САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С. П. КОРОЛЕВА

В. И. Куренков

МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

САМАРА 1998

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

В. И. КУРЕНКОВ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Конспект лекций

САМАРА 1998

УДК 629.7.017.1(075)

Методы расчета надежности космических аппаратов: Конспект лекций/ К у р е н к о в В. И. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1998. 80 с.
ISBN 5-7883-0036-3

Излагаются теоретические основы методов расчета показателей надежности элементов космических аппаратов. Рассматриваются методы, используемые в теории надежности систем. Дается представление о задачах и методах статистической динамики. Обсуждаются логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем.

Предназначен студентам, изучающим курс надежности летательных аппаратов. Он может быть полезен слушателям факультета повышения квалификации инженеров из числа работников предприятий, проектирующих и создающих космическую технику. Разработан на кафедре летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева

Рецензенты: канд. техн. наук С. Н. П е р о в, финансовый директор АОЗТ «Самара - Лада - Авто» Е. Е. Н е з о в и б а т ь к о

ISBN 5-7883-0036-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий конспект лекций содержит часть материала курса «Надежность летательных аппаратов», изучаемого студентами специальностей 130601 и 130701, и является логическим продолжением материала, изложенного в конспекте лекций «Методические и организационно-технические вопросы надежности космических аппаратов» авторов В.И. Куренкова, В.И. Кузнецова, В.М. Сайгака, В.А. Капитонова (Самара, СГАУ, 1997 г.).

Цель настоящего конспекта - помочь обучающимся в освоении расчетных методов, используемых при проектировании и отработке надежных изделий космической техники.

Основные задачи данного конспекта заключаются в освещении:

методов расчета показателей надежности элементов космических аппаратов;

методов, используемых в теории надежности систем;

задач и методов статистической динамики;

логико-вероятностных методов исследования надежности структурно-сложных систем.

1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ

Элементом называют любое устройство, надежность которого определяется независимо от надежности составляющих его частей. Это может быть и одна деталь, и целый блок аппаратуры, и весь летательный аппарат.

Для количественной оценки надежности применяют различные методы. В настоящее время распространение получили формальные методы и методы, учитывающие причины отказов.

Формальные методы оценки надежности, в свою очередь, подразделяются на два направления. Методы первого направления определяют надежность как вероятность случайного события. Методы второго направления - надежность как качество, развернутое во времени.

Существуют также два метода, учитывающие причины отказов: один из них рассматривает надежность как вероятностную прочность, оперируя случайными величинами, другой как вероятность невыброса случайного процесса за заданный уровень (рис. 1.1).

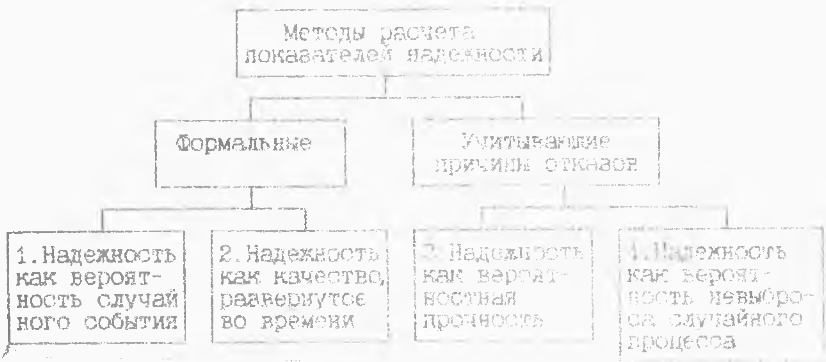


Рис. 1.1. Схема методов расчета показателей надежности

При расчетах надежности различных частей ЛА (бортовых систем, пироустройств, конструкции корпуса и т.д.) используется тот метод, который наиболее приемлем для расчетов.

Рассмотрим эти методы последовательно.

Этот метод применим к устройствам, срабатывающим мгновенно и однократно. Здесь по существу невозможно применить временные характеристики надежности. Поэтому надежность определяется в эксперименте как вероятность $P(A)$ реализации случайного события A, заключающегося в том, что устройство (элемент) не откажет. Обозначим вероятность $P(A)$ через H (надежность). Экспериментально надежность определяется следующим образом:

$$H = \frac{n}{N}, \tag{1.1}$$

где n - число неотказавших элементов;

N - число элементов, поставленных на эксперимент.

Однако количественная оценка надежности по формуле (1.1) в практике используется редко. Чаще требуется знать верхнюю и нижнюю доверительные границы надежности. Эти доверительные границы находят с использованием методов математической статистики.

1.1.1. Доверительные границы надежности

При многократных повторениях опытов будем получать каждый раз различные значения n числа неотказавших элементов, то есть n является случайной величиной (X), которая при независимых испытаниях подчиняется биномиальному закону распределения

$$P_N(x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x}, \tag{1.2}$$

где C_N^x - число сочетаний из N по x;

x - случайное число неотказавших элементов n;

p - вероятность неотказа при однократном опыте.

Определение доверительных границ иллюстрируется с помощью рис. 1.2

Доверительную вероятность обозначим через γ, а уровень значимости — через α.

Примем условие, что вероятность выхода случайной величины за нижнюю и верхнюю доверительные границы равны, то есть

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

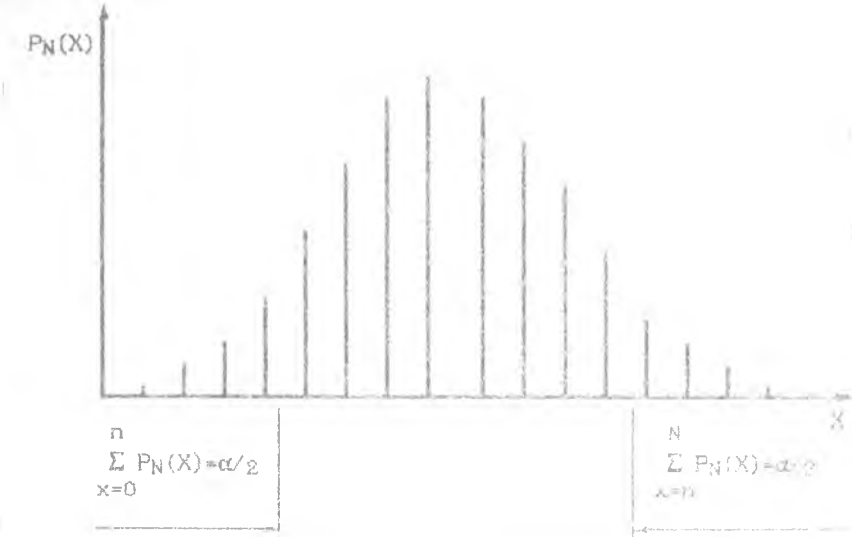


Рис. 1.2. Схема определения доверительных границ

Поскольку вероятности $P_N(x)$ несовместны, то мы их можем складывать.

Верхняя доверительная граница $P_В$ ищется из решения уравнения

$$\sum_{x=0}^{n} C_N^x p^x (1-p)^{N-x} = \frac{\alpha}{2}, \tag{1.3}$$

а нижняя $P_н$ из решения следующего уравнения:

$$\sum_{x=n}^{N} C_N^x p^x (1-p)^{N-x} = \frac{\alpha}{2}, \tag{1.4}$$

где n - число неотказавших элементов в опыте.

Уравнения (1.3) и (1.4) заранее решены для различных значений N и n и представлены в таблицах в литературе по статистике [4,12]. Кроме того, по этим таблицам строят графики для отыскания доверительной вероятности. Пример такого графика для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9$, заимствованный из работы [10], представлен на рис. 1.3.

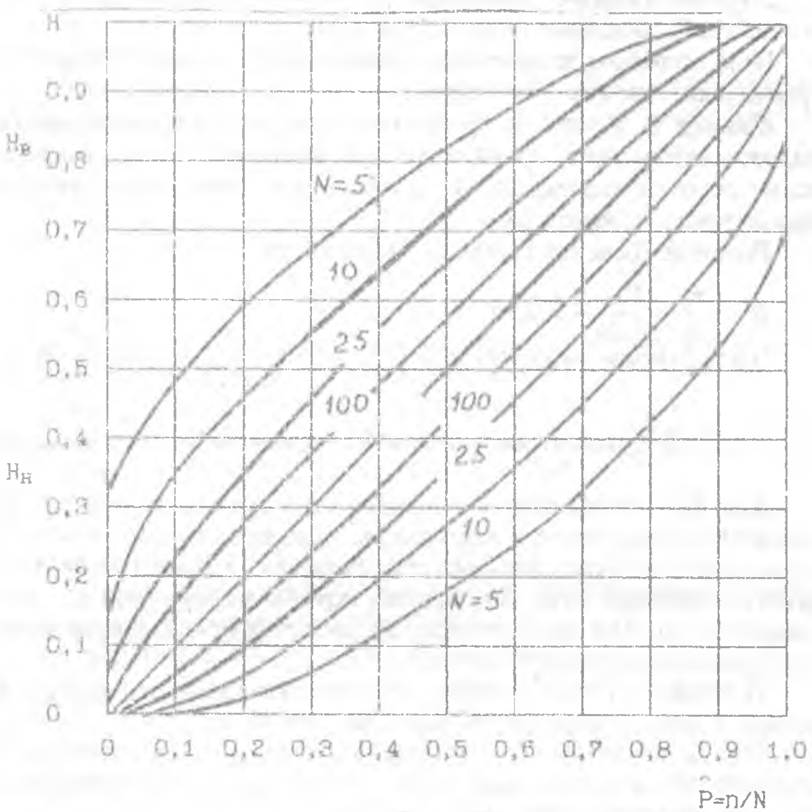


Рис. 1.3. График доверительных вероятностей для биномиального закона распределения

Пример 1. Произведено 10 испытаний, в 6 из которых элемент не отказал. Найти точечную оценку надежности и оценки доверительных границ для доверительной вероятности 0,95.

Решение. Точечная оценка надежности:

$$\tilde{H} = \frac{n}{N} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Нижние и верхние оценки надежности ищем с помощью таблиц, представленных в работе [4]. Они составляют 0,304 и 0,850 соответственно.

Приближенное значение этих границ можно найти с помощью графика, представленного на рис. 1.3. Процесс отыскания доверительных границ показан на графике стрелками.

Доверительные границы по этому графику для $\gamma = 0,9$ составляют соответственно 0,36 и 0,81.

При большом количестве испытаний N лучше пользоваться таблицами, так как они точнее.

Пример 2. Какую выбрать нижнюю доверительную границу надежности нового проектируемого варианта ракеты-носителя, если прототип запускался 50 раз и был один отказ? Доверительную вероятность принять равной 0,95.

Решение. Точечная оценка надежности

$$\hat{H} = \frac{n}{N} = \frac{50-1}{50} = 0,98.$$

По таблицам работ [4] или [12] находим $H_н = 0,91$; $H_в = 0,999$.

1.1.2. Доверительные границы для высоконадежных элементов

Для высоконадежных элементов, каковыми и должны быть элементы летательных аппаратов, при испытаниях обычно не отказывает ни один элемент, т.е. формула (1.1) даст надежность, равную единице. Это, по сути дела, верхняя доверительная граница надежности. Для практических же расчетов используется нижняя доверительная граница надежности.

Получим приближенную, но простую формулу для расчета нижней доверительной границы надежности.

Пусть событие A_i - надежная работа элемента при i-м испытании; A - надежная работа элемента при всех испытаниях (ни одного отказа не произошло).

Воспользуемся элементами логики

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Перейдем к вероятностям

$$P(A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Для независимых испытаний

$$P(A) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Если элементы одинаковы, то

$$P(A)=\left[P\left(A_i\right)\right]^n.$$

Требуется найти минимальное значение $P(A)$, которое имеет самую малую вероятность, которую еще можно учитывать. Примем за эту вероятность уровень значимости α, тогда

$$\left[P\left(A_i\right)\right]^n \geq \alpha = 1-\gamma,$$

откуда

$$H_H = P\left(A_i\right) \geq \sqrt[n]{1-\gamma}. \qquad (1.5)$$

Этой формулой можно пользоваться для приближенной оценки нижней доверительной границы высоконадежных элементов.

Пример 1. Проведено 100 экспериментов срабатывания пиропатронов. Ни в одном эксперименте отказов не было. Определить нижнюю доверительную границу надежности пиропатрона при доверительной вероятности γ = 0,9 (90%).

Решение. $H_K = \sqrt[100]{1-0,9} \approx 0,977.$

При этом нижняя граница тем выше, чем больше количество элементов подвергнуто испытаниям.

Можно поставить и решить обратную задачу: какое количество элементов надо испытать, чтобы подтвердить заданную нижнюю доверительную границу надежности?

Пример 2. Сколько пироболтов надо испытать, чтобы с доверительной вероятностью γ = 0,95 подтвердить нижнюю доверительную границу надежности: а) 0,9; б) 0,999? При этом необходимо, чтобы отказов не было.

Решение. Разрешим уравнение (1.5) относительно n:

$$n = \frac{\lg(1-\gamma)}{\lg H_K}. \qquad (1.6)$$

Тогда для случая а)

$$n = \frac{\lg(1-0,95)}{\lg 0,9} \approx 29$$

и для случая б)

$$n = \frac{\lg(1-0,95)}{\lg 0,999} \approx 2995.$$

Из примера видно, что чем выше нижняя доверительная граница, тем больше количество элементов (систем) надо испытать для ее подтверждения.

Итак, чем надежнее изделие, тем труднее становится статистическая проверка гарантированного уровня надежности H_{Γ} .

Тем не менее, ее приходится проводить, когда дело касается весьма ответственных систем. Так, например, при проверке надежности пуска двигателей на космическом карабле «Аполлон-8» их пришлось в наземных условиях запускать 3000 раз, что гарантирует с достоверностью в 95% безотказную работу их не ниже, чем с вероятностью 0,999.

1.2. НАДЕЖНОСТЬ КАК КАЧЕСТВО, РАЗВЕРНУТОЕ ВО ВРЕМЕНИ

При использовании методов этого направления принимают, что изменение надежности подчиняется некоторым статистическим закономерностям, которые определяются лишь экспериментально. При этом не ставится задача выяснить причины отказов и определить возможность их устранения, а констатируется лишь факт отказа.

1.2.1. Функция надежности

Пусть в момент $t = 0$ элемент начинает работу, а в момент $t = T$ происходит отказ. Тогда время T «жизни» элемента является случайной величиной с законом распределения

$F(t) = P(T < t)$,

где F(t) - функция распределения времени отказа (иногда ее называют вероятностью отказа элемента до момента t); P - символ вероятности.

Случайная величина T также может характеризоваться функцией плотности распределения времени отказа (плотностью вероятности отказа):

$$f(t) = \frac{dF'}{dt} = F'(t).$$

Функция надежности вводится следующим образом:

$$H(t) = 1 - F(t) = P(T > t). \qquad (1.7)$$

Примерный график функции надежности для заданных функций распределения и плотности случайной величины T представлен на рис. 1.4.

Экспериментально функция надежности определяется с использованием следующей зависимости:

$$\hat{H}(t) = \frac{n(t)}{N}, \tag{1.8}$$

где $n(t)$ - число неотказавших элементов к моменту времени t, N - число элементов, поставленных на эксперимент.

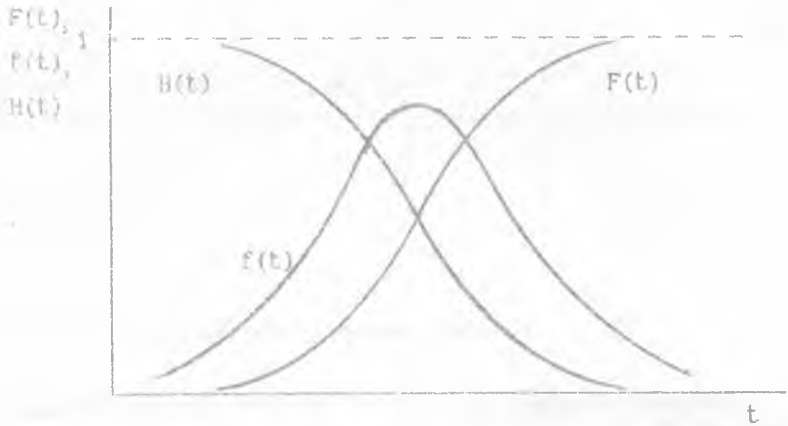


Рис. 1.4. К вопросу определения функции надежности

Экспериментальная (эмпирическая) функция надежности строится следующим образом. Время работы элемента разделяют на разряды (интервалы) и в каждом интервале оценивается надежность по формуле (1.8) для какого-то характерного времени t из интервала. Примерный вид экспериментальной функции надежности показан на рис. 1.5.

Часто безотказность характеризуется не функцией надежности, а такими показателями, как средняя наработка до отказа $t_{ср}$, интенсивность отказов $\lambda(t)$ и др. Рассмотрим эти показатели.

