МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Математический анализ

Интерактивное мультимедийное пособие
Система дистанционного обучения Moodle

САМАРА
2012

УДК 517
Г695

Автор-составитель: **Горлач Борис Алексеевич, Горлач Анна Юрьевна**

Математический анализ [Электронный ресурс]: интерактив. мультимед. пособие : система дистанц. обучения «Moodle» / Б. А. Горлач, А. Ю. Горлач; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). - Электрон. текстовые и граф. дан. (4,01 Мбайт). - Самара, 2012. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Интерактивное мультимедийное пособие предназначено для студентов очного отделения по направлениям подготовки бакалавров 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент», 080500.62 «Бизнес-информатика» (ФГОС-3), изучающих дисциплину «Математический анализ» во 2 семестре, и для студентов очного отделения по направлениям подготовки специалистов 080105.65 «Финансы и кредит», 080507.65 «Менеджмент организации», 080116.65 «Математические методы в экономике» (ГОС-2), изучающих дисциплину «Математический анализ» во 2 и 3 семестрах, и для студентов заочного отделения по направлениям подготовки бакалавров 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент» (ФГОС-3), изучающих дисциплину «Математический анализ» в 1 семестре.

Учебный комплекс включает в себя теоретический материал, разработки семинарских занятий, условия задач для самостоятельного решения и задания для выполнения расчётных работ, вопросы, в том числе в виде тестов, для проверки уровня усвоения материала, и может быть использован для самостоятельного овладения курсом.

Разработано на кафедре математических методов в экономике факультета экономики и управления СГАУ.

Б.А. ГОРЛАЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебный комплекс

Оглавление

Предисловие

Книга является продолжением учебного комплекса по математике для студентов экономических и инженерно-технических специальностей. Первая книга: «Линейная алгебра» [3] издана в 2008 году. Как и предыдущие издания автора, книга включает в себя теоретический материал, разработки семинарских занятий, условия задач для самостоятельного решения и задания на выполнение расчетных работ, вопросы, в том числе в виде тестов, для проверки уровня усвоения материала. Книга предназначена для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения.

О содержании пособия можно судить по приведенным ниже ключевым словам.

Множества – функции – последовательности – пределы – производная – дифференциал – исследование функций – функции нескольких переменных – частные производные – градиент – экстремумы функций одной и нескольких переменных – условные экстремумы – неопределенный и определенный интегралы – численные методы – дифференциальные уравнения (ДУ)– линейные ДУ первого, второго и n-ного порядков – численные методы решения ДУ – системы ДУ – конечно-разностные ДУ – ряды степенные и функциональные – ряды Фурье – сходимость рядов.

В конце глав приведены вопросы для тестирования. Эти вопросы могут быть полезны при самоконтроле усвоения обучаемыми теоретического материала. Вопросы могут использоваться преподавателями для осуществления экспресс-контроля знаний студентов. Приведены типовые билеты контрольных работ как для проверки приобретенных студентами навыков решения типовых задач, так и по проверке усвоения ими теоретического материала.

Глава 1

Введение в анализ

1.1. Язык и символика математики

Галилео Галилей (Galilei Galileo, 1584–1642 — великий итальянский физик, астроном и математик) в назидание своим ученикам писал: «Перед Вами открытая книга (имеется в виду природа). Прочтет книгу тот, кто изучит язык, на котором она написана. А написана она на языке математики».

Раздел математики, который занимается, в частности, созданием формального языка высказываний, является «Математическая логика».

Алгебра логики — раздел математики, призванный формализовать описание математических положений и умозаключений, представить их в виде, инвариантном по отношению к языкам различных народов. Таким образом, следует отличать языковое (присущее конкретным странам и народам) описание объектов и отношений между объектами от формального описания, присущего интернациональному языку математической логики.

Под *высказыванием* (на любом языке) понимается выражение (предложение, утверждение), относительно которого можно утверждать имеет оно *истинное* (И) или *ложное* (Л) *значения*. Существование в математической логике двух и только двух утверждений относительно высказываний позволяет при описании явлений и процессов использовать двоичную систему: значению «И» ставить в соответствие цифру 1, «Л» — цифру 0.

Высказывания будем обозначать прописными латинскими буквами.

Примеры высказываний, связанных с математическими понятиями:

A: «5 есть натуральное число» (И);

B: «$3 - 5 = 2$» (Л);

C: «вычитание — действие, противоположное сложению» (И).

При формулировке умозаключений отдельные высказывания связываются между собой *логическими связками.* В качестве связок могут выступать союзы *«и», «или», «если ..., то»* и т. д. или частица *«не».*

Частица *«не»* представляет собой логическую операцию *отрицание.*

Построение из рассматриваемых высказываний новых высказываний называется *логической операцией.*

Перечислим основные логические операции и приведем их обозначения, принятые в математической литературе.

Отрицание высказывания A (не A) обозначается $\overline{A}$. Отрицание является одноместной (унарной) логической операцией — «связкой», относящейся только к одному высказыванию. Если A характеризуется числом 1 (истинное высказывание), то $\overline{A}$ — числом 0 (ложное высказывание) и наоборот.

Бинарные (двухместные) логические операции связывают между собой пару высказываний A_1 и A_2. Четыре наиболее употребляемые в математической логике операции приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1 Бинарные логические операции

Обозначение	Значения	Название	Как читается
$A_1 \wedge A_2$ $(A_1 \cdot A_2)$	0001	конъюнкция, умножение	A_1 и A_2
$A_1 \vee A_2$ $(A_1 + A_2)$	0111	дизъюнкция, сложениее	A_1 или A_2
$A_1 \to A_2$ $(A_1 \Rightarrow A_2)$	1101	импликация, следование	A_1 влечет A_2
$A_1 \leftrightarrow A_2$	1101	эквиваленция	A_1 эквивалентно A_2

Цифровые значения бинарных операций, представленные в двоичной системе во второй колонке табл. 1.1, соответствуют следующим сочетаниям значений A_1 и A_2 в первой колонке ($*$ — одна из логических операций: $\cdot$, $+$, $\to$, $\leftrightarrow$):

1) $0 * 0$ — соответствует первой цифре;
2) $1 * 0$ — второй;
3) $0 * 1$ — третьей;
4) $1 * 1$ — четвертой.

Например, первая цифра (0) на первой строке во второй колонке таблицы указывает на то, что при условиях: A_1 ложно (0), A_2 ложно (0), совместные высказывания A_1 и A_2 представляют собой ложное утверждение, т. е. им приписывается цифра 0. Вторая цифра (0) в той же позиции соответствует ситуации, когда A_1 — высказывание истинное (1) и A_2 — ложное (0), совместные высказывания A_1 и A_2 представляют собой ложное утверждение (0). Аналогичные рассуждения относятся к третьей цифре (0). Четвертая цифра (1) указывает на то, что при истинности высказываний A_1 и A_2 совместно рассматриваемые высказывания A_1 и A_2 представляют собой истину.

Кванторы.

Приведем обозначения двух *кванторов* (от латинского quantium – сколько): *квантор всеобщности* $\forall$ (читается «для всякого» или «для всех») и *квантор существования* $\exists$ (читается «существует» или «существуют некоторые»). Иногда квантор всеобщщности сопровождается восклицательным знаком $\exists!$ (читается «существует единственный (единственная)»).

Кванторы вводятся в математической литературе для формализации формулировок, избавления их от языковой зависимости, и для сокращения записей. Например фраза: «для всякого числа x существует число y, равное квадрату числа x, с использованием кванторов и символов операций над математическими объектами может быть представлена в виде:

$$\forall x (x \in Q) \exists y (y := x^2).$$

Необходимое и достаточное условия.

В заключение параграфа поясним два часто используемые в математике понятия: *необходимое условие* и *достаточное условие.*

Практически любая теорема математики формулируется с использованием фразы: «если выполняется условие A, то верно утверждение B».

Это пример формулировки *прямой теоремы.* Используя символы операций математической логики приведенную формулировку запишем в виде

$$A \implies B. \tag{1.1}$$

В записи (1.1) A называется *достаточным условием для выполнения B*; B называется *необходимым условием для выполнения A*.

Наряду с прямой теоремой (1.1) зачастую рассматривается обратная теорема:

$$B \implies A. \tag{1.2}$$

Если наряду с прямой теоремой одновременно выполняется обратная теорема, то A называется *необходимым и достаточным условием для B*.

Пример 1. Рассмотрим два высказывания.

A — «Прямая на плоскости»;

B — «Линейное уравнение относительно переменных».

Формулировка (1.1) может быть представлена в виде: Если имеется прямая на плоскости, то для ее описания используется линейное уравнение относительно переменных.

Условие A «привязано» к слову если, а B — к слову то. Из A следует B. То есть, достаточно иметь прямую чтобы записать линейное уравнение. Это достаточное условие.

Обратимся к обратному утверждению (1.2). Правомерно ли утверждать: если задано линейное уравнение, то оно описывает прямую на плоскости. Утверждение некорректно — линейное уравнение может описывать плоскость.

В рассмотренном примере утверждения A достаточно для выполнения B, но не необходимо.

Пример 2. Дополним сформулированные в примере 1 условия.

A — «Прямая на плоскости общего вида»;

B — «Линейное уравнение относительно двух переменных».

Для сформулированной задачи выполняются условия (1.1) и (1.2).

Можно записать утверждение: для описания прямой общего вида на плоскости необходимо и достаточно использовать линейное уравнение с двумя переменными.

1.2. Множества. Основные понятия

Понятие *множество* относится к базовым понятиям и не определяется через более простые. Под *множеством* (обозначаются прописными буквами A, B, C, ...) понимают совокупность объектов, называемых *элементами* множества (обозначаются строчными буквами a, b, c и т. д.)

Примеры: множество чисел; множество точек на прямой, на плоскости, в пространстве; множество людей в коллективе, предприятий в городе, домов на улице; множество явлений, событий, ...

Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A, обозначают: $a \in A$; элемент b не принадлежит A: $b \notin A$. Записи $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ или $A = \{a_i\}$ $(i = \overline{1, n})$ означают, что A состоит из элементов a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Представленное множество A является дискретным (состоящим из совокупности злементов) и счетным (каждому элементу можно присвоить номер из натурального ряда чисел).

Символом $\emptyset$ обозначают пустое множество. В таком множестве нет ни одного элемента.

Если элементы x множества A обладают свойством P, то в символах математики этот факт принято записывать в виде

$$A = \{x | P(x)\}.$$

Если все элементы множества B являются элементами множества A, то B называют *подмножеством* множества A. Обозначение $B \subset A$. В частности, $A \subset A$, т. е. A является *собственным подмножеством* множества A.

Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то множества A и B называются *равными* или *эквивалентными*: $A = B$. Другое обозначение: $A \sim B$. Соотношение $A \subseteq B$ указывает на то, что множество A является подмножеством или эквивалентно множеству B.

Объединением $(A \cup B)$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B.

Пересечением $(A \cap B)$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно A и B.

Разностью $(A \setminus B)$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B.

Пример. Даны множества $A = \{1, 3, 4, 7, 9\}$ и $B = \{3, 5, 7, 8\}$. Найти их объединение, пересечение и разности.

Р е ш е н и е.

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}; \quad A \cap B = \{3, 7\};$$

$$A \setminus B = \{1, 4, 9\}; \quad B \setminus A = \{5, 8\} \neq A \setminus B.$$

Отметим некоторые свойства операций над множествами.

1. $\begin{cases} A \cup B = B \cup A, \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$ — коммутативность.

2. $\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}$ — ассоциативность.

3. $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$ — дистрибутивность.

4. $\begin{cases} (A \cup A) = A, \\ (A \cap A) = A \end{cases}$ — идемпотентность.

5. $\begin{cases} (A \cup \varnothing) = A, \\ (A \cap \varnothing) = \varnothing \end{cases}$.

Если $A \subseteq B$, то:

6. $\begin{cases} (A \cup B) = B, \\ (A \cap B) = A. \end{cases}$

7. $A \backslash (B \backslash A) = A$;

8. $\begin{cases} A \cup (B \backslash A) = A \cup B, \\ A \cap (B \backslash A) = \varnothing. \end{cases}$

Если $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$ то:

9. $\begin{cases} \big(A \cup (C \backslash A)\big) \cap B = B, \\ \big((A \cup (C \backslash A)\big) \cup B = C. \end{cases}$

10. $\begin{cases} C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B), \\ C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B). \end{cases}$

11. $\begin{cases} (A \cup B) \cap B = B, \\ (A \cap B) \cup B = B. \end{cases}$

12. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

В справедливости большинства из перечисленных свойств операций над множествами можно убедиться, прибегнув к геометрическому изображению соответствующих множеств, например, на плоскости.

Другой путь доказательства справедливости свойств основан на логике строгих математических умозаключений.

Приведем в качестве примера строгое доказательство справедливости, например, первого свойства 10.

Обозначим: левую часть указанного равенства: $\Lambda = C\backslash(A \cup B)$ и правую его часть: $\Pi = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$.

Докажем сперва, что $\Lambda \subseteq \Pi$.

Пусть элемент $x \in \Lambda = C\backslash(A \cup B)$. Тогда $x \notin (A \cup B)$ и, следовательно, $x \notin A \Longrightarrow x \in C\backslash A$ и $x \notin B \Longrightarrow x \in C\backslash B$.

Последние два соотношения (справа от стрелок) приводят к равенству

$$x \in (C\backslash A) \cap (C\backslash B) = \Pi.$$

Итак, показано, что если $x \in \Lambda$, то $x \in \Pi$, т. е. $\Lambda \subseteq \Pi$.

Пусть теперь $x \in \Pi = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$. В этом случае $x \in C\backslash A$ и $x \in C\backslash B$. Отсюда следует, что $x \notin (A \cup B)$ и

$$x \in C\backslash(A \cup B) = \Lambda.$$

Таким образом доказано, что если $x \in \Pi$, то $x \in \Lambda$. То есть, $\Pi \subseteq \Lambda$. Выполнение этого включения вместе с полученным ранее включением $\Lambda \subseteq \Pi$ позволяет утверждать, что $\Lambda = \Pi$.

Числовым называется множество $\Re$ или любые его подмножества, элементами которых являются действительные числа. Геометрически множество $\Re$ изображается *числовой прямой* — прямой с введенным на ней масштабом и нулевой точкой (началом координат). Между $\Re$ и точками прямой существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому слово *число* часто отождествляют с *точой на числовой прямой*.

Подмножествами множества действительных чисел являются множества чисел:

— натуральных $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$;

— целых — чисел, получаемых из натуральных чисел с помощью операий сложения и вычитания — $Z = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots, m, \ldots\}$;

— рациональных $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots\}$, где $q_i = \dfrac{m}{n}$ – обыкновенная несократимая дробь $(m, n \in Z,\ n \neq 0)$;

— иррациональных I – чисел, которые не могут быть представлены в виде обыкновенной дроби.

Между перечисленными множествами существуют соотношения:

$$N \subset Z \subset Q \subset \Re; \quad I \subset \Re; \quad \Re = Q \cup I.$$

Всякое множество с конечным или бесконечным количеством элементов, эквивалентное множеству N натуральных чисел, или его части, называется *счетным множеством.* Счетными множествами являются, в частности, множества Q и Z. Множество I, следовательно, и $\Re$ счетными не являются. Утверждение следует из того, что любое иррациональное число может быть заключено между двумя как угодно близкими, но никогда не равными рациональными числами. Например,

$$1,414213\ldots < \sqrt{2} < 1,414214\ldots.$$

Чисел после запятой в левой и правой частях записанного неравенства может быть любое количество.

Множество A называют *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число μ, что для всех $x \in A$:
а) выполняется неравенство $x \leq \mu$;
б) для любого $\mu' < \mu$ существует $x_{\mu'} > \mu'$.

