МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. СОБОЛЕВ, Е.А. ТРОПКИНА

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.04.01 Математика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 517.938(075)
ББК 22.1я7
С544

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Новиков,
канд. физ.-мат. наук, доц. Е. А. Алашеева

Соболев, Владимир Андреевич

С544 **Нелинейные динамические системы:** учебное пособие / *В.А. Соболев, Е.А. Тропкина.* — Самара: Издательство Самарского университета, 2022. — 76 с.

ISBN 978-5-7883-1735-9

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинарских занятий. В нем излагается математический аппарат исследования нелинейных динамических систем с быстрыми и медленными переменными, основанный на методе декомпозиции сингулярно возмущенных дифференциальных систем. Данный метод сочетает в себе элементы качественного и асимптотического анализа.

Предназначено для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.04.01 Математика, аспирантов и специалистов в области дифференциальных уравнений и их приложений. Может пригодиться для сопровождения курса лекций, читаемого как в очной форме, так и дистанционной, а также для самостоятельного обучения.

УДК 517.938(075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7883-1735-9

Оглавление

Предисловие

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинарских занятий. В нем излагается математический аппарат исследования нелинейных динамических систем с быстрыми и медленными переменными, основанный на методе декомпозиции сингулярно возмущенных дифференциальных систем. Данный метод сочетает в себе элементы качественного и асимптотического анализа.

Основное внимание при данном подходе уделяется методам построения медленных интегральных многообразий. В большинстве случаев найти точное выражение для интегрального многообразия не удается, и встает вопрос о применении приближенного вычисления.

Детально рассматривается метод асимптотического разложения медленного интегрального многообразия сингулярно возмущенной системы по целым степеням малого параметра.

Рассматриваются случаи, когда решение вырожденного уравнения не удается записать в явном виде, но при этом есть возможность представить его в параметрической форме. Тогда интегральное многообразие следует также искать в параметрическом виде. При этом в качестве параметров могут выступать либо часть быстрых переменных, либо быстрые переменные, дополненные некоторым количеством медленных. Приводится обоснование асимптотического разложения медленных интегральных многообразий в случае параметрического задания многообразия для случаев разных размерностей быстрых и медленных переменных.

Если же решение вырожденного уравнения невозможно представить ни в явном, ни в параметрическом виде, тогда интегральное многообразие можно задать в неявной форме.

Пособие предназначено для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.04.01 Математика, аспирантов и специалистов в области дифференциальных уравнений и их приложений. Может пригодиться для сопровождения курса лекций, читаемого как в очной форме, так и дистанционной, а также для самостоятельного обучения.

Глава 1

Введение

При построении моделей, описывающих процессы различной природы в химии, биохимии, робототехнике, экономике, аэродинамике и других областях, часто используют сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений. Этот факт объясняется тем, что в таких системах происходят резко отличающиеся по скоростям процессы.

Система дифференциальных уравнений называется сингулярно возмущенной, если в ней при части производных присутствует малый параметр. Такую систему можно записать в виде

$$\dot{x} = f(t, x, y, \varepsilon), \tag{1.1}$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(t, x, y, \varepsilon), \tag{1.2}$$

где $x \in R^m$, $y \in R^n$, $t \in R$ — переменная времени, ε — малый положительный параметр. Функции f и g определены и непрерывны по совокупности переменных при всех $x \in R^m$, $y \in D \subset R^n$ (D — некоторая область в пространстве R^n), $t \in R$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Уравнение $\dot{x} = f(t, x, y, \varepsilon)$ является медленной подсистемой системы (1.1), (1.2), а уравнение $\varepsilon \dot{y} = g(t, x, y, \varepsilon)$ — быстрой.

Интенсивное развитие авиации, приборостроения, химической промышленности и других областей науки и техники незамедлительно вызвало большой интерес многих ученых к развитию теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Исследованию сингулярно возмущенных систем посвящено много работ [4] – [6], [13], [14], [21] и другие. Проблемы существования, единственности и устойчивости интегральных многообразий сингулярно возмущенных систем рассмотрены в работах [9], [15], [16], [19].

Стремление к более точному математическому описанию моделей, описывающих реальные процессы, как правило, приводит к усложнению системы и увеличению количества уравнений, входящих в нее. Данный факт делает актуальной тему поиска эффективных методов понижения размерности систем дифференциальных уравнений. Решение подобных проблем требует применения не только асимптотических методов. Хороших результатов помогает добиться использование геометрических методов анализа. Свои истоки геометрическая теория динамических систем находит в работах А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова [11].

Теорема А. Н. Тихонова [20], [21] о предельном переходе позволяет свести анализ исходной модели к исследованию решений так называемой вырожденной системы:

$$\dot{x} = f(t, x, y, 0), \tag{1.3}$$

$$0 = g(t, x, y, 0). \tag{1.4}$$

Поверхность Γ, задаваемая уравнением $0 = g(t, x, y, 0)$, называется медленной поверхностью.

Для рассмотрения некоторых моделей такой подход вполне приемлем, но для большинства прикладных задач данное приближение является слишком грубым. Кроме того, это приближение справедливо только для конечного промежутка времени.

Дальше для исследования сингулярно возмущенных систем может быть выбрано, по меньшей мере, одно из двух следующих направлений:

1) Если решение вырожденной системы (1.3), (1.4) $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ не обладает достаточной точностью для конкретной задачи, то его можно уточнить с помощью асимптотических методов (например, метода пограничных функций Тихонова — Васильевой [5]).

2) Второй подход основан на разделении быстрых и медленных движений, то есть исходная система приводится к такому виду, в котором медленная подсистема не содержит быстрые переменные. С высокой степенью точности строится уравнение для медленных переменных, а быстрые переменные определяются из соотношения вида $y = h(t, x, \varepsilon)$. Метод интегральных многообразий позволяет производить исследование на бесконечном промежутке времени.

Метод интегральных многообразий получил широкое распространение. Основы этого метода были заложены в работах [1] – [3], [12]. Следует отметить работы [7], [10], [12], [19], [22] и многие другие, в которых метод интегральных многообразий применялся для анализа моделей, описанных с помощью сингулярно возмущенных систем.

В пособии описывается метод понижения размерности сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, базирующийся на идеях теории интегральных многообразий медленных движений. Основы этого подхода сформулированы и обоснованы в работах [8], [15] – [18].

Определение 1 *Поверхность S называется интегральным многообразием системы (1.1), (1.2), если для любой точки $(t_0, x_0, y_0) \in S$ траектория $(t, x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ такая, что $x(t_0,\varepsilon) = x_0,\ y(t_0,\varepsilon) = y_0$ принадлежит S для всех $t \in \mathbb{R}$.*

В пособии речь идет о медленных интегральных многообразиях системы (1.1), (1.2). Это такие многообразия, которые могут быть представлены в виде

$$y = h(t, x, y, \varepsilon)$$

и для которых выполняется условие

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(t,x,\varepsilon) = h_0(t,x),$$

где $h_0(t,x)$ — решение вырожденного уравнения (1.4), то есть $h_0(t,x)$ является функцией, задающей лист медленной поверхности.

Медленные интегральные многообразия можно понимать как однопараметрическое семейство поверхностей, расположенных в ε-окрестности медленной поверхности $g(t,x,y,0)=0$. Параметром этого семейства является ε. Движение по интегральному многообразию описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t,x,h(t,x,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1.5}$$

Нас будут интересовать притягивающие интегральные многообразия.

Пусть (t_0,x_0,y_0) — начальная точка, не лежащая на интегральном многообразии $y=h(t,x,\varepsilon)$, то есть $y_0 \neq h(t_0,x_0,\varepsilon)$.

Определение 2 *Интегральное многообразие*

$$y = h(t,x,\varepsilon)$$

системы (1.1), (1.2) называется притягивающим, если существует такое $\rho > 0$*, что при выполнении условия*

$$\|y_0 - h(t_0,x_0,\varepsilon)\| < \rho$$

решение $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon))$ *системы (1.1), (1.2) с начальными условиями* $x(t_0,\varepsilon)=x_0,\ y(t_0,\varepsilon)=y_0$ *имеет представление*

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= u(t,\varepsilon) + \phi_1(t,\varepsilon), \\ y(t,\varepsilon) &= h(t,u(t,\varepsilon),\varepsilon) + \phi_2(t,\varepsilon), \end{aligned}$$

где $u(t,\varepsilon)$ — некоторое решение уравнения (1.5), а функции $\phi_1(t,\varepsilon)$ и $\phi_2(t,\varepsilon)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to+\infty}\phi_1(t,\varepsilon)=\lim_{t\to+\infty}\phi_2(t,\varepsilon)=0.$$

Предположим, что для системы (1.1), (1.2) выполнены следующие условия:

(1) уравнение $g(t,x,y,0)=0$ имеет изолированное решение $y=h_0(t,x)$ при $t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^m$, то есть существует такое положительное число ρ, что в окрестности $\|y-h_0(t,x)\|<\rho$ нет других решений этого уравнения;

(2) в области

$\Omega_0=\{(t,x,y,\varepsilon): x\in\mathbb{R}^m, \|y-h_0(t,x)\|<\rho, t\in\mathbb{R}, 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}$ функции f, g равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по всем переменным до $(k+2)$-го порядка включительно $(k\ge 0)$;

(3) собственные значения $\lambda_i(t,x)$ $(i=1,...,n)$ матрицы

$$B(t,x)=\frac{\partial g}{\partial y}(t,x,h_0(t,x),0)$$

удовлетворяют неравенству

$$Re\lambda_i(t,x)\le -2\gamma<0.$$

Справедлива следующая теорема о существовании медленных интегральных многообразий [17].

Теорема 1 (К. В. Задирака, 1957). *Пусть выполнены условия (1)–(3). Тогда существует такое ε_1 $(0<\varepsilon_1\le\varepsilon_0)$, что для каждого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ система (1.1), (1.2) имеет интегральное многообразие медленных движений*

$$y=h(t,x,\varepsilon), \tag{1.6}$$

движение по которому описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x, \varepsilon), \varepsilon). \tag{1.7}$$

Исследования, приведенные в [19], показывают, что в предположениях Теоремы 1 при $t \geq t_0$ и достаточно малых значениях ε справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|x(t) - v(t)\| &\leq \varepsilon M \|y_0 - h(t_0, x_0, \varepsilon)\| e^{-\frac{\gamma}{2\varepsilon}(t - t_0)}, \\ \|y(t) - h(t, v(t), \varepsilon)\| &\leq M \|y_0 - h(t_0, x_0, \varepsilon)\| e^{-\frac{\gamma}{2\varepsilon}(t - t_0)}. \end{aligned}$$

Здесь M — некоторое число, не зависящее от ε, $(v(t), h(t, v(t), \varepsilon))$ — траектория, лежащая на многообразии (1.6), $(x(t), y(t))$ — решение системы (1.1), (1.2) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, причем $\|y_0 - h(t_0, x_0, \varepsilon)\| \leq \rho$, где ρ — некоторое положительное число. Отсюда следует, что траектория $(x(t),\ y(t))$ любого решения системы (1.1), (1.2), начинающаяся вблизи интегрального многообразия (1.6), неограниченно приближается при $t \to +\infty$ к некоторой траектории $(v(t),\ h(t, v(t), \varepsilon))$, лежащей на этом многообразии.

Для интегрального многообразия (1.6) справедлив принцип сведения, состоящий в следующем [19].

Теорема 2 (В. В. Стрыгин, В. А. Соболев, 1977). *Пусть $x = \xi(t)$, $y = h(t, \xi(t), \varepsilon)$ — некоторое решение системы (1.1), (1.2), траектория которого лежит на интегральном многообразии медленных движений. Для устойчивости (асимптотической устойчивости, неустойчивости) этого решения необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым (асимптотически устойчивым, неустойчивым) решение $x = \xi(t)$ уравнения (1.7), описывающего движение на интегральном многообразии.*

Принцип сведения позволяет свести исследование решений исходной системы к анализу решений системы на многообразии.