1.2.2. Средняя наработка до отказа

Средняя наработка до отказа представляет собой математическое ожидание случайной величины времени T «жизни» элемента:

$$t_{ср} = M[T] = \int_0^\infty t\, f(t)dt. \tag{1.9}$$

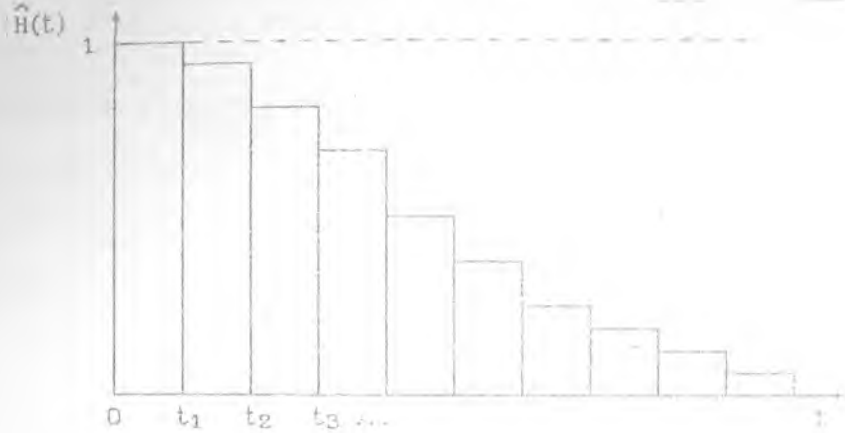


Рис. 1.5. Экспериментальная функция надежности

Возьмем интеграл по частям, воспользовавшись известной формулой

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$t_{ср} = \int_0^\infty t\, f(t) dt = t \cdot F(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty F(t) dt.$$

Подставим вместо $F(t)$ значения $F(t) = 1 - H(t)$:

$$t_{ср} = t[1 - H(t)] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty [1 - H(t)] d\,t = t \Big|_0^\infty - tH(t) \Big|_0^\infty - t \Big|_0^\infty + \int_0^\infty H(t) d\,t.$$

Приведем подобные члены и учтем, что

$$\lim_{t \to \infty} t \cdot H(t) = 0$$

(т.е. интеграл сходящийся), получаем

$$t_{ср} = \int_0^\infty H(t) d\,t. \qquad (1.10)$$

То есть средняя наработка до отказа геометрически выражается площадью, ограниченной осями координат и кривой $H(t)$, как это иллюстрируется рис. 1.6. Заштрихованная площадь на рисунке равна площади прямоугольника высотой, равной единице, и длиной, равной среднему времени наработки $t_{ср}$.

Среднюю наработку элемента до отказа по экспериментальным данным определяют по известной формуле:

$$t_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}, \tag{1.11}$$

где t_i - время «жизни» i-го элемента;

N - количество элементов, поставленных на испытание.

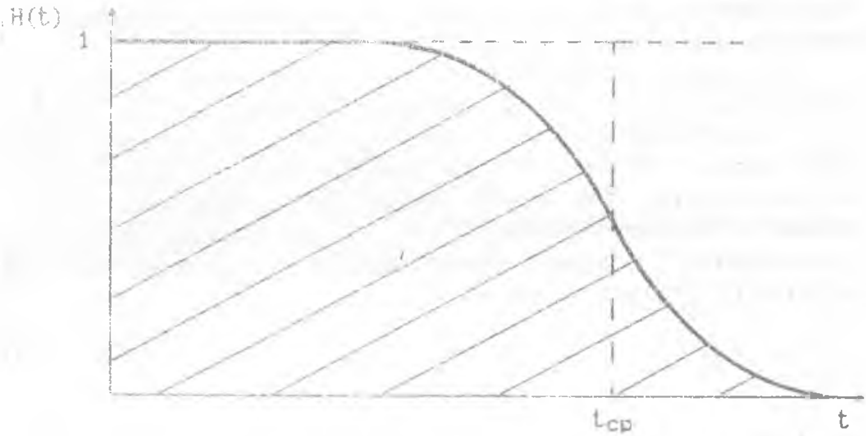


Рис. 1.6. Графическая иллюстрация среднего времени наработки

1.2.3. Интенсивность отказов

Интенсивность отказов тесно связана с функцией плотности распределения случайной величины, эти две характеристики, с одной стороны, похожи, а с другой - имеют существенное отличие. Проще это показать, рассматривая экспериментальные оценки этих функций.

Напомним, что плотность распределения случайной величины по экспериментальным данным определяется следующим образом:

$$f_з(t) = \frac{\Delta n_з}{\Delta t_к \cdot N}, \tag{1.12}$$

где Δn_s - количество точек в разряде;

s - номер разрядов, на которые выборка разделена,

N - общее количество элементов выборки.

Если вместо общего количества элементов выборки взять количество неотказавших элементов $n(t)$, то мы придем к понятию экспериментальной функции интенсивности отказов

$$\hat{\lambda}_s(t) = \frac{\Delta n_s}{\Delta t_s \cdot n(t)}, \qquad (1.13)$$

где $n(t)$ — количество неотказавших элементов к моменту времени t.

То есть статистическая оценка интенсивности отказов равна числу отказов за единицу времени, отнесенному к числу элементов, неотказавших к данному моменту.

Если какое-то изделие состоит из большого количества элементов и если отказы элементов независимы, а изделие невосстанавливаемое, то для него можно построить график интенсивности отказов по результатам экспериментов (эксплуатации). Типичный график интенсивности отказов сложного изделия показан на рис. 1.7, где введены следующие обозначения: I - период приработки, II - период нормальной работы, III - период старения.

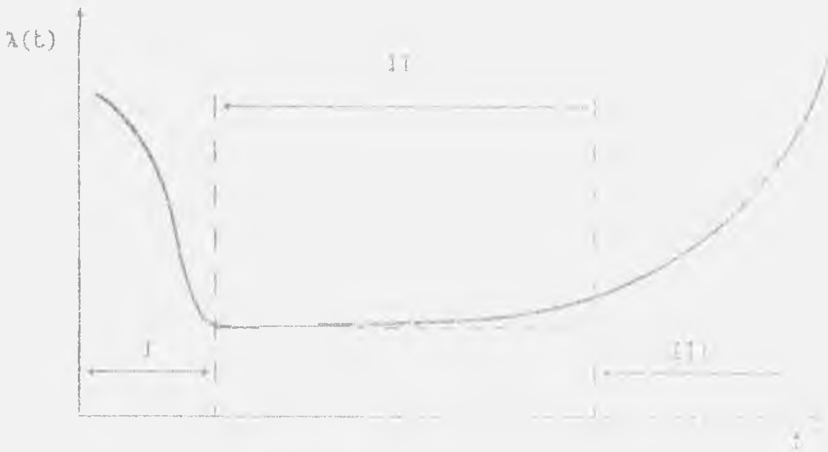


Рис. 1.7. Типичный график изменения интенсивности отказов

Покажем, что интенсивность отказов и функция плотности связаны между собой посредством функции надежности.

Действительно,

$$\hat{\lambda}_s(t) = \frac{\Delta n_s}{\Delta t_s \cdot N \cdot \frac{n(t)}{N}} = \frac{\Delta n_s}{\Delta t_s \cdot N} \cdot \frac{1}{\hat{H}(t)} = \frac{\hat{f}_s(t)}{\hat{H}(t)}. \qquad (1.14)$$

Можно показать, что для непрерывных случайных величин справедливо следующее соотношение:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{H(t)}. \qquad (1.15)$$

Отсюда следует определение интенсивности отказов согласно ГОСТ 27.002-89.

Интенсивностью отказов называется условная плотность вероятности возникновения отказа невосстанавливаемого объекта, определяемая для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента отказ не возник.

Для интенсивности отказов кроме формулы (1.15) справедливы также следующие соотношения:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{H(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - \int\limits_0^t f(\tau)d\tau} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{\left[1 - H(t)\right]'}{1 - F(t)} = -\frac{H'(t)}{H(t)}. \qquad (1.16)$$

Зная закон распределения отказов $f(t)$ (или $F(t)$), легко определить и интенсивность отказов.

Пример. Пусть закон распределения случайной величины равномерный, с параметрами, указанными на рис. 1.8.

Тогда, используя формулу (1.16), имеем

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - \int\limits_0^t f(\tau)d\tau} = \frac{0,1}{1 - \int\limits_0^t 0,1d\tau} = \frac{0,1}{1 - 0,1t}.$$

При $t \to 10$ получим $\lambda(t) \to \infty$.

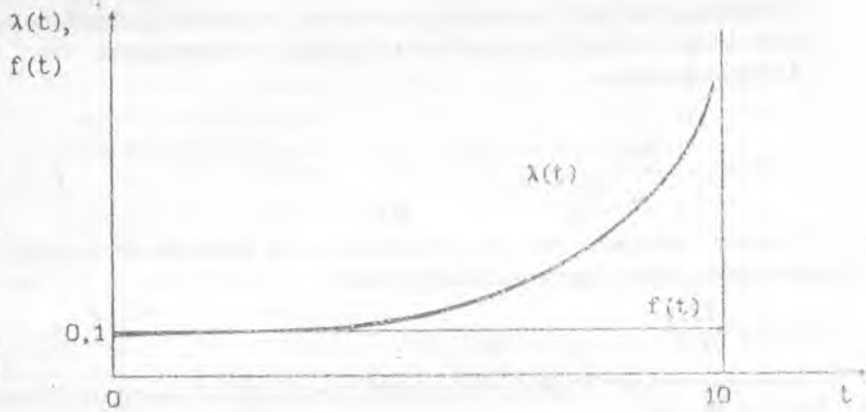


Рис. 1.8. Иллюстрация к примеру

1.2.4. Вывод экспоненциального закона надежности

На основе формул (1.16) можно вывести экспоненциальный закон надежности. В качестве исходной возьмем одну из зависимостей (1.16):

$$\lambda(t) = -\frac{H'(t)}{H(t)},$$

которая представляет собой дифференциальное уравнение

$$\frac{dH(t)}{dt} + \lambda(t)H(t) = 0.$$

Решим это уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = -\lambda(t)dt.$$

Интегрируя в пределах времени от 0 до t

$$\int_0^t \frac{dH(\tau)}{H(\tau)} = -\int_0^t \lambda(\tau)d\tau,$$

где τ - текущее время под интегралами, получаем

$$\ln H(t) - \ln[H(0)] = -\int_0^t \lambda(\tau)d\tau.$$

Имея в виду, что в момент времени $t = 0$ надежность равна единице, приходим к выводу, что второй член обращается в нуль.

Потенцируя полученное выражение, имеем

$$H(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}. \quad (1.17)$$

Это соотношение иногда называют основной формулой надежности в рассматриваемом методе. Вероятность безотказной работы на отрезке $[t_1,\ t_2]$ выражается зависимостью

$$H(t_1, t_2) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau)d\tau}.$$

Для второго периода работы многих изделий принимают $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, тогда

$$H(t) = e^{-\int_0^t \lambda d\tau} = e^{-\lambda t}. \quad (1.18)$$

Это так называемый экспоненциальный закон надежности, получивший наибольшее распространение, благодаря своей простоте.

График этого закона показан на рис. 1.9.

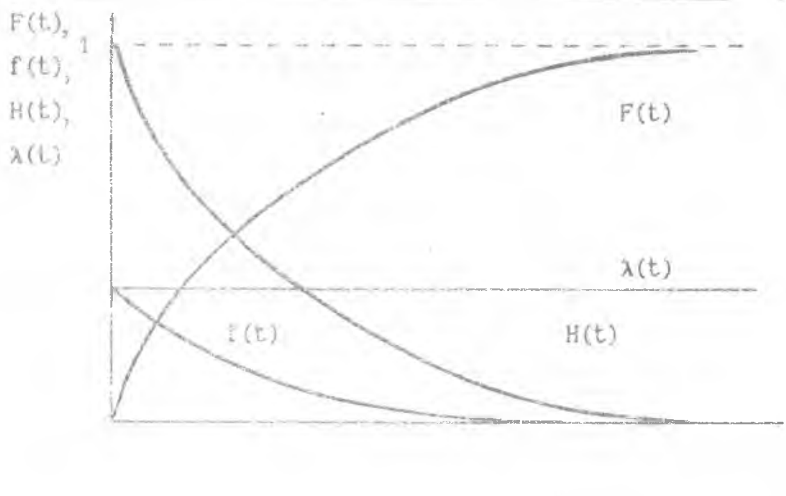


Рис. 1.9. Экспоненциальный закон надежности

Согласно этому закону, основные соотношения надежности принимают следущий вид:

$$H(t_1,t_2) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda dt} = e^{-\lambda(t_2-t_1)} = \frac{e^{-\lambda t_2}}{e^{-\lambda t_1}} = \frac{H(t_2)}{H(t_1)}; \tag{1.19}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \tag{1.20}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{1.21}$$

Графики функций $F(t)$ и $f(t)$ также показаны на рис. 1.9. Среднее время наработки можно получить, используя формулу (1.10):

$$t_{\text{ср}} = \int_0^\infty H(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda} \tag{1.22}$$

или

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{ср}}}. \tag{1.23}$$

Подставляя (1.23) в (1.18), получаем

$$H = e^{-\frac{t}{t_{\text{ср}}}}. \tag{1.24}$$

Если время работы элемента много меньше среднего времени наработки ($t \ll t_{\text{ср}}$), то можно получить приближенную, но более простую зависимость для определения надежности. Для этой цели воспользуемся разложением функции в ряд Тейлора в окрестности какой-то точки. Напомним, что разложение функции в окрестности точки «a» имеем следующий вид:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1!}(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \tag{1.25}$$

Разлагая функцию (1.24) в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$ и ограничиваясь двумя членами разложения, получаем

$$H(t) \approx 1 - \frac{t}{t_{\text{ср}}} = 1 - \lambda t. \tag{1.26}$$

При этом ошибка ε расчета не превосходит по величине третьего члена разложения, т.е.

$$\varepsilon \le \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_{ср}}\right)^2 \text{ или } \varepsilon \le \frac{1}{2}(\lambda t)^2.$$

Для многих элементов космической техники интенсивности отказов определены экспериментально и представлены в соответствующих справочниках. Это облегчает оценку надежности проектируемых элементов.

Пример. Интенсивность отказов подшипника привода механизма герметизации КА составляет $\lambda = 0{,}2\cdot10^{-6}$1/час. Определить среднее время наработки и надежность подшипника, если назначенное время работы t = 5000 часов. Принять закон изменения надежности экспоненциальным.

Решение.

$$t_{ср} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}2\cdot10^{-6}} = 5\,000\,000\ [\text{час}].$$

Поскольку $t \ll t_{ср}$ (5000 « 5 000 000). для оценки надежности воспользуемся формулой (1.26):

$$H = 1 - \frac{5000}{5\,000\,000} = 0{,}999.$$

Следует отметить, что добавление каждой «девятки» к надежности равносильно увеличению среднего времени наработки примерно на порядок.

Действительно, пусть надежность первого элемента равна H_1 = 0,99, а надежность второго H_2 = 0,999. Из формулы (1.26) можно получить

$$t_{ср} = \frac{t}{1 - H(t)}.$$

Составляя отношение среднего времени наработки второго элемента к среднему времени наработки первого элемента, получим

$$\frac{t_{ср2}}{t_{ср1}} = \frac{\dfrac{t}{1-H_2(t)}}{\dfrac{t}{1-H_1(t)}} = \frac{1-H_1(t)}{1-H_2(t)} = \frac{1-0{,}99}{1-0{,}999} = 10.$$

В настоящее время минимальное значение интенсивности отказов для радиоэлектронных устройств на печатных схемах составляет $1 \cdot 10^{-12}$ 1/час. При этом следует учитывать, что при неблагоприятных условиях эксплуатации интенсивность отказов может возрасти на 2...3 порядка (в 100...1000 раз), а во время хранения уменьшается примерно на 1...2 порядка (в10...100 раз). Условия эксплуатации учитываются введением различных коэффициентов.

1.2.5. Планы испытания на надежность

Для оценки интенсивности отказов и надежности по результатам экспериментов формула $\lambda = 1 / t_{ср}$ годится только тогда, когда все элементы откажут при испытаниях. На практике могут не дождаться, когда все элементы откажут. Такие выборки называются цензурированными. Кроме того, элементы могут заменяться или восстанавливаться в процессе испытаний, поэтому формулы для определения интенсивности отказов будут другие.

Рассмотрим некоторые типовые планы испытаний. Приняты следующие обозначения:

N - количество испытываемых элементов;

U - невосстанавливаемые и незаменяемые элементы при испытаниях в случае отказа;

R - невосстанавливаемые элементы, но заменяемые при испытаниях в случае отказа;

M - восстанавливаемые элементы при испытаниях в случае отказа;

T - время испытания;

r - количество отказавших элементов при испытаниях;

T_{Σ} - суммарное время испытаний.

Планы составляют из 3 или 4 букв, причем если план состоит из 4 букв, то последние две берутся в скобки.

Пример:[NUT]; [$NU(r,T)$].