Аналогично, множество A называют *ограниченным снизу*, если существует такое действительное число ν, что для всех $x \in A$:
а) выполняется неравенство $x \geq \nu$;
б) для любого $\nu' > \nu$ существует $x_{\nu'} < \nu'$.

В таких случаях числа μ и ν называют *верхней* и, соответственно, *нижней гранями* множества A. Для обозначения граней вводят символы:

$\mu = \sup A$ (*от лат. supremum A*) — верхняя грань множества A;
$\nu = \inf A$ (*от лат. infimum A*) — нижняя грань множества A.

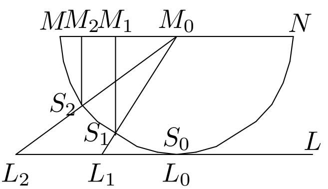


Рис. 1.1. Равномощность множеств

Количество элементов, входящих в множество, определяет его *мощность.* Если количество элементов множества неограничено, то множество называют *бесконечным*, или *множеством мощности континуума.*

Множества с одинаковыми количествами элементов называют *равномощными.* Примером равномощных множеств могут служить, например, два множества, состоящие из совокупностей точек, образующих:

а) отрезок MN прямой;

б) бесконечную прямую L.

Равномощность этих множеств, показанных на рис. 1.8, доказывается взаимной однозначностью точек отрезка MN и бесконечной прямой. Действительно, любой точке M_i $(i = 1, 2, \ldots)$ отрезка MN ставится в соответствие единственная точка S_i на полуокружности, а последней, в свою очередь, — единственная точка L_i на прямой L. Точке M_0 ставится в соответствие совпадающая с S_0 точка L_0 прямой, а точке M — точка прямой L, «располагающаяся» на отрицательной бесконечности.

1.3. Декартовы произведения

Рассмотрим множества: X с элементами x и Y с элементами y.

Декартовым произведением $X \otimes Y$ называется множество всех упорядоченных пар (x, y) элементов $x \in X$, $y \in Y$. Слова «декартово произведение» (и далее «декартовы координаты») связаны с именем французского математика и философа Рене Декарта (Des Cartes Rene, 1596–1650; латинизированное имя Cartesius. В англоязычной литературе декартовы произведения, как и декартовы координаты, называют картезианскими).

Если X и $Y \subset \Re$, т. е. представляют собой числовые множества, то им, как говорилось выше, можно поставить в соответствие отрезки на числовых прямых. Рассмотрим декартову ортогональную систему координат. Пусть числам множества X соответствуют точки оси абсцисс, а числам множества Y – оси ординат. Тогда в декартовом произведении $X \otimes Y$ каждой паре (x, y) элементов $x \in X$ и $y \in Y$ будет соответствовать точка на координатной плоскости. Элементы x и y в этом случае представляют собой декартовы координаты точек на плоскости, а их совокупность – множество точек на плоскости (в двухмерном пространстве $\Re_2$ действительных чисел): $X \otimes Y \subset \Re_2$.

Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что декартово произведение трех числовых множеств $X \otimes Y \otimes Z$ представляет собой множество точек (x, y, z) в трехмерном пространстве $\Re_3$.

Обобщением сказанного будет n-мерное пространство $\Re_n$, образованное n числовыми множествами $X_1, \ldots, X_n$, декартово произведение которых $X_1 \otimes \ldots \otimes X_n$ представляется совокупностью координат точек $(x_1, \ldots, x_n)$. При этом координата x_1 отождествляется с x, x_2 — с y и т. д.

Если $X \subset \Re$ и $Y \subset \Re$, то $X \otimes Y \subset \Re_2$. Декартовы произведения нашли применение и в случаях, когда рассматриваемые множества не являются числовыми, а могут состоять из конечного или бесконечного числа отдельных элементов. В этом случае декартовы произведения также будут состоять из отдельных совокупностей элементов множеств, входящих в декартовы произведения. В частности, это могут быть n-мерные множества, называемые *дискретными*, в противовес множеству $\Re_n$, являющемуся непрерывным.

Если декартовы произведения образованы из элементов счетных множеств, то счетными будут и множества, элементами которых являются эти декартовы произведения. Между двумя образованными декартовым произведением точками непрерывных числовых множеств всегда можно найти расстояние.

Пусть заданы координаты двух точек в n-мерном пространстве: $M_1(x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; \ldots; x_n^{(1)})$ и $M_2(x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; \ldots; x_n^{(2)})$.

Пространство называется *евклидовым*, если расстояние d_{12} между двумя любыми его точками M_1 и M_2 можно определить по формуле

$$d_{12} = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(2)} - x_2^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(2)} - x_n^{(1)})^2}. \tag{1.3}$$

В частности, для одномерного числового пространства расстояние равно модулю разности координат двух точек числовой оси (квадратный корень из квадрата одного слагаемого (1.3) равен модулю этого слагаемого). Для двухмерного пространства формула (1.3) соответствует теореме Пифагора об определении гипотенузы по двум катетам (катетами являются разности координат точек соответственно по первой и второй осям).

Непрерывное множество $X \subset \Re_n$ называется выпуклым, если для двух его произвольных точек $X_1 \in X$ и $X_2 \in X$ выполняется условие ($\alpha \in [0, 1]$):

$$\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2 \in X.$$

Множествами, входящими в декартовы произведения, обычно являются независимые величины. Например, выгода от реализации некоторой продукции складывается из ее товарного вида, в который может входить несколько элементов (первое множество); умения преподнести товар покупателю, организации рекламы (второе множество); спроса на товар, зависящего, в свою очередь, от многих факторов (третье множество), и т. д. Чтобы осуществлять математические операции над такими множествами, каждому их элементу следует поставить в соответствие числовую характеристику. Например, количество – в штуках; стоимость – в рублях; качество – в баллах и т. д.

1.4. Непрерывность действительных чисел

В § 1.2 рассматривалось множество $\Re$ действительных (вещественных) чисел, которое имеет мощность континуума.

Прежде, чем переходить к доказательству свойства непрерывности числового множества $\Re$, напомним некоторые, известные из школьного курса математики, понятия.

Рассмотрим два числа a и b из множества $\Re$ таких, что $a \leq b$. Совокупность всех чисел x таких, что $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* и обозначается $[a, b]$. Число a называется *левым*, а b — *правым концами отрезка.* Если $a = b$, то отрезок состоит из одной точки.

Если концы отрезка a и b не входят в рассматриваемую совокупность, т. е. $a < x < b$, то множество точек называется *интервалом* изменения x. Обозначение интервала (a, b). В математических исследованиях часто приходится иметь место с полузакрытыми интервалами: $[a, b)$ и $(a, b]$. Закрытый справа и слева интервал является отрезком.

Совокупность

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.4}$$

называется *системой вложенных отрезков* (рис. 1.2), если удовлетворяются неравенства

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

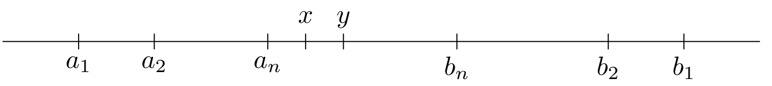


Рис. 1.2. Вложение отрезков

Определение. Длина отрезка $[a_n, b_n]$ в системе вложенных отрезков (1.4) стремится к нулю с возрастанием n, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon$ такое, что $\forall n \geq n_\varepsilon$: $b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема. *Для всякой системы вложенных отрезков, стремящихся по длине к нулю, существует единственное число, принадлежащее всем отрезкам системы.*

Сформулированное в виде теоремы свойство вложенных отрезков называют *свойством непрерывности множества действительных чисел в смысле Кантора* (Cantor Georg, 1845–1918, немецкий математик).

Доказательство теоремы. Рассмотрим систему (1.4) вложенных отрезков, стремящихся по длине к нулю с ростом номера n.

Предположим, что существуют два различных числа x и y, принадлежащих всем отрезкам $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. (рис. 1.2):

$$a_n \leq x \leq b_n, \quad a_n \leq y \leq b_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Полагая для определенности $x < y$ и вычитая неравенство $x \geq a_n$ из неравенства $y \leq b_n$, получим

$$y - x \leq b_n - a_n. \tag{1.5}$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю, то по определению для любого положительного числа ε существует натуральное число n_ε такое, что при всех $n \geq n_\varepsilon$ справедливо неравенство $b_n - a_n \leq \varepsilon$. В этом случае из неравенства (1.5) следует, что $y - x \leq \varepsilon$.

Полагая «произвольную» величину ε равной положительной $(y > x)$ разности $y - x$ $(\varepsilon = y - x)$, получим $y - x \leq y - x$. Полученное неравенство выполняется только в случае $x = y$, что противоречит принятому предположению о существовании двух различных чисел x и y, принадлежащих всем отрезкам $[a_n, b_n]$ (n=1,2,...).

Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что свойство непрерывности действительных чисел, вытекающее из теоремы Кантора, заключается в следующем. Вложенные отрезки могут содержать в себе любую, в частности как угодно малую, часть исходного отрезка, Таким образом, теорема справедлива для любой из непрерывно расположенных точек отрезка числовой прямой.

Непрерывность действительных чисел — свойство, которое позволяет вычислить их с любой точностью. Для этого искомое действительное число заключают в отрезки как угодно малой длины и такие, что концы этих отрезков будут представлять собой рациональные числа.

Для увеличения точности вычисления иррационального (действительного, но не рационального) числа, концы отрезка последовательно «стягивают» друг к другу.

Как пример рассмотрим процесс увеличения точности иррационального числа $\sqrt{2}$, заключаемого во вложенные отрезки $[a_n, b_n]$ $(a_n < \sqrt{2} < b_n)$:

$$[1; 2] \to [1{,}4; 1{,}5] \to [1{,}41; 1{,}42] \to [1{,}414; 1{,}415] \to \ldots$$

Концы приведенной последовательности отрезков представляют собой рациональные числа, являющиеся приближенными значениями иррационального числа $\sqrt{2}$, вычисленные с точностью до 10^{-n} ($n = 0, 1, 2, \ldots$) с недостатком (слева) и с избытком (справа).

1.5. Функция. Основные понятия и свойства

Величина, имеющая одно и то же числовое значение в различных ситуациях, называется *постоянной.* Примеры постоянных величин: π, e, коэффициенты в формулах, описывающих законы природы, ...

Величина, сохраняющая числовое значение в одном из нескольких процессах (объектах) и принимающая другие значения в других однотипных процессах (объектах), называется *параметром.* Примеры: величина p в уравнении параболы $y = 2px$; величины a и b в каноническом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или параметрических $x = a\cos x$, $y = a\sin x$ уравнениях эллипса, ...

Величина, принимающая различные, изменяющиеся, например со временем, значения в одном процессе, называется *переменной.*

Если каждому элементу x множества X ($x \in X$) по некоторому закону $f(x)$ ставится в соответствие вполне определенный, единственный элемент y множества Y, и если каждый из элементов $y \in Y$ при этом оказывается поставленным в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, то говорят, что на множестве X задана ***функция*** *$y = f(x)$.*

При этом x называется *независимой переменной*, или *аргументом, y — зависимой переменной*, или *функцией.* Знак f определяет закон (правило), по которому аргумент преобразуется в функцию. Для функциональной зависимости допускается часто используемое в литературе обозначение $y = y(x)$.

Множество X называется *областью определения* (*существования*) функции, или *областью допустимых значений* аргумента; множество Y — *областью значений* функции.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x} - \lg(x-3)$.
Р е ш е н и е. Для области определения функции y должны выполняться требования: неотрицательность выражения, стоящего под квадратным корнем ($x \geq 0$), и положительность выражения, стоящего под знаком логарифма ($x - 3 > 0$). Объединяя оба требования

(неравенства), находим искомую область: $x > 3$.

Пример 2. Найти область значений функции $y = \dfrac{6x}{1+x^2}$.

Решение. Одним из способов решения подобных задач является нахождение функции, обратной по отношению к исходной, и затем установление для обратной функции ее области определения.

Умножая числитель и знаменатель исходного соотношения на неравный нулю (и даже всегда положительный) множитель $(1+x^2)$, запишем функцию в неявном виде $x^2y - 6x + y = 0$.

Получено квадратное уравнение относительно x. Оно будет иметь два действительных корня в случае неотрицательности дискриминанта: $6^2 - 4y^2 \geq 0$ или $y^2 \leq 9$, $|y| \leq 3$. Последнее неравенство определяет область значений функции $y \in [-3, 3]$.

Над *числовыми функциями* $\big(f(x),\ g(x)\big)$ — функциями, принимающими числовые значения — можно производить различные арифметические операции: умножение на число $cf(x)$; суммирование $f(x)+g(x)$; умножение $f(x)g(x)$; деление (при $g(x) \neq 0$) $f(x)/g(x)$.

Числовая функция $f(x)$, называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такая постоянная M, что для каждого x выполняется неравенство $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq M)$.

Как и для граней множеств (§1.2), для функций существуют числа, называемые верхней $\sup f(x)$ и нижней $\inf f(x)$ гранями функций.

Верхней гранью функции $f(x)$ называют такое действительное число $\mu = \sup f(x)$, что для всех $f(x)$ из области значений функции:
а) выполняется неравенство $f(x) \leq \mu$;
б) $\forall \mu' < \mu \ \ \exists f(x) > \mu'$.

Нижней гранью функции $f(x)$ называют такое действительное число $\nu = \inf f(x)$, что для всех $f(x)$ из области значений функции:
а) выполняется неравенство $f(x) \geq \nu$;
б) $\forall \nu' > \nu \ \ \exists f(x) < \nu'$.

Если в точке x_0 некоторой подобласти Ω области X определения функции $f(x)$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ для любого $x \in X$, то говорят что в точке x_0 функция принимает максимальное (минимальное) значение. Математическая запись этого факта:

$$f(x_0) = \max_{\Omega} f(x) \qquad f(x_0) = \min_{\Omega} f(x).$$

Из двух последних определений следует:

$$\sup f(x) = \max_{\Omega} f(x), \qquad \inf f(x) = \min_{\Omega} f(x).$$

Рассмотрим основные свойства функций.

1. Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$.

Пример четной функции $y = x^2$. Справедливость утверждения следует из того, что $(-x)^2 = x^2$. А так как $(-x)^3 = -x^3$, то $y = x^3$ — нечетная функция. О функции $y = x^2 + x^3$ нельзя сказать, что она четная или нечетная.

График четной функции симметричен относительно оси ординат y, нечетной — относительно начала координат.

2. Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Например, функция $y = x^2$ возрастающая при $x \geq 0$ и убывающая при $x \leq 0$.

Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными.*

3. Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на некотором промежутке изменения X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \cos x$ ограничена на всей числовой оси, так как $|\cos x| \leq 1$.

4. Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если $f(x + T) = f(x)$.

Например, все тригонометрические функции периодические. Они имеют период, равный 2π (синус и косинус). Период для тангенса и котангенса равен π.

1.6. Способы задания функций

Существуют три основных способа задания действительных (вещественных) функций одного действительного переменного.

Это, прежде всего, *аналитический* способ — задание функций с помощью формул $y = f(x)$. Например, $y = ax + b$, $\quad y = \sqrt{1 + x^3}$, $y = \lg \sin^2 x$, …

Зачастую одну функцию описывают совокупностью нескольких формул, например,

$$y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при} \quad x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ \ln x & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

К аналитическим относят соотношения, указывающие на существование некоторого соответствия между математическими выражениями и их значениями, например, выражения для определения функции sign (по латыни signum — знак):

$$\text{sign x} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0; \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Другой способ задания функции — табличный. Например,

x	-1	5	6,5	7,1	8,3	10
y	-3	1	0	2,1	3	8

Область определения таблично заданной функции — множество значений ее аргумента. Область значений — множество значений зависимой переменной. Для приведенного примера область определения: $\{-1;\ 5;\ 6,5;\ 7{,}1;\ 8{,}3;\ 10\}$; область значений: $\{-3;\ 1;\ 0;\ 2{,}1;\ 3;\ 8\}$.