Глава 2

Асимптотическое разложение медленных интегральных многообразий

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, y, \varepsilon), \tag{2.1}$$

$$\varepsilon\dot{y} = g(t, x, y, \varepsilon), \tag{2.2}$$

где $x \in R^m$, $y \in R^n$, $t \in R$ — переменная времени, ε – малый положительный параметр. Функции f и g определены и непрерывны по совокупности переменных при всех $x \in R^m$, $y \in D \subset R^n$ (D — некоторая область в пространстве R^n), $t \in R$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

При нахождении функции $h(t, x, \varepsilon)$, описывающей интегральное многообразие, часто встает вопрос о применении приближенного вычисления, так как получить точное выражение для функции $h(t, x, \varepsilon)$, как правило, не удается.

Для приближенного вычисления интегральных многообразий обычно используется асимптотическое разложение функции $h(t, x, \varepsilon)$ по степеням малого параметра [19]

$$h(t, x, \varepsilon) = h_0(t, x) + \varepsilon h_1(t, x) + ... + \varepsilon^k h_k(t, x) + ... \ . \qquad (2.3)$$

Подставив $h(x, t, \varepsilon)$ в уравнение (2.2) вместо y и продифференцировав в силу системы (2.1), (2.2), получим так называемое уравнение инвариантности

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial h(t, x, \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h(t, x, \varepsilon)}{\partial x} f(t, x, h(t, x, \varepsilon), \varepsilon) = \\ = g(t, x, h(t, x, \varepsilon), \varepsilon). \qquad (2.4) \end{aligned}$$

С учетом разложения (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial h_k}{\partial t} + \varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial h_k}{\partial x} f\left(t, x, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k, \varepsilon\right) = \\ = g\left(t, x, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k, \varepsilon\right). \qquad (2.5) \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты разложения (2.3) можно найти однозначно из выражения (2.5) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра. Для этого функции, входящие в тождество (2.5), разложим в формальные ряды по степеням малого параметра

$$f\left(t, x, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k, \varepsilon\right) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f^{(k)}(t, x, h_0, ..., h_k), \qquad (2.6)$$

$$g\left(t,x,\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k h_k,\varepsilon\right) = g(t,x,h_0,0)+B(t,x)\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k h_k + $$
$$+ \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k g^{(k)}(t,x,h_0,...,h_{k-1}), \qquad (2.7)$$

где $g_y(t,x,h_0(t,x),0)=B(t,x)$.

С учетом разложений (2.6), (2.7) формула (2.5) приобретает вид

$$\varepsilon\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\frac{\partial h_k}{\partial t}+\varepsilon\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\frac{\partial h_k}{\partial x}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k f^{(k)}(t,x,h_0,...,h_k) =$$

$$= g(t,x,h_0,0)+B(t,x)\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k h_k +$$

$$+\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k g^{(k)}(t,x,h_0,...,h_{k-1}). \qquad (2.8)$$

При $\varepsilon=0$ получаем равенство

$$g(t,x,h_0,0)=0, \qquad (2.9)$$

которое выполняется в силу того, что функция $h_0(t,x)$ является решением вырожденного уравнения (1.4).

Чтобы определить $h_1(t,x)$, приравняем коэффициенты при ε в тождестве (2.8)

$$\frac{\partial h_0}{\partial t}+\frac{\partial h_0}{\partial x}f^{(0)}=B(t,x)h_1+g^{(1)},$$

где $f^{(0)}=f(t,x,h_0(t,x),0)$, $g^{(1)}=g_\varepsilon(t,x,h_0(t,x),0)$.

Откуда

$$h_1=-B^{-1}(t,x)\left[g^{(1)}-\frac{\partial h_0}{\partial t}-\frac{\partial h_0}{\partial x}f^{(0)}\right]. \qquad (2.10)$$

Аналогично, приравнивая коэффициенты при ε^2, можно получить выражение, определяющее h_2. Выпишем коэффициенты при ε^k :

$$h_k = -B^{-1}(t,x)\left[g^{(k)} - \frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\partial h_p}{\partial x} f^{(k-1-p)}\right]. \qquad (2.11)$$

Таким образом, были последовательно вычислены функции $h_0(t,x)$, $h_1(t,x)$,..., $h_k(t,x)$, входящие в разложение интегрального многообразия медленных движений (2.3).

Справедлива следующая теорема об асимптотическом разложении медленных интегральных многообразий [19].

Теорема 3 (В. В. Стрыгин, В. А. Соболев, 1976). *Пусть выполнены условия теоремы существования интегрального многообразия медленных движений, и функции f, g, h_0 непрерывно дифференцируемы до $(k+2)$-го порядка включительно, тогда функция h представима в виде*

$$h(t,x,\varepsilon) = h_0(t,x) + \varepsilon h_1(t,x) + ... + \varepsilon^k h_k(t,x) + \varepsilon^{k+1} h_{k+1}(t,x,\varepsilon), \qquad (2.12)$$

где $\varepsilon^{k+1}h_{k+1}(t,x,\varepsilon)$ — непрерывная и ограниченная по норме функция, $h_0(t,x)$ — решение вырожденного уравнения (1.4). Коэффициенты h_i, $i = 1,...,k$, этого разложения однозначно определяются из уравнения инвариантности

$$\varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial h_k}{\partial t} + \varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial h_k}{\partial t} f(t,x,\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k h_k,\varepsilon) = g\left(t,x,\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k h_k,\varepsilon\right) \qquad (2.13)$$

в виде

$$h_i = -B^{-1}(t,x)\left[g^{(i)} - \frac{\partial h_{i-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{i-1} \frac{\partial h_p}{\partial x} f^{(i-1-p)}\right], \qquad (2.14)$$

$$i = 1,2,...,k.$$

Глава 3

Дифференциальные системы, линейные по быстрым переменным

Если рассматриваемая система дифференциальных уравнений является линейной по быстрым переменным, то ее можно записать в виде

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon) + F(t, x, \varepsilon)y, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon\dot{y} = g(t, x, \varepsilon) + G(t, x, \varepsilon)y. \tag{3.2}$$

Такие системы часто встречаются при описании моделей химической кинетики [17].

При выполнении условий: собственные числа $\lambda_i(t, x)$ матрицы $G(t, x, 0)$ обладают свойством $Re\lambda_i(t, x) \leq -2\gamma < 0$, для всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$; функции $f(t, x, \varepsilon)$, $g(t, x, \varepsilon)$, $F(t, x, \varepsilon)$, $G(t, x, \varepsilon)$ непрерывны и ограничены вместе со своими частными производными по t и x, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ — система (3.1), (3.2) имеет медленное интегральное многообразие

$$y = h(t, x, \varepsilon),$$

а при выполнении условий теоремы 3 это интегральное многообразие может быть представлено в виде

$$y = h(t,x,\varepsilon) = h_0(t,x) + \varepsilon h_1(t,x) + ... + \varepsilon^k h_k(t,x) + ... \ . \qquad (3.3)$$

Коэффициенты разложения (3.3) $h_i(t,x)$, $i = 0, 1, ..., k$, можно найти из уравнения инвариантности

$$\varepsilon \frac{\partial h(t,x,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h(t,x,\varepsilon)}{\partial x} \left[f(t,x,\varepsilon) + F(t,x,\varepsilon) h(t,x,\varepsilon) \right] =$$

$$= g(t,x,\varepsilon) + G(t,x,\varepsilon) h(t,x,\varepsilon). \qquad (3.4)$$

Представим все функции, входящие в это уравнение, в виде рядов по степеням ε

$$\begin{aligned} f(t,x,\varepsilon) &= \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f^{(k)}(t,x), \\ g(t,x,\varepsilon) &= \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k g^{(k)}(t,x), \\ F(t,x,\varepsilon) &= \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k F^{(k)}(t,x), \\ G(t,x,\varepsilon) &= \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k G^{(k)}(t,x). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.4) приобретает вид

$$\varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial h_k}{\partial x} \left[\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f^{(k)}(t,x) + \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k F^{(k)}(t,x) \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k \right] +$$

$$+\varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial h_k}{\partial t} = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k g^{(k)}(t,x) + \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k G^{(k)}(t,x) \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k. \qquad (3.5)$$

Далее, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем получать функции, входящие в разложение (3.3). При $\varepsilon = 0$ имеем

$$g^{(0)}(t,x) + G^{(0)}(t,x)h_0 = 0,$$

следовательно,

$$h_0 = -\Big(G^{(0)}(t,x)\Big)^{-1} g^{(0)}(t,x). \tag{3.6}$$

Выпишем коэффициенты при ε в первой степени

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0}{\partial x}\left[f^{(0)}(t,x) + F^{(0)}(t,x)h_0\right] =$$

$$= g^{(1)}(t,x) + G^{(0)}(t,x)h_1 + G^{(1)}(t,x)h_0,$$

откуда

$$h_1 = \Big(G^{(0)}\Big)^{-1}\left[\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0}{\partial x}\Big(f^{(0)} + F^{(0)}h_0\Big) - g^{(1)} - G^{(1)}h_0\right].$$

Далее будем приравнивать коэффициенты при ε^2, ε^3, ..., ε^{k-1}. При ε^k имеем

$$\frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial h_{k-1}}{\partial x}\left[f^{(k-j-1)} + \sum_{s=0}^{k-j-1}F^{(s)}h_{k-j-s-1}\right] =$$

$$= g^{(k)} + \sum_{j=1}^{k}G^{(j)}h_{k-j} + G^{(0)}h_k,$$

следовательно,

$$h_k = \Big(G^{(0)}\Big)^{-1}\left[\frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial h_j}{\partial x}\left(f^{(k-j-1)} + \sum_{s=0}^{k-j-1}F^{(s)}h_{k-j-s-1}\right) - \right.$$

$$\left. - g^{(k)} - \sum_{j=1}^{k}G^{(j)}h_{k-j}\right].$$

Таким образом, для системы (3.1), (3.2) найдено интегральное многообразие

$$y = h(t,x,\varepsilon) = h_0(t,x) + \varepsilon h_1(t,x) + ... + \varepsilon^k h_k(t,x) + ...,$$

функции $h_i(t,x)$, $i = 0,1,2,...,k$, могут быть определены из рекуррентных соотношений

$$h_0 = -\left(G^{(0)}(t,x)\right)^{-1} g^{(0)}(t,x),$$

$$h_l = \left(G^{(0)}\right)^{-1} \left[\frac{\partial h_{l-1}}{\partial t} + \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\partial h_j}{\partial x} \left(f^{(l-j-1)} + \sum_{s=0}^{l-j-1} F^{(s)} h_{l-j-s-1} \right) - \right.$$

$$\left. - g^{(l)} - \sum_{j=1}^{l} G^{(j)} h_{l-j} \right], l = 1,2,...,k.$$

Пример

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \varepsilon \left[x + \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] = \sin t.$$

Перепишем это уравнение в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = -y - \varepsilon y^2 - \varepsilon x + \sin t.$$

Здесь $h_0(t,x) = \sin t$, $B(t,x) = G(t,x,0) = -1$. Система, очевидно, имеет устойчивое медленное интегральное многообразие, которое будем искать в виде асимтотического представления

$$y = h(t,x,\varepsilon) = \sin t + \varepsilon h_1(t,x) + \varepsilon^2 h_2(t,x) + O(\varepsilon^3).$$

Уравнение инвариантности в данном случае принимает вид

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}(\sin t+\varepsilon h_1+\varepsilon^2 ...)+\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}+\varepsilon^2 ...\right)(\sin t+\varepsilon h_1+\varepsilon^2 ...)\right]=$$

$$=-\varepsilon h_1-\varepsilon^2 h_2-\varepsilon^3 ...-\varepsilon(\sin t+\varepsilon h_1+\varepsilon^2 ...)^2-\varepsilon x.$$

Приравнивая слагаемые при первой степени ε, имеем

$$h_1=-(x+\sin^2 t+\cos t).$$

Выписывая коэффициенты при ε^2, получим

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\sin t=-h_2-2h_1\sin t.$$

Откуда

$$h_2=2\sin t(2\cos t+\sin^2 t+x).$$

Итак, мы нашли интегральное многообразие

$$y=\sin t-\varepsilon(x+\sin^2 t+\cos t)+\varepsilon^2 2\sin t(2\cos t+\sin^2 t+x)+O(\varepsilon^3).$$

Уравнение, описывающее движение по интегральному многообразию, имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=\sin t-\varepsilon(x+\sin^2 t+\cos t)+\varepsilon^2 2\sin t(2\cos t+\sin^2 t+x)+O(\varepsilon^3).$$

Глава 4

Редукция систем невысоких размерностей

4.1 dim x=0, dim y=1

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = g(t, y, \varepsilon) \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

Здесь y — скалярная переменная, g — достаточно гладкая функция, ε — малый положительный параметр. Пусть $y = y(t, \varepsilon)$ — решение этой начальной задачи, а $y = \phi(t)$ — решение (для простоты будем считать, что это решение единственно) соответствующего вырожденного уравнения

$$0 = g(t, y, 0),$$

полученного из (4.1) при $\varepsilon = 0$.