Первый символ (N) обозначает количество элементов, поставленных на эксперимент.

Второй символ (U,R,M) характеризует элементы (восстанавливаемые, заменяемые или нет).

Третий и четвертый символы ($r,T,$ [illegible]) означают условие прекращения испытаний:

r - при отказавших r элементах;

T - при наработке времени T;

(r,T) - либо при отказавших r элементах, либо при времени T, в зависимости от того, какое условие наступит первым (двойственные планы).

Приведем примеры некоторых планов:

а) [NUT]; б) [NUr]; в) [NRT]; г) [NRr].

Пояснения к этим планам приведены на рис. 1.10.

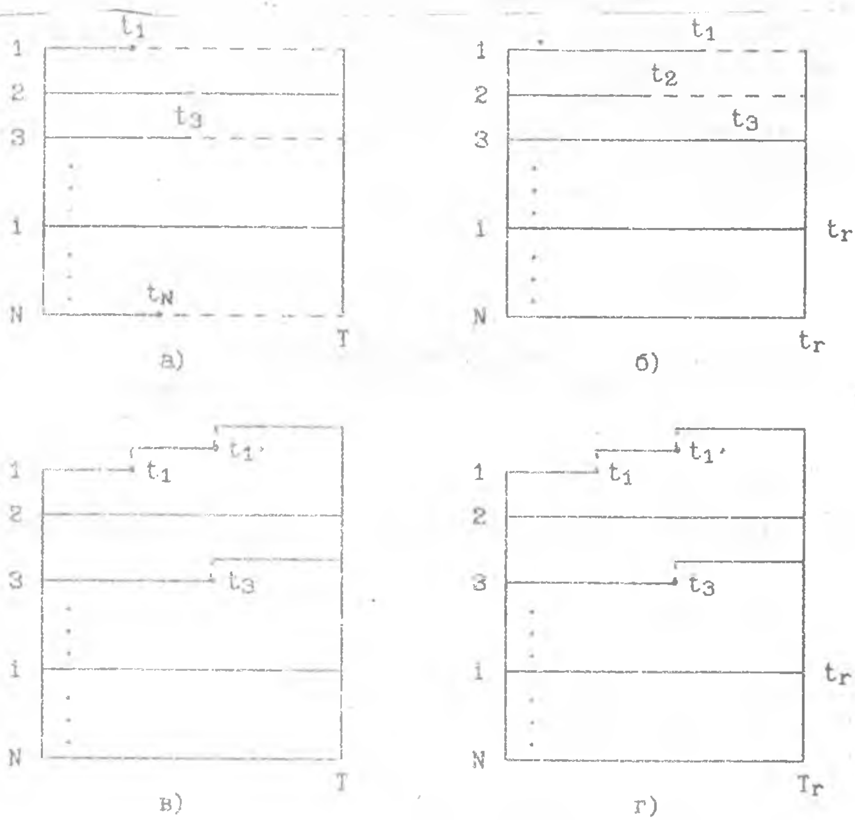


Рис. 1.10. Пояснения к планам испытаний

На этом рисунке элементы и их работа во времени схематично представлены в виде горизонтальных линий. В момент отказа элемента соответствующая горизонтальная линия обрывается. Если элементы заменяются, то их работа во времени изображена дополнительными горизонтальными линиями, начинающимися в момент отказа замененных элементов. Время T и t_0 соответствует условию окончания экспериментов.

В ГОСТ 27.410-87 представлены 16 различных планов испытаний.

Применение того или иного плана приводит к своеобразному усечению (цензурированию) выборки, которое необходимо учитывать при получении расчетных формул. Такие формулы для различных планов получены и представлены в соответствующей литературе, например в работе [4].

Приведем расчетные формулы лишь для одного плана испытаний типа [NRT].

Оценка интенсивности отказов

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{m}}{NT}, \qquad (1.27)$$

где $\hat{m}$ - количество отказавших элементов

Среднее квадратическое отклонение этой оценки

$$\hat{D}_{\lambda} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{NT}}. \qquad (1.28)$$

Нижний и верхний доверительные интервалы для этой оценки

$$\hat{\lambda}_{н} = \frac{1}{2NT}\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}\left(2\hat{m}\right), \qquad (1.29)$$

$$\hat{\lambda}_{в} = \frac{1}{2NT}\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}\left(2\hat{m}\right), \qquad (1.30)$$

где χ^2 - квантиль распределения Пирсона.

γ - доверительная вероятность.

Пример. Пусть в результате экспериментов по плану [NRT] в течение T = 100 ч испытывалось N = 50 изделий, отказы которых подчинены экспоненциальному закону, наблюдалось $\hat{m}$ = 5 отказов

Найти оценку $\hat{\lambda}$, ее среднее квадратическое отклонение и доверительные границы $\hat{\lambda}$ с доверительной вероятностью $\gamma = 0,9$.

Решение. По формулам (1.27) и (1.28) находим:

$$\hat{\lambda} = \frac{5}{50 \cdot 100} = 1,0 \quad 10^{-3} \quad 1/\text{час}.$$

$$D_{\hat{\lambda}} = \sqrt{\frac{1,0 \quad 10^{-3}}{50 \cdot 100}} = 0,477 \cdot 10^{-3} \quad 1/\text{час}.$$

По таблице распределения Пирсона (см. лабораторные работы) находим соответствующие квантили:

$$\chi^2_{0,95}(10) = 18,31;$$

$$\chi^2_{0,05}(10) = 3,94 \cdot$$

Вычисляем доверительные границы интенсивности отказов по формулам (1.29) и (1.30):

$$\hat{\lambda}_{н} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 100} \cdot 3,94 = 0,394 \cdot 10^{-3} \quad 1/\text{час}.$$

$$\hat{\lambda}_{в} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 100} \cdot 18,31 = 1,831 \cdot 10^{-3} \quad 1/\text{час}.$$

Найдем статистическую оценку надежности элементов, например для времени T=100 часов. Приближенно ее можно найти по формуле (1.26). Средняя (точечная) оценка надежности:

$$\hat{H}(t) = 1 - \hat{\lambda} T = 1 - 1 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,900 \cdot$$

Чтобы найти нижнюю доверительную границу надежности, необходимо использовать верхнюю доверительную границу интенсивности отказов и наоборот (так как, чем больше интенсивность отказов, тем меньше надежность):

$$\hat{H}_{н} = 1 - \hat{\lambda}_{в} T = 1 - 1,831 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,8169;$$

$$\hat{H}_{в} = 1 - \hat{\lambda}_{н} T = 1 - 0,394 \cdot 10^{-3} \quad 100 = 0,9606.$$

При расчете обычно используют нижнюю доверительную границу оценки надежности.

Прежде всего отметим, что понятие п р о ч н о с т ь используется здесь в обобщенном смысле. То есть под прочностью R понимается любая случайная величина, характеризующая предельные возможности работы элемента (несущую способность), превышение которой означает отказ элемента.

Понятие н а г р у з к и (внешней нагрузки) N тоже имеет широкий смысл. То есть это случайная величина, воздействующая на элемент от внешних источников.

Рассмотрим понятия внешней нагрузки и несущей способности (прочности) применительно к элементам конструкций летательных аппаратов, основное назначение которых - воспринимать механическую нагрузку.

Под внешней нагрузкой подразумеваем растягивающую, сжимающую или перерезывающую силы, изгибающий или крутящий моменты, напряжение, внутреннее давление в баках, продольную или поперечную перегрузки и т.д., а также любые их комбинации. Под внешней нагрузкой понимают эксплуатационную нагрузку. Причем ее не умножают ни на какие коэффициенты безопасности, как при расчете по детерминированным величинам, а рассматривают как вероятностную категорию.

Под н е с у щ е й с п о с о б н о с т ь ю понимается сила, изгибающий или крутящий моменты, напряжение, давление, перегрузка, деформация и т.д., характеризующие предельное состояние элемента, ограничивающее его дальнейшее использование. Например, под несущей способностью элемента конструкции понимается случайная величина

$$R = \left|\sigma_{\text{доп}}\right| S,$$

где $\left|\sigma_{\text{доп}}\right|$ - допустимое напряжение в конструкции;

S - функция геометрических параметров.

Здесь $\sigma_{\text{доп}}$ и S также являются случайными величинами.

В зависимости от действующей нагрузки допустимыми напряжениями могут быть: предел прочности при растяжении ($\sigma_{\text{в}}$), критическое напряжение при местной $\left(\sigma_{\text{кр.м}}\right)$ или общей $\left(\sigma_{\text{кр.о}}\right)$ потере устойчивости, предел выносливости при циклических нагрузках σ_{-1} и т.д.

Под **о т к а з о м** условно понимают превышение ранее заданного напряжения, не приводящего к разрушению, например, предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ или условного предела текучести $\sigma_{0,2}$.

Показателем надежности в этом методе является вероятность превышения несущей способности конструкции (элемента) R над действующими нагрузками N:

$H = P\,(\,R > N\,)$.

При сравнении внешней нагрузки с несущей способностью необходимо, чтобы они были выражены в одних единицах.

1.3.1. Вычисление показателя надежности элемента при произвольных законах распределения нагрузки и прочности

Введем в рассмотрение совместную плотность распределения нагрузки и прочности $f(R,N)$. Область допустимых значений Ω, параметров R и N, при которых соблюдается условие $R > N$ (область надежной работы элемента), показана на рис. 1.11 и выделена штриховкой.

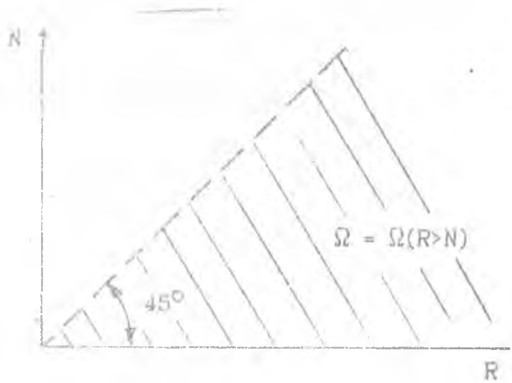


Рис. 1.11. Область надежной работы элемента

Если взять интеграл от функции плотности $f(R,N)$ по области Ω, то получим вероятность безотказной работы элемента, т.е. его надежность:

$$H = P(R > N) = \int_{\Omega} f\left(x_R, x_N\right) dx_R\, dx_N\,, \qquad (1.31)$$

где x_R и x_N - переменные интегрирования по нагрузке и прочности.

Поскольку случайные величины нагрузки и прочности независимы, то мы имеем право совместную плотность величины R и N представить как произведение

$$f(R,\ N) = f_R(R) \cdot f_N(N), \tag{1.32}$$

где $f_R(R)$ и $f_N(N)$ - плотности распределения случайных величин R и N соответственно.

Чтобы при интегрировании выражения (1.31) остаться в области Ω, можно использовать два способа. При первом способе прочность R изменяется от 0 до ∞, а нагрузка N – от 0 до значения $N = R$. Тогда, используя формулу (1.32), можно получить

$$H = \int_0^{\infty}\int_0^{N=R} f_R(x_R) \cdot f_N(x_N) dx_R dx_N =$$

$$= \int_0^{\infty} f_R(x_R)\left[\int_0^{N=R} f_N(x_N) dx_N\right] dx_R = \int_0^{\infty} f_R(x_R)\ F_N(x_R) dx_R,$$

где $F_N(x_N)$ - функция распределения нагрузки.

При втором способе нагрузка N изменяется от 0 до ∞, а прочность R от значения $R = N$ до ∞. Поэтому

$$H = \int_0^{\infty}\int_{R=N}^{\infty} f_N(x_N) \cdot f_R(x_R) dx_N dx_R =$$

$$= \int_0^{\infty} f_N(x_N)\left[\int_{R=N}^{\infty} f_R(x_R) dx_R\right] dx_N =$$

$$= \int_0^{\infty} f_N(x_N)\left[1 - \int_0^{R=N} f_R(x_R) dx_R\right] dx_N =$$

$$= \int_0^{\infty} f_N(x_N)\left[1 - F_R(x_R)\right] dx_N,$$

где $F_R(x_R)$ - функция распределения прочности.

Поскольку R и N должны сравниваться в одних физических единицах и при одинаковых размерностях, то переменные под интегралами можно представить в виде переменной x. Тогда расчетные формулы надежности примут вид

$$H = \int_0^{\infty} f_R(x) \cdot F_N(x) dx; \tag{1.33}$$

$$H = \int_{0}^{\infty} f_N(x) \cdot \left[1 - F_R(x)\right] dx. \tag{1.34}$$

Пример. Пусть случайные величины R и N распределены равномерно на отрезке [0,1], как показано на рис. 1.12.

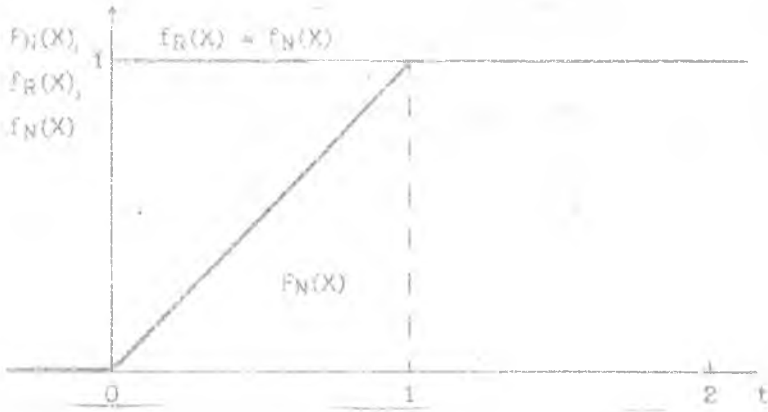


Рис. 1.12. К определению надежности при равномерных законах распределения нагрузки и прочности

Решение. Из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

получаем, что

$$f_R(x) = f_N(x) = 1.$$

Надежность определяем по формуле (1.33):

$$H = \int_{0}^{\infty} f_R(x) \cdot F_N(x) dx = \int_{0}^{1} 1 \cdot F_N(x) dx.$$

Найдем отдельно функцию $F_N(x)$:

$$F_N(x) = \int_{0}^{x} f_N(x) dx = \int_{0}^{x} 1 \cdot x = x.$$

Тогда

$$H = \int_{0}^{1} 1 \cdot x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

1.3.2. Вычисление показателя надежности элементов при нормальных законах распределения нагрузки и прочности

Полученные выше формулы (1.33) и (1.34), как отмечалось, справедливы для любых законов распределения случайных величин нагрузки и прочности. В частности, для нормальных законов интегралы (1.33) и (1.34) можно вычислять численным методом. Однако для таких законов можно получить более простые расчетные формулы, если ввести так называемую композиционную случайную величину $Y = R - N$. Надежность элемента определяется как вероятность невыхода композиционной случайной величины за нулевой уровень:

$$H = P(R > N) = P(R - N > 0) = P(y > 0) = \int_0^\infty f(y)dy\ , \qquad (1.35)$$

где $f(y)$ — плотность распределения композиционной случайной величины. Это положение иллюстрируется рис. 1.13, где заштрихованная площадь равна вероятности безотказной работы элемента.

В теории вероятностей доказывается [10], что если величины R и N подчиняются нормальным законам распределения, то

Рис. 1.13. Оценка надежности по композиционной случайной величине

композиционная случайная величина $Y = R - N$ также будет подчиняться нормальному закону распределения $f(y)$ с математическим ожиданием

$$m_y = m_R - m_N \tag{1.36}$$

и средним квадратическим отклонением

$$D_y = \sqrt{D_R^2 + D_N^2}, \tag{1.37}$$

где m_R, m_N, D_R^2 и D_N^2 — математические ожидания и дисперсии случайных величин R и N.

Таким образом, подставляя нормальный закон распределения в формулу (1.35), получаем

$$H = P(y > 0) = \frac{1}{D_y\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - m_y}{D_y}\right)^2\right]} dy \tag{1.38}$$

Чтобы находить значения этого интеграла с помощью таблиц нормального закона распределения, проведем замену переменных с помощью следующей нормировочной функции:

$$z = \frac{y - m_y}{D_y}.$$

Тогда $dy = D_y dz$. При $y = 0$ нижний предел интегрирования будет следующим:

$$z = \frac{0 - m_y}{D_y} = -\frac{m_y}{D_y},$$

а при $y \to +\infty$ верхний предел $z \to +\infty$.

После замены переменных и пределов интегрирования получаем

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m_y}{D_y}}^{\infty} e^{\left(-z^2/2\right)} dz. \tag{1.39}$$

Используя очевидное соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{a} f(\tau)d\tau + \int_{a}^{+\infty} f(\tau)d\tau = 1,$$

где $f(\tau)$ — плотность распределения случайной величины, приведем формулу (1.39) к виду

$$H = 1 - \int_{-\infty}^{-\frac{m_y}{D_y}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = 1 - \Phi\left(-\frac{m_y}{D_y}\right) = \Phi\left(\frac{m_y}{D_y}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ - условное обозначение функции нормального закона распределения. Учитывая выражения (1.36) и (1.37), окончательно имеем

$$H = \Phi\left(\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}}\right). \tag{1.40}$$

Согласно формуле (1.40) определяется надежность элемента при случайных величинах нагрузки N и прочности R, подчиняющихся нормальному закону распределения.