Табличное задание функции является зачастую единственно возможным способом. Оно используется при проведении различных экспериментов, в которых значения функции удается определить (зафиксировать) только при некоторых дискретных (не непрерывных) значениях аргумента. Табличное значение функций широко используется в описании статистических данных.

В отличие от аналитического описания, табличный способ задания функций не дает возможности точно определить их значения при значениях аргумента, отличных от заданных в таблицах.

Наибольшей наглядностью обладает *графический* способ задания функций. Для непрерывных функций их графики представляют собой непрерывные линии, для функций, заданных таблично — совокупность точек с координатами x и $y = y(x)$. Графический способ позволяет определить значения функции лишь приближенно, причем точность определяется масштабом графиков.

Опишем некоторые характерные способы аналитического задания функций.

Явно и неявно заданные функции

Функция y называется *явной*, или заданной в явном виде, если в левой части функциональной зависимости стоит y в первой степени, а правая часть не содержит y: $y = f(x)$. Например, $y = x^n + \operatorname{tg}(\ln x)$.

Функция y аргумента x называется *неявной*, или *неявно заданной*, если в одной или обеих частях функционального равенства встречаются и y и x: $f(x, y) = 0$. Например, $xy + \sqrt{x/y} = 0$.

Термин «неявная функция» отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания. Одна и та же функция может быть задана как в явном, так и в неявном виде. Например, $xy^{-1} - 1 = 0$ и $y = 1/x$ неявный и явный способы задания одной функции.

Сложная функция.

Пусть функция $y = f(u)$ является функцией от переменной u, которая, в свою очередь, является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x. Тогда функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* от x (*функцией от функции*).

Например, функция $y = \ln \operatorname{tg} x$ сложная, так как она может быть представлена в виде $y = \ln u$, где $u = \operatorname{tg} x$.

Параметрическая функция.

Характерной особенностью таких функций является задание и независимой x и зависимой y переменных как функций от некоторого параметра t:

$$\begin{aligned} x &= f_x(t), \\ y &= f_y(t). \end{aligned}$$

Если из этих уравнений исключить параметр t, то придем к представленной в явном или неявном видах зависимости между переменными x и y.

Примером параметрического задания функций может служить параметрическое уравнение эллипса:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t. \end{aligned}$$

Исключение параметра t из этих уравнений (суммирование квадратов двух уравнений) приводит к каноническому уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение представляет собой неявный способ задания функции.

Чтобы получить функциональную зависимость явного задания y через x, необходимо выразить в явном виде квадрат переменной y и затем извлечь из полученной зависимости квадратный корень. В результате придем к неоднозначной функции (одному значению x соответствует два значения y):

$$y_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad y_2 = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Отметим, что с равным успехом из уравнения эллипса можно было выразить переменную x через переменную y.

Обратная функция.

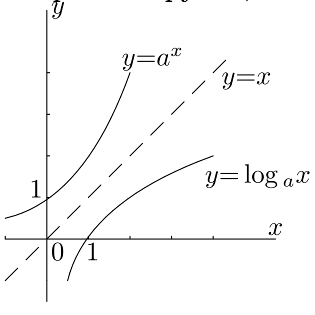


Рис. 1.3. Обратные функции

Пусть $y=f(x)$ — явно заданная функция и пусть из представленной зависимости можно выразить x как явную функцию от y: $x = \varphi(y)$.

В этом случае $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$ называется *обратной функцией* по отношению к функции $y = f(x)$.

Можно показать, что для любой монотонной функции существует обратная функция.

Заметим, что график обратной функции симметричен графику исходной функции относительно биссектрисы первого координатного угла. То есть функция $y = f(x)$ расположена по отношению к оси x (y) также, как функция $y = f^{-1}(x)$ расположена относительно оси y (x).

Для примера на рис. 1.3 показан график функции $y = a^x$ $(a > 1)$ и график обратной к ней функции $y = \log_a x$. Функция $y = x$, очевидно, совпадает со своей обратной функцией (биссектриса на рисунке).

Рассмотренные типы аналитического задания функций одной переменной связывают определенной зависимостью две переменные x и y. Графики таких функций представляют собой кривые на плоскости. При этом значения переменной x отождествляются с точками на прямой — осью абсцисс, y — с осью ординат. Две упомянутые оси представляют собой *ортогональную декартову систему координат.*

В отличие от упомянутой декартовой ортогональной, с плоскостью иногда связывают декартову неортогональную (прямолинейную косоугольную) систему координат, или вводят различные криволинейные координаты, призванные сделать более удобным описание некоторых систем и процессов. Примером криволинейной системы может служить *полярная система координат* (ρ, θ), связанная с координатами декартовой ортогональной системы соотношениями

$$y = \rho \sin \theta, \qquad x = \rho \cos \theta.$$

В зависимости от введенных систем координат на плоскости вид функциональных зависимостей, описывающих одни и тех же процессы и явления, может отличаться до неузнаваемости.

Например, уравнение параболы $y = 2px$ в полярной системе, где ρ — функция, θ — аргумент, приводится к виду $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos \theta}$.

1.7. Элементарные функции

Основные элементарные функции.

К *основным элементарным* относятся следующие функции.

- *Степенные*: x^n, x^{-n} $\sqrt[n]{x}$ $(n \in N)$.
- *Показательные*: a^x $(a > 0;\ a \neq 1)$.
- *Логарифмические*: $\log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$.
- *Тригонометрические*: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.
- *Обратные тригонометрические*: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

В табл. 1.2 приведены наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью конечного числа арифметических операций над *основными* элементарными функциями и конечного числа операций образования от них сложных функций, называется просто *элементарной функцией.*

Можно выделить несколько классов элементарных функций.

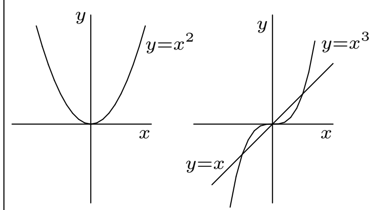
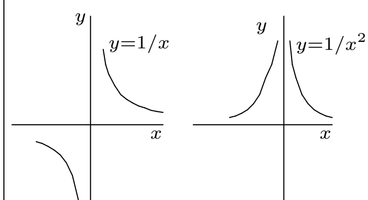
1. **Полиномы (многочлены)** — функции, которые могут быть представлены в виде

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

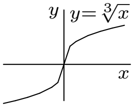
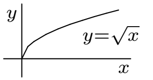
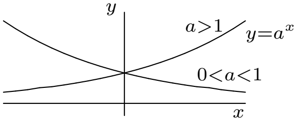
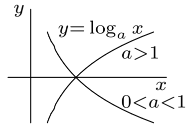
Среди коэффициентов a_k могут быть нулевые. При $a_n \neq 0$ число n определяет *степень полинома.* При $n = 1$ полином является линейной функцией.

Таблица 1.0

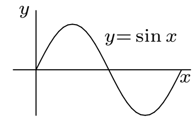
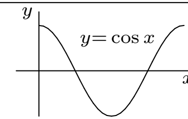
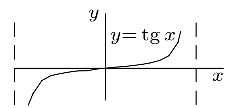
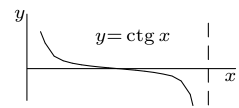
Основные элементарные функции

N п/п	Обозначение функции	Область определения x	Область значений y	Четность и нечетность	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1	2	3	4	5	6	7	8
				1. *Степенные функции*			
1	$y = x^n$ $n \in N$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	Нечетная, если n – нечетно; четная, если n – четно	Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; убывает на $(-\infty, 0]$ и возрастает на $[0, \infty)$, если n – четно	Непериодическая	
2	$y = x^{-n}$ $n \in N$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ если n – нечетно; $(0, \infty)$, если n – четно	Нечетная, если n – нечетно; четная, если n – четно	Убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, \infty)$, если n – нечетно; возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, \infty)$, если n – четно	Непериодическая	

Продолжение табл. 1.0

1	2	3	4	5	6	7	8
3	$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$ $n > 1$	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	Нечетная, если n – нечетно; общего вида, если n – четно	Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; возрастает на $[0, \infty)$, если n – четно	Непериодическая	 
2. *Показательная функция*							
4	$y = a^x$ $a > 0$ $a \neq 1$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$	Общего вида	Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если $a > 1$; убывает на $(-\infty, \infty)$, если $0 < a < 1$	Непериодическая	
3. *Логарифмическая функция*							
5	$y = \log_a x$ $a > 0$ $a \neq 1$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	Общего вида	Возрастает на $(0, \infty)$, если $a > 1$; убывает на $(0, \infty)$, если $0 < a < 1$	Непериодическая	

4. *Тригонометрические функции*

6	$y = \sin x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	Нечетная	Возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$; убывает на $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in Z$	Период 2π	
7	$y = \cos x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	Четная	Возрастает на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$; убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$	Период 2π	
8	$y = \operatorname{tg} x$	$(-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n)$ $n \in Z$	$(-\infty, \infty)$	Нечетная	Возрастает на $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$; $n \in Z$	Период π	
9	$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi n, \pi+\pi n)$ $n \in Z$	$(-\infty, \infty)$	Нечетная	Убывает на $(\pi n, \pi + \pi n]$, $n \in Z$	Период π	

2. *Обратные тригонометрические функции*

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

2. **Рациональные функции (рациональные дроби)** задаются отношением полиномов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ различных степеней:

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Если $m > n$, то рациональная дробь называется *правильной*, при $m \le n$ — неправильной.

3. **Алгебраические функции** — это функции, которые могут быть заданы путем образования сложных функций, включающих в себя рациональные и степенные функции и четыре основные арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление).

Если рассматривать множества перечисленных трех классов элементарных функций, то нетрудно заметить, что множество многочленов является подмножеством рациональных функций, которое, в свою очередь, является подмножеством алгебраических функций.

4. **Трансцендентные функции** — все остальные элементарные функции, не являющиеся алгебраическими: тригонометрические (прямые и обратные), показательные, логарифмические.

Существуют функции, принадлежность которых к классу элементарных не очевидна, но которые после преобразований приводятся к элементарным. Например, функция $y = |x|$. Чтобы показать, что эта функция элементарная, представим ее в виде $y = \sqrt{x^2}$. В правой части равенства стоит элементарная функция.

1.8. Преобразование графиков функций

В практических задачах, математические модели которых сводятся к анализу функций, часто приходится иметь дело с преобразованием графиков. Эти преобразования могут заключаться в сдвигах графиков вдоль координат x или y и в изменении «пологости» графиков, т.е. изменении углов наклона касательных к ним.

Рассмотрим, какие факторы и каким образом влияют на расположение кривых на плоскости и их форму.

Пусть исходная кривая описывается функциональной зависимостью

$$y = f(x).$$

На рис. 1.4 исходная кривая, отмеченная цифрой (0), представляет собой параболу $y = x^2$.

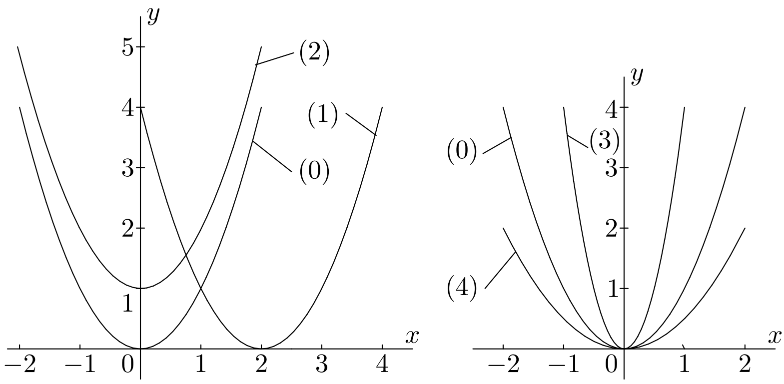


Рис. 1.4. Преобразование графиков

1. Сдвиг графика функции вдоль направления оси абсцисс осуществляют путем вычитания из координаты x величины a:

$$y = f(x - a).$$

При $a > 0$ график сдвигается в сторону положительного направления x; при $a < 0$ — в противоположную сторону.

На рис. 1.4 цифрой (1) помечена кривая, для которой $a = 2$.

2. Сдвиг графика функции вдоль направления оси ординат осуществляют путем вычитания из координаты y величины b. При $b > 0$ график сдвигается в сторону положительного направления оси y; при $b < 0$ — в противоположную сторону.

На рис. 1.4 цифрой (2) помечена кривая, для которой $b = 1$.

3. Изменение угла наклона касательной к графику функции к осям координат осуществляют путем умножения координат x или y на числовые множители. При этом если координату x умножить на $m > 1$, то угол наклона касательной к оси абсцисс увеличится. При умножении y на $n > 1$ угол наклона уменьшится. Таким образом угол наклона касательной к графику функции можно менять, варьируя параметры m и n в выражении

$$ny = f(mx).$$

На рис. 1.4 цифрой (3) отмечен график функции $y=(2x)^2$, а цифрой (4) — график функции $2y = x^2$.

1.9. Интерполирование функций

Во многих (в том числе, и даже особенно, экономических) задачах функциональные зависимости задаются в табличном виде. Характерная особенность такого вида задания функций состоит в том, что связь между независимой x и зависимой y переменными задается лишь в отдельных точках. Если для значений x, не совпадающих с заданными, требуется определить соответствующие значения y, то возникает вопрос: как это сделать?

Задача определения значений y по соответствующим нетабличным значениям x — это и есть задача *интерполирования*.

Пусть для дискретно заданной функции $y = f(x)$ трем значениям независимой переменной x, а именно (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}), поставлены в соответствие три значения y: (y_{k-1}, y_k, y_{k+1}).

Простейший вариант решения задачи интерполирования сводится к тому, что для $x \in [x_{k-1}, x_k)$ функция y принимается равной y_{k-1}. В результате такой интерполяции получаем ступенчато-постоянную функцию, график которой отмечен на рис. 1.5 цифрой (1).

Наибольшее распространение получило *линейное* интерполирование, которое сводится к тому, что через соседние табличные точки проводятся прямые.

Пусть точки (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k) соединены прямой $y = ax + b$. Из условия прохождения прямой через две заданные точки (координаты этих точек должны обращать уравнение прямой в тождество) получаем систему двух уравнений с неизвестными a и b:

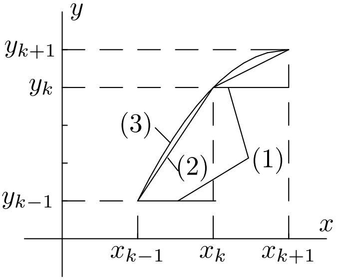


Рис. 1.5. Интерполирование

$$\begin{cases} y_{k-1} = ax_{k-1} + b, \\ y_k = ax_k + b. \end{cases}$$

Решая систему, определяем a и b, после чего уравнение прямой запишем в виде

$$y = (x - x_{k-1})\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + y_{k-1}.$$

Чтобы получить уравнение прямой, проходящей через следующую пару точек, достаточно в полученном уравнении к индексу k, который пробегает значения от 0 до n (n — номер последней точки), прибавить единицу.

На рис. 1.5 цифрой (2) помечена ломаная прямая, соответствующая линейной интерполяции.

Линейная интерполяция дает возможность описать функциональную зависимость, как правило, более точно, чем при кусочно-постоянной интерполяции. Тем не менее в некоторых задачах и она не дает достаточной точности.

