и

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{\sqrt[3]{2-2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{2}}{2^2-3}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Теперь попробуйте ответить на такой вопрос.

Можно ли сразу воспользоваться указанным выше правилом нахождения предела элементарной функции в следующих случаях:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}}{2+\arcsin(1-x)}$ 3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$

Ответы: I. 1) можно, 2) можно, 3) нельзя стр. I6,б.

II. 1) нельзя, 2) можно, 3) нельзя стр. I9,а.

III. 1) нельзя, 2) нельзя, 3) можно стр. I0,б.

IУ. Ответ, отличный от любого из выше приведенных. стр.I4,а.

Совершенно верно.

Точки разрыва второго рода не исчерпываются точками бесконечного разрыва.

Например, рассмотрим функцию $y=\cos\frac{1}{x}$. Она не определена лишь в точке $x = 0$.

Точка $x = 0$ есть точка разрыва второго рода, т.к. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\cos\frac{1}{x}$ не существует (т.е. нет ни конечного предела, ни бесконечного).

Заметим, что предел справа также не существует. Таким образом, точка $x = 0$ не является точкой бесконечного разрыва.

Теперь, анализируя еще раз определения точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода, дадим развернутое определение точки разрыва второго рода.

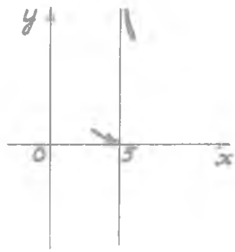
> Точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$, если хотя бы один из пределов справа или слева в точке $x_0$ не существует или бесконечен.

Теперь исследуйте точку разрыва функций

1. $y=2^{\frac{3}{x-5}}$ и 2. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x-5}}$ и определите, какой график соответствует каждой из функций.


(I)


(П)




(Ш)

Ответы: 1 - I, 2 - П (т.е. функции 1. соответствует график (I), а функции 2. соответствует график (П) стр.2I,а.

1 - П, 2 - I стр.I9,в.

1 - Ш, 2 - I стр.I4,в.

1 - Ш, 2 - П, стр.I0,г.

Ответ, отличный от приведенных стр.I3,а.

а

Неверно. Вы допустили две ошибки.
Вернитесь на стр. I2.

---

б

Вы ошиблись.

Однако, если вы определили, что $x = 0$ есть точка разрыва первого рода и что один из односторонних пределов оказался равен $\frac{5}{2}$ , то вы шли по правильному пути. В этом случае вам нужно еще раз найти другой односторонний предел и определить скачок в точке $x = 0$:

$$f(0+0)-f(0-0)$$

После этого вернитесь на стр.6 и сравните свой новый ответ с приведенными.

---

в

В точке $x = \frac{\pi}{2}$ разрыв первого рода, а в точках $x = k\pi$ , где $k = 1,2,3,\ldots$, разрыв второго рода.

Если вы получили точно такие же ответы, то перейдите на стр.22.

Если же получены другие ответы, то найдя свою ошибку и построив график функции, перейдите на стр. 22.

**а**

Неверно. Вернитесь на стр.II и подумайте еще.

---

**б** Вы ошиблись.

Вспомните классификацию точек разрыва и вернитесь на стр.9.

---

**в**

Правильно.

Функция $y=2^{\frac{3}{x-5}}$ .имеет в точке $x$ = 5 разрыв второго рода, т.к.

$$f(5-0)=\lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} 2^{\frac{3}{x-5}}=\lim_{u\to-\infty} 2^{u}=0$$

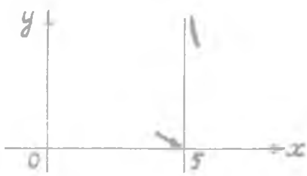
(Делаем замену $\frac{3}{x-5}=u$. Тогда $u\to-\infty$, если $x\to 5$, оставаясь меньше 5)

$$f(5+0)=\lim_{\substack{x\to 5\\ x>5}} 2^{\frac{3}{x-5}}=\lim_{u\to+\infty} 2^{u}=+\infty.$$

(Положим снова $\frac{3}{x-5}=u$. Тогда $u\to+\infty$, если $x\to 5$ и $x>5$)

Раз хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, точка $x$ = 5 является еще и точкой бесконечного разрыва.