Если случайной величиной будет только одна, например R, а другая детерминированной, например N, то надежность определяется следующим образом:

$$H = \Phi\left(\frac{m_R - N}{D_R}\right).$$

Если R - детерминированная, а N - случайная величины, то

$$H = \Phi\left(\frac{R - m_N}{D_N}\right).$$

Пример. Пусть математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение напряжения (нагрузки) в элементе конструкции m_N = 30 МПа и D_N = 3 МПа. Соответствующие параметры прочности: m_R = 40 МПа и D_R = 4 МПа. Определить надежность элемента при условии, что нагрузка и прочность подчиняются нормальному закону распределения.

Решение. Вычисляем аргумент функции $\Phi(\cdot)$:

$$\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}} = \frac{40 - 30}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

По таблицам нормального распределения находим $H = \Phi(2{,}0) = 0{,}97725$.

Изменим в примере параметры D_R и D_N; пусть $D_R = 8$ МПа, $D_N = 6$ МПа. Тогда аргумент функции $\Phi(\cdot)$ составит

$$\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}} = \frac{40 - 30}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 1.$$

По таблицам находим $H = \Phi(1{,}0) = 0{,}8413$.

Введем коэффициент безопасности $\bar{\eta}$ как отношение средних значений прочности и нагрузки:

$$\bar{\eta} = \frac{m_R}{m_N}. \qquad (1.41)$$

Из примера видно, что коэффициент $\bar{\eta}$ в обоих вариантах одинаков:

$$\bar{\eta} = \frac{40}{30} = 1{,}333,$$

однако показатели надежности различные. Причем разница объясняется изменением дисперсии случайных величин.

Таким образом, показатель надежности является как бы более «чувствительным» к изменению разброса параметров нагрузки и прочности по сравнению с коэффициентом безопасности.

Рассмотрим некоторые приложения данного метода оценки надежности.

1.3.3. Связь между показателем надежности и коэффициентом безопасности

Преобразуем аргумент функции надежности (1.40)

$$H = \Phi\left(\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}}\right)$$

таким образом, чтобы в нем присутствовал коэффициент безопасности

$$\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}} = \frac{m_N\left(\frac{m_R}{m_N} - 1\right)}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}} = \frac{\bar{\eta} - 1}{\sqrt{\frac{D_R^2 \cdot m_R^2}{m_N^2 \cdot m_R^2} + \frac{D_N^2}{m_N^2}}} = \frac{\bar{\eta} - 1}{\sqrt{v_R^2 \bar{\eta}^2 + v_N^2}} \qquad (1.42)$$

Здесь v_R и v_N - коэффициенты вариации прочности и нагрузки соответственно, которые определяются следующим образом:

$$v_R = \frac{D_R}{m_R} \quad \text{и} \quad v_N = \frac{D_N}{m_N} \qquad (1.43)$$

Таким образом, получена следующая связь между надежностью и коэффициентом безопасности:

$$H = \Phi\left(\frac{\bar{\eta} - 1}{\sqrt{v_R^2 \bar{\eta}^2 + v_N^2}}\right) \qquad (1.44)$$

Отметим, что в аргумент этой функции входят безразмерные величины, поэтому это выражение справедливо не только для случайных величин одной физической природы и одной размерности, но и для случайных величин разной физической природы. В последнем случае трактовка коэффициента безопасности $\bar{\eta}$ будет другой. Покажем это на примере, а вместе с этим посмотрим возможности использования уравнения (1.44).

Пример. Проектируется баллон, в котором должен находиться газ со средним давлением m_N = 50 атмосфер и среднеквадратическим отклонением 2,5 ат. Материал баллона — высокопрочная сталь со следующими характеристиками прочности: m_R = 1800 МПа, D_R = 54 МПа. Каков должен быть запас прочности, чтобы обеспечить надежность баллона H = 0,999?

Решение. По таблицам нормального закона распределения определяем аргумент для заданного уровня надежности. Он равен 3,10 (т.е. $H = \Phi(3,10) = 0,999$).

Подсчитаем коэффициенты вариации:

$$v_N = \frac{2,5}{50} = 0,05;$$

$$v_R = \frac{54}{1800} = 0,03.$$

Составляем уравнение

$$3,10 = \frac{\bar{\eta} - 1}{\sqrt{0,03^2 \bar{\eta}^2 + 0,05^2}},$$

решая которое можно получить

$\bar{\eta} = 1,18.$

Таким образом, если проектируется баллон традиционным методом, то коэффициент безопасности необходимо брать 1,18 для того, чтобы обеспечить заданную надежность 0,999. Причем этот коэффициент не есть отношение m_R / m_N, так как делить физически разные величины нельзя (прочность материала на давление в сосуде). Тем не менее определить средние значения нагрузки и прочности, выраженные в одних физических величинах, нетрудно.

Действительно, среднее предельное (разрушающее) давление в баллоне должно быть

$$m_{R\,\text{давл}} = \bar{\eta} m_N = 1,18 \cdot 50\text{атм} = 59\text{ атм},$$

а среднее напряжение в стенке баллона

$$m_{N,\text{напр}} = \frac{m_R}{\bar{\eta}} = \frac{1800\text{МПа}}{1,18} = 1525\text{ МПа}.$$

1.3.4. Форсированные испытания

Для подтверждения надежности высоконадежных систем требуется значительное количество экспериментов, что не всегда приемлемо в практике.

Поэтому актуальны методы, которые позволяют подтвердить надежность элементов в эксплуатационном режиме нагрузок по результатам экспериментов при повышенных нагрузках, так как количество экспериментов, подтверждающих надежность, значительно уменьшается. Рассмотрим один из таких методов.

Пусть спроектированный элемент имеет случайную прочность

R и на него действует случайная нагрузка N, причем эти случайные величины подчиняются нормальным законам распределения с заданными характеристиками математических ожиданий m_R и m_N и среднеквадратических отклонений D_R и D_N. Распределение плотностей f_R и f_N, величин R и N показано схематично на рис. 1.14 сплошными линиями.

Как было показано выше, надежность элемента определяется по следующему выражению (1.40):

$$H_1 = \Phi\left(\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ - функция нормального закона распределения.

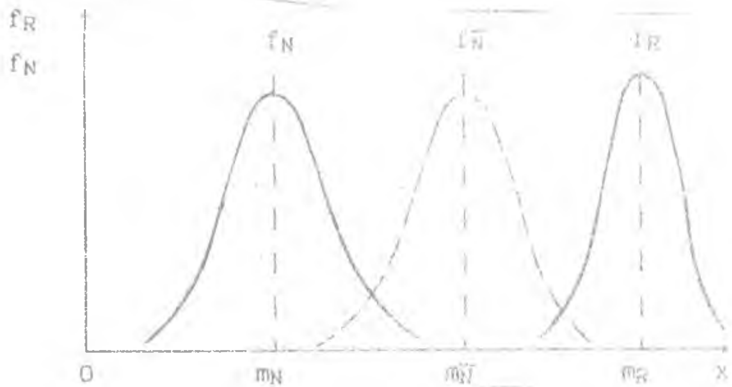


Рис. 1.14. Характер случайных величин нагрузки и прочности

Это средняя (точечная) оценка надежности элемента. Наложим более жесткие условия и будем считать, что она равна нижней доверительной границе надежности элемента. Привлечем к решению поставленной задачи методы расчета надежности как вероятности случайного события, где была получена зависимость (1.5) для планирования количества необходимых экспериментов с целью подтверждения нижней доверительной границы надежности с заданной доверительной вероятностью γ:

$$N_1 = \frac{\lg(1-\gamma)}{\lg H_{H1}}.$$

Подставляя найденные по формуле (1.40) значения H в формулу (1.5), получаем необходимое количество экспериментов для подтверждения надежности при эксплуатационном режиме нагрузки.

Далее повысим испытательную нагрузку, как это показано пунктирной линией на рис. 1.14. Пусть параметры этой нагрузки будут m_N, D_N.

Надежность элемента при этом составит

$$H_2 = \Phi\left(\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}}\right).$$

Приравнивая $H_2 = H_{H2}$, получим новое количество экспериментов:

$$N_2 = \frac{\lg(1-\gamma)}{\lg H_{H2}}.$$

Пример. Прочность болта — случайная величина с параметрами $m_R = 18000$ Н и $D_R = 1000$ Н; эксплуатационная нагрузка - также случайная величина с параметрами $m_N = 12000$ Н; $D_N = 2000$ Н.

Определить количество экспериментов для подтверждения надежности в случае без увеличения испытательной нагрузки и в случае увеличения ее при параметрах $m_N = 15000$ Н и $D_N = 2000$ Н и доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Определяем надежность:

$$H_1 = \Phi\left(\frac{18000 - 12000}{\sqrt{1000^2 + 2000^2}}\right) = \Phi(2{,}68) = 0{,}9963.$$

Количество необходимых экспериментов

$$N_1 = \frac{\lg(1 - 0{,}95)}{\lg 0{,}9963} \approx 809.$$

При повышенной нагрузке

$$H_1 = \Phi\left(\frac{18000 - 15000}{\sqrt{1000^2 + 2000^2}}\right) = \Phi(1{,}34) = 0{,}9100.$$

Количество необходимых экспериментов

$$N_2 = \frac{\lg(1-0{,}95)}{\lg 0{,}9100} \approx 32\cdot$$

Таким образом, можно эксплуатационную надежность подтвердить по результатам форсированных испытаний. При этом количество экспериментов значительно сокращается.

Однако не следует забывать, что формула (1.5) справедлива в том случае, если ни одного отказа в эксперименте не было. Если же отказы все же появятся, то либо форсированную нагрузку следует уменьшить, либо количество экспериментов следует находить с использованием биномиального закона распределения.

1.4. НАДЕЖНОСТЬ КАК ВЕРОЯТНОСТЬ НЕВЫБРОСА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ЗА ЗАДАННЫЙ УРОВЕНЬ

1.4.1. Некоторые сведения о случайной функции

Случайная функция - это функция, принимающая в результате опыта конкретные виды, которые нельзя заранее предугадать.

Эти конкретные виды называются ее реализациями. Их совокупность образует семейство реализаций. При каждом конкретном значении аргумента случайная функция превращается в случайную величину в обычном понимании. Ее называют сечением случайной функции.

Характеристиками случайных функций, в отличие от характеристик случайных величин, являются не числа, а функции.

Случайную функцию, аргументом которой является время, называют еще случайным процессом.

На рис. 1.15 приведена иллюстрация случайной функции $x(t)$.

Введены следующие обозначения:

1 - реализация случайного процесса;

2 - математическое ожидание случайного процесса (является неслучайной функцией времени $m(t)$;

t_1 и t_2 - время сечений случайного процесса;

3 и 4 - плотности распределения в сечениях процесса $f[x(t_1)]$ и $f[x(t_2)]$, где $x(t_1)$ и $x(t_2)$ - случайные величины в сечениях процесса.

В сечениях процесса можно подсчитать дисперсии $D^2\left[x(t_1)\right]$ и $D^2\left[x(t_2)\right]$. В общем случае дисперсия есть неслучайная функция времени, т.е. $D_x^2 = D_x^2(t)$.

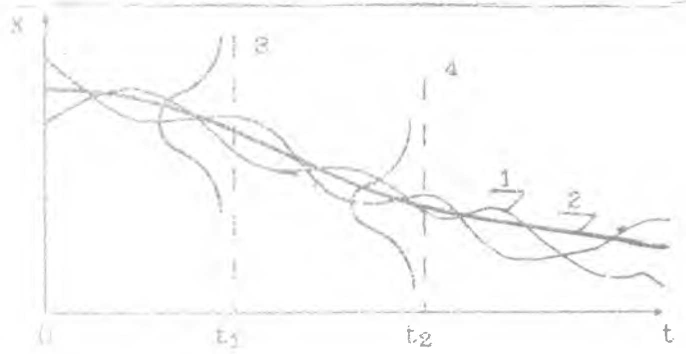


Рис. 1.15. Пример случайной функции

В случайном процессе можно рассматривать не только функцию $x(t)$, но и ее производную $\dot{x}(t)$, т.е. скорость изменения процесса, которая будет также случайной.

Можно также рассматривать совместную плотность распределения случайной функции и ее производной $f(x,\dot{x},t)$, которая является функцией времени.

Стационарным процессом называется процесс, числовые характеристики которого не зависят от времени, т.е.

$m_x(t) = \text{const};$

$D_x^2(t) = \text{const}.$

Гауссовским процессом называется процесс, для которого распределение случайных величин в любом сечении процесса подчиняется нормальному закону распределения.

Для такого процесса величины x и $\dot{x}$ в сечениях процесса независимы и, следовательно, можно записать

$$f(x,\dot{x}) = f_1(x)\cdot f_2(\dot{x}),$$

$$\text{где } f_1(x) = \frac{1}{D_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{D_x}\right)^2};$$

$$f_2(\dot{x}) = \frac{1}{D_{\dot{x}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}-m_{\dot{x}}}{D_{\dot{x}}}\right)^2}.$$

Здесь $m_{\dot{x}}$ и $D_{\dot{x}}$ - математическое ожидание и дисперсия производной случайного процесса.

1.4.2. Основные понятия теории надежности В. В. Болотина

Согласно этому методу вводятся: некоторое пространство качества V, область допустимых состояний Ω и траектория изменения качества элемента (или системы) во времени $v(t)$. Выход этой траектории из области допустимых состояний трактуется как отказ элемента (системы).

Понятие качества в теории Болотина имеет весьма широкий смысл. Например, если параметры нагрузки и прочности - случайные функции времени (рис. 1.16, а), то целесообразно включить оба параметра R и N в вектор V.

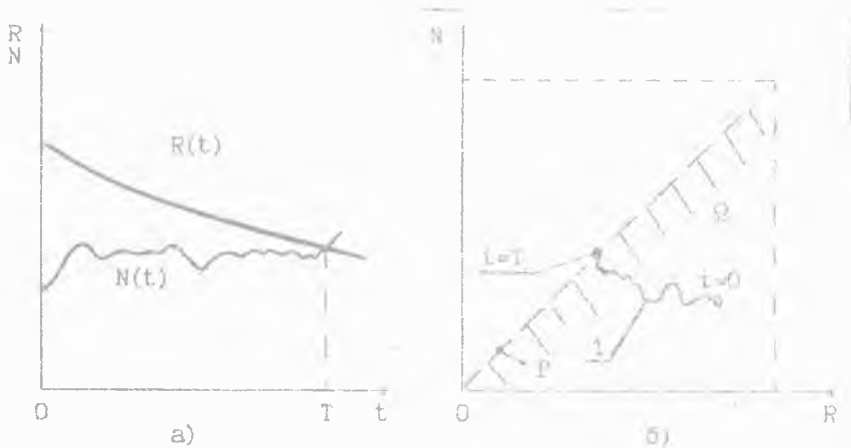


Рис. 1.16. К понятию терминов теорий надежности В.В. Болотина:
а) 1 — траектория качества; Г — граница области Ω;
б) Ω — допустимая область (предельная поверхность)

При этом пространство V - первый квадрант плоскости R, N (рис. 1.16, б). Допустимая область задана соотношением

$\Omega = \{R, N: R - N > 0\}$.

Понятие отказа в данной теории имеет более широкий смысл. В общем случае точки предельной поверхности соответствуют различным физическим состояниям объектов, т.е. различным отказам.

В общем случае процессы $N(t)$, $R(t)$, $v(t)$ - случайные. Первое пересечение поверхности Г траекторией - также случайное событие.

Функция надежности $H(t)$ - вероятность безотказной работы объекта на отрезке $[t_0, t]$ - равна вероятности пребывания вектора v в допустимой области на этом отрезке:

$$H(t) = P\left\{v(\tau) \in \Omega \tau \in \left[t_0, t\right]\right\}. \tag{1.45}$$

Выходы реализаций случайных процессов за пределы некоторых областей (в особенности, когда такие выходы - редкие события) называются выбросами. Формула (1.45) обозначает, что для вычисления показателей надежности необходимо решать задачи теории выброса случайных процессов.

1.4.3. Выбросы случайного процесса за заданный уровень

Пусть $x(t)$ - непрерывный и дифференцируемый случайный процесс с заданной совместной плотностью вероятности $f(x, \dot{x}, t)$ процесса $x(t)$ и его производной $\dot{x}(t)$ (рис. 1.17).

Необходимым и достаточным условием выброса случайного процесса за время Δt за заданный уровень x^* является:

во-первых, нахождение координаты $x(t)$ вблизи уровня x^*;

во-вторых, положительная скорость процесса, т.е. $\dot{x} > 0$.

Будем принимать во внимание только однократный выброс, так как вероятность двукратного выброса пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью однократного выброса.