Возникает вопрос: как связаны между собой функции $y(t, \varepsilon)$ и $\phi(t)$?

Если $y(t, \varepsilon) \to \phi(t)$ при $\varepsilon \to 0$, то $\phi(t)$ является *устойчивым* (или *притягивающим*) решением (корнем) вырожденного уравнения; если $y(t, \varepsilon)$ быстро удаляется от $\phi(t)$ при $\varepsilon \to 0$, то $\phi(t)$ является *неустойчивым* (или *отталкивающим*) корнем вырожденного уравнения. Для сравнения этих двух функций при малых значениях ε рассмотрим функцию

$$B(t) = \frac{\partial g(t, y, 0)}{\partial y} \quad \text{на} \quad y = \phi(t), \quad \text{т. е.} \quad B(t) = \left.\frac{\partial g(t, y, 0)}{\partial y}\right|_{y=\phi(t)}.$$

Следующие условия являются достаточными для устойчивости (неустойчивости) корня $\phi(t)$:

$\diamond$ Если $B(t) < 0$, то корень $y = \phi(t)$ вырожденного уравнения устойчив.

$\diamond$ Если $B(t) > 0$, то корень $y = \phi(t)$ вырожденного уравнения неустойчив.

Для того, чтобы найти приближенное решение, играющее роль медленного интегрального многообразия (4.1), мы используем представление

$$y = \varphi(t, \varepsilon) = \phi(t) + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3..., \tag{4.2}$$

которое означает, что мы пренебрегаем слагаемыми порядка $O(\varepsilon^3)$, $\varepsilon \to 0$; такое усечение может быть выполнено для любой степени ε, но чем больше учитывается членов разложения, тем более громоздкими становятся вычисления.

На первом шаге подставим (4.2) в (4.1), в результате получаем уравнение

$$\varepsilon(\dot{\phi}(t) + \varepsilon\dot{\varphi}_1 + \varepsilon^2\dot{\varphi}_2 + \varepsilon^3 \ldots) = g(t, \phi(t) + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3..., \varepsilon). \tag{4.3}$$

Следующим шагом является разложение правой части (4.3) по степеням ε в ряд Тейлора. Если мы рассуждаем формально, то нет необходимости останавливаться на обосновании этого шага.

Поскольку удобно рассматривать правую часть (4.3) как функцию переменной ε, введем обозначение

$$p(\varepsilon) = g(t, \phi(t) + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3 ..., \varepsilon).$$

Раскладывая по степеням ε и пренебрегая ε^3, получим

$$p(0) + \varepsilon p'(0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 p''(0) = \varepsilon[g_y(t, \phi(t), 0)\varphi_1 + g_\varepsilon(t, \phi(t), 0)]+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2[g_{yy}(t, \phi(t), 0)\varphi_1^2 + 2g_y(t, \phi(t), 0)\varphi_2 + 2g_{y\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\varphi_1+$$

$$+g_{\varepsilon\varepsilon}(t, \phi(t), 0)] = \varepsilon B(t)\left[\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2\right] + \varepsilon g_\varepsilon(t, \phi(t), 0)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[g_{yy}(t, \phi(t), 0)\varphi_1^2 + 2g_{y\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\varphi_1 + g_{\varepsilon\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\right].$$

Таким образом, имеем

$$\varepsilon(\dot{\phi}(t) + \varepsilon\dot{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \ldots) = \varepsilon B(t)\left[\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2\right] + \varepsilon g_\varepsilon(t, \phi(t), 0)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[g_{yy}(t, \phi(t), 0)\varphi_1^2 + 2g_{y\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\varphi_1 + g_{\varepsilon\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\right] + \varepsilon^3 \ldots,$$

что означает, что φ_1, φ_2 должны удовлетворять условиям

$$\dot{\phi}(t) = B(t)\varphi_1 + g_\varepsilon(t, \phi(t), 0),$$

$$\dot{\varphi}_1 = B(t)\varphi_2 + \frac{1}{2}\left[g_{yy}(t, \phi(t), 0)\varphi_1^2 + 2g_{y\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\varphi_1 + g_{\varepsilon\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\right].$$

В результате коэффициенты φ_1, φ_2 определяются выражениями

$$\varphi_1 = \left(\dot{\phi}(t) - g_\varepsilon(t, \phi(t), 0)\right) / B(t),$$

$$\varphi_2 = \frac{\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\left[g_{yy}(t, \phi(t), 0)\varphi_1^2 + 2g_{y\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\varphi_1 + g_{\varepsilon\varepsilon}(t, \phi(t), 0)\right]}{B(t)}.$$

Итак, формула (4.2) задает медленное интегральное многообразие уравнения (4.1), где коэффициенты φ_1 и φ_2 определены выше.

Если вырожденное уравнение имеет несколько решений $y = \phi_i(t), \quad i = 1, 2, ..., k$, то необходимо проверить устойчивость каждого из них. В этом случае поведение решения $y = y(t, \varepsilon)$ уравнения (4.1) при $\varepsilon \to 0$ зависит от начальной точки (t_0, y_0).

4.2 dim x=1, dim y=1

Рассмотрим систему двух обыкновенных автономных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \qquad (4.4)$$

где x, y — скалярные переменные, f и g — достаточно гладкие функции, ε — малый положительный параметр.

Следует отметить, что (4.1) может быть представлено в виде (4.4):

$$\frac{dt}{dt} = 1, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = g(t, y, \varepsilon),$$

и наоборот, можно представить (4.4) в виде (4.1). Деление второго уравнения в (4.4) на первое дает

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y, \varepsilon)}{f(x, y, \varepsilon)}.$$

Возвращаясь к (4.4), рассмотрим соответствующую вырожденную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, 0), \\ 0 &= g(x, y, 0). \end{aligned}$$

Второе уравнение $g(x, y) = 0$ этой системы задает *медленную кривую*. Предположим, что это уравнение имеет единственное решение (корень) $y = \phi(x)$. Рассмотрим функцию

$$B(x) = \frac{\partial g(x, y, 0)}{\partial y} \;\text{ на }\; y = \phi(x), \;\text{ т. е. }\; B(x) = \left.\frac{\partial g(x, y, 0)}{\partial y}\right|_{y=\phi(x)}.$$

Достаточные условия устойчивости (неустойчивости) корня $\phi(x)$ являются аналогичными тем, что и для (4.1):

◇ Если $B(x) < 0$, тогда корень вырожденного уравнения $y = \phi(x)$ является устойчивым.

◇ Если $B(x) > 0$, тогда корень вырожденного уравнения $y = \phi(x)$ является неустойчивым.

Если вырожденное уравнение имеет несколько корней $y = \phi_i(x), \quad i = 1, 2...., k$, то необходимо проверить устойчивость каждого из них. В этом случае поведение решения

$$x = x(t, \varepsilon), \quad x(t_0, \varepsilon) = x_0; \quad y = y(t, \varepsilon), \quad y(t_0, \varepsilon) = y_0$$

системы (4.4) при $\varepsilon \to 0$ зависит от начальной точки (t_0, y_0).

Чтобы получить асимптотическое представление одномерного медленного инвариантного многообразия

$$y = h(x, \varepsilon) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 \dots \, , \tag{4.5}$$

где $h_0(x) = \phi(x)$, подставим это формальное разложение в уравнение

$$\varepsilon \, \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y, \varepsilon)}{f(x, y, \varepsilon)},$$

которое следует из системы (4.4). В результате имеем

$$\varepsilon \frac{dh(x, \varepsilon)}{dx} f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) = g(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon). \tag{4.6}$$

Отсюда, с учетом (4.5),

$$g(x, \phi(x), 0) = 0, \quad B(x) \equiv \frac{\partial g}{\partial y}(x, \phi(x), 0)$$

и разложений функций g и f в ряд Тейлора по степеням ε:

$$g(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) = g(x, \phi(x), 0) + \varepsilon \Big[g_y(x, \phi(x), 0) h_1(x) + g_\varepsilon(x, \phi(x), 0) \Big] +$$

$$+ \varepsilon^2 ... = \varepsilon \left[B(x) h_1(x) + g_\varepsilon(x, \phi(x), 0) \right] + \varepsilon^2 ...,$$

$$f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) = f(x, \phi(x), 0) + \varepsilon ...,$$

получим соотношение

$$\varepsilon \frac{d\phi(x)}{dx} f(x, \phi(x), 0) + \varepsilon^2 ... =$$

$$= \varepsilon \left[B(x) h_1(x) + g_\varepsilon(x, \phi(x), 0) \right] + \varepsilon^2 ...,$$

из которого, в частности, следует

$$h_1(x) = \left[\frac{d\phi(x)}{dx} f(x, \phi(x), 0) - g_\varepsilon(x, \phi(x), 0) \right] / B(x).$$

Аналогично можно получить более общее асимптотическое представление одномерного медленного инвариантного многообразия

$$y = h(x, \varepsilon) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + \ldots + \varepsilon^k h_k(x) + \ldots \ , \tag{4.7}$$

где $h_0(x) = \phi(x)$. Подставляя (4.7) в (4.6), получим соотношение

$$\varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{dh_k}{dx} f\left(x, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k, \varepsilon\right) = g\left(x, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k, \varepsilon\right).$$

Используя формальные асимптотические представления

$$f\left(x, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k, \varepsilon\right) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f_k(x, h_0, \dots, h_k)$$

и

$$g\left(x, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k h_k, \varepsilon\right) = B(x) \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k h_k + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g_k(x, h_0, ..., h_{k-1})$$

и, приравнивая члены с одинаковыми степенями ε, получим

$$\sum_{0\leq p\leq k-1} \frac{dh_p}{dx} f_{k-1-p} = Bh_k + g_k, \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

Так как $B \neq 0$, имеем

$$h_k \ = \ \left[\sum_{0\leq p\leq k-1} \frac{dh_p}{dx} f_{k-1-p} - g_k \right] / B.$$

Медленные движения системы (4.4) описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, h(x,\varepsilon), \varepsilon), \\ y &= h(x,\varepsilon) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + \dots + \varepsilon^k h_k(x) + \dots \ , \end{aligned}$$

где коэффициенты $h_k(x)$ определены выше.

4.3 dim x=1, dim y=2

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с одной медленной переменной x и двумя быстрыми переменными y_1 и y_2:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon\,\frac{dy_1}{dt} &= g_1(x, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon\,\frac{dy_2}{dt} &= g_2(x, y_1, y_2, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где ε — малый положительный параметр. Соответствующая вырожденная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y_1, y_2, 0), \\ 0 &= g_1(x, y_1, y_2, 0), \\ 0 &= g_2(x, y_1, y_2, 0). \end{aligned}$$

Два последних уравнения этой системы определяют одномерное медленное многообразие (медленную кривую) системы (4.8). Пусть эти уравнения разрешимы относительно y_1 и y_2:

$$y_1 = \bar{\phi}(x), \quad y_2 = \bar{\bar{\phi}}(x).$$

Рассмотрим матрицу Якоби

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

вдоль медленной кривой

$$B = B(x) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}\right|_{y_1=\bar{\phi}(x),\, y_2=\bar{\bar{\phi}}(x),\, \varepsilon=0}.$$

Если оба корня характеристического уравнения

$$\det(B(x) - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, имеют отрицательные вещественные части, тогда медленная кривая устойчива. Пусть

$$b_{ij}(x) = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}\Big|_{y_1=\bar{\phi}(x),\, y_2=\bar{\bar{\phi}}(x),\, \varepsilon=0}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\operatorname{tr} B(x) = b_{11}(x) + b_{22}(x),$$

$$\det B(x) = b_{11}(x)b_{22}(x) - b_{12}(x)b_{21}(x), \tag{4.9}$$

где $\operatorname{tr} B(x)$ — след матрицы, $\det B(x)$ — определитель матрицы $B(x)$. Тогда условием устойчивости медленной кривой является положительность коэффициентов квадратичного характеристического многочлена, а именно $-\operatorname{tr} B(x)$ и $\det B(x)$. Это условие следует из критерия Рауса — Гурвица, но может быть проверено непосредственно. Используя представление корней квадратного уравнения

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}B(x) \pm \sqrt{(\mathrm{tr}B(x))^2 - 4\det B(x)}\right),$$

легко видеть, что оба корня (или их вещественные части) имеют один и тот же знак (а именно знак выражения $\mathrm{tr}B(x)$), тогда и только тогда, когда $\det B(x) > 0$.