Следующим шагом в повышении точности аналитического описания функции, заданной таблично, является *квадратичная интерполяция* кривой $y = ax^2 + bx + c$. Коэффициенты a, b и c находят из условия, что парабола проходит через три точки $(x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k)$ и (x_{k+1}, y_{k+1}). Подстановка этих координат в уравнение параболы дает возможность получить систему трех уравнений с тремя неизвестными a, b и c, из которой затем можно найти эти неизвестные. Из-за неоправданной громоздкости преобразований и получаемых соотношений они здесь не приводятся.

На рис. 1.5 цифрой (3) отмечена кривая квадратичной интерполяции.

Пример. Функция $y = f(x)$ задана таблицей:

x	1	2	3
y	0,5	2	2,5

Требуется осуществить ее интерполирование: (1) — ступенчатой функцией; (2) — кусочно-линейной; (3) — квадратичной.

Р е ш е н и е.

(1). Ступенчатая функция может быть представлена совокупностью двух прямых, параллельных оси x:

$$y = \begin{cases} 0{,}5, & \text{если} \quad x \in [1{,}2), \\ 2, & \text{если} \quad x \in [2{,}3]. \end{cases}$$

(2). Линейная интерполяция представляется зависимостью

$$y = \begin{cases} 1{,}5x - 1, & \text{если } x \in [1{,}2), \\ 0{,}5x + 1, & \text{если } x \in [2{,}3]. \end{cases}$$

В справедливости последних соотношений легко убедиться. Они обращаются в тождества подстановкой координат табличных точек.

(3). Квадратичная интерполяция приводит к функции

$$y = -0{,}5x^2 + 3x - 2, \quad \text{если} \quad x \in [1, 3].$$

Функция обращается в тождество при табличных значениях координат.

Интерполирующие зависимости рассмотренного примера изображены графиками рис. 1.5. Примеру соответствуют следующие данные: $x_{k-1} = 1$; $x_k = 2$; $x_{k+1} = 3$; $y_{k-1} = 0{,}5$; $y_k = 2$; $y_{k+1} = 2{,}5$.

1.10. Приближения и ошибки

Определение корней и других характеристик многих даже элементарных функций представляет собой непростую задачу.

Математические модели, описывающие реальные процессы и явления, как правило, не позволяют определить точные значения упомянутых характеристик аналитическими методами. А получение приближенных значений требует определенных знаний в области специально разработанных численных методов. Первым этапом в применении численных методов является задание точности вычислений.

В результате реализации различных численных методов, неточности эксперимента, округления чисел и по другим причинам появляются ошибки, отличающие численные значения, характеризующие модель и оригинал. Каждое измеряемое значение некоторой величины в общем случае является лишь приближенным значением этой величины.

Если $\tilde{a}$ есть приближенное значение числа a, то: $a - \tilde{a}$ называют *истинной погрешностью* числа a; $(a - \tilde{a})/a$ — его *относительной погрешностью.*

Если в реальных задачах значение a остается неизвестным, то неизвестна и истинная погрешность. Тем не менее, часто можно указать удовлетворяющую исследователя граничную величину истинной погрешности — положительное число Δa, для которого выполняется условие

$$|a - \tilde{a}| \le \Delta a, \quad \text{или} \quad \tilde{a} - \Delta a \le a \le \tilde{a} + \Delta a. \tag{1.6}$$

Величину Δa называют *абсолютной погрешностью*, а

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} \approx \frac{\Delta a}{\tilde{a}} \quad — \tag{1.7}$$

относительной погрешностью.

Пример 1. Если число $\tilde{a} = 0{,}32$ получено путем «обрыва» измеряемой величины с удержанием двух знаков после запятой, то в качестве абсолютной погрешности можно принять число $\Delta a = 10^{-2}$. Тогда из неравенства (1.6) следует:

$$0{,}32 - 0{,}01 \le a \le 0{,}32 + 0{,}01, \quad \text{или} \quad 0{,}31 \le a \le 0{,}33.$$

1.11. Итерационные методы

Многие задачи исследования функций одной переменной сводятся к необходимости определения аргумента из условия равенства двух функций:

$$f(x) = \varphi(x). \tag{1.8}$$

Функции в общем случае могут быть нелинейными, но при рассмотрении методов их решения, описанных ниже, предполагается, что обе функции, входящие в (1.8), непрерывны, по крайней мере, в окрестности того значения $x = x_*$, которое является решением (корнем уравнения). Отметим, что решению (корню) x_* уравнения соответствует на графике двух функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ точка их пересечения.

Далеко не всегда подобные уравнения позволяют найти точное значение решения (или решений, если оно не одно).

Одним из способов решения (1.8) является *метод последовательных приближений* (*итераций*), заключающийся в следующем. В исходном, нулевом приближении, аргументу x, стоящему в правой (или левой) части уравнения, придается некоторое конкретное значение x_0. По формуле $y = \varphi(x)$ находят то значение y_0, которое соответствует значению $x = x_0$. По найденному y_0 из уравнения $f(x) = y_0$ определяется новое значение x_1 первого приближения. Таким образом, из *рекуррентных* зависимостей последовательно находим:

$$f(x_1) = \varphi(x_0), \quad f(x_2) = \varphi(x_1), \quad \ldots, \quad f(x_n) = \varphi(x_{n-1}).$$

Процесс приближений ведется до достижения достаточной *точности вычисления* x. Точность может быть задана некоторой достаточно малой величиной $\varepsilon > 0$ и при выполнении условия

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{\frac{1}{2}(|x_n| + |x_{n-1}|)} \le \varepsilon \tag{1.9}$$

x_n считается равным искомому значению корня уравнения (1.8).

Пример. Две кривые (рис. 1.6) заданы уравнениями $y = \sqrt{x}$ и $y = 1/x$. Найти с точностью до 5% координаты точки пересечения этих кривых.

Р е ш е н и е. Абсцисса точки пересечения кривых определится из равенства двух функций:

$$\sqrt{x} = \frac{1}{x}.$$

Полученное нелинейное уравнение, в котором $x \in (0; +\infty)$, перепишем в виде

$$x = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{1.10}$$

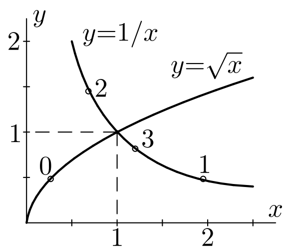


Рис. 1.6. Пример

и применим для его решения итерационный метод. В исходном, нулевом приближении принимаем $x_0 = 0{,}25$. Подставляя это значение x в левую часть (1.10), найдем значение x в первом приближении:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}25}} = 2.$$

Отношение приращения полученных значений переменной x к ее полусумме (относительная ошибка вычисления при условии, что в качестве решения уравнения будет принято значение $x_1 = 2$) составит величину

$$\Delta_1 = \frac{|x_1 - x_0|}{\frac{1}{2}(|x_1|+|x_0|)} = \frac{2 - 0{,}25}{\frac{1}{2}(2+0{,}25)} \approx 1{,}55,$$

т.е. 155%, что не удовлетворяет требуемой условием задачи точности вычисления.

Переходим ко второму приближению. Для этого значение $x_1 = 2$ подставляем в левую часть уравнения (1.10) и находим значение x во втором приближении:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707.$$

Относительная ошибка второго приближения

$$\Delta_2 = \frac{|x_2 - x_1|}{\frac{1}{2}(|x_2| + |x_1|)} = \frac{|0{,}707 - 2|}{\frac{1}{2}(0{,}707 + 2)} \approx 0{,}96$$

также не удовлетворяет требуемой условием задачи точности вычисления.

Результаты дальнейших приближений, полученных по рекуррентной формуле

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}},$$

представлены в виде таблицы

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0,25	2	0,707	1,189	0,917	1,044	0,978	1,011
$\Delta_i, \%$	—	155	96	50,5	26	13	6,5	3,3

Относительная ошибка вычисления сходящейся последовательности приведенных значений x в случае, если принять $x_* = x_7 = 1{,}011$, не превышает величины 5% ($3{,}3 < 5$).

Принимая $x_* = 1{,}011$, найдем $y_* = \dfrac{1}{x_*} = \dfrac{1}{1{,}011} \approx 0{,}989$. Значение y_* можно найти и по формуле $y = \sqrt{x}$:

$$y_* = \sqrt{x_*} = \sqrt{1{,}011} \approx 1{,}005.$$

Из-за того, что корень уравнения x_* определен приближенно, значения y_*, найденные по двум формулам, несколько отличаются друг от друга. Точное значение $y_* = 1$ находится между двумя определенными выше значениями этой величины. Аналогично, точное значение $x_* = 1$ находится между двумя последующими приближениями x. В процессе приближений переменные колеблются, постепенно «стягиваясь» к точному решению — точке (1;1).

1.12. Паутинная модель рынка

Описанный итерационный процесс хорошо интерпретируется на математической модели рынка.

Пусть предложение s (от английского "supply") товара на рынке описывается зависимостью от цены p (от английского "price")

$$s = p^2,$$

а спрос d (от английского "demand") на этот же товар зависимостью

$$d = 1/p.$$

На рис. 1.7 представлены кривые, соответствующие записанным функциям.

Напомним, что в экономической литературе принято цену, являющуюся аргументом функций предложения и спроса, откладывать на графике по оси ординат. Поэтому упомянутые функции, являясь обратными по отношению к функциям рассмотренного выше примера, изображаются на графиках рис. 1.7 такими же, как на рис. 1.6, кривыми. Будем считать, что p — величина, равная отношению цены к некоторому ее среднему значению. Эта же оговорка справедлива по отношению к функциям d и s.

Обратимся к рыночным отношениям, вернувшись к условию рассматриваемой задачи. Пусть в начальной точке 0 рассматриваемого процесса регулирования рыночных отношений продавец выставил товар в количестве $s_0 = 0{,}25$ д.е. по цене $p_0 = \sqrt{s_0} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$. Координаты начальной точки $0(s_0; p_0) = 0(0{,}25; 0{,}5)$.

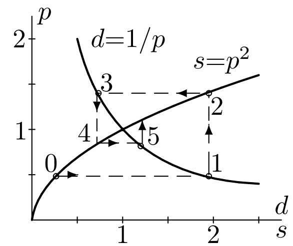


Рис. 1.7. Паутинная модель

Цена $p_0 = 0{,}5$ оказалась достаточно низкой для рыночных отношений. Этот вывод можно сделать потому, что при цене p_0=0,5 спрос на товар $d_1 = \dfrac{1}{p_0} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$ (точка 1 кривой $d(p)$) намного превышает количество представленных на рынок товаров $s_0 = 0{,}25$. Отношения на рынке стали соответствовать точке 1 кривой спроса с координатами: $(d_1; p_0) = (2; 0{,}5)$.

Превышение спроса над предложением позволяет предпринимателю поднять цены на товары до уровня, где цена соответствует кривой предложения: $p_1 = \sqrt{d_1} = \sqrt{s_2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. Рыночные отношения переходят в точку 2, где $s_2 = d_1 = 2$, с координатами $(s_2; p_1) = (2; 1{,}414)$.

Следующим шагом саморегулирования рыночных отношений является переход в точку 3 с координатами $\left(d_3 = \dfrac{1}{p_1} = \dfrac{1}{1{,}414} \approx 0{,}707\right)$ $(d_3; p_1) = (0{,}707; 1{,}414)$.

Приведем полученные и последующие значения координат точек.

$$
\begin{array}{rclrcl}
0(p_0; s_0) & \Longrightarrow & (0{,}5; 0{,}25) & 1(p_0; d_1) & \Longrightarrow & (0{,}5; 2)\\
2(p_1; s_2) & \Longrightarrow & (1{,}414; 2) & 3(p_1; d_3) & \Longrightarrow & (1{,}414; 0{,}707)\\
4(p_2; s_4) & \Longrightarrow & (0{,}841; 0{,}707) & 5(p_2; d_5) & \Longrightarrow & (0{,}841; 1{,}189)\\
6(p_3; s_6) & \Longrightarrow & (1{,}091; 1{,}189) & 7(p_3; d_7) & \Longrightarrow & (1{,}091; 0{,}917)\\
8(p_4; s_8) & \Longrightarrow & (0{,}958; 0{,}917) & 9(p_4; d_9) & \Longrightarrow & (0{,}958; 1{,}044)\\
10(p_5; s_{10}) & \Longrightarrow & (1{,}022; 1{,}044) & 11(p_5; d_{11}) & \Longrightarrow & (1{,}022; 0{,}979)\\
12(p_6; s_{12}) & \Longrightarrow & (0{,}989; 0{,}979) & 13(p_7; d_{13}) & \Longrightarrow & (0{,}989; 1{,}011)\\
14(p_7; s_{14}) & \Longrightarrow & (1{,}005; 1{,}011) & 15(p_7; d_{15}) & \Longrightarrow & (1{,}005; 0{,}995)
\end{array}
$$

Из рис. 1.7 видно, что последовательные шаги на рынке образуют сходящуюся к точке пересечения кривых прямоугольную спираль, своим видом напоминающую паутину. Отсюда модель получила свое название.

Паутинная модель рынка, как видно из сравнения ее решения с рассмотренным выше примером, представляет собой итерационный метод решения уравнений.

При использовании этой модели следует иметь в виду, что сходимость итерационного процесса зависит от вида функций, точка пересечения графиков функций которых определяется.

Во многом сходимость процесса зависит от выбора начальной точки и направления движения к точке пересечения. Так, попытка прийти к искомому решению путем движения на паутинной модели по часовой стрелке (фиксация в нулевом приближении переменной $d_0 = s_0$ и определения по d_0 переменной $p_1 = \dfrac{1}{d_0} = \dfrac{1}{0{,}25} = 4$) приведет к тому, что итерационный процесс определения решения уравнения будет расходиться.

На сходимость паутинной модели экономики влияет достаточно большое количество факторов, от которых зависит поведение функций спроса и предложения.

1.13. Резюме

Одним из базовых понятий в математике является множество. Под множеством понимается совокупность каких-либо объектов. Наиболее распространенными множествами в математике, позволяющими в итоге дать количественную оценку изучаемых явлений и объектов, являются числовые множества (натуральные числа N, целые Z, рациональные Q, иррациональные I, действительные $\Re$).

Основные операции над множествами: объединение ($\cup$), пересечение ($\cap$), вычитание ($\setminus$), включение ($\subset$), принадлежит ($\in$), не принадлежит ($\notin$), эквивалентно ($\equiv$). Так, между числовыми множествами можно поставить знаки:

$$N \subset Z \subset Q \subset \Re, \quad I \subset \Re, \quad Q \cup I \equiv \Re.$$

Еще одним базовым понятием математики является функция — закон, по которому элементам одного множества (или одних множеств для функции нескольких переменных) ставятся в соответствие элементы другого множества. Функциональные зависимости могут быть представлены аналитически, таблично или графически.

Наибольшее распространение в математике находят элементарные функции: степенная (x^n), показательная (a^x), тригонометрические ($\sin x$, $\cos x$) и обратные по отношению к перечисленным: степенная ($x^{1/n}$), логарифмическая ($\log_a x$), обратные тригонометрические ($\arcsin x$, $\arccos x$). Графики обратных функций симметричны графикам основных функций относительно биссектрисы первого координатного угла.

Элементарными функциями являются любые функции, полученные из основных элементарных с помощью арифметических операций и путем построения элементарных функций от элементарных функций.

Среди характерных признаков, позволяющих судить о поведении функций, являются: монотонность, ограниченность, четность, периодичность.

Прибавление к независимой или зависимой переменным постоянной величины смещает график функции вдоль координат x или y соответственно, умножение переменных на постоянный множитель приводит к изменению масштаба соответствующих координат.

Элементарные функции часто используют для аппроксимации точечных экспериментальных данных.