В символах вероятностей необходимое и достаточное условие выброса запишется следующим образом:

$$P_1(x^*, \Delta t) = P\begin{bmatrix} x^* - \Delta x < x < x^*, \\ \dot{x} > 0. \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

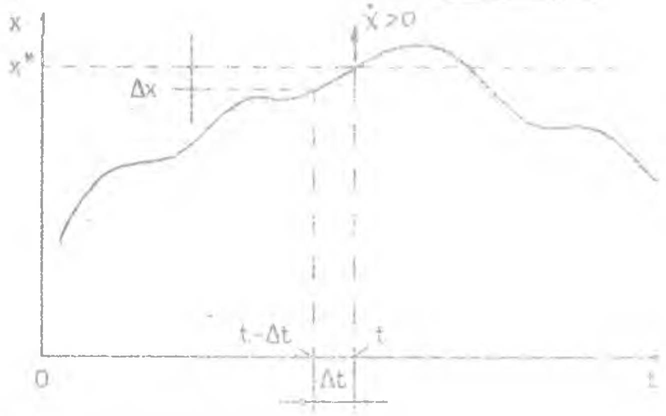


Рис. 1.17. К вопросу о выбросе случайного процесса

Вероятность $P_1(x^*,\Delta t)$ находится интегрированием плотности $f(x,\dot{x},t)$ по указанной в выражении (1.46) области:

$$P_1(x^*,\Delta t)=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{x^*-\Delta x}^{x^*} f(x,\dot{x};t)dx\,d\dot{x}.$$

Используя теорему о среднем, имеем

$$P_1(x^*,\Delta t)=\int\limits_0^{\infty} f(x^*,\dot{x};t)\Delta x\,d\dot{x}.$$

Учитывая, что $\Delta x=\dot{x}\,\Delta t$, получаем

$$P_1(x^*,\Delta t)=\Delta t\int\limits_0^{\infty} f(x^*,\dot{x};t)\dot{x}\,d\dot{x}.$$

Определим вероятность выброса в единицу времени:

$$\nu_+(x^*)=\frac{P_1(x^*,\Delta t)}{\Delta t}=\int\limits_0^{\infty} f(x^*,\dot{x};t)\dot{x}\,d\dot{x}. \qquad (1.47)$$

Знак «+» означает положительный выброс (выброс вверх).

Вероятность выброса за время t определим как интеграл по времени от функции $\nu_+(x^*)$, т. е.

$$F_1(x^*, t) = \int_0^t \nu_+(x^*)d\tau.$$

Тогда показатель надежности определится как единица минус вероятность выброса случайного процесса за заданный уровень за время t:

$$H(t) = 1 - \int_0^t \nu_+(x^*)d\tau.$$

Для стационарного процесса интеграл исчезает и мы получаем

$$H = 1 - t \cdot \nu_+(x^*) \qquad (1.48)$$

В качестве простейшего примера вычислим математическое ожидание числа пересечений $\nu_+(x^*)$ для стационарного гауссовского процесса. Как было определено ранее, для такого процесса

$$f(x, \dot{x}) = f_1(x) \cdot f_2(\dot{x}). \qquad (1.49)$$

В нашем случае

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_x}{D_x}\right)^2\right]}. \qquad (1.50)$$

$$f_2(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\dot{x}}}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x} - m_{\dot{x}}}{D_{\dot{x}}}\right)^2\right]}. \qquad (1.51)$$

Здесь учтен тот факт, что для стационарного процесса среднее значение его скорости равно нулю $(m_{\dot{x}} = 0)$.

Подставляем выражения (1.49) – (1.51) в формулу (1.47):

$$\nu_+(x^*) = f_1(x^*) \int_0^\infty f_2(\dot{x})\dot{x}\, d\dot{x}.$$

Замечая, что

$$\int_0^\infty e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{D_{\dot{x}}}\right)^2\right]}\dot{x}\,d\dot{x} = -D_{\dot{x}}^2 \int_0^\infty e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{D_{\dot{x}}}\right)^2\right]} d\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{D_{\dot{x}}}\right)^2\right] =$$

$$= -D_{\dot{x}}^2 e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{D_{\dot{x}}}\right)^2\right]} \Big|_0^\infty = D_{\dot{x}}^2 ,$$

получим

$$\nu_+\left(x^*\right) = \frac{D_{\dot{x}}}{2\pi D_x} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^* - m_x}{D_x}\right)^2\right]} . \tag{1.52}$$

Введем обозначение

$$\omega_e = \frac{D_{\dot{x}}}{D_x} . \tag{1.53}$$

Параметр ω_e, имеющий размерность $с^{-1}$, будем называть эффективной частотой процесса $x(t)$. С учетом (1.53) формула (1.52) принимает вид

$$\nu_+\left(x^*\right) = \frac{\omega_e}{2\pi} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^* - m_x}{D_x}\right)^2\right]} . \tag{1.54}$$

Заметим, что математическое ожидание числа положительных пересечений уровня $x = m_x$ составляет

$$\nu_+\left(x^*\right) = \frac{\omega_e}{2\pi} . \tag{1.55}$$

Отсюда видно, что для стационарного гауссовского процесса эффективная частота может быть интерпретирована как характерная частота положительных пересечений среднего уровня процесса.

Пример. Пусть колебания корпуса ракеты - случайный гауссовский процесс с характеристиками $m_x = 0$ мм; $D_x = 2{,}5$ мм; $D_{\dot{x}} = 5$ мм/с. Предельно допустимая амплитуда колебаний $x^* = 10$ мм. Время активного участка - 100 с. Найти надежность корпуса ракеты при колебаниях.

Решение. Воспользуемся формулой (1.54):

$$\nu_+\left(x^*\right) = \frac{5}{2\pi \cdot 2,5} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{10-0}{2,5}\right)^2\right]} = 0,000107 .$$

Надежность системы найдем согласно формуле (1.48):

$$H = 1 - t\,\nu_+\left(x^*\right) = 1 - 100 \cdot 0,000107 = 0,99893 .$$

Характерная круговая частота среднего уровня процесса определится по формуле (1.55):

$$\omega_e = \frac{D_{\dot{x}}}{D_x} = \frac{5}{2,5} = 2\left[1/c\right].$$

Обычная частота (математическое ожидание числа положительных пересечений уровня $x = m_x$) составит

$$f_e = \frac{\omega_e}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} \approx 1/3\ \text{Гц}.$$

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

2.1. МЕТОД СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Под системой понимают любое устройство, состоящее из частей (элементов), надежность которых известна.

Если при определении надежности системы рассматривают лишь независимые по надежности элементы, то расчет существенно упрощается. В этом случае применяют метод структурных схем. Структурная схема отражает выбранное деление схемы на элементы и влияние отказов элементов на надежность системы. Элементы по надежности могут быть соединены между собой в систему последовательно, параллельно или смешанно.

Последовательным соединением элементов по надежности называется такое соединение, при котором необходимым и достаточным условием безотказной работы системы является безотказная работа всех ее элементов, т.е.

$$Y_c = Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_n, \tag{2.1}$$

где Y_c, Y_1, Y_2, Y_n — случайные события, заключающиеся в том, что безотказно работает соответственно система, первый, второй, n-й элементы.

Последовательное соединение изображается так, как показано на рис. 2.1, где 1, 2, ..., n — номера элементов.

Рис. 2.1. Последовательное соединение элементов

Параллельным соединением элементов по надежности называется такое соединение, при котором необходимым и достаточным условием отказа системы является отказ всех ее элементов, т.е.

$$Q_c = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n. \quad (2.2)$$

Графически параллельное соединение изображается так, как показано на рис. 2.2, где 1, 2, ..., n — номера элементов.

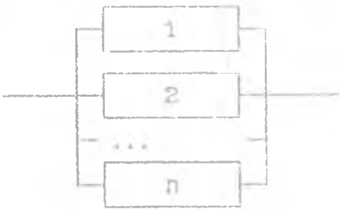


Рис. 2.2. Параллельное соединение элементов

Смешанным соединением элементов в смысле надежности называется такое соединение, при котором имеются элементы, соединенные последовательно, и элементы, соединенные параллельно.

Графически смешанное соединение можно изобразить, например, так, как показано на рис. 2.3, где 1, 2, 3, 4, 5, 6 — номера элементов. Из них элементы 1, 2, 3 соединены последовательно, а 4, 5, 6 — параллельно.

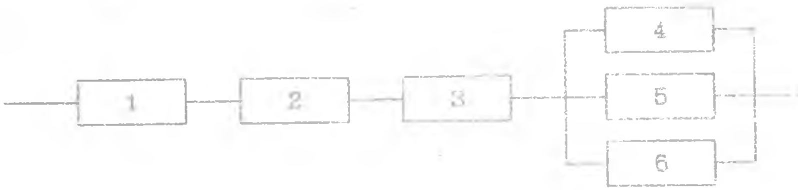
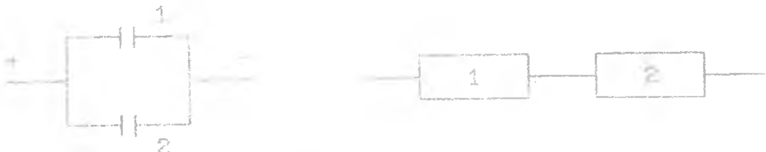


Рис. 2.3. Смешанное соединение элементов

Структурная схема является графическим образом системы; она отражает их структурные свойства, т.е. методы соединения элементов. При этом понятие соединения в структурных схемах отличается от аналогичного понятия в электрических схемах и конструкциях и отображает не фактическое соединение, а лишь условную связь. Например, пробой одного из двух конденсаторов, включенных в работу параллельно (рис. 2.4), приводит к отказу всей группы конденсаторов.



а) б)

Рис. 2.4. Соединение конденсаторов в электрической (а) и структурной (б) схемах

Поэтому при расчете надежности такой системы из двух конденсаторов их считают соединенными с точки зрения надежности последовательно.

Чтобы по структурной схеме можно было рассчитать надежность системы, т.е. записать функцию надежности, структурную схему разбивают на такие части, в которых элементы соединены только последовательно или только параллельно. Затем определяют вид соединения частей между собой (последовательное или параллельное соединение) и объединяют все части в более крупные до тех пор, пока вся система не будет рассчитана.

Надежность частей системы, образованных из элементов, соединенных только последовательно или только параллельно, определяется просто, если известны надежности входящих элементов.

2.2. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ

Вероятность безотказной работы представим с учетом зависимости (2.1):

$$P_c = P(Y_c) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} Y_i\right) = P(Y_1)\cdot P(Y_2|Y_1)\cdot \ldots \cdot P(Y_n|Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_{n-1}),$$

где $H_с$ — надежность системы из последовательно соединенных элементов.

Так как в случае применения метода структурных схем рассматриваются элементы, независимые с точки зрения надежности, то

$$P(Y_1) = H_1;\ P(Y_2|Y_1) = P(Y_2) = H_2;$$

$$P(Y_n|Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_{n-1}) = P(Y_n) = H_n$$

и, следовательно,

$$H_с = H_1 H_2 H_3 \cdot \ldots \cdot H_n = \prod_{i=1}^{n} H_i. \qquad (2.3)$$

Если же все элементы имеют одинаковую надежность ($H_i = H$), то формула (2.3) принимает вид

$$H_с = H^n. \qquad (2.4)$$

Поскольку $H \le 1$, то для системы с последовательным соединением элементов имеем, что надежность системы ниже наименее надежного из ее элементов, т.е.

$$H_с \le \min\{H_i\},$$

и чем большее количество элементов в системе, тем ниже при прочих равных условиях ее надежность.

Пример. Система состоит из двух элементов, показатели надежности которых равны и составляют 0,9. Определить надежность системы.

Решение. $H_с = H_1 \cdot H_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

Теперь определим функцию надежности системы с последовательным соединением элементов. Пусть система состоит из n последовательно соединенных элементов, функции надежности которых $H_1(t)$, $H_2(t)$, ..., $H_n(t)$, а надежность системы $H_с(t)$. Так как элементы независимы в отношении надежности, то

$$H_с(t) = H_1(t) H_2(t) \cdot \ldots \cdot H_n(t). \qquad (2.5)$$

Воспользуемся полученной ранее формулой теории надежности

$$H = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right],$$

где $\lambda(t)$ — интенсивность отказов. Тогда выражение (2.5) примет вид

$$H_c(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_c(\tau)d\tau\right] = \exp\left[-\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau - \ldots - \int_0^t \lambda_n(t)d\tau\right],$$

откуда $\lambda_c(t) = \lambda_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)$, т.е. при последовательном соединении интенсивности отказов складываются. В частности, для экспоненциального закона, когда $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, получаем

$$\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n$$

и

$$H_c(t) = \exp\left[-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t\right], \tag{2.6}$$

т.е. надежность системы подчиняется экспоненциальному закону.

Если $t_{\text{ср.с}}$ — средняя наработка до отказа системы, а $t_{\text{ср.k}}$ — средняя наработка до отказа k-го элемента ($k = \overline{1, n}$), то

$$\frac{1}{t_{\text{ср.с}}} = \frac{1}{t_{\text{ср.1}}} + \ldots + \frac{1}{t_{\text{ср.k}}} + \ldots + \frac{1}{t_{\text{ср.}n}},$$

или

$$t_{\text{ср.с}} = \frac{1}{\dfrac{1}{t_{\text{ср.1}}} + \ldots + \dfrac{1}{t_{\text{ср.k}}} + \ldots + \dfrac{1}{t_{\text{ср.}n}}}. \tag{2.7}$$

Если все элементы системы имеют одинаковую функцию надежности

$$H_k(t) = H(t),$$

то $H_c(t) = \left[H(t)\right]^n$, $\quad \lambda_c(t) = n\lambda(t)$,

а для экспоненциального закона

$$\lambda_c = n\lambda;$$

$$t_{\text{ср}} = \frac{t_{\text{ср.к}}}{n}. \tag{2.8}$$

Если $t << t_{\text{ср}}$, то вместо формулы (2.6) для расчета надежности можно использовать приближенную, более простую зависимость. Для получения такой зависимости разложим (2.6) в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$, тогда имеем

$$H(t) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2}{2!}t^2 - \ldots$$

Ограничиваясь двумя членами разложения, получаем

$$H(t) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t \qquad (2.9)$$

или

$$H(t) = 1 - \left(\frac{t}{t_{\text{ср.с}}}\right).$$

Ошибка ε не превосходит по величине третьего члена разложения:

$$\varepsilon \le \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_{\text{ср}}}\right)^2.$$

Полученными формулами расчета надежности можно пользоваться и для оценки надежности одного элемента, находящегося в различных состояниях. В этом случае используются так называемые фиктивные элементы.

Пример. Определить надежность работы электродвигателя в составе электромеханического толкателя. Время эксплуатации 2880 часов, из них время работы двигателя 2,42 часа, а время хранения — приблизительно 2877 часов. Интенсивность отказов двигателя при нормальной работе $\lambda_н = 1{,}608 \cdot 10^{-6}$ 1/час, а при хранении $\lambda_х = 3{,}2 \cdot 10^{-8}$ 1/час. Принять закон изменения надежности экспоненциальным.

Решение. Составляем структурную схему надежности.

Здесь цифрой *1* обозначен двигатель во время работы, а цифрой *2* — тот же двигатель, но во время хранения. То есть отказ может наступить как во время работы, так и во время хранения.

Поскольку функции надежности перемножаются, то имеем

$H(t) = H_1(t_р) \cdot H_2(t_х)$, где $t_р$ — рабочее время; $t_х$ — время хранения, или $H = \exp\left[-\left(\lambda_{н}t_{р} + \lambda_{х}t_{х}\right)\right] \approx 1 - \left(\lambda_{н}t_{р} + \lambda_{х}t_{х}\right)$.

Подставляя числовые значения, получим

$$H = 1 - \left(1{,}608 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}42 + 3{,}2 \cdot 10^{-8} \cdot 2877\right) \approx 0{,}9999.$$

2.3. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ

При параллельном соединении элементов в систему для написания функции надежности обычно используют формулу (2.2), откуда получают

$$\overline{H}_{c} = P\left(Q_{c}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right) =$$

$$= P\left(Q_1\right) \cdot P\left(Q_2 | Q_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(Q_n | Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_{n-1}\right). \quad (2.10)$$

Так как рассматриваемые элементы независимы с точки зрения надежности, т.е.

$$P\left(Q_2 | Q_1\right) = P\left(Q_2\right) = \overline{H}_2;$$

$$P\left(Q_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} Q_i\right) = P\left(Q_n\right) = \overline{H}_n,$$

то получим

$$\overline{H}_{c} = \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{H}_n = \prod_{i=1}^{n} \overline{H}_i .$$

Отсюда

$$H_{c} = 1 - \overline{H}_{c} = 1 - P\left(Q_{c}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \overline{H}_i .$$

или, выражая через надежность H_i,

$$H_{c} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - H_i). \quad (2.11)$$

Если все элементы имеют одну и ту же надежность ($H_i = H$), то формула (2.11) принимает вид

$$H_c = 1 - (1 - H)^n. \qquad (2.12)$$

Из этого выражения ясен смысл резервирования как способа повышения надежности. Так, если $H = 0{,}9$, то при наличии только одного резервного элемента ($n = 2$) получим $H_c = 0{,}99$.