График этой функции вблизи точки $x$ = 5 схематически выглядит так:




Следует подчеркнуть, что когда $x\to 5$ , оставаясь меньше 5, график функции "подходит" к точке (5;0) сверху, а не снизу, т.к. показательная функция $2^{\frac{1}{x-5}}>0$.

Другая функция $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x-5}}$ также имеет в точке $x$ = 5 бесконечный разрыв, т.к. $f(5-0)=-\infty$ , а $f(5+0)=+\infty$. Поэтому ее график вблизи точки разрыва такой:


Переходите к стр.6.

Правильно.

Функция $f(x)=3x^2-4$ определена на всей числовой оси и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.
Действительно, приращение функции $\Delta y$ в точке $x_0$ равно

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=[3(x_0+\Delta x)^2-4]-[3x_0^2-4]=6x_0\cdot\Delta x+3\Delta x^2.$$

Найдем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6x_0\Delta x+3\Delta x^2)=$ (по теоремам о пределах произведения и суммы)

$$=\lim_{\Delta x\to 0}6x_0\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+3\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=6x_0\cdot 0+0=0$$

при любом $x_0$. (Здесь $\lim\limits_{\Delta x\to 0}6x_0=6x_0$, т.к. $6x_0$ - число; оно не зависит от $\Delta x$)

Значит, функция $f(x)=3x^2-4$ непрерывна в области определения, т.е. в $(-\infty,\infty)$.

Теперь проведем доказательство непрерывности функции $f(x)=3x^2-4$, пользуясь определением 2.

Эта функция определена при всех значениях $x$.

Возьмем произвольное значение $x=x_0$, найдем значение функции $f(x_0)$, вычислим $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ и убедимся, что выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

В нашем случае $f(x_0)=3x_0^2-4$, а $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(3x^2-4)=$ (по теоремам о пределах произведения и алгебраической суммы)

$$=\lim_{x\to x_0}3x^2-\lim_{x\to x_0}4=3\lim_{x\to x_0}x\cdot\lim_{x\to x_0}x-4=3x_0^2-4.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Значит, эта функция непрерывна в точке $x_0$, но так как точка $x_0$ была взята произвольно, то функция $f(x)=3x^2-4$ непрерывна при любом $x$.

Попробуйте теперь самостоятельно решить задачу.

Доказать, пользуясь вторым определением непрерывности, что функция $y=x^5-\frac{36}{x^2}$ непрерывна в точке $x=2$.

Решив эту задачу, переходите к примеру 2 на стр.8.

Если задача вызывает затруднения, то смотрите указания на стр.23,в.

а

Неправильно.

Повторите оба определения непрерывности функции: сначала второе, затем первое.

Какой вывод можно сделать из того, что $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3 = f(-1)$ и функция $f(x)$ определена в (-5,0), т.е. в окрестности точки $x = -1$ ?

Что из себя представляет разность $f(-1+\Delta x) - f(-1)$ ?

Завершив решение этого примера, переходите к примеру 3 на стр.8.

---

б

Вы ошиблись в одном примере.
Вернитесь на стр.11 и подумайте еще.

---

в

Неверно.

Точку разрыва функции $f(x) = \frac{1}{3-x}$ вы, наверно, нашли сразу. Это точка $x = 3$, так как функция определена всюду, кроме $x = 3$.

Теперь, чтобы выяснить род точки разрыва, найдите пределы слева и справа, т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{1}{3-x}$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{1}{3-x}$. Будут ли они оба конечны ?

Сделав соответствующий вывод, переходите на стр.9.

---

г

Неверно.

Если вы установили, что в точке $x = -1$ функция непрерывна, а в точке $x = \frac{\pi}{2}$ разрывна, то здесь вы не ошиблись.