Чтобы найти приближение одномерного медленного инвариантного многообразия

$$y_1 = \bar{h}(x, \varepsilon),$$

$$y_2 = \bar{\bar{h}}(x, \varepsilon)$$

из уравнений инвариантности

$$\varepsilon\frac{\partial\bar{h}(x,\varepsilon)}{\partial x}f(x,\bar{h}(x,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon),\varepsilon)=g_1(x,\bar{h}(x,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon)}{\partial x}f(x,\bar{h}(x,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon),\varepsilon)=g_2(x,\bar{h}(x,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon),\varepsilon),$$

подставим формальные разложения

$$\bar{h}(x,\varepsilon)=\bar{\phi}(x)+\varepsilon\bar{h}_1(x)+\varepsilon^2...,$$

$$\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon)=\bar{\bar{\phi}}(x)+\varepsilon\bar{\bar{h}}_1(x)+\varepsilon^2...$$

в эти уравнения. В результате, с учетом (4.9), тождеств

$$g_1(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)\equiv 0,\quad g_2(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)\equiv 0$$

и разложений функций g_1, g_2 и f в ряд Тейлора по степеням ε:

$$g_1(x,\bar{h}(x,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon),\varepsilon)=g_1(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial g_1(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial y_1}\bar{h}_1(x)+\varepsilon\frac{\partial g_1(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial y_2}\bar{\bar{h}}_1(x)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial g_1(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2...=$$

$$=\varepsilon b_{11}(x)\bar{h}_1(x)+\varepsilon b_{12}(x)\bar{\bar{h}}_1(x)+\varepsilon\frac{\partial g_1(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2...,$$

$$g_2(x,\bar{h}(x,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon),\varepsilon)=g_2(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial g_2(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial y_1}\bar{h}_1(x)+\varepsilon\frac{\partial g_2(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial y_2}\bar{\bar{h}}_1(x)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial g_2(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2...=$$

$$=\varepsilon b_{21}(x)\bar{h}_1(x)+\varepsilon b_{22}(x)\bar{\bar{h}}_1(x)+\varepsilon\frac{\partial g_2(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2...,$$

$$f(x,\bar{h}(x,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x,\varepsilon),\varepsilon)=f(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)+\varepsilon...,$$

получим

$$\varepsilon\frac{d\bar{\phi}(x)}{dx}f(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)+\varepsilon^2...=$$

$$=\varepsilon b_{11}(x)\bar{h}_1(x)+\varepsilon b_{12}(x)\bar{\bar{h}}_1(x)+\varepsilon\frac{\partial g_1(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2...,$$

$$\varepsilon\frac{d\bar{\bar{\phi}}(x)}{dx}f(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)+\varepsilon^2...=$$

$$\varepsilon b_{21}(x)\bar{h}_1(x)+\varepsilon b_{22}(x)\bar{\bar{h}}_1(x)+\varepsilon\frac{\partial g_2(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2.... \quad (4.10)$$

Из (4.10), непосредственно вычисляя, находим следующие выражения:

$$\bar{h}_1(x)=\frac{a_1(x)b_{22}(x)-a_2(x)b_{12}(x)}{\det B(x)},$$

$$\bar{\bar{h}}_1(x)=\frac{a_2(x)b_{11}(x)-a_1(x)b_{21}(x)}{\det B(x)},$$

где

$$a_1(x)=\frac{d\bar{\phi}(x)}{dx}f(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)-\frac{\partial g_1(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial\varepsilon},$$

$$a_2(x)=\frac{d\bar{\bar{\phi}}(x)}{dx}f(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)-\frac{\partial g_2(x,\bar{\phi}(x),\bar{\bar{\phi}}(x),0)}{\partial\varepsilon}.$$

Таким образом, мы построили приближенно медленное инвариантное многообразие

$$y_1 = \bar{h}(x, \varepsilon) = \bar{\phi}(x) + \varepsilon \bar{h}_1(x) + \varepsilon^2 ...,$$

$$y_2 = \bar{\bar{h}}(x, \varepsilon) = \bar{\bar{\phi}}(x) + \varepsilon \bar{\bar{h}}_1(x) + \varepsilon^2 ...,$$

и движение системы (4.8) на этом многообразии описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \bar{h}(x, \varepsilon), \bar{\bar{h}}(x, \varepsilon), \varepsilon).$$

4.4 dim x=2, dim y=1

Рассмотрим дифференциальную систему с двумя медленными переменными $x_1,\ x_2$ и одной быстрой y:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \varepsilon\,\frac{dy}{dt} &= g(x_1, x_2, y, \varepsilon) \end{aligned} \tag{4.11}$$

с малым положительным параметром ε. Соответствующая вырожденная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, y, 0), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, y, 0), \\ 0 &= g(x_1, x_2, y, 0). \end{aligned}$$

Последнее уравнение здесь описывает двумерную медленную поверхность в неявном виде.

Пусть функция $y = \phi(x_1, x_2)$ — решение этого уравнения. Медленная поверхность $y = \phi(x_1, x_2)$ устойчива, если функция

$$B(x_1, x_2) = \left.\frac{\partial g(x_1, x_2, y, 0)}{\partial y}\right|_{y=\phi(x_1,x_2)}$$

отрицательна, и неустойчива в противном случае.

Чтобы получить асимптотическое представление для двумерного медленного инвариантного многообразия

$$y = h(x_1, x_2, \varepsilon) = \phi(x_1, x_2) + \varepsilon h_1(x_1, x_2) + \varepsilon^2 \dots \ , \qquad (4.12)$$

мы подставим это формальное разложение в уравнение инвариантности для системы (4.11):

$$\varepsilon \frac{\partial h(x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2, h(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon)+$$

$$+\varepsilon \frac{\partial h(x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, h(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon) = g(x_1, x_2, h(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon).$$

Отсюда с учетом (4.12) и разложений функций g, f_1 и f_2 в ряд Тейлора по степеням ε:

$$g(x_1, x_2, h(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon) = g(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0)+$$

$$+\varepsilon\Big[g_y(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) h_1(x_1, x_2) + g_\varepsilon(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0)\Big] + \varepsilon^2 ... =$$

$$= \varepsilon \left[B(x_1, x_2) h_1(x_1, x_2) + g_\varepsilon(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0)\right] + \varepsilon^2 ...,$$

$$f_1(x_1, x_2, h(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon) = f_1(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) + \varepsilon ...,$$

$$f_2(x_1, x_2, h(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon) = f_2(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) + \varepsilon...,$$

получим соотношение

$$\varepsilon \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) +$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) + \varepsilon^2 ... =$$

$$= \varepsilon \left[B(x_1, x_2) h_1(x_1, x_2) + g_\varepsilon(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) \right] + \varepsilon^2 ...,$$

из которого, в частности, следует

$$h_1(x_1, x_2) = \left[\frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) + \right.$$

$$+ \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) -$$

$$\left. - g_\varepsilon(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), 0) \right] / B(x_1, x_2).$$

Таким образом, мы построили приближенно медленное инвариантное многообразие в виде (4.12), где $h_1(x_1, x_2)$ определено выше. Движение исходной системы (4.11) на этом медленном инвариантном многообразии описывается системой

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, h(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, h(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon).$$

4.5 dim x=2, dim y=2

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с двумя медленными переменными x_1 и x_2 и двумя быстрыми переменными y_1 и y_2:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{dy_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{dy_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, y_1, y_2, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4.13}$$

где ε — малый положительный параметр. Соответствующая вырожденная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, 0), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, 0), \\ 0 &= g_1(x_1, x_2, y_1, y_2, 0), \\ 0 &= g_2(x_1, x_2, y_1, y_2, 0). \end{aligned}$$

Последние два уравнения описывают двумерную медленную поверхность. Предположим, что эти уравнения разрешимы относительно y_1 и y_2, где

$$y_1 = \bar{\phi}(x_1, x_2), \quad y_2 = \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2).$$

Рассмотрим матрицу Якоби

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

на медленной поверхности

$$B = B(x_1, x_2) = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{array} \right) \Bigg|_{y_1=\bar{\phi}(x_1,x_2),\, y_2=\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),\, \varepsilon=0} .$$

Если оба корня характеристического многочлена

$$\det(B(x_1, x_2) - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, имеют отрицательные вещественные части, тогда медленная поверхность устойчива. Пусть

$$b_{ij}(x_1, x_2) = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}\Bigg|_{y_1=\bar{\phi}(x_1,x_2),\, y_2=\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),\, \varepsilon=0}, \quad i, j = 1, 2, \quad (4.14)$$

$$\operatorname{tr} B(x_1, x_2) = b_{11}(x_1, x_2) + b_{22}(x_1, x_2),$$

$$\det B(x_1, x_2) = b_{11}(x_1, x_2) b_{22}(x_1, x_2) - b_{12}(x_1, x_2) b_{21}(x_1, x_2),$$

где $\operatorname{tr} B(x_1, x_2)$ — след, а $\det B(x_1, x_2)$ — определитель матрицы $B(x_1, x_2)$. Тогда, аналогично случаю $\dim x = 1$ и $\dim y = 2$, условием устойчивости медленной поверхности является положительность коэффициентов квадратичного характеристического многочлена, а именно $-\operatorname{tr} B(x_1, x_2)$ и $\det B(x_1, x_2)$.

Чтобы найти приближение двумерного медленного инвариантного многообразия

$$y_1 = \bar{h}(x_1, x_2, \varepsilon),$$

$$y_1 = \bar{\bar{h}}(x_1, x_2, \varepsilon),$$

из уравнений инвариантности

$$\varepsilon\frac{\partial\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2,\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_2}f_2(x_1,x_2,\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon),\varepsilon)=$$

$$=g_1(x_1,x_2,\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2,\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_2}f_2(x_1,x_2,\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon),\varepsilon)=$$

$$=g_2(x_1,x_2,\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon),\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon),\varepsilon),$$

подставим формальные разложения

$$\bar{h}(x_1,x_2,\varepsilon)=\bar{\phi}(x_1,x_2)+\varepsilon\bar{h}_1(x_1,x_2)+\varepsilon^2...,$$

$$\bar{\bar{h}}(x_1,x_2,\varepsilon)=\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2)+\varepsilon\bar{\bar{h}}_1(x_1,x_2)+\varepsilon^2...$$