Однако в ряде случаев избыточность может привести к снижению надежности. Так, дублирование пиротехнических устройств, наряду с повышением надежности их срабатывания по команде увеличивает вероятность самопроизвольного срабатывания. Поэтому при проектировании необходимо изыскивать пути рационального резервирования.

Определим функцию надежности системы с параллельным соединением элементов. Пусть система состоит из n параллельных элементов, вероятности отказа которых $F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)$.

Так как при параллельном соединении вероятности отказов перемножаются, то функция отказа системы будет

$$F_c(t) = F_1(t)F_2(t)\cdot\ldots\cdot F_n(t) = \left[1 - H_1(t)\right]\left[1 - H_2(t)\right]\cdot\ldots\cdot\left[1 - H_n(t)\right] =$$

$$= \left[1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau\right)\right]\left[1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau\right)\right]\cdot\ldots\cdot\left[1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_n(\tau)d\tau\right)\right].$$

То есть, в отличие от последовательного соединения, интенсивности отказов здесь не складываются.

Если в частном случае все элементы имеют одинаковую вероятность отказа, то

$$F_c(t) = \left[1 - H(t)\right]^n = \left[1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)\right]^n.$$

Надежность системы будет

$$H_c(t) = 1 - \left[1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)\right]^n.$$

Рассмотрим частный случай – случай экспоненциального распределения. Тогда надежность равна

$$H_c(t) = 1 - \left[1 - \exp(-\lambda t)\right]^n. \qquad (2.13)$$

Для высоконадежных элементов можно написать приближенные зависимости

$$H_c(t) \approx 1 - \left[1 - (1 - \lambda t)\right]^n = 1 - (\lambda t)^n = 1 - \Lambda t^n \approx e^{-\Lambda t^n},$$

где $\Lambda = \lambda^n$. А это есть не что иное, как закон Вейбулла.

Среднюю наработку до отказа системы можно вычислить по формуле

$$t_{\text{ср.с}} = \int_0^\infty H_c(t)dt = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - \exp(-\lambda t)^n\right)\right]dt.$$

Заменим переменные:

$$1 - \exp(-\lambda t) = x; \quad t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-x}; \quad dt = \frac{dx}{\lambda(1-x)}.$$

При $t = 0$ $x = 0$; при $t = \infty$ $x = 1$

Тогда

$$t_{\text{ср.с}} = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \left(1 + x + \ldots + x^{n-1}\right)dx = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right). \quad (2.14)$$

Пример. В составе электромеханического толкателя (см. пример в подразделе 2.2) установлены два электродвигателя по схеме нагруженного резерва. Определить надежность работы системы двигателей. Исходные данные принять такими, как в примере подраздела 2.2.

Решение. Составляем структурную схему надежности

На схеме цифрами *1* и *2* обозначены соответственно 1-й и 2-й электродвигатели. Надежность определяем по формуле (2.13) с учетом решения примера в подразделе 2.2:

$$H = 1 - \left[1 - 0{,}9999\right]^2 = 0{,}99999999 \approx 1.$$

Определим среднее время наработки до отказа:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda_{\text{н}}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1{,}608 \cdot 10^{-6}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 938000 \text{ [час]}.$$

Метод решения таких систем — последовательное объединение подсистем в группы. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример. Даны системы, изображенные на рис. 2.5, а, б.

Рис. 2.5. Схемы соединения элементов:
а — раздельное резервирование, б — общее резервирование

Пусть показатели надежности этих элементов следующие

$H_A = 0,9;\ H_B = 0,8;\ H_C = 0,7;\ H_D = 0,6.$

Найти надежность каждой системы и сравнить между собой

Решение. Рассмотрим сначала случай а). Надежность элементов AB и CD равна:

$H_{AB} = 1 - (1 - 0,9)(1 - 0,8) = 0,98;$

$H_{CD} = 1 - (1 - 0,7)(1 - 0,6) = 0,88.$

Надежность системы а).

$H_C = H_{AB} \cdot H_{CD} = 0,98 \cdot 0,88 = 0,8624.$

Для случая б) сначала рассмотрим последовательное соединение элементов AC и BD, т.е.

$H_{AC} = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63;$

$H_{BD} = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48.$

Теперь определяем надежность системы как для параллельного соединения элементов AC и BD:

$H_C = 1 - (1 - H_{AC})(1 - H_{BD}) = 1 - (1 - 0,63)(1 - 0,48) = 0,8076.$

Заметим, что различие в значениях показателя надежности систем обусловлено различным соединением подсистем. Видно, что раздельное резервирование более выгодно при прочих равных условиях.

2.5. ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ СИСТЕМЫ ПО СХЕМЕ "НЕ МЕНЕЕ *m* ИЗ *n*"

Еще одной формой резервирования является система "не менее *m* из *n*". В такой системе имеются *n* параллельно соединенных элементов, однако для того чтобы система продолжала работать безотказно, должны сохранять работоспособность не менее m элементов.

Сначала ограничимся условием, что необходимо определить вероятность срабатывания точно m элементов системы из n элементов. В этом случае вероятность выпадания m событий из n описывается биномиальным законом распределения и равна

$$P_n(m) = C_n^m H^m (1 - H)^{n-m},$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ — число сочетаний из n по m;

H — вероятность появления случайного события (в нашем случае это надежность отдельного элемента).

Вернемся к определению надежности системы, для безотказной работы которой должны безотказно сработать не менее m элементов из n. Поскольку рассматриваемые случайные события несовместны, то вероятности этих случайных событий можно суммировать. Тогда вероятность безотказной работы системы "не менеее m из n" имеет вид

$$H_c = P_n(\geq m) = \sum_{x=m}^{n} P_n(x) = \sum_{x=m}^{n} C_n^x H^x (1 - H)^{n-x}.$$

В частном случае, например для системы "не менее 2-х из 3-х", эта формула примет вид

$$H_c = P_3(\geq 2) = C_3^2 H^2 (1 - H)^{3-2} + C_3^3 H^3 (1 - H)^{3-3} =$$

$$= \frac{3!}{2!(3-2)!} H^2 (1 - H) + \frac{3!}{3!(3-3)!} H^3 (1 - H)^0 = 3H^2 - 2H^3. \quad (2.15)$$

Пример. Пусть система отделения ступеней имеет 3 пороховых двигателя. Надежность каждого двигателя 0,9. Определить надежность системы отделения ступеней, если отделение происходит не менее чем при двух работающих двигателях.

Решение. Воспользуемся формулой (2.15):

$$H = 3 \cdot 0,9^2 - 2 \cdot 0,9^3 = 2,43 - 1,458 = 0,972.$$

3. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Предметом статистической динамики является изучение поведения различных систем при случайных воздействиях или случайном изменении свойств системы.

Статистическая динамика и теория надежности тесно связаны между собой. При решении каждой конкретной задачи методы статистической динамики и теории надежности обычно применяют последовательно.

Поэтому из методических соображений статистическую динамику целесообразно излагать отдельно.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В статистической динамике внешние воздействия на систему (или объект) часто называют в х о д н ы м и параметрами *X* (переменными процессами), а параметры поведения системы (объекта) — в ы х о д н ы м и параметрами *Y* (переменными процессами), как это схематично изображено на рис. 3.1, где объект изображен прямоугольником, а входные и выходные параметры — стрелками.

Рис. 3.1. К понятию задач статистической динамики

Обычно существует какая-то детерминистическая связь между входными и выходными параметрами системы $\varphi_j(x_i)$. Эта связь может выражаться в виде дифференциальных зависимостей. Кроме того, эта связь может быть задана с помощью алгоритма отыскания выходных воздействий по входным.

Если входные параметры и параметры системы являются случайными, то возникает вопрос о связи между соответствующими вероятностными мерами или некоторыми характеристиками системы. Установление этой связи и является предметом статистической динамики. В зависимости от того, какие параметры являются заданными, а какие — искомыми, будем различать четыре типа задач статистической динамики.

П е р в а я (основная) задача состоит в нахождении характеристик выходных параметров при известных характеристиках входных параметров и параметров системы.

Например, даны законы распределения случайных величин *f(x)* или *F(x)* и функции связи (случайные или неслучайные) $\varphi_j(x_i)$. Определить законы распределения выходных величин *f(y)* или *F(y)*.

Более частная задача может быть следующей: даны математические ожидания m_{xi} и дисперсии D_{xi} входных воздействий и функции связи $\varphi_j(x_i)$. Определить математическое ожидание m_{yj} и дисперсию D_{yj} выходной величины.

Приведем пример из космической техники. Спускаемый аппарат осуществляет посадку на Землю, как это схематично показано на рис. 3.2.

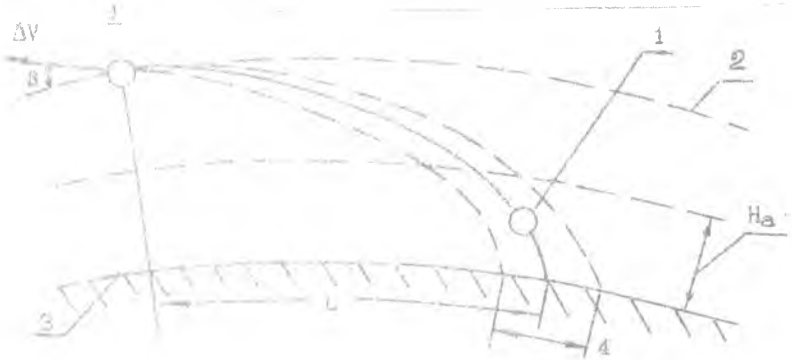


Рис. 3.2. Пример задачи статистической динамики:
1 — спускаемый аппарат; 2 — орбита; 3 — земная поверхность;
4 — зона разброса

Известны уравнения связи координаты приземления L с параметрами, влияющими на эту координату:

$$L = \varphi(t_1, \Delta V, \beta, H_a, \rho, \ldots), \tag{3.1}$$

где t_1 — время начала торможения;
ΔV — тормозной импульс;
β — направление вектора тормозного импульса;
H_a — высота атмосферы в день посадки;
ρ — плотность атмосферы в месте посадки и т.д.

Известны также математические ожидания и дисперсии входных величин t, ΔV, β, H_a, ρ,...

Необходимо определить математическое ожидание координаты приземления M_L и ее дисперсию D_L^2.

Такая задача часто решается в практике работы конструкторского бюро по проектированию космической техники. Уравнения связи в общем виде являются дифференциальными уравнениями.

В т о р а я з а д а ч а является обратной по отношению к первой. Она состоит в нахождении характеристик входных параметров по характеристикам выходных параметров. Свойства системы при этом также предполагаются известными. Решение обратной задачи может существенно осложниться, если имеется несколько входных воздействий и если требуется по поведению системы установить статистические характеристики каждого воздействия в отдельности.

Т р е т ь я з а д а ч а заключается в определении свойств стохастической (случайной) системы по известным характеристикам на ее входе и выходе. В самом общем случае может оказаться неизвестной сама структура системы. Изучение свойств неизвестной системы путем сопоставления ее реакций с входными воздействиями составляет так называемую "проблему черного ящика". Однако в столь общей форме задача ставится весьма редко. Обычно известна не только структура системы, но и информация о ее детерминистических свойствах. Тогда целью исследования является получение информации о стохастических свойствах системы. Один из простейших путей для решения третьей задачи состоит в изучении реакций системы на соответствующим образом выбираемые детерминистические воздействия.

Под ч е т в е р т о й з а д а ч е й статистической динамики мы будем понимать отыскание системы, которая при заданных внешних воздействиях обладает заданными свойствами. Примером может служить задача о синтезе оптимальной системы, т.е. системы, которая обладает наилучшими, в некотором смысле, свойствами. Обычно критерий оптимальности формулируется в виде условия максимума (или минимума) некоторых функционалов от свойств системы и ее реакций на внешние воздействия при дополнительных ограничениях, накладываемых на другие функционалы и параметры. Подчеркнем, что выбор критерия для оптимизации не входит в задачу статистической динамики. Этот критерий выбирается на основе экономических, технологических и тому подобных соображений, и притом выбирается не единственным образом. Один из путей для выбора критерия оптимальности открывает теория надежности.

Если основная (первая) задача статистической динамики решена, то, как правило, результаты могут быть использованы для решения остальных задач. Таким образом, целесообразно сосредоточить внимание на решении основной задачи.

Выбор метода для решения задач статистической динамики в существенной степени зависит от характера системы. Классификацию ее можно провести по различным признакам. Остановимся на некоторых из них.

3.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В зависмости от того, как ведет себя система при одновременном положении двух или нескольких воздействий, будем различать л и н е й н ы е и н е л и н е й н ы е системы. К линейным системам применим принцип суперпозиции: реакция системы на сумму внешних воздействий может быть найдена как сумма реакций, вычисленных от каждого воздействия в отдельности.

Необходимо отметить, что из линейного характера дифференциальных уравнений относительно выходного параметра не всегда следует линейность системы.

Другой признак для классификации получим, рассматривая поведение свойств системы во времени. Система называется стационарной, если ее свойства не изменены во времени.

3.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В настоящее время разработано много методов решения задач статистической динамики, которые применяют в зависимости от конкретных свойств системы. Ограничимся только перечислением этих методов:

- метод функций Грина;
- метод дифференциальных уравнений;
- метод спектральных представлений;
- метод, использующий теорию марковских процессов;
- интерполяционный метод;
- метод статистических испытаний (метод Монте-Карло);
- метод статистической линеаризации и др.

Приведенные методы достаточно полно изложены в работе [8].

При определении надежности систем летательных аппаратов наиболее широкое применение нашли методы статистической линеаризации и методы статистических испытаний, рассмотрим их более подробно.

3.4. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Этот метод используется, если имеется функциональная зависимость между входными и выходными параметрами системы. Он приближенный, позволяющий вычислять лишь числовые характеристики функции по числовым характеристикам аргументов.

Рассмотрим случай, когда x - одномерная случайная величина.

Разложение функции $y = \varphi(x)$ вокруг точки $x = m_x$ в ряд Тейлора до первых трех членов имеет вид

$$y = \varphi(x) = \varphi(m_x) + (x - m_x)\varphi'(m_x) + \frac{(x - m_x)^2}{2!}\varphi''(m_x) + R, \qquad (3.2)$$

где φ' и φ'' - первая и вторая производные от функции $\varphi(x)$ по x; R - остаточный член.

Получим математическое ожидание выражения (3.2).

$$\begin{aligned} M[y] &= M[\varphi(m_x)] + M[x\varphi'(m_x) - m_x\varphi'(m_x)] + \\ &+ M\left[\frac{1}{2}\varphi''(m_x)(x - m_x)^2\right] + M[R] = \varphi(m_x) + \\ &+ [m_x\varphi'(m_x) - m_x\varphi'(m_x)] + \frac{1}{2}\varphi''(m_x)D^2(x) + \\ &+ M[R] \approx \varphi(m_x) + \frac{1}{2}\varphi''(m_x)D^2(x). \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) является приближенным выражением для математического ожидания случайной величины y, так как мы отбросили остаточный член разложения в ряде Тейлора. Если дисперсия случайной величины x мала, то можно пренебречь вторым членом в формуле (3.3) и получить соотношение

$$M[y] = M[\varphi(x)] \approx \varphi(m_x). \qquad (3.4)$$

Чтобы получить приближенное значение $D(y)$, снова рассмотрим разложение функции $y = \varphi(x)$ в ряд Тейлора до первых двух членов. Дисперсия имеет вид

$$\begin{aligned} D^2[y] &= D^2[\varphi(m_x)] + D^2[(x - m_x)\varphi'(m_x)] = \\ &= [\varphi'(m_x)]^2 D^2[x]. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Здесь использованы свойства дисперсий, известные из теории вероятностей, а именно:

1) дисперсия неслучайной (детерминированной) величины равна нулю;

2) неслучайную величину можно выносить за знак дисперсии, возводя ее в квадрат,

3) дисперсия суммы случайных независимых величин равна сумме их дисперсий.

Формула (3.5) является приближенным выражением для дисперсии случайной величины y, так как мы отбросили остаточный член R. Если функции $\varphi(x)$ существенно нелинейны, то рекомендуется удерживать в разложении большее количество членов.

Рассмотрим теперь случай, когда x — многомерная случайная величина, т. е.

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x).$$

Обозначим через $m_x = (m_{x1}, m_{x2}, \ldots, m_{xn})$ и $D_x = (D_{x1}, D_{x2}, \ldots, D_{xn})$ векторы математических ожиданий и среднеквадратических отклонений случайных величин $x_1, \ldots x_n$ соответственно.