Математические модели, описывающие реальные процессы, часто представляются уравнениями, решение которых методами математического анализа (в том числе с использованием операции дифференцирования) затруднено или невозможно. В таких случаях прибегают к численным методам.

Наиболее распространенным методом численного анализа является метод последовательных приближений (итераций). Этот метод, в частности, используется для решения нелинейных алгебраических уравнений при нахождении их корней.

Существует большое количество модификаций итерационных методов. К ним относятся следующие.

Преобразование исследуемого уравнения типа $f(x) = g(x)$ к последовательности рекуррентных уравнений

$$f(x_n) = g(x_{n-1}),$$

в которых по заданному в начальном приближении значению x_0 находят значение x_1, по x_1 находят x_2 и т.д. Для сходящегося процесса последовательных приближений можно с любой точностью определить корень уравнения x_*, приняв его равным x_n. Ошибка ε в вычислении корня обычно оценивается по относительному изменению искомой величины (разности двух соседних итераций):

$$\varepsilon = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}.$$

Разновидностью итерационного метода в экономике, используемого для определения точки равновесия между спросом и предложением, является паутинная модель, отслеживающая реальные колебания цен на рынке.

Большинство численных методов, используемых при решении обыкновенных алгебраических уравнений, адаптированы к матричным уравнениям.

Численные методы требуют, как правило, больших затрат времени. Поэтому они становятся эффективными только при использовании ЭВМ, для которых в настоящее время создана обширная библиотека стандартных программ по численным методам.

Для углубления теоретических знаний по множествам и свойствам функций рекомендуются [2, 4, 8, 11, 23, 24], для развития навыков решения задач — [7, 20].

1.14. Вопросы

1. Что такое множество? Что собой представляют элементы множества? точки множества? Что такое равные множества? пустое множество?
2. Что называется объединением множеств? пересечением? Приведите примеры. Изобразите объединение и пересечение плоских областей схематично.

3. Какие множества называются числовыми? С помощью символики теории множеств покажите, как связаны между собой числа: действительные, рациональные, иррациональные, целые, натуральные.
4. Что называется функцией? Что такое область определения функции? область значений?
5. Какие функции называют четными? нечетными? монотонными? возрастающими? убывающими? периодическими? Проиллюстрируйте сказанное графическими построениями.
6. Что называется обратной функцией? Как получить функцию, обратную к заданной? Как в декартовой ортогональной системе координат изображается график обратной функции по отношению к заданной?
7. Что такое сложная функция?
8. Какие функции называются элементарными? Перечислите все основные элементарные функции. Запишите их аналитические выражения. Изобразите графически.
9. Определите области допустимых значений основных элементарных функций; установите их четность и нечетность. Какие из основных элементарных функций являются периодическими? Установите их периоды. Поясните на графиках.
10. Как осуществить перенос графика функции параллельно оси абсцисс? параллельно оси ординат?
11. Как изменить угол наклона к осям координат касательной к графику функции?
12. Что называется интерполированием? Для чего оно необходимо? Что собой представляет интерполирование кусочно-постоянными функциями? линейными? квадратичными? Проиллюстрируйте сказанное графически.
13. Что такое декартово произведение? Как графически представить декартово произведение двух величин? трех величин?
14. Как задается точность вычислений? Как определяется абсолютная ошибка вычислений? относительная ошибка?
15. В чем состоят достоинства итерационных методов? В чем смысл паутинной модели рынка?

Вопросы для тестирования

1. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Объединение множеств	1. $A \backslash A$;
2. Пересечение множеств	2. $A \cap B$;
3. Пустое множество	3. $A \cup B$;
4. Вычитание множеств	4. $A \subset B$.

2. Перечислите номера пунктов, содержание которых определяет декартово произведение.

1. Множество точек на числовой оси.
2. Совокупность пар элементов двух множеств по одному из каждого множества.
3. Числа, входящие в объединение двух числовых множеств.
4. Совокупности n чисел, взятых по одному из n множеств действительных чисел.
5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

3. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5 (соответствие должно отвечать указанному в вопросах множеству, максимальному по количеству элементов).

1. Подмножество рациональных чисел	1. {-0,471; 1,33(3)}.
2. Подмножество иррациональных чисел	2. $\{\sqrt{2}; \pi; \ln 3\}$.
3. Пустое множество	3. {2; 4; 19}.
4. Подмножество целых чисел	4. {-33;-1;0}.

4. Перечислите правильные соотношения между множествами чисел: N — натуральных; Z — целых; Q — рациональных; I — иррациональных; $\Re$ — действительных.

1. $\Re \cap Q = I$; 2. $N \cap I = \varnothing$; 3. $N \cup Z \subset Q$; 4. $Q \cup I = \Re$;

5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

5. Какие множества можно отнести к числовым?

1. Множество натуральных чисел.
2. Множество иррациональных чисел.
3. Пустое множество.
4. Множество векторов.
5. Среди соотношений 1–4 нет требуемых.

6. Какие из утверждений или соотношений можно назвать функцией?

1. Закон, по которому осуществляется однозначное отображение элементов одного множества в другое.
2. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. 3. $u = f(x, y, z)$. 4. $f{:}X \longrightarrow Y$.
5. Среди ответов 1–4 нет правильного.

7. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5 (исходная функция $y = f(x), a > 1$).

1. Перенос графика функции вправо на величину a	1. $y = f(ax)$;
2. Перенос графика функции влево на величину a	2. $y + a = f(x)$;
3. Сжатие оси абсцисс в a раз	3. $y = f(x)/a$;
4. Уменьшение тангенса угла наклона графика к оси абсцисс.	4. $y = f(x - a)$.

8. Какие функции относятся к элементарным?

1. Любые функции, объединенные арифметическими действиями.
2. Функции, не имеющие разрывов.
3. Функции, обратные к основным элементарным.
4. Любые функции, представимые в виде графиков.
5. Среди указанных в пунктах 1 – 4 функций нет требуемых.

9. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), относящихся к понятию «функция». В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Обратная по отношению к заданной	1. Симметрична относительно начала координат;
2. Четная	2. Симметрична относительно оси ординат;
3. Нечетная	3. Симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла;
4. Сложная	4. Содержит квадратные корни.

10. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов относительно свойств функций (левая колонка). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. Четная	1. $\operatorname{tg} x + \ln x$;
2. Нечетная	2. $x^3 - \sin x$;
3. Периодическая	3. $\cos^3 x + x^2$;
4. Монотонно возрастающая	4. $e^x + \operatorname{arctg} x$.

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕМА 1.1

(§ 1.2 теории)

Множества

Вопросы

1. Что такое множество? Что собой представляют элементы множества? точки множества? Что такое равные множества? пустое множество?
2. Как символически записать: a является элементом множества A? B является подмножеством A?
3. Что называется объединением множеств? пересечением? Приведите примеры. Изобразите объединение и пересечение плоских областей схематично.
4. Какие множества называются числовыми?

5. С помощью символики теории множеств покажите, как связаны между собой числа: действительные, рациональные, иррациональные, целые, натуральные.

Задачи

1. Даны множества: $A = \{0, 1, 4, 5\}$ и $B = \{1, 2, 4, 7\}$. Получить множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.
Р е ш е н и е. Пересечение ($\cap$) должно содержать только те элементы, которые одновременно принадлежат и одному и другому множествам:

$$A \cap B = \{1, 4\}.$$

В объединение множеств ($\cup$) входят элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}.$$

Разность двух множеств состоит из тех элементов первого множества, которые отсутствуют во втором множестве:

$$A \setminus B = \{0, 5\}; \quad B \setminus A = \{2, 7\}.$$

Проверкой правильности полученных множеств может служить равенство

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A):$$

$$\{0, 2, 5, 7\} = \{0, 2, 5, 7\} \ (!).$$

2. Вершина равнобедренного треугольника (с основанием $2a$) совпадает с центром квадрата (со стороной a), а две его равные стороны проходят через вершины квадрата рис. 1.8. Определить площади треугольника $S_т$ и квадрата S_k. Найти площади, соответствующие пересечению, объединению и разностям площадей.
Р е ш е н и е. Угол между равными сторонами треугольника равен $\pi/2$, а высота от основания до вершины прямого угла равна a. Поэтому площадь треугольника $S_т = \dfrac{1}{2} 2a \cdot a = a^2$. Площадь квадрата: $S_k = a^2$.

Пересечение площадей представляет собой площадь треугольника OAD:

$$S_{\text{т}} \cap S_k = a^2/4.$$

Объединение площадей — это площадь, накрываемая рассматриваемыми плоскими фигурами. Она складывается из площадей квадрата и треугольника за вычетом дважды повторяющейся площади треугольника OAD:

$$S_{\text{т}} \cup S_k = S_{\text{т}} + S_k - S_o = a^2 + a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7}{4}a^2.$$

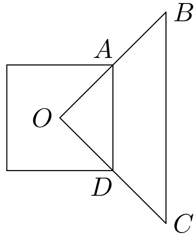


Рис. 1.8. Задача 2

Найденная величина, как видно из рисунка, складывается из площади квадрата и площади трапеции $ABCD$:

$$S_{\text{т}} \cup S_k = a^2 + \frac{1}{2}(2a + a)\frac{a}{2} = \frac{7}{4}a^2.$$

Разность площадей треугольника и квадрата равна площади, занятой треугольником, за вычетом той ее части, которая принадлежит квадрату. Это площадь трапеции $ABCD$:

$$S_{\text{т}} \setminus S_k = \frac{1}{2}(2a + a)\frac{a}{2} = \frac{3}{4}a^2.$$

Площадь квадрата за вычетом площади, занимаемой треугольником OBC, равна площади квадрата без площади треугольника OAD:

$$S_k \setminus S_{\text{т}} = S_k - S_o = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2.$$

Проверим выполнение равенства

$$(S_{\text{т}} \cup S_k) \setminus (S_{\text{т}} \cap S_k) = (S_{\text{т}} \setminus S_k) \cup (S_k \setminus S_{\text{т}}) :$$

$$(S_{\text{т}} \cup S_k) \setminus (S_{\text{т}} \cap S_k) = \frac{7}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{2}a^2;$$

$$(S_{\text{т}} \setminus S_k) \cup (S_k \setminus S_{\text{т}}) = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{2}a^2 \ (!).$$

3. На числовой прямой заданы отрезки: $A = [-5, 0)$; $B = (-1, 2]$; $C = (-5; 4)$; $O = [0]$; и $\varnothing$. Найти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \cap O$; $A \cup O$; $C \setminus A$; $\varnothing \setminus A$; $\varnothing \cup A$; $\varnothing \cap A$.

Р е ш е н и е. $A \cap B = (-1;0)$; $A \cup B = [-5;2]$; $A \setminus B = [-5;-1]$; $B \setminus A = [0;2]$; $A \cap O = \varnothing$; $A \cup O = [-5;0]$; $C \setminus A = [0;4)$; $\varnothing \setminus A = \varnothing$; $\varnothing \cup A = A$; $\varnothing \cap A = \varnothing$.

4. Определить множество точек, заданных соотношениями: $x^2 + 4y^2 - 4 \leq 0$ и $x - y - 1 = 0$.
Решение. Найдем точки пересечения границы неравенства

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

представляющей собой эллипс с полуосями $a = 2$ и $b = 1$, и заданной прямой. Для этого подставим полученное из уравнения прямой выражение для y $(y = x - 1)$ в уравнение эллипса. После преобразования придем к квадратному уравнению

$$5x^2 - 8x = (5 - 8x)x = 0.$$

Корням уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1{,}6$ соответствуют значения y: $y_1 = -1$ и $y_2 = 0{,}6$.

Искомое множество точек принадлежит отрезку $[M_1\ M_2]$ заданной прямой, где $[M_1(0;-1),\ \ M_2(1{,}6;0{,}6)]$.

5. Образуйте все возможные подмножества множества $\{0,\ 1,\ 4\}$.
Р е ш е н и е. $\{0\}$; $\{1\}$; $\{4\}$; $\{0{,}1\}$; $\{0{,}4\}$; $\{1{,}4\}$; $\{0{,}1{,}4\}$.

6. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{1-x}+\ln(x^2-1)-\frac{1}{x+2}.$$

Р е ш е н и е. Заданная функция содержит квадратный корень, логарифмическую функцию и рациональную дробь. Исходя из ограничений, накладываемых на выражения, стоящие под знаками перечисленных функций, запишем систему неравенств:

$$1.\ 1 - x \geq 0; \quad 2.\ x^2 - 1 > 0; \quad 3.\ x + 2 \neq 0.$$

Записанные неравенства приводят к следующим множествам значений переменной x:

$$X_1\colon (-\infty, 1]; \quad X_2\colon (-\infty, -1) \cup (1, +\infty); \quad X_3\colon (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty).$$

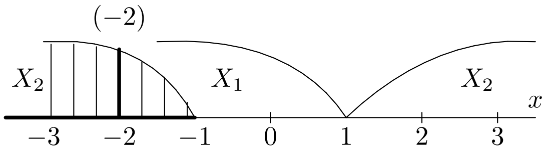


Рис. 1.9. Задача 6

Область определения функций представляет собой пересечение трех записанных множеств:

$$X = X_1 \cap X_2 \cap X_3 = (-\infty, -2) \cup (-2, -1).$$

На рис. 1.9 выделенная жирным вертикальная линия исключается из заштрихованной области допустимых значений.

7. Найти множество допустимых значений переменной x, удовлетворяющих неравенству $0 < x^2 - 3x + 2 \leq 6$.
Р е ш е н и е. Так как корнями уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ являются числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, то левое неравенство можно представить в виде

$$(x-1)(x-2) > 0, \quad \Longrightarrow \quad x < 1 \text{ и } x > 2; \text{ или } X_1\colon\ x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

Если цифру 6 правой части неравенства перенести в его центральную часть и учесть, что корнями уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$ являются числа $x_3 = -1$ и $x_4 = 4$, то правое неравенство можно представить в виде

$$(x+1)(x-4) \leq 0, \quad \Longrightarrow \quad x \geq -1 \text{ и } x \leq 4; \text{ или } X_2\colon\ x \in [-1, 4].$$

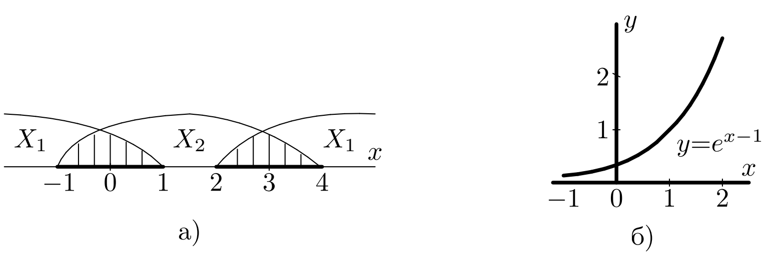


Рис. 1.10. Иллюстрация решений: а) – задача 7; б) – задача 8

Искомое множество X определим как пересечение множеств, полученных из решений первого и второго неравенств (рис. 1.10,а):

$$X = X_1 \cap X_2: \quad \{(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)\} \cap [-1, 4] = [-1; 1) \cup (2, 4].$$

8. Найти область допустимых решений функции $y = e^{x-1}$.
Р е ш е н и е. Функция непрерывна и монотонно возрастает (рис. 1.10,б). Своего минимального значения она не достигает стремясь к нулю при стремлении аргумента x к отрицательной бесконечности. Поэтому Y: $(0, +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны два множества: $A = \{0, 2, 3, 5, 6, 8\}$ и $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$. Получить множества $A \cap B$ и $A \cup B$.

2. Вершина равностороннего треугольника совпадает с центром окружности радиуса R. Сторона треугольника равна $2R$. Найти площади, соответствующие пересечению площадей круга S_k и треугольника $S_{\text{т}}$ и их объединению.