в эти уравнения. В результате, с учетом (4.14), тождеств

$$g_1(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)\equiv 0,$$

$$g_2(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)\equiv 0$$

и разложений функций g_1, g_2 и f_1, f_2 в ряд Тейлора по степеням ε:

$$g_1(x_1, x_2, \bar{h}(x_1, x_2, \varepsilon), \bar{\bar{h}}(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon) =$$

$$= g_1(x_1, x_2, \bar{\phi}(x_1, x_2), \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2), 0) +$$

$$+\varepsilon \frac{\partial g_1(x_1, x_2, \bar{\phi}(x_1, x_2), \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2), 0)}{\partial y_1} \bar{h}_1(x_1, x_2) +$$

$$+\varepsilon \frac{\partial g_1(x_1, x_2, \bar{\phi}(x_1, x_2), \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2), 0)}{\partial y_2} \bar{\bar{h}}_1(x_1, x_2) +$$

$$+\varepsilon \frac{\partial g_1(x_1, x_2, \bar{\phi}(x_1, x_2), \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2), 0)}{\partial \varepsilon} + \varepsilon^2 ... =$$

$$= \varepsilon b_{11}(x_1, x_2) \bar{h}_1(x_1, x_2) + \varepsilon b_{12}(x_1, x_2) \bar{\bar{h}}_1(x_1, x_2) +$$

$$+\varepsilon \frac{\partial g_1(x_1, x_2, \bar{\phi}(x_1, x_2), \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2), 0)}{\partial \varepsilon} + \varepsilon^2 ...,$$

$$g_2(x_1, x_2, \bar{h}(x_1, x_2, \varepsilon), \bar{\bar{h}}(x_1, x_2, \varepsilon), \varepsilon) =$$

$$= g_2(x_1, x_2, \bar{\phi}(x_1, x_2), \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2), 0) +$$

$$+\varepsilon \frac{\partial g_2(x_1, x_2, \bar{\phi}(x_1, x_2), \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2), 0)}{\partial y_1} \bar{h}_1(x_1, x_2) +$$

$$+\varepsilon \frac{\partial g_2(x_1, x_2, \bar{\phi}(x_1, x_2), \bar{\bar{\phi}}(x_1, x_2), 0)}{\partial y_2} \bar{\bar{h}}_1(x_1, x_2) +$$

$$+\varepsilon\frac{\partial g_2(x_1,x_2,\bar\phi(x_1,x_2),\bar{\bar\phi}(x_1,x_2),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2...=$$

$$=\varepsilon b_{21}(x_1,x_2)\bar h_1(x_1,x_2)+$$

$$+\varepsilon b_{22}(x_1,x_2)\bar{\bar h}_1(x_1,x_2)+\varepsilon\frac{\partial g_2(x_1,x_2,\bar\phi(x_1,x_2),\bar{\bar\phi}(x_1,x_2),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2...,$$

$$f_1(x_1,x_2,\bar h(x_1,x_2,\varepsilon),\bar{\bar h}(x_1,x_2,\varepsilon),\varepsilon)=$$

$$=f_1(x_1,x_2,\bar\phi(x_1,x_2),\bar{\bar\phi}(x_1,x_2),0)+\varepsilon...,$$

$$f_2(x_1,x_2,\bar h(x_1,x_2,\varepsilon),\bar{\bar h}(x_1,x_2,\varepsilon),\varepsilon)=$$

$$=f_2(x_1,x_2,\bar\phi(x_1,x_2),\bar{\bar\phi}(x_1,x_2),0)+\varepsilon...,$$

получим систему

$$\varepsilon\frac{\partial\bar\phi(x_1,x_2)}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2,\bar\phi(x_1,x_2),\bar{\bar\phi}(x_1,x_2),0)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial\bar\phi(x_1,x_2)}{\partial x_2}f_2(x_1,x_2,\bar\phi(x_1,x_2),\bar{\bar\phi}(x_1,x_2),0)+\varepsilon^2...=$$

$$=\varepsilon b_{11}(x_1,x_2)\bar h_1(x_1,x_2)+\varepsilon b_{12}(x_1,x_2)\bar{\bar h}_1(x_1,x_2)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial g_1(x_1,x_2,\bar\phi(x_1,x_2),\bar{\bar\phi}(x_1,x_2),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2..., \tag{4.15}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2)}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2)}{\partial x_2}f_2(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)+\varepsilon^2...=$$

$$=\varepsilon b_{21}(x_1,x_2)\bar{h}_1(x_1,x_2)+\varepsilon b_{22}(x_1,x_2)\bar{\bar{h}}_1(x_1,x_2)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial g_2(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)}{\partial\varepsilon}+\varepsilon^2... \quad . \tag{4.16}$$

Из (4.15), (4.16), непосредственно вычисляя, получим следующие выражения

$$\bar{h}_1(x_1,x_2)=\frac{a_1(x_1,x_2)b_{22}(x_1,x_2)-a_2(x_1,x_2)b_{12}(x_1,x_2)}{\det B(x_1,x_2)},$$

$$\bar{\bar{h}}_1(x_1,x_2)=\frac{a_2(x_1,x_2)b_{11}(x_1,x_2)-a_1(x_1,x_2)b_{21}(x_1,x_2)}{\det B(x_1,x_2)},$$

где

$$a_1(x_1,x_2)=\frac{\partial\bar{\phi}(x_1,x_2)}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)+$$

$$+\frac{\partial\bar{\phi}(x_1,x_2)}{\partial x_2}f_2(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)-$$

$$-\frac{\partial g_1(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)}{\partial\varepsilon},$$

$$a_2(x_1,x_2) = \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)+$$

$$+\frac{\partial \bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)-$$

$$-\frac{\partial g_2(x_1,x_2,\bar{\phi}(x_1,x_2),\bar{\bar{\phi}}(x_1,x_2),0)}{\partial \varepsilon}.$$

Глава 5

Параметрическое задание интегральных многообразий

При построении асимптотических разложений медленных инвариантных многообразий принято считать, что вырожденное уравнение позволяет найти явное выражение для медленной поверхности. Однако часто уравнения, входящие в систему (1.4), оказываются либо трансцендентыми, либо полиномами высокой степени относительно y, что не позволяет найти решение этой системы в виде $y = \psi_0(x)$. Тогда для редукции систем дифференциальных уравнений возможно использовать параметрическое задание медленных инвариантных многообразий. Ниже рассмотрим три случая, в которых в качестве параметров могут выступать либо быстрые переменные, либо только часть быстрых переменных, либо быстрые переменные, дополненные некоторым количеством медленных.

5.1 Случай равенства размерностей быстрых и медленных переменных

Пусть размерность вектора переменных x совпадает с размерностью вектора переменных y. Предположим, что систему (1.4) удается разрешить относительно x, а именно записать решение в виде $x = \varphi_0(y)$. В качестве параметра удобно выбрать вектор быстрых переменных y. Тогда и медленное инвариантное многообразие целесообразно искать в параметрической форме

$$x = \varphi(y, \varepsilon). \tag{5.1}$$

Уравнение инвариантности получим, подставив (5.1) в (1.1) с учетом (1.2). Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} g(\varphi, y, \varepsilon) = \varepsilon f(\varphi, y, \varepsilon). \tag{5.2}$$

Для всех функций, входящих в (5.2), запишем формальные асимптотические разложения по степеням малого параметра ε:

$$x = \varphi(y, \varepsilon) = \varphi_0(y) + \varepsilon \varphi_1(y) + ... + \varepsilon^k \varphi_k(y) + ..., \tag{5.3}$$

$$f\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \varphi_k, y, \varepsilon\right) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, y),$$

$$g\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \varphi_k, y, \varepsilon\right) = g^{(0)}(\varphi_0, y) + B(y) \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \varphi_k +$$

$$+ \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, y),$$

где $g_x(\varphi_0, y, 0) = B(y)$, $g^{(0)}(\varphi_0, y) = g(\varphi_0, y, 0)$, матрица $B(y)$ — невырожденная.

С учетом этих разложений уравнение инвариантности (5.2) примет вид:

$$\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\left(g^{(0)}+B\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k\varphi_k+\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k g^{(k)}\right)=\varepsilon\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k f^{(k)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, при $\det\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)\neq 0$ однозначно находим коэффициенты асимптотического разложения (5.3). Так, при ε^0 имеем

$$g(\varphi_0,y,0)=0.$$

Решением системы является функция $\varphi_0(y)$.

Коэффициент при ε^1 имеет вид

$$\varphi_1=\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}B\right)^{-1}\left(f^{(0)}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}g^{(1)}\right).$$

Далее выписываем коэффициенты при ε^2, ε^3 и так далее. Выражение при ε^k :

$$\varphi_k=\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}B\right)^{-1}\left[f^{(k-1)}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}g^{(k)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\left(B\varphi_i+g^{(k-i)}\right)\right].$$

Таким образом, формула (5.3) задает медленное инвариантное многообразие системы (1.1), (1.2) в виде асимптотического ряда, коэффициенты которого $\varphi_k,\ k=0,1,...$ определены выше.

Пример

Рассмотрим систему, состоящую из двух скалярных уравнений, правые части которых содержат x линейным образом:

$$\dot{x}=a(y)x+b(y),$$

$$\varepsilon\dot{y}=c(y)x+d(y).$$

Медленная кривая описывается уравнением

$$c(y)x + d(y) = 0$$

или

$$x = -d(y)/c(y).$$

Очевидно, в качестве параметра удобно выбрать быструю переменную y и искать одномерное медленное инвариантное многообразие в виде

$$x = \varphi(y, \varepsilon),$$

тогда уравнение инвариантности (5.2) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(c(y)\varphi + d(y)) = \varepsilon(a(y)\varphi + b(y)). \tag{5.4}$$

Подставим асимптотическое представление

$$\varphi(y, \varepsilon) = \varphi_0(y) + \varepsilon\varphi_1(y) + \varepsilon^2\varphi_2(y) + \ldots.$$

в уравнение (5.4) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, найдем

$$\varphi_0(y) = -\frac{d(y)}{c(y)},$$

$$\varphi_1(y) = -\frac{a(y)\varphi_0(y) + b(y)}{c(y)\varphi_0'(y)},$$

$$\varphi_2(y) = -\frac{a(y)\varphi_1(y) - c(y)\varphi_1(y)\varphi_1'(y)}{c(y)\varphi_0'(y)}.$$

Рассмотрим частный случай

$$a(y) = -e^y, \quad c(y) = e^y, \quad b(y) = 0, \quad d(y) = -\alpha y.$$

Воспользовавшись полученными выше формулами, получаем

$$x = \varphi(y,\varepsilon) = \alpha y e^{-y} + \varepsilon \frac{y}{y-1} + \varepsilon^2 e^y \frac{y^2(y-2)}{\alpha(y-1)^4} + O(\varepsilon^3)$$

при $\varepsilon \to 0$.

5.2 Размерность медленных переменных меньше размерности быстрых

Рассмотрим снова систему (1.1), (1.2). Предположим, что количество быстрых переменных превышает количество медленных. В этом случае система (1.4) содержит m уравнений и n неизвестных, причем $n < m$. Чтобы найти решение системы, в качестве неизвестных возьмем вектор переменных x ($\dim x = n$), дополненный $m - n$ компонентами вектора y. Благодаря этому в системе (1.4) количество уравнений и неизвестных будут совпадать. Предположим, что решение системы удается записать в параметрической форме

$$x = \varphi_0(y_2),\ y_1 = \psi_0(y_2),$$

где $y = (y_1, y_2)^T$, y_2 играет роль параметра, $\dim y_2 = n$.

Систему (1.1), (1.2) в таком случае удобнее переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}_1 &= g_1(x, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= g_2(x, y_1, y_2, \varepsilon). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Медленное инвариантное многообразие будем искать в параметрическом виде

$$x = \varphi(y_2, \varepsilon),\ y_1 = \psi(y_2, \varepsilon). \tag{5.6}$$

Подставив (5.6) в первые две подсистемы системы (5.5), получим уравнения инвариантности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon) = \varepsilon f(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_2} g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon) = g_1(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon).$$

Для функций $f(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon)$, $g_1(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon)$, $g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon)$, $\varphi(y_2, \varepsilon)$, $\psi(y_2, \varepsilon)$ запишем формальные асимптотические разложения:

$$\varphi(y_2, \varepsilon) = \varphi_0(y_2) + \varepsilon\varphi_1(y_2) + ... + \varepsilon^k \varphi_k(y_2) + ..., \tag{5.7}$$

$$\psi(y_2, \varepsilon) = \psi_0(y_2) + \varepsilon\psi_1(y_2) + ... + \varepsilon^k \psi_k(y_2) + ..., \tag{5.8}$$

$$f\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \varphi_k, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \psi_k, y_2, \varepsilon\right) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, \psi_0, ..., \psi_k, y_2),$$

$$g_1\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \varphi_k, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \psi_k, y_2, \varepsilon\right) = g_1^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) + G_1(y_2)\sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \varphi_k +$$

$$+ B_1(y_2)\sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \psi_k + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g_1^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, \psi_0, ..., \psi_{k-1}, y_2),$$

$$g_2\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \varphi_k, \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \psi_k, y_2, \varepsilon\right) = g_2^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) + G_2(y_2)\sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \varphi_k +$$

$$+ B_2(y_2)\sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \psi_k + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g_2^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, \psi_0, ..., \psi_{k-1}, y_2),$$

где

$$G_1(y_2) = g_{1x}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0),$$

$$G_2(y_2) = g_{2x}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0),$$

$$B_1(y_2) = g_{1y_1}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0),$$

$$g_1^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) = g_1(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0),$$

$$g_2^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) = g_2(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0).$$

Полученные формальные разложения подставим в уравнения инвариантности. Имеем

$$\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_2} \left(g_2^{(0)} + G_2 \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \varphi_k + B_2 \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \psi_k + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g_2^{(k)} \right) =$$

$$= \varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f^{(k)},$$

$$\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial \psi_k}{\partial y_2} \left(g_2^{(0)} + G_2 \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \varphi_k + B_2 \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \psi_k + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g_2^{(k)} \right) =$$

$$= g_1^{(0)} + G_1 \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \varphi_k + B_1 \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \psi_k + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g_1^{(k)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Так, при ε^0 получим:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_2} g_2^0 = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} g_2^0 = g_1^0.$$

Пусть $\det \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_2} \neq 0$. Тогда последняя система эквивалентна следующей

$$g_1(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0) = 0,$$

$$g_2(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0) = 0,$$

решением которой являются функции $\varphi_0(y_2)$, $\psi_0(y_2)$.