Раскладывая (как и в предыдущем случае) функцию (x) в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами, можно прийти к следующим выражениям для математического ожидания и дисперсии функции $\varphi(x)$:

$$M[y] = M[\varphi(x)] \approx \varphi(m_{x1}, m_{x2}, \ldots, m_{xn}); \tag{3.6}$$

$$D^2[y] = D^2[\varphi(x)] \approx \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \right]^2_{x=m_x} \cdot D^2_{xi} . \tag{3.7}$$

Пример. Растягивающая нагрузка N, действующая на стержень, имеет среднее значение m_N =10000 Н и среднее квадратическое отклонение D_N =1000 Н. Стержень имеет круглое поперечное сечение диаметром d, который равен 10 мм с допуском Δd =+1мм.

Найти среднее напряжение, действующее в стержне, и его среднее квадратическое отклонение.

Решение. Вначале примем за математическое ожидание диаметра m_d=10 мм= $1\cdot10^{-2}$ м, а за среднее квадратическое отклонение

$D_d = \Delta d / 3 = 0{,}333$ мм $= 3{,}33 \cdot 10^{-4}$ м.

Напряжение в стержне определяется следующим образом:

$$\sigma = \frac{4N}{\pi d^2} = \varphi(N,d),$$

следовательно

$$m_\sigma = \varphi(m_N, m_d) = \frac{4 \cdot 10000}{\pi(1 \cdot 10^{-2})^2} = 127{,}3[\text{МПа}].$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} = \frac{4}{\pi d^2}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial d} = -\frac{8N}{\pi d^3}.$$

Следовательно

$$D_\sigma^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\bigg|_{m_N, m_d}\right)^2 \cdot D_N^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial d}\bigg|_{m_N, m_d}\right)^2 \cdot D_d^2 =$$

$$= \left(\frac{4}{\pi m_d^2}\right)^2 \cdot D_N^2 + \left(-\frac{8 \cdot m_N}{\pi m_d^3}\right)^2 \cdot D_d^2 =$$

$$= \left[\frac{4}{\pi\left(1 \cdot 10^{-2}\right)^2}\right]^2 \cdot 1000^2 + \left[-\frac{8 \cdot 10000}{\pi\left(1 \cdot 10^{-2}\right)^3}\right]^2 \cdot \left(3{,}33 \cdot 10^{-4}\right)^2 =$$

$$= 2{,}34 \cdot 10^{14}\left[\text{Па}^2\right].$$

Среднее квадратичное отклонение

$$D_\sigma = \sqrt{D_\sigma^2} = \sqrt{2{,}34 \cdot 10^{14}} = 15{,}3 \cdot 10^6[\text{Па}] = 15{,}3[\text{МПа}].$$

3.5. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Прежде чем рассмотреть этот метод применительно к задачам статистической динамики, решим вопрос о том, как получить на ЭВМ реализации случайных величин с заданными законами распределения.

3.5.1. Моделирование случайных величин на ЭВМ

Если можно аналитически выразить обратную функцию какого-то закона распределения, то реализация такого закона на ЭВМ не трудна. Пусть, например, имеем экспоненциальный закон распределения

$$F_{(x)} = 1 - e^{-ax},$$

где a - параметр распределения.

Обратная функция будет

$$x = \frac{-\ln(1 - F)}{a}. \tag{3.8}$$

Если теперь вызывать реализации случайного числа Z с равномерным законом распределения на отрезке [0,1] и подставлять их в уравнение (3.8) вместо значения F, то мы получим реализации случайного числа x с экспоненциальным законом распределения.

Если аналитически выразить обратную функцию закона распределения не удается, то в этом случае используется индивидуальный подход для реализации на ЭВМ случайных величин с данным законом распределения.

Рассмотрим моделирование случайных величин с нормальным законом распределения. Моделирование основано на одной из теорем теории вероятностей, в которой говорится о том, что если на объект действует множество случайных величин с произвольными законами распределения и если среди этих величин нет превалирующих, то результирующий закон стремится к нормальному.

Поэтому обычно берут несколько реализаций случайной величины с равномерным законом распределения, складывают их и получают реализацию случайного числа с нормальным законом распределения. Однако, чтобы получать реализаций еще и с заданными характеристиками матожидания и дисперсии, необходимо определенным образом организовать этот процесс. Покажем, как это делается.

Известны свойства равномерного закона распределения:

$$m_x = \frac{a+b}{2}; \tag{3.9}$$

$$D_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, \tag{3.10}$$

где a и b - начальное и конечное значения интервала, на котором имеется равномерное распределение случайной величины.

Если $a = 0$ и $b = 1$, то выражения (3.9) и (3.10) принимают вид

$$m_x = \frac{1}{2}; \tag{3.11}$$

$$D_x^2 = \frac{1}{12}. \tag{3.12}$$

Для получения нормального закона сложим 12 случайных чисел x с равномерным законом распределения и отнимем детерминированное число 6:

$$y = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6. \tag{3.13}$$

Числовые характеристики функции y будут следующими:

$$m_y = \sum_{i=1}^{12} (m_x)_i - 6 = \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{1}{2}\right)_i - 6 = 0;$$

$$D_y^2 = \sum_{i=1}^{12} (D_x^2)_i = \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{1}{12}\right)_i = 1.$$

Таким образом мы получим нормированный нормальный закон.

Для получения нормального закона с заданными характеристиками m_{y1} и D_{y1}^2 воспользуемся уравнением нормировки

$$y = \frac{y_1 - m_{y1}}{D_{y1}}$$

и найдем из него искомое случайное число y_1, которое имеет нормальный закон распределения с характеристиками m_{y1} и D_{y1}:

$$y_1 = y \cdot D_{y1} + m_{y1}. \tag{3.14}$$

Таким образом, для получения реализации случайного числа с нормальным законом распределения и заданными характеристиками матожидания m_{y1} и среднеквадратическим отклонением D_{y1}

необходимо вызвать реализации случайного числа x с равномерным законом распределения на отрезке [0,1] и подставить их в формулу (3.13), а затем полученную реализацию Y подставить в уравнение (3.14).

Последовательность получения реализаций случайного числа с нормальным законом распределения иллюстрируется на рис. 3.3, где а) — равномерный закон распределения; б) — нормированный нормальный закон распределения; в) — нормальный закон распределения с заданными характеристиками.

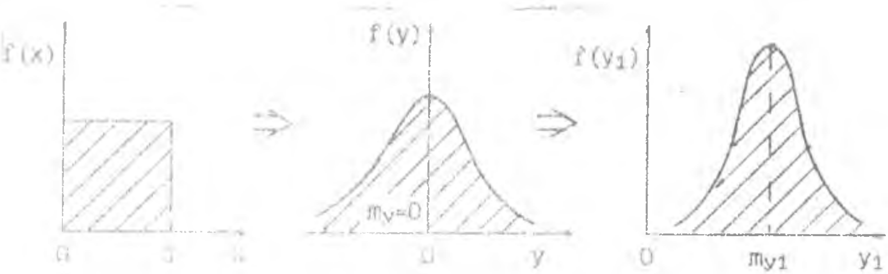


Рис. 3.3. Схема реализации на ЭВМ нормального закона распределения

3.5.2. Метод статистических испытаний в задачах статистической динамики

Согласно этому методу в ЭВМ вводят законы распределения случайных величин входных параметров системы и их числовые характеристики. В программе организуют цикл для определения случайных реализаций указанных величин. С этими реализациями на каждом шаге цикла выполняют действия, предусмотренные функциональной зависимостью, если она имеется, или решается дифференциальное уравнение. В результате получают случайную реализацию выходного параметра системы. Набрав необходимое количество таких реализаций (согласно требуемой точности), определяют числовые характеристики (моменты) выходного параметра как случайной величины.

Последовательность действий при реализации метода статис-пытаний иллюстрируется на рис. 3.4 стрелками.

Реализация X случайной величины x подставляется в уравнение связи $y = \varphi(x)$ и получается реализация Y случайной величины y. После выполнения N испытаний подсчитывается математическое ожидание и дисперсия случайной величины y по обычным формулам статистики:

$$m_y = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N};$$

$$D_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - m_y)^2}{N-1}.$$

По реализациям случайной величины y можно построить и функцию плотности этой величины, как это схематично показано на рис. 3.4 пунктирной линией.

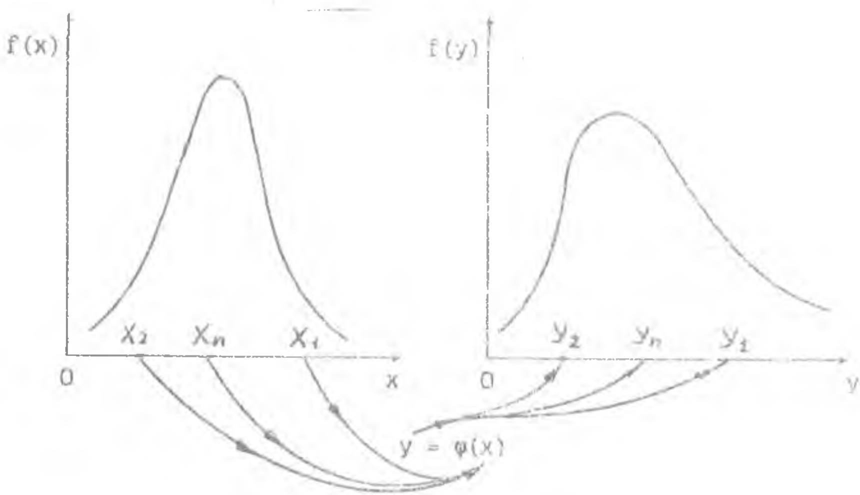


Рис. 3.4. Иллюстрация метода статистических испытаний

В этом методе обычно используют несколько тысяч статистических испытаний. Если вычисления по функции связи требуют много машинного времени (например, когда эта связь выражена дифференциальными уравнениями, которые необходимо решать численными методами на каждом шаге), то в этом случае предпочтительнее использовать модифицированный метод статистических испытаний.

При модифицированном методе статистических испытаний полученные реализации выходного параметра разбиваются на разряды, строится гистограмма распределения, определяется теоретический закон распределения по гистограмме с применением методов математической статистики и уже по теоретическому закону распределения находятся необходимые параметры, например для аналитического определения надежности системы.

4. ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

4.1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

В математической логике под высказыванием понимается любое предложение, относительно которого имеет смысл говорить о его истинности и ложности. Если A истинно, то принято писать $A = 1$; если ложно, то $A = 0$. Эквивалентность двух высказываний обозначают знаком равенства. Переменная величина, которая принимает лишь два значения (1 или 0), называется двоичной переменной. Функции, принимающие лишь два значения (1 или 0), и определяемые различным набором двоичных аргументов, называются функциями алгебры логики (сокращенно ФАЛ).

В алгебре логики рассматриваются три основные логические операции: отрицание, конъюнкция (умножение) и дизъюнкция (сложение). Рассмотрим отдельно каждую логическую операцию.

О т р и ц а н и е. Отрицание высказывания A обозначается A' (читается "не A"). Значение истинности высказывания A определяется с помощью табл. 4.1.

Т а б л и ц а 4.1

A	A'
1	0
0	1

К о н ъ ю н к ц и я. Конъюнкция или логическое умножение высказываний A и B обозначается $A \wedge B$ (или $A\&B$, или $A \times B$, AB) и читается: A и B. Значение истинности логического произведения $A \wedge B$ определяется в зависимости от значений истинности высказываний A и B по табл. 4.2.

Таблица 4.2

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Конъюнкция $A \wedge B$ двух высказываний представляет собой сложное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны составляющие его высказывания A и B.

Пример. Самолет работоспособен (истина), если работоспособны два его двигателя. Если ввести события работоспособности самолета C и работоспособности двигателей A и B, то можно записать $C = A \wedge B$.

В этой задаче $C = 1$ тогда и только тогда, когда $A = 1$ и $B = 1$.

Дизъюнкция. Дизъюнкция или логическое сложение двух высказываний A и B обозначается $A \vee B$ (читается: A или B). Значение истинности логической суммы $A \vee B$ в зависимости от значений истинности составляющих высказываний A и B определяется по табл. 4.3.

Таблица 4.3

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Дизъюнкция двух высказываний $A \vee B$ является сложным высказыванием, которое ложно тогда и только тогда, когда оба слагаемых A и B ложны.

Пример. Самолет работоспособен (истина), если работоспособен хотя бы один из двух двигателей.

Если ввести, как и в предыдущем примере, событие C, означающее работоспособность самолета, то можно записать $C = A \vee B$. В этой задаче $C = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$ и $B = 0$.

В математической логике справедливы следующие правила и законы.

Правила для одной переменной:

1. $A \wedge 1 = A$;
2. $A \wedge 0 = 0$;
3. $A \wedge A = A$;
4. $A \wedge A' = 0$;
5. $A \vee 1 = 1$;
6. $A \vee 0 = A$;
7. $A \vee A = A$;
8. $A \vee A' = 1$;
9. $A'' = A$;
10. $A''' = A'$.

Правила для двух и трех переменных:

11. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$;
12. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$.

Переместительный закон:

13. $A \wedge B = B \wedge A$;
14. $A \vee B = B \vee A$.

Вместо записи $(A \wedge B) \vee C$ можно писать $A \wedge B \vee C$, подразумевая при этом, что вначале необходимо взять операцию конъюнкции.

Распределительный закон:

15. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
16. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Последнее правило в обычной алгебре не имеет места. Справедливость этого правила можно показать с помощью так называемых таблиц истинности, в которых сравниваются результаты конкретных вычислений правой и левой частей равенства при всевозможных сочетаниях значений входящих двоичных переменных.

Законы двойственности (или инверсии):

17. $(A \wedge B)' = A' \vee B'$;
18. $(A \vee B)' = A' \wedge B'$.

Если к этим выражениям применить правило отрицания, то получим так называемые законы Моргана:

19. $A \wedge B = (A' \vee B')'$,
20. $A \vee B = (A' \wedge B')'$.

Законы Моргана позволяют логическое умножение выразить через отрицание логической суммы из инверсных высказываний, а логическую сумму — через отрицание логического произведения из инверсных выражений. Законы 19 и 20 обобщаются на произвольное количество высказываний.

В математической логике имеются и другие законы. На основе приведенных выше законов можно вести преобразования логических функций.

Примеры.

1. $(A \wedge B) \vee (A \wedge B') = AB \vee AB' = A(B \vee B') = A \cdot 1 = A;$

2. $A \vee (A' \wedge B) = (A \vee A') \wedge (A \vee B) = 1 \wedge (A \vee B) = A \vee B$

4.2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — события алгебры логики.

Определение 1. Выражение вида

$K = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ (сокращенно $x_1, x_2, \ldots, x_n$) называется элементарной конъюнкцией событий $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Вместо событий в конъюнкции могут входить их отрицания x_1', x_2' и т.д.

Определение 2. Количество членов конъюнкции называется рангом (r).

Определение 3. Выражение вида

$K = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n$

называется дизъюнктивной нормальной формой, сокращенно ДНФ.

Например:

$K = x_1 x_2 \vee x_1 x_2 x_3' \vee x_1' x_3 x_4.$

Определение 4. Если у элементарных конъюнкций, входящих в ДНФ, ранг одинаковый, причем они содержат все рассматриваемые события или их отрицания, то ДНФ называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой, сокращенно СДНФ.

Определение 5. Две элементарные конъюнкции называются ортогональными, если их произведения равны нулю. Например: $x_1 x_2'$ и $x_1\, x_2\, x_3$. Действительно:

$$x_1 x_2 \wedge x_1 x_2 x_3 = x_1 (x_2 \wedge x_2) x_3 = x_1 \cdot 0 \cdot x_3 = 0.$$

Определение 6. ДНФ называется ортогональной (сокращенно ОДНФ), если все ее члены попарно ортогональны.

Например: функция $x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3$ является ортогональной, так как

$$x_1 x_2 \wedge x_2 x_3 = 0;$$

$$x_2 x_3 \wedge x_1 x_3 = 0;$$

$$x_1 x_2 \wedge x_1 x_3 = 0.$$

В теории алгебры логики доказывается, что если ФАЛ стоит в СДНФ или в ОДНФ, то переход к вероятностной функции осуществляется путем замещения событий их вероятностями.

Например: функция $A = x_1 x_2 \vee x_1 x_2$ стоит в СДНФ, поэтому вероятность события A запишется следующим образом:

$$P(A) = P_{x1}(1 - P_{x2}) + P_{x1} \cdot P_{x2}.$$

4.3. ДЕРЕВЬЯ ОТКАЗОВ

Для сложных систем построить логические функции отказа или логические функции работоспособности бывает очень сложно. Для облегчения этой работы строят так называемые деревья отказов (ДО). Дерево отказов - это граф, который отражает взаимосвязи отказов элементов и системы. Элементы дерева отказов принято обозначать символами, представленными на рис. 4.1.