Найдите теперь область существования функции $y = ctg\, x$, рассматриваемой при $x > \frac{\pi}{2}$, и вернитесь на стр.24.

## § 4. Исследование на непрерывность функции, заданной несколькими формулами.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1 \\ x-1 & \text{при } x>1 \end{cases}$$

Сразу можно отметить, что эта функция непрерывна в интервалах $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

В самом деле, в первом интервале $f(x)=0$, а функция $y = 0$ - это элементарная функция, которая непрерывна всюду на числовой оси, значит и при $x<1$. Аналогично, на $(1, +\infty)$ $f(x)=x-1$ - это элементарная функция, которая непрерывна в тех точках, в которых она определена. Особо исследуем точку $x=1$, где меняется формула, задающая функцию.

Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x=1$. Теперь проверим, выполняется ли равенство $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ ? Найдем $f(1)$ : $f(1)=0$.

Чтобы найти $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, найдем левый и правый пределы функции при $x \to 1$.

$$f(1-0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 0=0$$

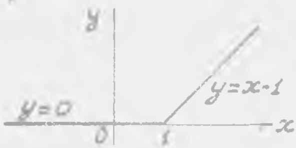
, т.к. слева от точки $x = 1$ функция $f(x)= 0$.

$$f(1+0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 1=1-1=0 .$$

Так как односторонние пределы $f(1-0)$ и $f(1+0)$ существуют и $f(1-0)=f(1+0)$, то $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ существует (когда $x$ стремится к I по любому закону) и $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1-0)=f(1+0)$.

Значит, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$.

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна и в точке $x = 1$. График этой функции представляет собой сплошную линию без разрывов.




Замечание. Не следует думать, что всякая функция, заданная несколькими формулами, является неэлементарной. Например, функция, рассмотренная выше, является элементарной, потому что ее можно задать одной формулой:

$$f(x)=\frac{x-1+|x-1|}{2}=\frac{x-1+\sqrt{(x-1)^2}}{2} .$$

Переходите к стр.I8

## § 5. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва

Мы уже знаем, что, согласно определению 2, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Кроме того, известно, что если существует предел функции $f(x)$ при произвольном стремлении $x$ к $x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то существуют пределы слева и справа, причем $f(x_0-0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Справедливо и обратное утверждение.

Значит, можно утверждать, что для непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ определенное значение $f(x_0)$ и определена вблизи этой точки;
2) существуют равные односторонние пределы $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, т.е. существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) эти односторонние пределы равны $f(x_0)$
$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Определение.

Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0$ (кроме быть может самой точки $x_0$) и в этой точке не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, то ее называют разрывной в точке $x_0$. В этом случае точку $x_0$ называют точкой разрыва функции.

Точки разрыва классифицируют следующим образом.

Определение. Точка разрыва $x_0$ называется точкой разрыва первого рода, если функция $f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа в этой точке.

Определение. Всякая точка разрыва не первого рода называется точкой разрыва второго рода.

Теперь решите задачу.

Найти точку разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ и выяснить, какого она рода.

Ответы: 1. Первого рода. Стр. 16,в.
2. Второго рода. Стр. 9.

(а)

Совершенно верно.

В первом примере сразу применить правило нельзя, т.к. функция $\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ не определена в точке $x = 0$. В третьем примере правило также непригодно, т.к. символ $(+\infty)$ это не число (не точка), а запись $x \to +\infty$ означает, что аргумент $x$ неограниченно возрастает.

А вот

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2-1}}{2+\arcsin(1-x)} = \frac{e^{1-1}}{2+\arcsin 0} = \frac{1}{2}$$ , т.к.

функция $\frac{e^{x^2-1}}{2+\arcsin(1-x)}$ - элементарная и определена в точке $x = 1$.

Переходите на стр.I7.

---

(б) Вы считаете, что всякая точка разрыва второго рода есть точка бесконечного разрыва. Вы ошибаетесь.

Вспомните (или посмотрите на стр.I8) определение точки разрыва первого рода и определение точки разрыва второго рода.