3. На числовой прямой заданы множества: $A=(-3, 0)$; $B=(-1, 4]$; $C = [1, 4)$; $O = [0]$; $P = \emptyset$. Найти: $A \cup O$; $A \cap B$; $A \cup B$; $C \cap O$; $C \cup P$; $C \cap P$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cap C$.

4. Составьте все подмножества множества $\{0, 1, 2\}$.

5. Поясните на графике, из каких элементов состоит множество точек переменной x, которые удовлетворяют условию $\cos x > 0,5$.

В задачах 6 и 7 найти области определения функций:

$$\mathbf{6}.\ y = \sqrt{x} + \lg(2x - 5) - \frac{1}{x - 3}; \qquad \mathbf{7}.\ y = \sqrt[3]{x + 2} - \frac{x}{\lg(1 - x)}.$$

8. Определить область допустимых значений x, удовлетворяющих неравенству $-4 \le x^2 + x - 6 < 0$.

В задачах 9–10 найти области значений функций:

$$\mathbf{9}.\ y = \sin x - \sqrt{3} \cos x; \qquad \mathbf{10}.\ y = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}.$$

ТЕМА 1.2
Функции. Интерполирование
(§ 1.5–1.10 теории)

Вопросы

1. Что называется функцией? Перечислите способы задания функции. Что такое область определения функции? область значений?
2. Какие функции называют четными? нечетными? периодическими?
3. Как в декартовой системе координат изображают график обратной функции по отношению к заданной?
4. Какие функции называются элементарными? Перечислите все основные элементарные функции. Запишите их аналитические выражения. Изобразите графически.
5. Определите области допустимых значений основных элементарных функций; установите их четность и нечетность, периодичность.
6. Как осуществить перенос графика функции параллельно оси абсцисс? параллельно оси ординат? Как изменить угол наклона к осям координат касательной к графику функции?
7. Что называется интерполированием? Для чего оно необходимо?
8. Что собой представляет интерполирование кусочно-постоянными функциями? линейными? квадратичными? Ответ проиллюстрируйте графически.
9. Назовите основные виды ошибок вычисления.

Задачи

В задачах 1 и 2 найти области определения, области значений; исследовать на четность; найти наименьший период и построить графики функций.

1. $y = 3x$.

Р е ш е н и е. В представленной функции переменная y явно выражена через x. Функция не имеет особенностей и существует при $x \in \Re$. При этом $y \in \Re$. Так как $y(-x) = -y(x)$, то функция — нечетная. О нечетности функции говорит тот факт, что переменная x входит в функцию в нечетной (первой) степени.

Функция не является периодической. В противном случае можно подобрать такое число T, что будет справедливо соотношение $y(x+T)=y$. Убедимся в том, что $T\neq 0$ не существует:

$$y(x+T)=3x+3T.$$

Правая часть полученного выражения $3x = y(x)$ только при $T=0$.

График функции (рис. 1.11,а) представляет собой прямую, проходящую через начало координат и наклоненную к оси x под углом $\theta=\operatorname{arctg}3$.

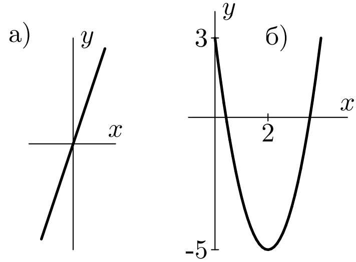


Рис. 1.11. Графики решений:
а) – задача 1: б) – задача 2

2. $y=2x^2-8x+3$.

Р е ш е н и е. В представленной функции переменная y явно выражена через x. Максимальная степень полинома правой части функции — два, причем x входит в функцию во второй и в первой степенях, поэтому функция не является ни четной, ни нечетной.

Функция не имеет особенностей, поэтому $x\in\Re$, $y\in\Re$. Она не является периодической, так как не найдется такой величины T, что будет выполняться равенство $y(x)=y(x+T)$.

Преобразуем слагаемые с x таким образом, чтобы выделить полный квадрат суммы (разности):

$$y=2(x^2-4x+4)-8+3=2(x-2)^2-5.$$

Отсюда получим

$$(x-2)^2=\frac{1}{2}(y+5).$$

Это парабола. Она симметрична относительно прямой $x=2$. Директриса параболы описывается уравнением $y=-5-\dfrac{1}{8}$, а фокус $F\left(2;-5+\dfrac{1}{8}\right)$.

3. Исследовать функцию $y=\operatorname{tg}x$ и обратную к ней.

Р е ш е н и е. Функция терпит разрыв при $x=k\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ и имеет период $T=\pi$, так как $y(x+\pi)=\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}x=y$.

Обратная по отношению к $y=\operatorname{tg}x$ является функция $y=\operatorname{arctg}x$.

Графики прямой и обратной функций симметричны биссектрисе первого координатного угла (рис. 1.12,б).

4. Функцию $x = y^2$ преобразовать так, чтобы ее график по отношению к заданному:

1) сместился вправо на 2;
2) опустился на 3;
3) увеличил тангенс угла наклона касательной к оси x в 2 раза;
4) одновременно удовлетворил условиям пунктов 1–3.

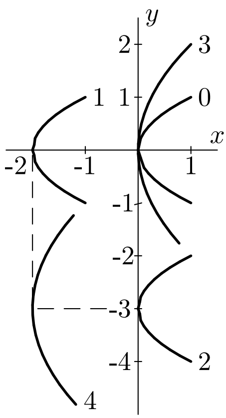


Рис. 1.12. Графики задачи 3

Р е ш е н и е (рис. 1.12):

1) для смещения графика функции вправо (по оси абсцисс) на величину a=2 достаточно координату x уменьшить на 2:

$$x - 2 = y^2;$$

2) координату y (ординату) увеличиваем на 3:

$$x = (y + 3)^2;$$

3) так как тангенс угла наклона касательной пропорционален производной от функции по x, то его увеличение в n раз равносильно делению координаты y на n:

$$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2, \quad \text{или} \quad y = 2\sqrt{x}.$$

В исходном варианте $y'_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. В пункте 3 $y'_3 = \dfrac{2}{2\sqrt{x}}$. Поэтому

$$\frac{y'_3}{y'_0} \frac{\operatorname{tg} \theta_3}{\operatorname{tg} \theta_0} = 2;$$

4) $x - 2 = \left(\dfrac{y + 3}{2}\right)^2$.

5. Осуществить интерполяцию функции $y = f(x)$, заданной таблично:

x	0,5	1	2
y	1,5	1	2

а) кусочно-постоянными функциями с левыми опорными точками;
б) линейными функциями;
в) квадратичными функциями.
Р е ш е н и е.

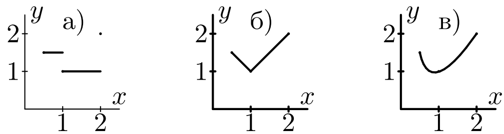


Рис. 1.13. Интерполяция функциями: а) – кусочно-постоянными; б) – линейными; в) – квадратичными

Интерполяция функций, заданных таблично, служит в том числе для того, чтобы определить значения функции не только в точках, где она задана, но и в любой промежуточной точке:

а) предположим, что функция, заданная таблицей в некоторой точке, не изменяет своего значения на всем отрезке изменения аргумента от рассматриваемой точки до следующей. В этом случае аналитическое представление функции можно представить в виде

$$y = \begin{cases} 1{,}5, & \text{если} \quad 0{,}5 \le x < 1{,}0; \\ 1{,}0, & \text{если} \quad 1{,}0 \le x \le 2{,}0. \end{cases}$$

Это интерполяция табличных значений кусочно-постоянными функциями, равными ее левым табличным значениям (рис. 1.13,а).

б) интерполяция табличных значений линейными функциями графически представляется прямыми линиями, соединяющими соседние табличные точки. Параметры в уравнении прямой $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$ находятся из условия прохождения прямой через две соседние точки таблицы. Получим уравнения прямых для условия задачи. Прямая, проходящая через точки $(0{,}5; 1{,}5)$ и $(1; 1)$:

$$\frac{x - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = \frac{y - 1{,}5}{1 - 1{,}5}, \quad \Longrightarrow \quad x + y = 2.$$

Прямая, проходящая через точки $(1; 1)$ и $(2; 2)$:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 1}{2 - 1}, \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Интерполяцию табличных данных линейными функциями представим в виде

$$y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если} \quad 0{,}5 \le x \le 1{,}0; \\ x, & \text{если} \quad 1{,}0 \le x \le 2{,}0. \end{cases}$$

График интерполирующей функции показан на рис. 1.13,б.

Нестрогие неравенства $x \le 1{,}0$ и $1{,}0 \le x$ оправданы тем, что значения функции при $x = 1$ справа и слева от этой точки равны: $y(1) = 1$.

в) интерполяция табличных значений квадратичной функцией $y = ax^2 + bx + c$ сводится к определению параметров a, b и c из условия прохождения кривой через три точки:

$$\begin{cases} 1{,}5 = (0{,}5)^2 a + 0{,}5b + c, \\ 1 = (1)^2 a + 1 \cdot b + c, \\ 2 = (2)^2 a + 2 \cdot b + c, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 4/3, \\ b = -3, \\ c = 8/3. \end{cases}$$

Используя полученные значения, запишем уравнение параболы, которая является искомой интерполирующей функцией (рис. 1.13,в):

$$y = \frac{4}{3}x^2 - 3x + \frac{8}{3}.$$

Найденные в пунктах а) — в) интерполирующие функции позволяют определить значения y при любых $x \in [0{,}5; 2]$. Например, при $x = 1{,}5$ получим:

$$y_{\text{а}} = 1; \quad y_{\text{б}} = 2; \quad y_{\text{в}} = 1{,}5; \quad y_{\text{г}} \approx 1{,}17.$$

Значения функции существенно отличаются друг от друга и отдать предпочтение какому-либо из них трудно. В курсе эконометрики будут рассмотрены приемы, позволяющие выбирать аппроксимирующие (интерполирующие) функции, с достаточной точностью описывающие статистические данные. Но для этого потребуется гораздо больше табличных данных, чем в рассмотренном примере.

6. Монотонно изменяющаяся функция проходит через две точки: $M_1(1{,}4;\ 2{,}4)$ и $M_2(2;\ 2{,}1)$. Используя линейную интерполяцию, найти значение функции $y_* = y(x_*)$ при $x_* = 1{,}6$. Определить максимально возможные абсолютную и относительную ошибки определения y_*.
Р е ш е н и е. Составляем уравнение прямой, проходящей через заданные точки:

$$\frac{x-1{,}4}{2-1{,}4}=\frac{y-2{,}4}{2{,}1-2{,}4}.$$

После преобразования придем к уравнению прямой с угловым коэффициентом

$$y=-0{,}5x+3{,}1.$$

Найдем соответствующее $x_*=1{,}6$ значение $y_*=-0{,}5{\cdot}1{,}6+3{,}1=2{,}3$.

Это промежуточное значение между $y_1=2{,}4$ и $y_2=2{,}1$.

Максимальная абсолютная ошибка

$$\Delta y_{\max}=\max\{|y_1-y_*|;|y_2-y_*|\}=\max\{|2{,}4-2{,}3|;|2{,}1-2{,}3|\}=0{,}2.$$

Максимальная относительная ошибка

$$\delta y_{\max}=\frac{\Delta y_{\max}}{0{,}5(y_1+y_2)}=\frac{0{,}2}{0{,}5(2{,}4+2{,}1)}\approx 0{,}0889.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–10 найти области определения; области значений; выяснить четность; найти наименьший период и построить графики функций.

1. $y=-2x^2$; **2**. $y=-2(x+3)^2+1$; **3**. $y=-2x^2+5x-2$;

4. $y=\dfrac{2}{x}$; **5**. $y=\dfrac{2}{x-1}-2$; **6**. $y=\dfrac{4x-3}{x-1}$; **7**. $y=\log_{0,5}(2x)$;

8. $y=\log_{0,5}(-2x)$; **9**. $y=\sin 2x$; **10**. $y=\sin x+\cos(x-\pi/3)$.

11. Функцию $y=x^2-2x-8$ преобразовать так, чтобы ее график по отношению к заданному:

а) сместился влево на 1;

б) поднялся вверх на 9;

в) переместился так, чтобы x и y стали собственными осями координат кривой;

г) уменьшил угол наклона касательной к оси x в 2 раза;

д) одновременно удовлетворил условиям пунктов 3–4.

12. Осуществить интерполяцию функции $y=f(x)$, заданной таблично:

а) кусочно-постоянными функциями;

x	-1	0	1	2	3
y	0,5	0	0,5	2	2,5

б) линейными функциями;

в) квадратичными функциями.

Используя линейную интерполяцию, найти значение функции при $x = 1{,}6$. Определить максимальные значения абсолютной и относительной ошибок интерполяции.

Глава 2

Последовательности и пределы

2.1. Предел числовой последовательности

Если по некоторому закону каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие определенное число $a_n \in \Re$, то это означает, что задана *числовая последовательность*:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{2.1}$$

Число a_n называют *общим*, или n-м, членом последовательности.

Не исключено, что среди членов последовательности имеются одинаковые, например, $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$.

Так как множество N, которому принадлежат номера элементов a_n последовательности, не ограничено, то количество членов любой последовательности (если это не оговорено) бесконечно.

Если для любого n справедливо соотношение $a_n < a_{n-1}$, то последовательность называется *монотонно убывающей*; если $a_n > a_{n-1}$, — *монотонно возрастающей.*

Примерами монотонных последовательностей могут служить последовательности, образованные членами геометрических прогрессий. Если знаменатель прогрессии $q < 1$, то последовательность монотонно убывающая (и ограниченная):

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \ldots;$$

при $q > 1$ — монотонно возрастающая (и неограниченная):

$$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \ldots, \left(\frac{3}{2}\right)^n, \ldots$$

Последовательность 1, 0, 1, 0 …, хотя и ограниченная, но монотонной не является.

Рассмотрим последовательность

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \ldots \tag{2.2}$$

Члены этой последовательности, оставаясь поочередно больше или меньше единицы, при возрастании n последовательно приближаются к ней. Единица является предельным значением последовательности (2.2).

Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_\varepsilon$, такое, что при $n > n_\varepsilon$

$$|a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Последнее выражение равносильно неравенству

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Изложенное определение математически представляется выражением

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*; не имеющая предела — *расходящейся.*

Пример. Используя определение, доказать, что последовательность (2.2) сходится к единице.

Р е ш е н и е. Запишем условие $\left|\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) - 1\right| < \varepsilon$, вытекающее из определения (2.3) предела числовой последовательности.

Из этого условия следует $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ и $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$. Ясно, что каким бы малым не было число ε, всегда можно найти натуральное число $N = n$, которое будет больше дроби $1/\varepsilon$ с неравным нулю знаменателем.

Примером расходящейся последовательности (последовательности, не имеющей предела) является приведенная выше последовательность $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$

Введенное в определение предела последовательности число ε называют ε-окрестностью числа A. Название связано с его геометрическим смыслом. Действительно, любому числу можно поставить в соответствие точку на числовой прямой. Тогда неравенству (2.3) (или $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$) на числовой прямой будут соответствовать отрезки, границы которых отстоят от точки A на расстоянии ε.

С использованием свойств вложенных отрезков (§1.4) можно доказать следующее утверждение.

Теорема. *Числовая последовательность не может иметь более одного предела.*

2.2. Монотонные последовательности

Следует иметь в виду, что *последовательность* и *множество элементов последовательности* — понятия, в общем, не тождественные. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет бесчисленное множество элементов, так как $n = 1, 2, \ldots$. Что касается множества значений этой последовательности, то оно состоит только из двух элементов: $\{+1, -1\}$.