Пример. Построить ДО энергомодуля космического аппарата, если он имеет 4 силовых гироскопа (СГ) для ориентации КА, а безотказная работа энергомодуля обеспечивается безотказной работой любых трех гироскопов. Кроме гироскопов в энергомодуль входит система энергопитания (СЭП), приборы управления (ПУ) и др. Введем события: A' - отказ энергомодуля; B_1' - отказ СЭП; B_2' - отказ ПУ; B_3' - отказ системы СГ; B_4' - отказ других систем; G_1', G_2', G_3', G_4' - отказ первого, второго и т.д. силовых гироскопов соответственно.

Дерево отказов для этого примера приведено на рис. 4.2.

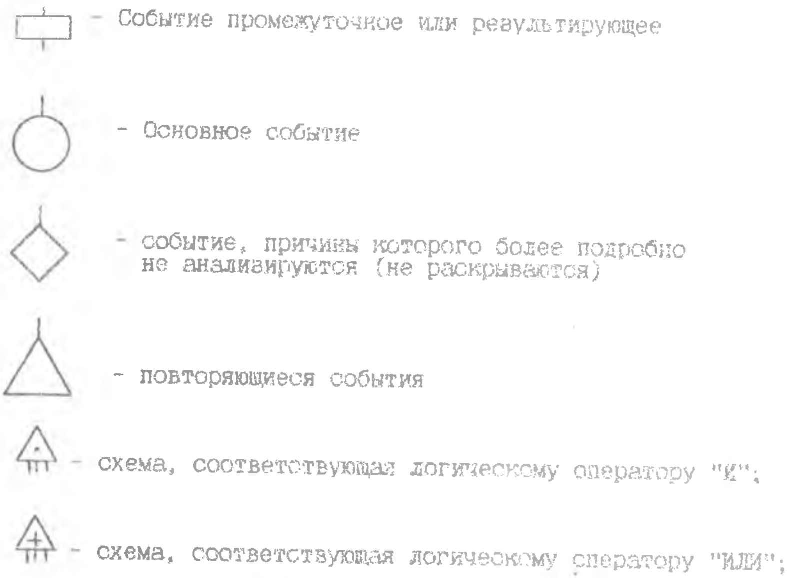


Рис. 4.1. Символы деревьев отказов

События $C_1, \ldots, C_6$ являются промежуточными и введены для облегчения анализа отказов системы.

На основе ДО нетрудно составить логическую функцию отказа энергомодуля

$$A' = B_1' \vee B_2' \vee B_3' \vee B_4',$$

где

$$B_3' = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5 \vee C_6.$$

В свою очередь,

$$C_1 = G_1' G_2'; \qquad C_2 = G_1' G_3'; \qquad C_3 = G_1' G_4';$$

$$C_4 = G_2' G_3'; \qquad C_5 = G_2' G_4'; \qquad C_6 = G_3' G_4'$$

Сделав подстановку, можно получить следующую логическую функцию отказа:

$$A' = B_1' \vee B_2' \vee G_1' G_2' \vee G_1' G_3' \vee G_1' G_4' \vee G_2' G_3' \vee G_2' G_4' \vee G_3' G_4' \vee B_4'.$$

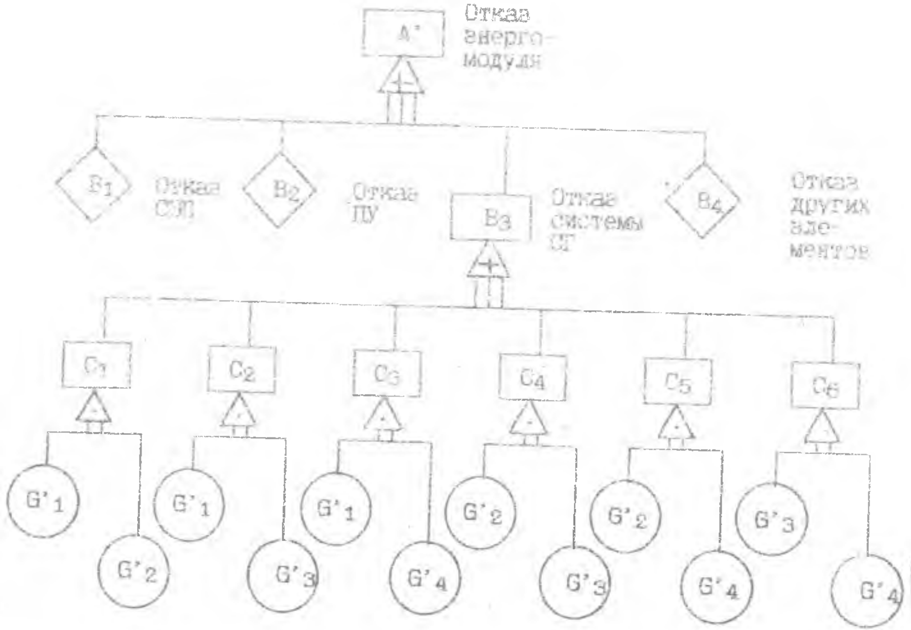


Рис. 4.2. Дерево отказов энергомодуля

4.4. Методы перехода от логических функций к вероятностным

В зависимости от сложности логических функций при переходе к вероятностным применяются различные методы:

метод перехода на основе формулы суммы вероятности совместных событий;

метод приведения логических функций к СДНФ;

метод приведения логических функций к ОДНФ;

метод статистического моделирования и т.п.

Рассмотрим наиболее простые из этих методов.

4.4.1. Метод перехода от логических функций к вероятностным на основе формулы вероятности суммы совместных событий

При использовании этого метода логическая функция должна стоять в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ):

$$Y = K_1 \vee K_2 \vee \ldots K_n,$$

где K_i - конъюнкция, состоящая из произвольного числа событий x_j, например, $K_1 = x_1 x_2 x_3$.

Переход к вероятности осуществляется по известной формуле, которая приведена в работе [10]:

$$P(Y) = P\left(\bigvee_{i=1}^{n} K_i\right) = \sum_i P(K_i) - \sum_{i,j} P(K_i K_j) +$$

$$+\sum_{i,j,k} P(K_i K_j K_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(K_1 K_2 \ldots K_n).$$

Пример. Пусть логическая функция имеет вид

$$Y = (A \vee BC)D,$$

где A, B, и D - некоторые события. Приведем эту функцию к ДНФ: $Y = AD \vee BCD$.

Далее перейдем к вероятностям

$$P(Y) = P(AD) + P(BCD) - P(AD \wedge BCD).$$

Если события A, B, C и D независимы, то получаем

$$P(Y) = P(A)\cdot P(D) + P(B)\cdot P(C)\cdot P(D) - P(A)\cdot$$
$$\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(D).$$

Здесь учтено, что $D \wedge D = D$

4.4.2. *Метод приведения логических функций к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)*

Рассмотрим без доказательства алгоритм приведения функций алгебры логики (ФАЛ) к СДНФ.

1. Привести ФАЛ к какой-нибудь ДНФ.
2. Удалить повторяющиеся члены.
3. Если в какой-либо конъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, то добавить к этой конъюнкции член $\left(x_i \vee x_i'\right)$ и раскрыть скобки.
4. Удалить повторяющиеся члены.

Пример.

$Y = A \vee BC$

Эта функция уже стоит в ДНФ и она не имеет повторяющихся членов. Поэтому согласно пункту 3 алгоритма имеем

$$Y = A(B \vee B')(C \vee C') \vee (A \vee A')BC = ABC \vee ABC' \vee$$
$$\vee AB'C \vee AB'C' \vee \underline{ABC} \vee A'BC;$$

удалив подчеркнутый член, получаем искомую функцию, стоящую в СДНФ.

Переход к вероятностной функции осуществляется, как упоминалось, замещением событий их вероятностями:

$$P(Y) = P_a P_b P_c + P_a P_b\left(1 - P_c\right) + P_a\left(1 - P_b\right)P_c +$$

$$+ P_a\left(1 - P_b\right)\left(1 - P_c\right) + \left(1 - P_a\right)P_b P_c .$$

Здесь для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$P(A) = P_a;\ P(B) = P_b;\ P(C) = P_c .$$

4.4.3. Метод статистического моделирования при оценке вероятности логических функций

Этот метод является универсальным и применим для логических функций любой сложности. Однако для реализации этого метода необходима ЭВМ.

Приведем здесь алгоритм получения вероятности логической функции Y при известных вероятностях входящих событий X_i. Иллюстрацию алгоритма будем вести на простом примере и для языка Фортран.

Пусть логическая функция имеет вид

$$Y = x_i \vee x_2 \wedge x_3,$$

и заданы вероятности $P(x_1)$, $P(x_2)$ и $P(x_3)$ событий x_1, x_2 и x_3.

1. Логическая функция описывается в символах языка программирования и вводится в машину. На языке Фортран - 77 эту функцию можно представить в следующем виде:

Y = X1. OR. X2. AND X3, (4.1)

где OR и AND - логические операции, соответствующие логическим символам «или» и «и» соответственно.

2. Вызывается с помощью генератора случайных чисел случайное число Z с равномерным законом распределения на отрезке от 0 до 1. Это можно сделать с помощью следующего оператора:

Z = RAN (I1, I2),

где I1 и I2 - произвольные начальные целые числа.

3. Производится сравнение случайного числа Z с вероятностью входящего события Xi, т.е. с P(Xi). Если Z < P(Xi), то логической переменной Xi присваивается логическая константа TRUE (истина); если Z > P(Xi), то FALSE (ложь), т.е.

X = TRUE или X = FALSE.

4. Пункты 2 и 3 повторяются для всех логических переменных

5. Определяется состояние логической функции Y, т.е. в результате выполнения оператора (4.1) на ЭВМ получим

Y = TRUE или Y = FALSE,

результат запоминается.

6. Проведя серию испытаний по пп. 2 . . . 5, оцениваем вероятность *P*(Y) по соотношению

$$P(Y) = \frac{m}{N},$$

где N - общее количество стат. испытаний;

m- количество стат. испытаний, при которых функция Y приняла значение TRUE (истина).

4.5. МЕТОД СТРУКТУРНО-ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Структурно-логическая схема учитывает тот факт, что реальная система может иметь несколько путей безотказной работы, не учитывать которые в расчетах нельзя. Метод структурно-логических схем рассмотрим на примере.

Пусть космический аппарат (КА) имеет систему обнаружения техногенных и метеорных частиц, которые могут в него попасть, и систему увода КА от воздействия этих частиц. Кроме того, КА не всегда может отказать при попадании в него таких частиц.

Введем следующие события:

Обн — обнаружение частицы, с которой возможно столкновение;

Ув — увод КА от столкновения с частицей;

Ж — выживаемость КА при попадании в него частиц.

Составим структурно-логическую схему выживания КА. Эта схема приведена на рис. 4.3. На этой схеме цепочки представляют собой возможные пути выживания КА.

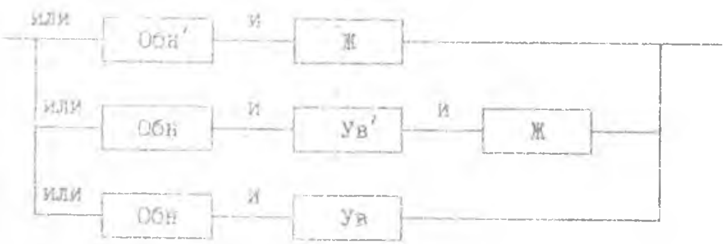


Рис. 4.3. Структурно-логическая схема выживания КА

На основе этой схемы составим логическую функцию выживания КА:

Y = Обн' · Ж ∨ Обн · Ув' · Ж ∨ Обн · Ув.

Анализ этой функции показывает, что она находится в ортогональной дизъюнктивной нормальной форме (ОДНФ). Поэтому легко перейти к вероятностной функции выживания

$$P(Y) = (1 - P_{обн})P_{ж} + P_{обн}(1 - P_{ув})P_{ж} + P_{обн}\ P_{ув}. \qquad (4.2)$$

Здесь для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$P(Обн) = P_{обн};\quad P(Ув) = P_{ув};\quad P(Ж) = P_{ж}.$$

Пример. Пусть $P_{обн} = 0,9$; $P_{ув} = 0,5$; $P_{ж} = 0,1$.

Тогда

$$P(Y) = (1 - 0,9)\cdot 0,1 + 0,9(1 - 0,5)\cdot 0,1 + 0,9\cdot 0,5 =$$

$$= 0,505.$$

4.6. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ

Анализ чувствительности будем проводить на основе понятия «значимость».

З н а ч и м о с т ь элемента в системе есть частная производная от вероятности безотказной работы (отказа) системы P_c по вероятности безотказной работы (отказа) элемента P_i, т.е.

$$\xi = \frac{\partial P_c}{\partial P_i}.$$

В теории логико-вероятностных методов доказывается, что эта производная численно равна разности вероятности работоспособного состояния системы, когда элемент находится в работоспособном состоянии, и вероятности работоспособного состояния системы, когда рассматриваемый элемент находится в состоянии отказа, т.е.

$$\xi = P_c(x_i = 1) - P_c(x_i = 0).$$

В качестве примера рассчитаем значимость элементов системы, рассмотренной в предыдущем подразделе. Исходной для расчета будет функция (4.2), при следующих исходных данных: $P_{обн} = 0,9$; $P_{ув} = 0,5$, $P_{ж} = 0,1$.

$$\xi_{обн} = \left[(1 - 1)\cdot P_{ж} + 1(1 - P_{ув})\cdot P_{ж} + 1\cdot P_{ув}\right] -$$

$$-\left[(1-0)\cdot P_{ж}+0\left(1-P_{ув}\right)\cdot P_{ж}+0\cdot P_{ув}\right]=$$

$$=\left[(1-0,5)\cdot 0,1+0,5\right]-\left[0,1\right]=0,45;$$

$$\xi_{ув}=\left[\left(1-P_{обн}\right)\cdot P_{ж}+P_{обн}(1-1)\cdot P_{ж}+P_{обн}\cdot 1\right]-$$

$$-\left[\left(1-P_{обн}\right)\cdot P_{ж}+P_{обн}(1-0)\cdot P_{ж}+P_{обн}\cdot 0\right]=$$

$$=\left[(1-0,9)\cdot 0,1+0,9\right]-\left[(1-0,9)\cdot 0,1+0,9\cdot 0,1\right]=$$

$$=0,81;$$

$$\xi_{ж}=\left[\left(1-P_{обн}\right)\cdot 1+P_{обн}\left(1-P_{ув}\right)\cdot 1+P_{обн}\cdot P_{ув}\right]-$$

$$-\left[\left(1-P_{обн}\right)\cdot 0+P_{обн}\left(1-P_{ув}\right)\cdot 0+P_{обн}\cdot P_{ув}\right]=$$

$$=\left[(1-0,9)+0,9(1-0,5)+0,9\cdot 0,5\right]-\left[0,9\cdot 0,5\right]=$$

$$=0,55.$$

Отсюда можно сделать вывод, что при принятых исходных данных наиболее значимой является система увода КА; чтобы повысить вероятность выживания КА, необходимо в первую очередь стремиться повысить вероятность увода КА от возможного столкновения.

Следует отметить, что при других исходных данных по вероятностям значимость элементов может смениться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящем курсе лекций изложены основные методы расчета надежности космических аппаратов, которые используются в процессе создания надежных элементов и систем космической техники.

В то же время много вопросов из-за ограниченности пособия осталось вне поля нашего зрения. Желающих более глубоко изучить вопросы, связанные с надежностью изделий, можно отослать к литературе, приведенной в списке использованных источников.

Следует также отметить, что создание надежных изделий космической техники в значительной степени определяется опытом работы конструкторских бюро, заводов, эксплуатирующих организаций, их кооперацией и взаимодействием соответствующих служб.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Надежность и эффективность в технике. Справочник в десяти томах. М.: Машиностроение, 1986.

2. *Кузнецов А.А.* Надежность конструкций баллистических ракет. М.: Машиностроение, 1978.

3. *Волков Л.И., Шишкевич А.М.* Надежность летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1975.

4. *Волков Л.И.* Управление эксплуатацией летательных комплексов. М.: Высшая школа, 1987.

5. *Капур К., Ламберсон Л.* Надежность и проектирование систем/Пер. с англ. М.: Мир, 1980.

6. *Диллон Б., Сингх Ч.* Инженерные методы обеспечения надежности систем/Пер. с англ. М.: Мир, 1984.

7. *Рябинин И.А., Черкесов Г.Н.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М.: Радио и связь, 1981.

8. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984.

9. *Лукашев Л.Г., Куренков В.И.* Надежность систем конструкций летательных аппаратов/Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1986.

10. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.

11. *Кузнецов А.А.* Математическое обеспечение надежности летательных аппаратов/Москов. авиац. ин-т. М., 1982.

12. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Куренков Владимир Иванович

МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Конспект лекций

Редактор Т.К. Кретинина
Техн. редактор Г.А. Усачева
Корректор Т.И. Щелокова

Лицензия ЛР № 020301 от 30.12.96 г.

Подписано в печать 30.11.98. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ.л. 4,65. Уч.-изд.л. 5. Усл. кр.-отт. 4,77.
Тираж 100 экз. Заказ 28. Арт. С-5/98.

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического университета
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.