При ε^1 имеем:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1 + B_2\psi_1 + g_2^{(1)}\right) = f^{(0)},$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1 + B_2\psi_1 + g_2^{(1)}\right) = G_1\varphi_1 + B_1\psi_1 + g_1^{(1)}.$$

Разрешим систему относительно $\varphi_1(y_2)$ и $\psi_1(y_2)$:

$$\varphi_1 = A_1^{-1}\left[g_1^{(1)} + B_1\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}g_2^{(1)} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}B_2 - B_1\right)\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_2}\right)^{-1} f^{(0)}\right],$$

$$\psi_1 = A_2^{-1}\left[g_1^{(1)} + G_1G_2^{-1}g_2^{(1)} - \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}G_2 - G_1\right)\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_2}G_2\right)^{-1} f^{(0)}\right],$$

где $A_1 = B_1 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} B_2\right)^{-1} \frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} G_2 - G_1$, $A_2 = G_1 G_2^{-1} B_2 - B_1$. При ε^k имеем:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_k + B_2\psi_k + g_2^{(k)}\right) + ...+$$

$$+\frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1 + B_2\psi_1 + g_2^{(1)}\right) = f^{(k-1)},$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_k + B_2\psi_k + g_2^{(k)}\right) + ... + \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1 + B_2\psi_1 + g_2^{(1)}\right) =$$

$$= G_1\varphi_k + B_1\psi_k + g_1^{(k)}.$$

Следовательно,

$$\varphi_k = A_1^{-1}\left[g_1^{(k)} + B_1\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} B_2\right)^{-1} \frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} g_2^{(k)} - \right.$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i} + g_2^{(k-i)}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} B_2 - B_1\right)\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} B_2\right)^{-1} \frac{\partial \psi_0}{\partial y_2}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_2}\right)^{-1} \times$$

$$\left.\times\left(f^{(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i} + g_2^{(k-i)}\right)\right)\right],$$

$$\psi_k = A_2^{-1}\left[g_1^{(k)} + G_1 G_2^{-1} g_2^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i} + g_2^{(k-i)}\right) - \right.$$

$$-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}G_2 - G_1\right)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}G_2\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(f^{(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i} + g_2^{(k-i)}\right)\right)\Bigg],$$

Таким образом, удалось однозначно определить все коэффициенты разложения медленного инвариантного многообразия (5.7), (5.8).

5.3 Размерность медленных переменных больше размерности быстрых

Рассмотрим случай, когда размерность медленных переменных больше размерности быстрых. Обратим внимание на вырожденную подсистему (1.4). Она содержит m уравнений и n неизвестных, причем $n > m$. Тогда в качестве параметров следует взять все быстрые переменные y и $n-m$ медленных. Решение системы (1.4) можно записать в параметрической форме

$$x_1 = \varphi_0(x_2, y),$$

где $x = (x_1, x_2)^T$, x_2 и y – параметры, $\dim x_2 = n - m$.

Систему (1.1), (1.2) целесообразно будет переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, y, \varepsilon),\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, y, \varepsilon),\\ \varepsilon\dot{y} &= g_2(x_1, x_2, y, \varepsilon).\end{aligned} \tag{5.9}$$

Медленное инвариантное многообразие будем искать также в параметрической форме

$$x_1 = \varphi(x_2, y, \varepsilon). \tag{5.10}$$

Для того, чтобы получить уравнение инвариантности, подставим соотношение (5.10) в систему (5.9):

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} f_2(\varphi, x_2, y, \varepsilon) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} g(\varphi, x_2, y, \varepsilon) = \varepsilon f_1(\varphi, x_2, y, \varepsilon). \qquad (5.11)$$

Разложив все функции, входящие в (5.11) в формальные ряды по степеням ε:

$$\varphi(x_2, y, \varepsilon) = \varphi_0(x_2, y) + \varepsilon\varphi_1(x_2, y) + ... + \varepsilon^k \varphi_k(x_2, y) + ..., \qquad (5.12)$$

$$f_1\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f_1^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, x_2, y),$$

$$f_2\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f_2^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, x_2, y),$$

$$g\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = g^{(0)}(\varphi_0, x_2, y) + B(x_2, y)\sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \varphi_k +$$

$$+\sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, x_2, y),$$

где $g_{x_1}(\varphi_0, x_2, y, 0) = G(x_2, y)$, получим

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\left(g^{(0)} + G\sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \varphi_k + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k g^{(k)}\right) +$$

$$+\varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f_2^{(k)} = \varepsilon \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f_1^{(k)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

При ε^0 имеем:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} g(\varphi_0, y, 0) = 0.$$

При $\det\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right) \neq 0$ решением системы является функция $\varphi_0(x_2, y)$.

При ε^1 получим:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} f_2^{(0)} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\left(G\varphi_1 + g^{(1)}\right) = f_1^{(0)}.$$

Следовательно, при $\det\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} G\right) \neq 0$ имеем

$$\varphi_1 = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} G\right)^{-1}\left(f_1^{(0)} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} f_2^{(0)} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} g^{(1)}\right).$$

Выражение при ε^k имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} f_2^{(k-i-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\left(G\varphi_{k-1} + g^{(k-i)}\right) = f_1^{(k-1)}.$$

Откуда

$$\varphi_k = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} G\right)^{-1}\left[f_1^{(k-1)} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} f^{(k-i-1)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\left(B\varphi_{k-i} + g^{(k-i)}\right) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} g^{(k)}\right].$$

Таким образом, формула (5.12) задает медленное инвариантное многообразие системы (5.9) в виде асимптотического ряда, коэффициенты которого $\varphi_k,\ k = 0, 1, ...$ определены выше.

Пример

Рассмотрим следующую систему, состоящую из трех уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= y, \\ \varepsilon\dot{y} &= -y - e^y - x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

В данном случае система имеет одну быструю переменную и две медленные. Положив $\varepsilon = 0$, получим вырожденную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= y, \\ 0 &= -y - e^y - x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Последнее уравнение системы (5.14) не может быть разрешено относительно y. Но можно заметить, что одна из медленных переменных выражается через быструю переменную и другую медленную:

$$x_1 = -x_2 - y - e^y.$$

Таким образом, в качестве параметров могут быть выбраны переменные x_2 и y. Тогда инвариантное многообразие следует искать в параметрическом виде

$$x_1 = \varphi(x_2, y, \varepsilon). \tag{5.15}$$

Уравнение инвариантности получим, подставив (5.15) в первое уравнение системы (5.13). Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{1}{\varepsilon}\left(-y - e^y - \varphi - x_2\right) = x_2. \tag{5.16}$$

Разложим инвариантное многообразие (5.15) в асимптотический ряд по степеням малого параметра ε ($\varepsilon \to 0$):

$$\varphi(x_2, y, \varepsilon) = \varphi_0(x_2, y) + \varepsilon\varphi_1(x_2, y) + \varepsilon^2\varphi_2(x_2, y) + O(\varepsilon^3). \quad (5.17)$$

Подставим разложение (5.17) в уравнение инвариантности (5.16):

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + ...\right)\left(-y - e^y - x_2 - \varphi_0 - \varepsilon\varphi_1 - \varepsilon^2\varphi_2 - ...\right) +$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + ...\right) y = \varepsilon x_2.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях параметра ε.

При ε^0 имеем:

$$-y - e^y - x_2 - \varphi_0 = 0.$$

Решением уравнения является функция

$$\varphi_0 = -y - e^y - x_2.$$

При ε^1 имеем:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} y - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\varphi_1 = x_2.$$

Выразим искомую функцию $\varphi_1(x_2, y)$:

$$\varphi_1 = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} y - x_2\right).$$

После подстановки значения для φ_0 имеем

$$\varphi_1 = \frac{y + x_2}{1 + e^y}.$$

Далее, при ε^2 :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} y - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \varphi_2 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 = 0.$$

Выразим функцию $\varphi_2(x_2, y)$:

$$\varphi_2 = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} y - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \varphi_1 \right).$$

Следовательно,

$$\varphi_2 = \frac{1}{(1+e^y)^4} \left[(y+x_2)(1+e^y(1-y-x_2)) - y(1+e^y)^2 \right].$$

Таким образом, получили асимптотическое приближение вида

$$x_1 = -y - e^y - x_2 + \varepsilon \frac{y+x_2}{1+e^y} +$$

$$+\varepsilon^2 \frac{(y+x_2)(1+e^y(1-y-x_2)) - y(1+e^y)^2)}{(1+e^y)^4} + O(\varepsilon^3).$$

Глава 6

Неявная форма задания медленных многообразий

Во многих ситуациях решение вырожденного уравнения

$$g(t, x, y, 0) = 0 \tag{6.1}$$

не удается записать ни в явном, ни в параметрическом виде. В таком случае медленную поверхность можно задать в неявной форме. В нулевом приближении вырожденное уравнение (6.1) задает медленную поверхность, движение по которой осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, y, 0). \tag{6.2}$$

Чтобы получить первое приближение, необходимо продифференцировать функцию $g(t, x, y, \varepsilon)$ по времени в силу системы (2.1), (2.2)

$$\varepsilon \frac{dg}{dt} = g_y g + \varepsilon g_t + \varepsilon g_x f.$$

Поведение решений на медленном многообразии в первом приближении описывается дифференциально-алгебраической системой уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x, y, \varepsilon), \tag{6.3}$$

$$g + \varepsilon g_y^{-1} g_t + \varepsilon g_y^{-1} g_x f = 0, \tag{6.4}$$

где члены порядка $o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$ следует отбросить.

Для получения уравнений второго приближения функцию $g(t, x, y, \varepsilon)$ дважды дифференцируем по времени в силу системы (2.1), (2.2):

$$g + \varepsilon g_y^{-1}[g_x f + g_t] + \varepsilon^2 g_y^{-2}[g_{yy} g_y^{-1} g_t g_y^{-1} g_t +$$

$$+ g_{yy} g_y^{-1} g_x g_y^{-1} f g_t + g_{yy} g_y^{-1} g_t g_y^{-1} g_x f +$$

$$+ g_{yy} g_y^{-1} g_x f g_y^{-1} g_x f - g_{ty} g_y^{-1} g_t - g_{ty} g_y^{-1} g_x f -$$

$$- g_{xy} g_y^{-1} g_t f - g_{xy} g_y^{-1} g_x f f - g_x f_y g_y^{-1} g_t -$$

$$- g_x f_y g_y^{-1} g_x f - g_{yx} f g_y^{-1} g_t - g_{yx} f g_y^{-1} g_x f -$$

$$- g_{yt} g_y^{-1} g_t - g_{yt} g_y^{-1} g_x f + g_{tx} f +$$

$$+ g_{tt} + g_{xx} f f + g_{xt} f + g_x f_x f + g_x f_t] = 0. \tag{6.5}$$

В равенстве (6.5) выписаны члены до ε^2 включительно.

Неявное уравнение k-го приближения медленного интегрального многообразия можно получить, продифференцировав функцию $g(t, x, y, \varepsilon)$ по t в силу системы (2.1) (2.2) k раз.

Покажем, что если функцию $y = h(t, x, \varepsilon)$ в формулах (6.4) и (6.5) определять в виде асимптотических разложений

$$h = h_0 + O(\varepsilon),$$

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 + O(\varepsilon^2),$$

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + O(\varepsilon^3),$$

то получим те же результаты, что и в главе 2. Доказательство будем проводить с помощью метода математической индукции.