Последовательность $\{a_n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ называется *ограниченной* сверху, если $\forall n \;\; \exists M \in \Re$ такое, что $a_n \leq M$.

Последовательность $\{a_n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ называется *ограниченной* снизу, если $\forall n \;\; \exists N \in \Re$ такое, что $a_n \geq N$.

Приведем без доказательства (но интуитивно понятные) две теоремы.

Теорема 1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Теорема 2. *Всякая ограниченная сверху (снизу) монотонная последовательность $\{a_n\}$ имеет предел. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\})$.*

Следствие из теоремы 2. *Для того, чтобы монотонно возрастающая (убывающая) последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху (снизу).*

Доказанная в § 1.4 теорема о вложенных отрезках позволяет сформулировать утверждение: *если $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — система вложенных отрезков, а ξ — точка, принадлежащая всем отрезкам системы, то $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Пример. Используя последнее утверждение, получим соотношение, позволяющее находить значения иррационального числа e с любой точностью.

Рассмотрим числовую последовательность: $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Вычисление значений последовательности дает следующие результаты: $a_1 = 2{,}0$; $a_2 = 2{,}25$; $a_3 = 2{,}37$; $a_4 = 2{,}441$; $a_5 = 2{,}488$ и т. д.

Для исследования последовательности обратимся к формуле бинома Ньютона (Nefton Isaac, 1643-1727 — величайший английский физик и математик, считается одним из основателей дифференциального исчисления).

Именем Ньютона называется известное в математике равенство для двучленов (биномов):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{2.4}$$

Здесь $n \in N$; $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^{n-k}$ — *число сочетаний* из n элементов по k; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читается «эн факториал») представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Согласно определению факториала: $0! = 1! = 1$.

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, запишем выражение для a_n:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

В каждом слагаемом записанной суммы количество множителей в числителе, не считая единицы, равно степени числа n в знаменателе, поэтому

$$a_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = 2 + S_n. \tag{2.5}$$

Здесь $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} s_k$; $s_k = \dfrac{1}{k!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)$.

Отметим особенности полученного для a_n выражения. Во-первых, все множители, стоящие в круглых скобках последовательности $\{s_n\}$, образующей сумму S_n, — положительные числа, меньшие единицы (из единицы вычитается правильная дробь).

Во-вторых, с ростом n увеличивается число положительных слагаемых в сумме S_n. Поэтому между элементами последовательности $\{a_n\}$, в которые входят суммы S_n, можно поставить знаки неравенства $a_{n-1} < a_n$, т. е. последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастающая.

Дадим оценку суммы S_n. Из отмеченных особенностей и из соотношения (2.5) следует неравенство

$$S_n < \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

Сумма, стоящая в правой части неравенства, — это сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $b = 1/2$ и знаменателем $q = 1/2 < 1$. По известной из школьного курса математики формуле суммы членов геометрической прогрессии получим:

$$S_n < \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \Big/ \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Так как $S_n < 1$, то $a_n < 2+S_n < 2+1 = 3$. То есть рассматриваемый предел ограничен сверху числом 3.

Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Поэтому значение искомого числа e заключено внутри неравенства

$$2 < e < 3.$$

Согласно теореме 2 и теореме о вложенных отрезках (§1.4) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2.6}$$

Число e, называется иногда *неперовым* числом по имени шотландского математика Непера (Napier John, 1550–1617), изучавшего свойства логарифмов. Это число повсеместно используется в математическом анализе. В частности, число e является основанием *натурального логарифма.*

Число e иррационально, т. е. оно не может быть представлено в виде обыкновенной дроби, а вычисляется лишь с некоторым приближением, но с любой точностью ($e = 2{,}718281\ldots$). Свойство иррациональности (трансцендентности) числа e доказал Эрмит (Hermite Charles, 1822–1901) — французский математик.

В заключение параграфа сформулируем в виде теоремы *критерий Коши* существования предела числовой последовательности (Caushy Augustin Louis, 1789–1857 — великий французский математик).

Теорема 3 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность* $\{a_n\}$ *сходилась, необходимо и достаточно чтобы* $\forall\,\varepsilon > 0$, *начиная с некоторого номера* n_ε, *члены последовательности* a_i *и* a_k *с номерами* $i \geq n_\varepsilon$ *и* $k \geq n_\varepsilon$ *удовлетворяли неравенству*

$$|a_i - a_k| < \varepsilon.$$

Ограничимся доказательством необходимости теоремы.

Пусть $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Зададимся числом $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon/2 > 0)$. Согласно определению (2.3) предела последовательности, существует такой номер n_ε, что для любого $n > n_\varepsilon$ справедливо неравенство $|a_n - A| < \varepsilon/2$.

Пусть $i > n_\varepsilon$ и $k > n_\varepsilon$. Тогда

$$|a_i - a_k| = |(a_i - A) + (A - a_k)| \leq |a_i - A| + |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняются условия теоремы Коши.

2.3. Операции над последовательностями

Над последовательностями как математическими объектами можно совершать некоторые математические действия. Перечислим эти действия и опишем их основные свойства.

Суммой двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность $\{c_n\}$, каждый n-й элемент которой $(n = 1, 2, \ldots)$ равен сумме соответствующих элементов последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$: $c_n = a_n + b_n$.

Произведением последовательности $\{a_n\}$ на число λ называется последовательность $\{c_n\}$, каждый элемент которой определяется соотношением $c_n = \lambda a_n$.

Две перечисленные линейные операции обладают следующими свойствами.

— Коммутативность и ассоциативность для операции сложения:

$$\{a_n\}+\{b_n\} = \{b_n\}+\{a_n\}; \qquad \{a_n\}+(\{b_n\}+\{c_n\}) = (\{a_n\}+(\{b_n\})+\{c_n\}.$$

— Дистрибутивность по отношению к операции умножения суммы последовательностей на число:

$$\lambda(\{a_n\} + \{b_n\}) = \lambda\{a_n\} + \lambda\{b_n\}.$$

Операции умножения и деления по отношению к последовательностям $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, как к совокупности чисел, лишены смысла. Тем не менее, в качестве *произведения* и *частного от деления последовательностей* рассматриваются последовательности, элементы которых равны произведениям и частным от деления элементов соответствующих последовательностей $\{c_n\} = \{a_n b_n\}$ и $\{d_n\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$. Последовательность $\{d_n\}$ имеет место только в случае, если все $b_n \neq 0,\ \ n = 1, 2, \ldots$.

Перечислим, не приводя доказательств, основные свойства пределов рассмотренных последовательностей. Для этого рассмотрим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с *конечными* пределами.

1. Если $\{a_n\} = \{b_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

2. Предел суммы двух сходящихся последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3. Если все члены сходящейся последовательности $\{a_n\}$ имеют одинаковый множитель λ, то при рассмотрении предела последовательности этот множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n.$$

4. Если две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

5. Если две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

при условии, что $b_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

К двум рассмотренным в пунктах **1 — 5** последовательностям добавим еще одну $\{c_n\}$, имеющую конечный предел и такую, что для всех элементов трех последовательностей с одинаковыми порядковыми номерами $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$a_n < b_n < c_n.$$

6. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, то последовательность $\{b_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

2.4. Предел функции (связь с последовательностями)

Рассмотренные в предыдущих параграфах главы числовые последовательности, их пределы и некоторые свойства числовых последовательностей и их пределов позволяют подойти к определению предела функции $y = f(x)$.

Определение 1. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную во всех точках интервала (a, b), за исключением, возможно, некоторой точки x_0. Зададим на интервале (a, b) последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$x_n \in (a, b), \quad x_n \neq x_0, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Если при этом $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то говорят, что в точке $x = x_0$ *функция имеет предел*, равный числу A. Математическая формулировка этого факта: $f(x) \to A$ при $x \to x_0$, или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A. \tag{2.7}$$

Приведенное определение предполагает единственность предела.

Ссылаясь на раздел математического анализа программы средней школы отметим, что во всех точках рассмотренного в определении примера, за исключением точки x_0, функция $f(x)$ считается непрерывной. Более строгое определение непрерывности функции будет дано в §2.11.

Рассмотрим примеры использования числовых последовательностей для определения пределов функций.

Пример 1. Выяснить, существует ли и если существует, то найти $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 2}{x + 1}$.

Р е ш е н и е. Выберем, в общем произвольную, числовую последовательность x_n такую, что $x_n \neq 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Используя свойства пределов числовых последовательностей (§2.3), найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3x_n^2 - 2}{x_n + 1} = \frac{3\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2 - 2}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) + 1} = -2.$$

При выборе числовой последовательности предполагалось, что все члены этой последовательности принадлежат области определения $f(x)$, т. е. $x_n \neq -1$.

Полученный результат $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -2$, согласно определению 1, приводит к утверждению, что существует единственное значение предела:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2.$$

Пример 2. Выяснить, существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, если $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. Выберем две числовые последовательности $\{x_n^k\}$ $(k = 1, 2; \quad n = 1, 2, \ldots)$ такие, что $x_n^k \neq 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = 0$:

$$x_n^1 = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}; \quad x_n^2 = \frac{1}{2\pi n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

При конечных значениях n: $x_n^1 \neq 0$ и $x_n^2 \neq 0$. Пределы обеих последовательностей при $n \to \infty$ равны нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$.

Найдем пределы заданной функции от аргументов, представляющих собой числовые последовательности и стремящихся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^2) = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = 1.$$

Различные значения пределов числовых последовательностей указывают на то, что предела функции $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$ не существует.

2.5. Определения предела функции

В предыдущем параграфе предел функции связывался с пределом числовых последовательностей. В этом параграфе рассмотрены другие распространенные определения пределов функций, опирающиеся на свойства непрерывности их аргументов.

Определение 2. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к бесконечности*, если $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ S$ такое, что при $|x| > S$

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Предел функции обозначается:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции при $x \to \infty$ поясняется рис. 2.2,а.

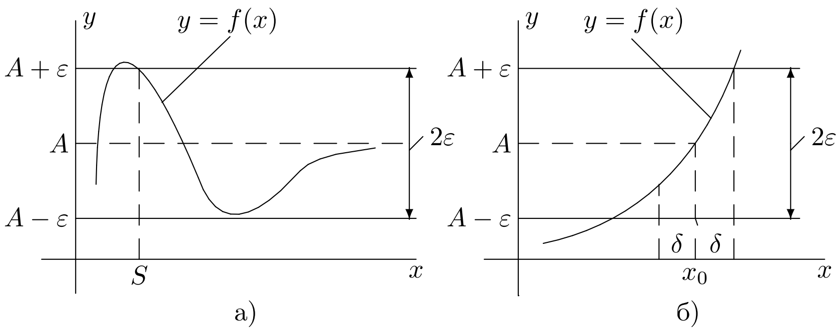


Рис. 2.1. Предел функции

Неравенство (2.8) равносильно двойному неравенству $A-\varepsilon< f(x) < A+\varepsilon$, соответствующему расположению части графика при $x > S$ в полосе шириной 2ε.

Замечание: сформулированное определение предполагало неограниченное возрастание переменной x по абсолютной величине. В ряде задач приходится иметь дело с частными случаями: $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Теорема остается справедливой в обоих отмеченных случаях, но в записи выражения для предела необходимо у символа бесконечности ставить соответствующий знак.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+a^{-x})=1$ при $a>1$.

Р е ш е н и е. Так как $|1+a^{-x}-1|=\left|\dfrac{1}{a^x}\right|$, то определение предела (2.8) приводит к неравенству $\left|\dfrac{1}{a^x}\right|<\varepsilon$.

Неравенство выполнимо при условиях определения предела.

Определение 3. Число A называется *пределом функции в точке* $x=x_0$, т. е. при x, стремящемся к x_0, если для $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0$, и при условии $|x-x_0|<\delta$

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Математическая запись сформулированного определения:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Геометрический смысл ε-окрестности переменной y, δ-окрестности переменной x и предела A функции $y=f(x)$ следует из рис. 2.2,б.

Неравенство $|x-x_0|<\delta$, равносильное двойному неравенству $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, соответствует на графике отрезку 2δ на оси абсцисс, а неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, равносильное двойному неравенству $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, — отрезку 2ε на оси ординат.

Определение 4. Число A является пределом функции $f(x)$ при $x\to x_0$, если $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta$-окрестность точки x_0, такая, что $\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$$f(x)\in(A-\varepsilon,A+\varepsilon).$$

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0, за исключением может быть самой точки. Пусть x_1 и x_2 $(x_1\neq x_2)$ — произвольные точки, принадлежащие некоторой δ-окрестности точки x_0: $(x_o-\delta,x_0+\delta)$. Если для любого $\varepsilon>0$ выполняется условие $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Коши* в окрестности точки x_0.

Теорема (критерий Коши). *Для того, чтобы функция $f(x)$ имела конечный предел в точке $x=x_0$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши при $x\to x_0$. Под x_0 в теореме понимается конечное число, а также $\pm\infty, x_0^+$ и x_0^-.*

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, возможно, самой точки x_0.

Определение 5. Если $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$, то число A называется *пределом слева от точки x_0 функции $f(x)$.*

Аналогично вводится понятие *предел справа от точки* x_0 *функции*:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = B.$$

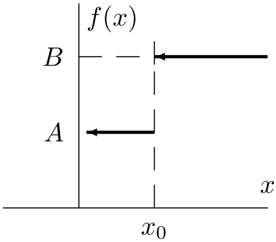


Рис. 2.2. Пример 2

Пример 2. Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{если} \quad x \le x_0, \\ B, & \text{если} \quad x > x_0. \end{cases}$$

Функция непрерывна слева. График функции показан на рис. 2.2. Стрелки на рисунках ставятся, указывая на направление от точки непрерывности.

2.6. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0.$$

В последней записи под знаком предела могут стоять $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

В качестве примеров бесконечно малых величин можно назвать $\lg x$ при $x \to 1$, $\cos x$ при $x \to \pi/2$, $\dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$, x при $x \to 0$ и т. д.

Следует четко представлять разницу между очень маленькой величиной и бесконечно малой. Как бы мала ни была даже очень маленькая, но фиксированная величина, всегда можно задать величину меньше ее, например, поделив очень маленькую величину на два. Поэтому по определению §2.4 эта величина не может иметь предела, равного нулю.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ в некоторой точке x_0 (конечной или бесконечной) имеет предел, равный A, то эту функцию в малой окрестности точки x_0 можно представить в виде суммы числа A и какой-либо бесконечно малой в этой точке величины $\alpha(x)$:*

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Утверждение теоремы очевидно, так как для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ по определению предела функции будет выполняться условие $|f(x) - A| < \varepsilon$, и по определению бесконечно малой величины будет выполняться условие $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$, которые в окрестности точки $x = x_0$ отличаются на бесконечно малую величину $f(x) = g(x) + \alpha(x)$ называются *эквивалентными* в окрестности точки x_0.

Очевидно равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [g(x) + \alpha(x)] = \lim_{x\to x_0} g(x) + \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если для нее выполняются условия:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \infty.$$

В качестве бесконечно больших величин можно назвать $\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi/2$, $\dfrac{1}{1-x}$ при $x \to 1$, x при $x \to \infty$ и т. д.

Оговорим, как и для случая бесконечно малых величин, что нельзя отождествлять очень большие, но фиксированные величины, с бесконечно большими.

Перечислим некоторые **свойства** бесконечно малых и бесконечно больших величин.

1. Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от бесконечности, есть величина бесконечно малая. В качестве функции в произведении может стоять постоянная величина.

3. Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую конечный предел в рассматриваемой точке (в частности, на постоянную величину), есть величина бесконечно большая.

Существует теорема о связи бесконечно больших и бесконечно малых величин.