Когда имеет место точка разрыва второго рода ? Попробуйте дать развернутое определение точки разрыва второго рода.

Затем переходите на стр.I2.

---

(в) Не совсем так.

График функции $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x-5}}$ вы определили правильно, односторонние пределы другой функции $y = 2^{\frac{3}{x-5}}$ вы также нашли правильно: $f(5-0) = 0$, $f(5+0) = +\infty$.

Что касается чертежа, то он выбран неверно. Вспомните, какие значения (по знаку) принимает показательная функция $y = 2^{\frac{3}{x-5}}$ ?

Ответив на этот вопрос, вы уже легко сможете выбрать на стр.I2 нужный ответ.

Верно, в точке $x = 0$ функция $y=\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ имеет разрыв первого рода, и скачок равен 0.

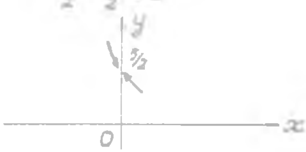
Посмотрите, правильно ли вы решали эту задачу.

Точка $x = 0$ есть точка разрыва, т.к. функция определена в окрестности точки $x = 0$, кроме самой этой точки.

Так как
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+5x}-1)(\sqrt{1+5x}+1)}{x(\sqrt{1+5x}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x-1}{x(\sqrt{1+5x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+5x}+1}=\frac{5}{\sqrt{1+5\cdot 0}+1}=\frac{5}{2}$$

(Ибо функция $\frac{5}{\sqrt{1+5x}+1}$ - элементарная, и она определена в точке $x = 0$.) Отсюда следует, что существует и предел слева и предел справа, причем $f(0-0)=f(0+0)=\frac{5}{2}$. Следует заметить, что можно было находить $f(0-0)$ и $f(0+0)$ отдельно указанным выше способом.

Итак, $x = 0$ - точка разрыва первого рода, а скачок функции в этой точке равен $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=0$. График функции вблизи точки разрыва имеет вид:




Если функцию доопределить в точке $x = 0$, положив $f(0)=\frac{5}{2}$, то она станет непрерывной и в этой точке. Геометрически это означает, что добавление точки $(0, \frac{5}{2})$ устраняет разрыв графика. В этом случае точку $x=0$ называют точкой устранимого разрыва.

Точкой устранимого разрыва функции $f(x)$ будем называть такую <u>точку разрыва первого рода</u> $x_0$, когда $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

Задача.

Можно ли устранить разрывы функций

1) $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ 2) $g(x)=\begin{cases}1+x^2 & \text{при } x<-1\\ x+3 & \text{при } x>-1\end{cases}$ 3) $\varphi(x)=\begin{cases}x^2 & \text{при } x\leq -1\\ x+3 & \text{при } x>-1\end{cases}$

в точке $x = -1$ ?

Ответы: I. 1) можно, 2) можно, 3) нельзя стр. 23,б.
II. 1) нельзя, 2) можно, 3) нельзя стр. 25,а.
III. 1) можно, 2) нельзя, 3) можно стр. 21,б.

а

Неверно.

Вспомните, как мы исследовали на стр.9 точку разрыва функции

$$f(x)=\frac{1}{3-x}.$$

Кроме того, учтите, что показательная функция $y=2^{\frac{3}{x-5}}>0$ и

$$\lim_{u\to-\infty}2^{u}=0.$$

Найдите еще раз односторонние пределы каждой функции в точке $x=5$ и вернитесь на стр.I2.

---

б

Очень плохо. Вы очевидно совсем не думали над решением задачи. Прочтите еще раз внимательно всю стр.20 и решите предложенную задачу. Вспомните, не исследовали ли мы раньше точку разрыва функции

$$f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}\ ?$$

Постройте еще графики функций $g(x)$ и $\varphi(x)$.

---

в

Правильно.

Данная функция имеет бесконечное множество точек разрыва: $x=\frac{\pi}{2}$, $x=k\pi$, где $k$ = I,2,3,...

Выясните, какого рода эти точки разрыва.
Затем перейдите на стр.I3,в.