Вычисляя уже второе приближение для медленного интегрального многообразия, мы получили довольно громоздкое выражение, поэтому доказательство будем проводить для автономной системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon), & (6.6)\\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, \varepsilon). & (6.7) \end{aligned}$$

Тогда для этой системы будут справедливы следующие выражения для нулевого, первого и второго приближений медленного инвариантного многообразия в неявном виде, соответственно:

$$g(x, y, 0) = 0, \tag{6.8}$$

$$g + \varepsilon g_y^{-1} g_x f = 0, \tag{6.9}$$

$$g + \varepsilon g_y^{-1} g_x f + \varepsilon^2 g_y^{-2}[g_{yy} g_y^{-1} g_x f g_y^{-1} g_x f - g_{xy} g_y^{-1} g_x f f -$$

$$-g_x f_y g_y^{-1} g_x f - g_{yx} f g_y^{-1} g_x f + g_{xx} f f + g_x f_x f] = 0. \tag{6.10}$$

Сначала функцию y будем искать в виде

$$y = h_0 + O(\varepsilon),$$

где $h_0(x)$ — решение вырожденного уравнения $g(x,y,0) = 0$. Тогда имеем тождество

$$g(x,h_0(x),0) = 0,$$

что совпадает с уравнением (2.9) из главы 2.

Рассмотрим теперь первое приближение неявного задания медленного инвариантного многообразия (6.9). Функцию $y = h(x,\varepsilon)$ будем искать в виде следующей суммы:

$$h(x) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + O(\varepsilon^2).$$

В (6.9) введем обозначение $F_1 = g_y^{-1} g_x$, тогда уравнение (6.9) перепишется в виде:

$$g + \varepsilon F_1 f = 0. \tag{6.11}$$

Разложим все функции, входящие в (6.11), в ряд Тейлора по степеням ε в окрестности точки $(x, h_0, 0)$:

$$\begin{aligned}
g(x,y,\varepsilon) &= g^{(0)} + \sum_{i\geq 1} \varepsilon^i B(x) h_i + \sum_{i\geq 1} \varepsilon^i g^{(i)}(x,h_0,...,h_{i-1}) = \\
&= \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \overline{g}^{(i)}(x,h_0,...,h_i), \\
F_1(x,y,\varepsilon) &= \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i F^{(i)}(x,h_0,...,h_i), \\
f(x,y,\varepsilon) &= \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i f^{(i)}(x,h_0,...,h_i),
\end{aligned}$$

где

$$B(x) = g_y^{(0)},$$

$$g^{(0)} = g(x,h_0,0),$$

$$f^{(1)}(x,h_0,h_1) = f_y^{(0)}h_1 + f_\varepsilon^{(0)},$$

$$F_1^{(0)} = \left(g_y^{(0)}\right)^{-1} g_x^{(0)}.$$

Тогда уравнение (6.11) приобретает вид:

$$g^{(0)} + \varepsilon\overline{g}^{(1)} + \varepsilon F_1^{(0)} f^{(0)} + O(\varepsilon^2) = 0.$$

И справедливы следующие соотношения, получаемые путем приравнивания коэффициентов при ε^0 и ε^1 в последнем равенстве:

$$g(x,h_0,0) = 0,$$

$$\overline{g}^{(1)} + F_1^{(0)} f^{(0)} = 0. \qquad (6.12)$$

Напомним, что при явном задании компоненты разложения функции $h(x,\varepsilon) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + O(\varepsilon^2)$ определяются из уравнения инвариантности

$$g(x,y,\varepsilon) = \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} f(x,y,\varepsilon) \qquad (6.13)$$

путем приравнивания коэффициентов при ε^0, ε^1 :

$$g(x,h_0,0) = 0, \qquad (6.14)$$

$$\overline{g}^{(1)} = \frac{\partial h_0}{\partial x} f^{(0)}. \qquad (6.15)$$

Покажем, что

$$F_1^{(0)} = -\frac{\partial h_0}{\partial x}. \qquad (6.16)$$

Для этого продифференцируем уравнение (6.14) по x:

$$g_y^{(0)} \frac{\partial h_0}{\partial x} + g_x^{(0)} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial h_0}{\partial x} = -\left(g_y^{(0)}\right)^{-1} g_x^{(0)} = -F_1^{(0)}.$$

Таким образом, из (6.12) получаем (6.15).

Рассмотрим неявное уравнение второго приближения медленного инвариантного многообразия

$$g + \varepsilon F_1 f + \varepsilon^2 F_2 f = 0, \tag{6.17}$$

где $F_2 = g_y^{-1}[(F_1 f)_x - (F_1 f)_y F_1]$.

Решение уравнения (6.17), функцию $y = h(x, \varepsilon)$, будем искать в виде следующей суммы:

$$h(x) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x) + O(\varepsilon^2).$$

Если в уравнении (6.17) все функции разложим по степеням ε, получим следующее соотношение:

$$g^{(0)} + \varepsilon \left[\overline{g}^{(1)} + F_1^{(0)} f^{(0)}\right] + \varepsilon^2 \left[\overline{g}^{(2)} + F_1^{(0)} f^{(1)} + \right.$$

$$\left. + (F_1^{(1)} + F_2^{(0)}) f^{(0)}\right] + O(\varepsilon^3) = 0. \tag{6.18}$$

Формулу (6.17) получили путем дифференцирования выражения (6.11) по t :

$$\varepsilon g_x f + g_y g + \varepsilon^2 (F_1 f)_x + \varepsilon (F_1 f)_y g = 0.$$

Принимая во внимание (6.11), получим

$$g_y g + \varepsilon g_x f + \varepsilon^2 [(F_1 f)_x - (F_1 f)_y F_1 f] = 0.$$

Разложим все функции, входящие в это уравнение, по степеням ε и выпишем коэффициенты при ε^0, ε^1 и ε^2. Имеем:

$$g(x, h_0, 0) = 0,$$

$$g_y^{(0)}\overline{g}^{(1)} + g_x^{(0)} f^{(0)} = 0 \Rightarrow \overline{g}^{(1)} + F_1^{(0)} f^{(0)} = 0, \text{ где } F_1^{(0)} = -\tfrac{\partial h_0}{\partial x},$$

$$g_y^0\overline{g}^{(2)} + g_x^{(0)} f^{(1)} + g_x^{(1)} f^{(0)} + (F_1^{(0)} f^{(0)})_x - (F_1^{(0)} f^{(0)})_y F_1^{(0)} f^{(0)} = 0,$$

следовательно,

$$(g_y^{(0)})^{-1}\left[g_x^{(1)} + (F_1^{(0)} f^{(0)})_x - g_y^{(1)} F_1^{(0)} - (F_1^{(0)} f^{(0)})_y F_1^{(0)}\right] f^{(0)} + \\ + \overline{g}^{(2)} + F_1^{(0)} f^{(1)} = 0. \tag{6.19}$$

С учетом соотношения (6.18) можно заметить, что

$$(g_y^{(0)})^{-1}\left[g_x^{(1)} + (F_1^{(0)} f^{(0)})_x - g_y^{(1)} F_1^{(0)} - (F_1^{(0)} f^{(0)})_y F_1^{(0)}\right] = F_1^{(1)} + F_2^{(0)}.$$

В уравнении (6.13), разложив все функции по степеням малого параметра, выпишем коэффициенты при ε^0, ε^1 и ε^2. Имеем:

$$g(x, h_0, 0) = 0,$$

$$\overline{g}^{(1)} = \tfrac{\partial h_0}{\partial x} f^{(0)}, \tag{6.20}$$

$$\overline{g}^{(2)} = \tfrac{\partial h_0}{\partial x} f^{(1)} + \tfrac{\partial h_1}{\partial x} f^{(0)}. \tag{6.21}$$

Покажем, что $\frac{\partial h_1}{\partial x} = -F_1^{(1)} - F_2^{(0)}$.

Для этого продифференцируем выражение (6.20) по x :

$$\overline{g}_x^{(1)} + \overline{g}_y^{(1)} \frac{\partial h_0}{\partial x} + \overline{g}_y^{(0)} \frac{\partial h_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial h_0}{\partial x} f^{(0)}\right)_x + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x} f^{(0)}\right)_y \frac{\partial h_0}{\partial x}.$$

С учетом (6.16) получаем следующую запись для производной от функции h_1 по x :

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = -(g_y^{(0)})^{-1}\left[g_x^{(1)} + (F_1^{(0)}f^{(0)})_x - g_y^{(1)}F_1^{(0)} - (F_1^{(0)}f^{(0)})_y F_1^{(0)}\right].$$

Таким образом, выражения (6.19) и (6.22) совпадают.

Итак, показали, что утверждение верно при $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$. Пусть утверждение выполняется и при $k = m$. Решение неявного уравнения m-го приближения медленного инвариантного многообразия

$$g + \varepsilon F_1 f + ... + \varepsilon^m F_m f = 0, \tag{6.22}$$

где $F_m = g_y^{-1}\left[(F_{m-1}f)_x - \sum\limits_{i=1}^{m-1}(F_i f)_y F_{m-i}\right]$, будем искать в виде следующей суммы:

$$h(x) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + ... + \varepsilon^m h_m(x) + O(\varepsilon^{m+1}).$$

Перепишем формулу (6.22), разложив все функции, входящие в нее, по степеням ε:

$$g^{(0)} + \varepsilon\left[\overline{g}^{(1)} + F_1^{(0)}f^{(0)}\right] + \varepsilon^2\left[\overline{g}^{(2)} + F_1^{(0)}f^{(1)} + (F_1^{(1)} + F_2^{(0)})f^{(0)}\right] +$$

$$+ ... + \varepsilon^m\left[\overline{g}^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-i-1} F_{l+1}^{m-i-l-1}f^{(i)}\right] + O(\varepsilon^{m+1}) = 0.$$

И выпишем коэффициенты при ε^0, ε^1, ..., ε^m :

$$g(x, h_0, 0) = 0;$$

$$\overline{g}^{(1)} + F_1^{(0)}f^{(0)} = 0,$$

$$\overline{g}^{(2)} + F_1^{(0)}f^{(1)} + \left[F_1^{(1)} + F_2^{(0)}\right]f^{(0)} = 0,$$

$$...$$

$$\overline{g}^{(m)} + F_1^{(0)} f^{(m-1)} + \left[F_1^{(1)} + F_2^{(0)}\right] f^{(m-2)} + ... +$$

$$+ \left[F_1^{(m-1)} + F_2^{(m-2)} + ... + F_m^{(0)}\right] f^{(0)} = 0,$$

где

$$F_1^{(0)} = (g_y^{(0)})^{-1} g_x^{(0)} = -\frac{\partial h_0}{\partial x},$$

$$F_1^{(1)} + F_2^{(0)} = (g_y^{(0)})^{-1} [\overline{g}_x^{(1)} - g_y^{(1)} F_1^{(0)} + (F_1^{(0)} f^{(0)})_x +$$

$$+(F_1^{(0)} f^{(0)})_y F_1^{(0)}] = -\frac{\partial h_1}{\partial x},$$

$$F_1^{(m-1)} + F_2^{(m-2)} + ... + F_m^{(0)} = (g_y^{(0)})^{-1} \left[\overline{g}_x^{(m-1)} - \right.$$

$$- \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} g_y^{(m-i-1)} + \sum_{i=0}^{m-2} \left(\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} f^{(m-i-2)} \right)_x -$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{l=0}^{m-2-i} \left(\sum_{s=0}^{l} F_{s+1}^{(l-s)} \right) f_y^{(m-2-i-l)} \left(\sum_{r=0}^{i} F_{r+1}^{(i-r)} \right) \right] = -\frac{\partial h_{m-1}}{\partial x}.$$

Докажем теперь, что утверждение верно для $(m+1)$-го приближения медленного инвариантного многообразия. Рассмотрим неявное уравнение $(m+1)$-го приближения медленного инвариантного многообразия:

$$g + \varepsilon F_1 f + ... + \varepsilon^{m+1} F_{m+1} f = 0, \tag{6.23}$$

где $F_{m+1} = g_y^{-1} \left[(F_m f)_x - \sum\limits_{i=1}^{m} (F_i f)_y F_{m+1-i} \right].$

Решение этого уравнения будем искать в виде следующей суммы:

$$h(x) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + ... + \varepsilon^{m+1} h_{m+1}(x) + O(\varepsilon^{m+2}).$$

Если в уравнении (6.23) все функции разложим по степеням ε, получим следующее соотношение:

$$g^{(0)} + \varepsilon \left[\overline{g}^{(1)} + F_1^{(0)} f^{(0)} \right] + ...+ \tag{6.24}$$

$$+\varepsilon^{m+1} \left[\overline{g}^{(m+1)} + \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{m-i} F_{l+1}^{m-i-l} f^{(i)} \right] + O(\varepsilon^{m+2}) = 0.$$

Формулу (6.23) получили путем дифференцирования выражения (6.22) по t :

$$\varepsilon g_x f + g_y g + \varepsilon(\varepsilon F_1 f + ... + \varepsilon^m F_m f)_x + (\varepsilon F_1 f + ... + \varepsilon^m F_m f)_y g = 0.$$

Так как $g = -\varepsilon F_1 f - ... - \varepsilon^m F_m f$, имеем

$$\varepsilon g_x f + g_y g + \varepsilon(\varepsilon F_1 f + ... + \varepsilon^m F_m f)_x -$$

$$-\varepsilon(\varepsilon F_1 f + ... + \varepsilon^m F_m f)_y (\varepsilon F_1 f + ... + \varepsilon^m F_m f) = 0.$$

Разложим все функции, входящие в это уравнение, по степеням ε и выпишем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра:

$$g(x, h_0, 0) = 0,$$
$$\overline{g}^{(1)} + F_1^{(0)} f^{(0)} = 0,$$

$$\overline{g}^{(2)} + F_1^{(0)} f^{(1)} + \left[F_1^{(1)} + F_2^{(0)} \right] f^{(0)} = 0,$$

$$...$$

$$\overline{g}^{(m)} + F_1^{(0)} f^{(m-1)} + \left[F_1^{(1)} + F_2^{(0)}\right] f^{(m-2)} + ... +$$

$$+ \left[F_1^{(m-1)} + F_2^{(m-2)} + ... + F_m^{(0)}\right] f^{(0)} = 0,$$

$$g_y^{(0)} \overline{g}^{(m+1)} + \sum_{i=1}^{m} g_y^{(m-i)} \overline{g}^{(i)} + \sum_{i=0}^{m} g_x^{(m-i)} + \tag{6.25}$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-i-1} (F_{l+1} f)_x^{(m-i-l-1)} f^{(i)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1-i} (F_{l+1} f)_y^{(m-i-l-1)} (F_1 f)^{(i)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{l=0}^{m-i-2} (F_{l+1} f)_y^{(m-i-l-2)} (F_2 f)^{(i)} - ... -$$

$$- \sum_{i=0}^{1} \sum_{l=0}^{1-i} (F_{l+1} f)_y^{1-i-l} (F_{m-1} f)^{(i)} - (F_1 f)_y^{(0)} (F_{m-1} f)^{(0)} = 0,$$

где

$$F_1^{(0)} = -\frac{\partial h_0}{\partial x},$$

$$F_1^{(1)} + F_2^{(0)} = -\frac{\partial h_1}{\partial x},$$

$$F_1^{(m-1)} + F_2^{(m-2)} + ... + F_m^{(0)} = -\frac{\partial h_{m-1}}{\partial x}.$$

Принимая во внимание, что

$$\overline{g}^{(i)} = -\sum_{s=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-s-1} F_{l+1}^{(i-s-l-1)} f^{(s)}, \ i = 1, ..., m,$$

уравнение (6.25) можно преобразовать к виду:

$$\overline{g}^{(m+1)} + (g_y^{(0)})^{-1} g_x^{(0)} f^{(k)} +$$

$$+(g_y^{(0)})^{-1} \left[\overline{g}_x^{(1)} - \overline{g}_y^{(1)} F_1^{(0)} + (F_1^{(0)} f^{(0)})_x - (F_1^{(0)} f^{(0)})_y F_1^{(0)} \right] f^{(m-1)} +$$

$$+ \ldots + (g_y^{(0)})^{-1} \left[\overline{g}_x^{(m-1)} - \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} g_y^{(m-i-1)} + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-2} \left(\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} f^{(m-i-2)} \right)_x -$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{l=0}^{m-2-i} \left(\sum_{s=0}^{l} F_{s+1}^{(l-s)} \right) f_y^{(m-2-i-l)} \left(\sum_{r=0}^{i} F_{r+1}^{(i-r)} \right) \right] f^{(1)} +$$

$$+ (g_y^{(0)})^{-1} \left[\overline{g}_x^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} g_y^{(m-i)} + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} f^{(m-i-1)} \right)_x -$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1-i} \left(\sum_{s=0}^{l} F_{s+1}^{(l-s)} \right) f_y^{(m-1-i-l)} \left(\sum_{r=0}^{i} F_{r+1}^{(i-r)} \right) \right] f^{(0)} = 0.$$

Ранее было показано, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_0}{\partial x} &= -F_1^{(0)} = -(g_y^{(0)})^{-1} g_x^{(0)}, \\
\frac{\partial h_1}{\partial x} &= -F_1^{(1)} - F_2^{(0)} = -(g_y^{(0)})^{-1} \left[\overline{g}_x^{(1)} - \overline{g}_y^{(1)} F_1^{(0)} + (F_1^{(0)} f^{(0)})_x - \right. \\
&\left. - (F_1^{(0)} f^{(0)})_y F_1^{(0)} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_{m-1}}{\partial x} &= -F_1^{(m-1)} - ... - F_m^{(0)} = \\
&= -(g_y^{(0)})^{-1}\left[\overline{g}_x^{(m-1)} - \sum_{i=0}^{m-2}\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} g_y^{(m-i-1)} + \right. \\
&+ \sum_{i=0}^{m-2}\left(\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} f^{(m-i-2)}\right)_x - \\
&- \left.\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{l=0}^{m-2-i}\left(\sum_{s=0}^{l} F_{s+1}^{(l-s)}\right) f_y^{(m-2-i-l)}\left(\sum_{r=0}^{i} F_{r+1}^{(i-r)}\right)\right].
\end{aligned}$$

Проверим, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_m}{\partial x} &= -F_1^{(m)} - ... - F_{m+1}^{(0)} = \\
&= -(g_y^{(0)})^{-1}\left[\overline{g}_x^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} g_y^{(m-i)} - \right. \\
&- \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1-i}\left(\sum_{s=0}^{l} F_{s+1}^{(l-s)}\right) f_y^{(m-1-i-l)}\left(\sum_{r=0}^{i} F_{r+1}^{(i-r)}\right) + \\
&+ \left.\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} f^{(m-i-1)}\right)_x\right]. \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

С другой стороны, выражение для производной $\frac{\partial h_m}{\partial x}$ можно получить, продифференцировав по x следующее соотношение:

$$\overline{g}^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} f^{(m-i-1)} = 0.$$

Имеем

$$\overline{g}_x^{(m)} + \sum_{i=0}^{m} g_y^{(m-i)} \frac{\partial h_i}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} f^{(m-i-1)} \right)_x +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1-i} \left(\sum_{s=0}^{l} F_{s+1}^{(l-s)} \right) f_y^{(m-1-i-l)} \frac{\partial h_i}{\partial x} = 0.$$

Во втором слагаемом при $i = m$ как раз и получаем $\frac{\partial h_m}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_m}{\partial x} \;\; = \;\; & -(g_y^{(0)})^{-1} \left[\overline{g}_x^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} g_y^{(m-i)} + \right. \\ & + \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{s=0}^{i} F_{s+1}^{(i-s)} f^{(m-i-1)} \right)_x - \\ & \left. - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1-i} \left(\sum_{s=0}^{l} F_{s+1}^{(l-s)} \right) f_y^{(m-1-i-l)} \left(\sum_{r=0}^{i} F_{r+1}^{(i-r)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Это доказывает справедливость равенства (6.26). Таким образом, показали, что если решение неявного уравнения $(m+1)$-го приближения медленного инвариантного многообразия искать в виде ряда

$$h(x, \varepsilon) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + ... + \varepsilon^{m+1} h_{m+1} + O(\varepsilon^{m+2}),$$

то функции h_i, $i = 1, ..., m+1$, будут совпадать с соответствующими компонентами разложения в ряд по степеням малого параметра функции $y = h(x, \varepsilon)$, определяемыми из уравнения инвариантности (6.13) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε, что обосновывает асимптотическое разложение медленных интегральных многообразий в случае неявного задания многообразия.

Пример

В качестве простого примера рассмотрим систему

$$\dot{x} = y,$$

$$\varepsilon \dot{y} = x^2 + y^2 - 1.$$

Медленная кривая представляет собой окружность

$$x^2 + z^2 = 1,$$

движение по которой осуществляется по часовой стрелке. Верхняя полуокружность неустойчива, нижняя — устойчива.

Первое приближение для интегрального многообразия имеет вид

$$y^2 + x^2 - 1 + \varepsilon x = 0.$$

Второе приближение вида

$$y^2 + (x + \varepsilon/2)^2 = 1 - \varepsilon^2/4$$

совпадает со всеми последующими и дает точное уравнение для медленного инвариантного многообразия.

Литература

[1] Боголюбов, Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике / Н. Н. Боголюбов. – Киев: Издательство АН УССР. – 1945.

[2] Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – Москва: Физматгиз. – 1963.

[3] Боголюбов, Н. Н. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский // Тр. междунар. семинара по нелинейным колебаниям. – Киев: Издательство АН УССР. – 1963 – Т. 1. – С. 93–154.

[4] Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных / А. Б. Васильева // Ж. вычисл. матем. и мат. физ. – 1963. – Т. 3, № 4. – С. 641–642.

[5] Васильева, А. Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – Москва: Наука. – 1973.

[6] Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – Москва: Высшая школа. – 1990.

[7] Воропаева, Н. В. Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 4. – С. 569–578.

[8] Воропаева, Н. В. Декомпозиция сингулярно возмущенных дифференциальных систем / Н. В.Воропаева, В. А. Соболев // Методы анализа нелинейных систем. – Москва: Диалог-МГУ. – 1997.

[9] Гольдштейн, В. М. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем / В. М. Гольдштейн, В. А. Соболев. – Новосибирск: Ин-т матем. АН СССР, Сиб. отдел. – 1988.

[10] Задирка, К. В. Исследование синулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений / К. В. Задирка // Тр. междунар. симп. по нелин. колеб. – Киев: Издательство АН УССР. – 1963. – Т. 2. – С. 205 – 212.

[11] Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движений / А. М. Ляпунов. – Москва: Гостехиздат. – 1950.

[12] Митропольский, Ю. А. Интегральные многообразия в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. – Москва: Наука. – 1973.

[13] Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. – Москва: Наука. – 1969.

[14] Моисеев, Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев. – Москва: Наука. – 1981.

[15] Соболев, В. А. Геометрия сингулярных возмущений в вырожденных случаях / В. А. Соболев // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 12. – С. 75–94.

[16] Соболев, В. А. Асимптотические разложения медленных интегральных многообразий / В. А. Соболев, Л. И. Кононенко // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35, № 6. – С. 1264–1278.

[17] Соболев, В. А. Редукция моделей и критические явления в макро-кинетики / В. А. Соболев, Е. А. Щепакина. – Москва: Физматлит. – 2010.

[18] Соболев, В. А. Асимптотические разложения медленных инвариантных многообразий и редукция моделей химической кинетики / В. А. Соболев, Е. А. Тропкина // Ж. выч. мат. и мат. физики. – 2012. – Т. 52, № 1. – С. 81–96.

[19] Стрыгин, В. В. Разделений движений методом интегральных многообразий / В. В. Стрыгин, В. А. Соболев. – Москва: Наука. – 1988.

[20] Тихонов, А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А. Н. Тихонов // Матем. сб. –1948. – Т. 22, № 2. – С. 193–204.

[21] Тихонов, А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных / А. Н. Тихонов // Мат. сб. – 1952. – Т. 31, № 3. – С. 575–586.

[22] Чернышов, К. И. Метод стандартного расщепления сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений/ К. И. Чернышов // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 311, № 6. – С. 1311–1316.

Учебное издание

Соболев Владимир Андреевич,
Тропкина Елена Андреевна

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Техническое редактирование: *А.С. Никитина*
Компьютерная верстка: *А.С. Никитина*

Подписано в печать 16.05.2022. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,75.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 6(Р1У).

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.