Приведем решение задачи, чтобы вы могли убедиться в правильности ваших рассуждений.

Данная функция

$$f(x)=\begin{cases} -2 & \text{при } x\le -1 \\ 2x & \text{при } -1<x\le \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{ctg}x & \text{при } x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

определена при всех значениях $x$, кроме $x = k\pi$ ($k$ = I,2,3,...), т.к. в этих точках не определена функция $\operatorname{ctg}x$, которую мы рассматриваем при $x>\frac{\pi}{2}$.

Значит, эти точки $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$,... являются точками разрыва функции $f(x)$. Кроме того, разрыв возможен и в точках $x$ = -I и $x=\frac{\pi}{2}$, где происходит смена формулы, задающей функцию (кстати, данная функция не является элементарной).

Во всех остальных точках функция $f(x)$ непрерывна. В самом деле, функция (-2) непрерывна в интервале ($-\infty$,-I), а функция $2x$ непрерывна в $(-1, \frac{\pi}{2})$, т.к. каждая из них является элементарной и определенной на всей числовой оси. Поэтому они непрерывны всюду, в том числе и на указанных интервалах.

Функция $\operatorname{ctg}x$ также будет непрерывна при $x>\frac{\pi}{2}$, кроме точек $x=k\pi$ ($k$ = I,2,3,...), в которых она не определена.

Исследуем эти точки разрыва.

$$\lim_{\substack{x\to k\pi\\ x<k\pi}} f(x)=\lim_{\substack{x\to k\pi\\ x<k\pi}}\operatorname{ctg}x \underset{\text{в силу периодичности ctg}x}{=} \lim_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}}\operatorname{ctg}x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to k\pi\\ x>k\pi}} f(x)=\lim_{\substack{x\to \pi\\ x>\pi}}\operatorname{ctg}x=+\infty .$$

Значит, в точках $x=k\pi$ ($k$= I,2,3,...) разрыв второго рода.

Исследуем теперь точки $x=-1$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

$$f(-1-0)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(-2)=-2\ ,\quad f(-1+0)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}2x=-2$$

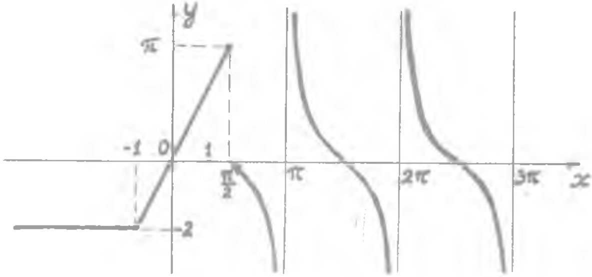
Итак, $f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1)$. Значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x$ = -I. А вот в точке $x=\frac{\pi}{2}$ функция имеет разрыв первого рода, т.к.

$$f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}2x=\pi\ ,\quad f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}}\operatorname{ctg}x=0 .$$

Переходите к стр.23,а.

(а)

График функции $f(x)$ имеет следующий вид :




Переходите к стр. 26.

---

(б)

Не совсем так.

Функцию $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ мы исследовали раньше и установили, что $x = -1$ - точка разрыва второго рода. А может ли точка разрыва второго рода быть точкой устранимого разрыва функции ?

Вернитесь на стр.20, прочитайте определение точки устранимого разрыва и завершите решение задачи.

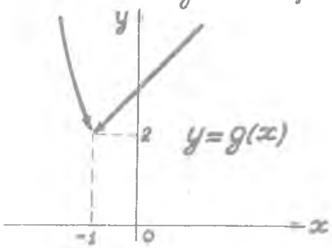
---

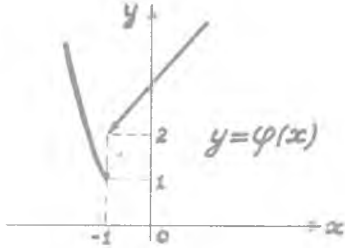
(в)

Функция $y=x^5-\frac{36}{x^2}$ определена в окрестности точки $x = 2$, например, в интервале (1,3). Для решения задачи найдите значение $f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^5-\frac{36}{x^2}\right)$ и сравните полученные результаты.

Убедившись, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$, сделайте соответствующий вывод и перейдите к примеру 2 на стр.8.

Графики функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ выглядят так:




Сравнивая эти графики, мы видим, что если в первом случае добавление новой точки (-I;2) устраняет разрыв линии (это когда мы доопределяем функцию, полагая $g(-1)=2$ ), то во втором случае никакая новая точка (-I, $y_0$ ), взятая вместо точки (-I;I), не „склеит" ветви графика функции $y=\varphi(x)$.

## § 6. Повторение

Наша работа подходит к концу. Попробуйте решить более трудную задачу, которая потребует знания ряда фактов, разобранных в данном пособии.

Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} -2 & \text{при } x\le -1 \\ 2x & \text{при } -1<x\le \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{ctg} x & \text{при } x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Исследовать ее на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить, какого они рода. Построить график этой функции.

Решив задачу, переходите на стр.I3,в.

Если задача вызывает затруднения, то сначала ответьте на вопрос: сколько точек разрыва имеет функция ?

| | | |
|---|---|---|
| Ответы: | I. Одну | стр. I6,г. |
| | 2. Две | стр. 25,б. |
| | 3. Более двух | стр. 2I,в. |

(а)

Правильно.

Вы хорошо справились с этой задачей.

Напомним, что точка разрыва $x_0$ будет точкой устранимого разрыва функции, если в этой точке односторонние пределы конечны и равны между собой, т.е. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

I) Поэтому разрыв функции $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ в точке $x=-1$ устранить нельзя, т.к. $x=-1$ - точка разрыва второго рода. (Это было установлено нами раньше).

2) Функция $g(x)=\begin{cases} 1+x^2 & \text{при } x<-1 \\ x+3 & \text{при } x>-1 \end{cases}$ имеет точку устранимого разрыва $x=-1$.

В самом деле, $g(-1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}}(1+x^2)=2$, $g(-1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}}(x+3)=2$.

$g(-1-0)=g(-1+0)$.

Разрыв можно устранить, если доопределить функцию в точке $x=-1$, положив $g(-1)=2$.

3) Функция $\varphi(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\leq -1 \\ x+3 & \text{при } x>-1 \end{cases}$, хотя и определена в точке $x=-1$, но имеет в этой точке разрыв первого рода. В самом деле,

$\varphi(-1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}}x^2=1$, $\varphi(-1+0)=2$. Разрыв устранить нельзя, т.к. $\varphi(-1-0)\neq\varphi(-1+0)$.

Теперь постройте графики функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ и сравните их. Затем переходите на стр.24.

---

(б) Неверно.

Определите сначала область существования функции $y=ctg\,x$, рассматриваемой при $x>\frac{\pi}{2}$. Затем исследуйте каждую точку, где меняется формула, задающая функцию $f(x)$.

После этого на стр.24 найдите верный ответ.

---

## § 7. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке, причем непрерывность на концах отрезка понимается так:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a), \quad \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)=f(b).$$

Непрерывная на отрезке функция обладает рядом важных свойств. Отметим два из них (другие можете найти в учебнике).

Теорема I.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется по крайней мере одна точка $x=c$ такая, что $f(c)=0$.

Другими словами, при выполнении условий теоремы значение $x=c$, где $a<c<b$, является корнем уравнения $f(x)=0$.

Теорема I является частным случаем теоремы 2.

Теорема 2.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и принимает на концах отрезка неравные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда какое бы число $\mu$ между числами $A$ и $B$ мы ни взяли, внутри отрезка $[a,b]$ найдется такая точка $x=c$, что $f(c)=\mu$.

Пример.

Доказать, что уравнение $x^3+5x-2=0$ имеет по меньшей мере один корень, заключенный между 0 и I.

Решение. Воспользуемся теоремой I.

Функция $f(x)=x^3+5x-2$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, кроме того

$f(0)=-2<0, \quad f(1)=1+5-2=4>0$.

Значит, существует хотя бы одна точка $x=c$, где $0<c<1$, такая, что $f(c)=0$.

А это означает, что уравнение $x^3+5x-2=0$ имеет в (0,I) хотя бы один корень С.

Наша работа с пособием закончена. В качестве домашнего задания можно взять дополнительные задачи, приведенные на стр.27.

## Дополнительные задачи

1. Доказать, пользуясь определением, что функция $y=\frac{x}{x^2-4}$ непрерывна в области определения. Установить род точек разрыва.

2. Пусть
$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } x\le 1; \\ 3+ax^2, & \text{если } x>1. \end{cases}$$
При каком выборе числа $a$ функция $f(x)$ будет непрерывной ? Построить ее график.

3. Определить род точки разрыва функции
$$y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$$

4. Можно ли устранить разрыв функции
$$f(x)=\begin{cases} |x-1| & \text{при } x\ne 1 \\ 3 & \text{при } x=1 \end{cases} \quad \text{в точке } x=1 \text{ ?}$$

5. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеет функция
$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x\le -10 \\ \frac{1}{\lg|x|} & \text{при } -10<x<10 \\ \frac{1}{x-8} & \text{при } x>10. \end{cases}$$

6. Принимает ли функция $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$ значение, равное 1, в какой-либо точке отрезка $[1,3]$ ?

Ответы находятся на стр. 28.

## ОТВЕТЫ к дополнительным задачам

1. Функция непрерывна при всех значениях $x$, кроме $x = -2$ и $x = 2$. В точках $x = -2$ и $x = 2$ разрыв второго рода (бесконечный разрыв).

2. $a = -1$.

3. $x = 0$ – точка разрыва первого рода, причем $f(0-0)=1$, $f(0+0)=0$.

4. Разрыв устранить можно, если переопределить функцию в точке $x = 1$, то есть положить $f(1) = 0$ вместо $f(1) = 3$.

5. Функция имеет четыре точки разрыва.
   При $x = 0$ – разрыв первого рода (устранимый),
   при $x = \pm 1$ – разрыв второго рода (бесконечный),
   при $x = 10$ – разрыв первого рода.

6. Да.

# ЛИТЕРАТУРА

I. К.А.Бохан, И.А.Егорова, К.В.Лащенов. Курс математического анализа, том I, „Просвещение", Москва, 1965.

2. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, том I, „Наука", Москва, 1965.

3. А.Ф.Бермант. Краткий курс математического анализа для втузов, „ФМ", Москва, 1961.

4. А.В.Игнатьева, Т.И.Краснощекова, В.Ф.Смирнов. Курс высшей математики, „Высшая школа", Москва, 1964.

5. Г.Н.Берман. Сборник задач по курсу математического анализа, „Наука", Москва, 1967.

6. Г.И.Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу, „Высшая школа", Москва, 1966.

7. И.А.Каплан. Практические занятия по высшей математике, часть П, ХГУ, Харьков, 1963.

8. К.З.Баранцевич, А.М.Маркина, Ц.Б.Немченко, Н.В.Попова, В.Б.Хейнман. Математический практикум для втузов, „Вышэйшая школа", Минск, 1967.

## СОДЕРЖАНИЕ

Владимир Владимирович КУЛИКОВ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И РАЗРЫВЫ ФУНКЦИИ

Программированное учебное пособие

Редактор - И.С.КОЛЫШЕВА

Корректор - А.И.КОНДРАТЬЕВА

Подписано в печать 27.Ш.1968 г. ЕО 00227

Формат бумаги 60 х $84^{1}/_{16}$. Объем 2 печ.листа. Тираж 1000 экз.

Заказ № 2528.

Куйбышевский авиационный институт им. С.П.Королева, г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская, 151.

Ротапринтный цех типографии им. Мяги управления по печати при Куйбышевском облисполкоме., г.Куйбышев, ул.Венцена, 60.

Цена 20 коп.