Теорема 2. *Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая (но не равная нулю) величина при $x \to x_0$, то функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ есть величина бесконечно большая при $x \to x_0$ и наоборот.* Под x_0, как и ранее, понимается, в частности, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$.

Например, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi$ отвечают условию теоремы.

2.7. Теоремы о пределах функций

Сформулированные в этом параграфе теоремы, описывающие свойства пределов функций, во многом повторяют свойства пределов числовых последовательностей. (§ 2.3). Это естественно, так как определение предела функции связано с пределом числовой последовательности (§ 2.4).

Пусть две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют пределы при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A; \qquad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = B.$$

Под x_0 понимается, в частности, 0, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$.

Использованное в предпоследней фразе понятие «напрерывности» функции известно из школьного курса математики. Тем не менее, в §2.11 дано определение и описаны основные свойства непрерывных функций.

Сформулируем без доказательств основные теоремы о пределах.

Теорема 1. *Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций*:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + \varphi(x)] = A + B.$$

Теорема 2. *Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций*:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot \varphi(x)] = A \cdot B.$$

Из сформулированной теоремы следуют два частных случая:
— постоянный множитель можно выносить за знак предела (предел постоянной величины равен самой постоянной)

$$\lim_{x \to x_0} [cf(x)] = cA;$$

— показатель степени можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n.$$

Теорема 3. *Предел частного от деления двух функций равен частному от деления пределов этих функций при условии, что предел делителя отличен от нуля*:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Замечание. При использовании теорем 1–3 для решения задач следует иметь в виду, что существование пределов сумм, произведений и частных от деления двух функций не означает, что существуют пределы самих функций. Таким образом сформулированные теоремы не имеют обратного действия.

Например,

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x) = \lim_{x\to x_0} 1 = 1,$$

хотя $\lim\limits_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x = \infty$, т. е. не существует.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x+5}{x-5} = \{$используем свойства сформулированных теорем$\} = \dfrac{3\left(\lim\limits_{x\to -1} x\right)+5}{\left(\lim\limits_{x\to -1} x\right)-5} = \dfrac{3\cdot(-1)+5}{-1-5} = -\dfrac{1}{3}.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x+5}{x-5} = \{$подстановка предельного значения $x = 5$ в выражение, стоящее под знаком предела, дает результат, из которого видно, что числитель равен конечной величине 20, а знаменатель равен 0. Деление конечной величины на бесконечно малую в пределе дает бесконечно большую величину$\} = \infty$.

2.8. Неопределенности в пределах

При определении пределов сумм, произведений и частных от деления функций нередко возникают неопределенности. Такие ситуации имеют место в случаях, когда функции, стоящие под знаком пределов, в рассматриваемой точке бесконечно малы или бесконечно большие.

Неопределенности называют и обозначают следующим образом:

$\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$	—	«ноль делить на ноль»;
$\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$	—	«бесконечность делить на бесконечность»;
$\{0\cdot\infty\}$	—	«ноль умножить на бесконечность»;
$\{0^\infty\}$	—	«ноль в степени бесконечность»;
$\{\infty^0\}$	—	«бесконечность в нулевой степени»;
$\{0^0\}$	—	«ноль в нулевой степени»;
$\{1^\infty\}$	—	«единица в степени бесконечность»;
$\{\infty-\infty\}$	—	«бесконечность минус бесконечность».

Существует множество способов «раскрытия» неопределенностей, т. е. преобразования функций, стоящих под знаком предела, к выражению, предел которого можно вычислить.

Продемонстрируем эти способы на конкретных примерах вычисления пределов.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\{$для раскрытия неопределенности разложим числитель на множители и сократим дробь на $(x-1)$. Сокращение правомерно, так как при $x\to 1$ переменная $(x-1)$ стремится, но не равна нулю$\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x-1}=\infty$.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\{$для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю$\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$ $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\dfrac{1}{8}$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\{$для раскрытия неопределенности перейдем к новой переменной $t=\sqrt[6]{x}$. Тогда $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$; при $x\to 1, t\to 1\}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2+t+1}{t+1}=\dfrac{3}{2}$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^3+2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\{$для раскрытия неопределенности вынесем переменную x^3 (наибольшая степень, в которой входит x в числитель и знаменатель) и сократим на нее$\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{-1}-x^{-3}}{1+2x^{-3}}=$ $=\dfrac{0-0}{1+0}=0$.

В отношении последнего примера отметим общее правило:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{если } n<m;\\ a_n/b_m, & \text{если } n=m;\\ \infty, & \text{если } n>m.\end{cases}$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x-\cos x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$ {для раскрытия неопределенности разделим числитель и знаменатель на x}$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}}=$
$=\Bigg\{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$, так как в числителе этих выражений стоят ограниченные функции, а в знаменателях — неограниченные$\Bigg\}=\dfrac{2+0}{1-0}=2.$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\{\infty-\infty\}=$ {умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела, на сопряженную ей функцию}$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$ {поделим числитель и знаменатель на x. В подкоренных выражениях получатся суммы единицы и бесконечно малых по сравнению с единицей величин}$=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}}=1.$$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=\{\infty-\infty\}=$ {приводим выражение к общему знаменателю} $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+x)-2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)}$
$=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+x}=-\dfrac{1}{2}.$

В приведенных примерах использованы лишь некоторые характерные подходы к раскрытию неопределенностей. Читатель должен понять, что раскрытие неопределенностей — «дело не хитрое», но требует определенного навыка и сообразительности.

Существуют два предела, называемых *замечательными*, к которым сводятся некоторые типы задач на отыскание пределов. Раскрытие неопределенностей в этих пределах требует нетрадиционного подхода.

2.9. Замечательные пределы

Первым замечательным пределом называется

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{2.9}$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (2.9), рассмотрим круг радиуса R (рис. 2.3) и построим на нем два прямоугольных треугольника, площади которых обозначим: $S_1 = S_{\Delta OAB}$; $S_2 = S_{\Delta OCD}$.

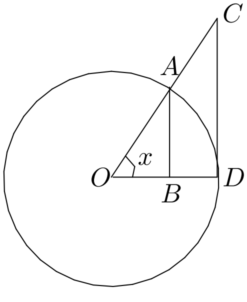


Рис. 2.3. Первый замечательный предел

Площади треугольников выразим через угол x при вершине O:

$$S_1=\frac{1}{2}R^2\sin x\cos x,\quad S_2=\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x;$$

площадь сектора OAD: $S_c=\dfrac{1}{2}R^2x$.

Запишем очевидные неравенства:

$$S_1<S_c<S_2,\qquad\text{или}$$

$$\frac{1}{2}R^2\sin x\cos x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x.$$

Разделим все части неравенства на $\dfrac{1}{2}R^2\sin x>0$:

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

и запишем соответствующее неравенство для обратных величин (знаки неравенств при этом изменятся на противоположные):

$$\frac{1}{\cos x}>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Перейдем к пределу во всех частях полученных неравенств, устремляя x к нулю. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то

$$1>\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}>1.$$

Отсюда следует формула (2.9).

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x} =$ {числитель и знаменатель разделим на x с соответствующими множителями и используем свойство предела произведения функций } $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}\cdot 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x} = 1\cdot 3\cdot 1 = 3.$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x/2\to 0}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

В примере §2.2 была рассмотрена монотонно возрастающая ограниченная последовательность $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ при стремлении n к бесконечности и показано, что предел этой последовательности равен числу e.

Использование сформулированного в (§2.4) правила перехода от предела последовательности к пределу функции позволяет утверждать, что имеет место равенство, называемое *вторым замечательным пределом*:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2.10}$$

Заменим переменную в этом пределе. Пусть $x = 1/u$. Тогда при $x\to\pm\infty$ $u\to 0$. В результате получим еще одну разновидность записи второго замечательного предела:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e. \tag{2.11}$$

Приведем примеры применения второго замечательного предела.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{(x/2)}\right)^{(x/2)\cdot 6} =$

$$= \left[\lim_{(x/2)\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x/2)}\right)^{(x/2)}\right]^6 = e^6.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{3/x} = \{-2x = u,\quad u\to 0\} =$

$$= \lim_{u\to 0}(1+u)^{(-1/u)\cdot 6} = \left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{(1/u)}\right)^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

В заключение параграфа отметим некоторые свойства пределов показательно-степенных функций, которые упрощают процесс их вычисления.

Пусть предел *показательно-степенной* функции

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = C.$$

При вычислении таких пределов полезно учитывать следующее:

- если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $C = A^B$;
- если $A \neq 1$ и $B \neq \pm\infty$, то предел находится путем непосредственной подстановки предельного значения аргумента.
- если $A = 1$ и $B = \infty$, то полагают $f(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Тогда $C = \lim\limits_{x\to a} \big(1 + \alpha(x)\big)^{g(x)}$ и дальнейшие преобразования позволят выделить второй замечательный предел.

Пример 5. Найти $L = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{5x}$.

Для приведенной задачи $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) = 1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} 3x = \infty$, т. е. $C = A^B = 1^\infty$. В этом случае функцию $f(x)$ представляем в виде суммы $1 + \alpha(x)$:

$$\frac{x+1}{x-2} = 1 + \left(\frac{x+1}{x-2} - 1\right) = 1 + \frac{3}{x-2}.$$

Вернемся к исходному пределу:

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x-2}\right)^{5x} = \lim_{3/(x-2)\to 0} \left[\left(1 + \frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{15x}{x-2}} =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{15x}{x-2}\right) = \exp 15.$$

Пример 6. Найти $L = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x^m}\right)^{bx^n}$.

Преобразуем L, выделив второй замечательный предел:

$$L = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^m/a}\right)^{x^m/a}\right]^{abx^{n-m}} = \exp\left(ab \lim_{x\to\infty} x^{n-m}\right).$$

Значения предела зависят от параметров a, b, m и n:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x^m}\right)^{bx^n} = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad n>m,\ ab>0; \\ 0, & \text{если} \quad n>m,\ ab<0; \\ e^{ab}, & \text{если} \quad n=m; \\ 1, & \text{если} \quad n<m. \end{cases}$$

2.10. Математика финансов

Рассмотрим некоторые задачи, возникающие при совершении финансовых операций. Математический аппарат, служащий решению этих задач, носит название *математики финансов.*

В нижеследующих преобразованиях величины, измеряемые в процентах, будем сопровождать соответствующим символом. Например, в равенстве $r = r\%/100$ r — некоторая относительная величина; $p\%$ — та же величина в процентах.

Рассмотрим задачу о начислении процентов.

2.10.1. Начисление процентов на вклады

Пусть первоначальный вклад в банк составил S_0 денежных единиц (д. е.). Банк выплачивает ежегодно $r\%$ годовых. Поставим задачу определения величины вклада через n лет его хранения в банке.

Если в начислении процентов каждый раз участвует лишь исходный вклад, то по истечении года хранения в банке размер вклада увеличится на S_0r станет равным $S_1 = S_0(1 + r)$, через два года: $S_2 = S_0 + 2rS_0 = S_0(1 + 2r)$ и т. д. Через n лет хранения в банке вклад составит величину

$$S_n = S_0(1 + nr). \tag{2.12}$$

Это формула *простого начисления процентов.*

Пусть размер накопленного вклада (с учетом начисляемых процентов) ежегодно увеличивается в $(1 + r)$ раз. То есть

$$S_1 = S_0(1 + r);\ S_2 = S_1(1 + r) = S_0(1 + r)^2\ \ldots$$

Выражение

$$S_n = S_0(1 + r)^n \tag{2.13}$$

называется *формулой начисления сложных процентов.* Формула предусматривает начисление «процентов на проценты».

Если начислять проценты по вкладам не один, а k раз в году, то при том же ежегодном приросте r начисление за первую часть (из k частей) года составит r/k, а размер вклада за n лет при общем количестве начислений, равном kn, составит:

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}. \tag{2.14}$$

Если начисления производить раз в году, то $k = 1$; два раза в году — $k = 2\ldots$, ежемесячно — $k = 12$; ежедневно — $k = 365$; ежечасно — $k = 8760\ldots$ Если начисления производить непрерывно, то $k \to \infty$. Тогда размер вклада за n лет составит (S_0 — постоянная величина, которую можно выносить за знак предела):

$$S_n = S_0 \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn} = S_0 \left(\lim_{k/r\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k/r}\right)^{k/r}\right)^{rn}.$$

В скобках стоит второй замечательный предел. Поэтому

$$S_n = S_0 e^{rn}. \tag{2.15}$$

Полученная формула выражает *экспоненциальный закон* роста (при $r > 0$) или убывания (при $r < 0$) и в экономике используется для непрерывного начисления процентов, в частности при обосновании и выборе инвестиционных решений.

Формулы (2.12) и (2.13) связывают между собой четыре величины: количество лет n (сроков начисления процентов kn), ставку банка r, начальный вклад S_0, величину вклада через n лет S_n. По известным трем из перечисленных параметров всегда можно определить четвертый. Если, например, вкладчику требуется определить срок n, на который необходимо положить вклад S_0 в банк, чтобы при сложной процентной ставке $r\%$ этот вклад вырос до величины S_n, то можно воспользоваться формулой, получаемой путем логарифмирования выражения (2.13):

$$n = \frac{\ln S_n - \ln S_0}{\ln(1+r)} = \frac{\ln(S_n/S_0)}{\ln(1+r)}. \tag{2.16}$$

При получении последней формулы логарифмирование может проводиться по любому основанию.

Процентная ставка при известных трех других параметрах определится по формуле

$$r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{S_0}} - 1.$$

Задача определения величины начального вклада S_0 по заданным S_n, r и n называется *дисконтированием*. Для решения этой задачи можно воспользоваться вытекающей из (2.13) формулой

$$S_0 = S_n(1+r)^{-n}. \tag{2.17}$$

Пример 1. Годовая процентная ставка банка $r\% = 15\%$ с ежегодным сложным начислением процентов. Определить, сколько лет ожидания потребуется клиенту банка для того, чтобы его вклад удвоился.

Решение. Воспользуемся формулой (2.16) и найдем n при условии, что $S_n = 2S_0$:

$$n = \frac{\ln(S_n/S_0)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln 2}{\ln(1+\frac{15}{100})} \approx 4{,}95.$$

Так как начисления в банке производятся по истечении каждого полного года хранения вклада, то клиенту необходимо ждать 5 лет.

Пример 2. Определить величину взноса в банк, которая по истечении 5 лет составит сумму 10 000 д. е. при ежегодном сложном начислении процентов банком, равном 12%.

Решение. Воспользовавшись формулой дисконтирования (2.17), найдем

$$S_0 = S_n(1+r)^{-n} = 10\,000\left(1+\frac{12}{100}\right)^{-5} \approx 5\,674.$$

2.10.2. Эффективная процентная ставка

Многообразие форм кредитования и инвестирования выдвигает требование выработки критерия оценки выгодности размещения капитала на инвестируемом или ином предприятии.

Одним из критериев такой оценки служит *эффективная годовая ставка* r_e — это ставка, начисляемая банком один раз в год и дающая тот же прирост денежных средств, что и сложные проценты с годовой ставкой r, начисляемые k раз в году.

Следуя определению, приравняем формулы (2.13) и (2.14):

$$S_0(1 + 1 \cdot r_e) = S_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k.$$

Отсюда находим

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1. \tag{2.18}$$

В отличие от эффективной ставки годовая ставка r с начислением k раз в году (каждый раз по r/k) называется *номинальной*.

Пример. Определить, в какой из двух банков выгоднее вкладывать деньги на год, если первый банк начисляет 16% один раз в полгода, второй 15% ежемесячно.

Р е ш е н и е. Найдем эффективные годовые ставки для двух банков ($k_1 = 2$, $k_2 = 12$, $r_1 = 16/100 = 0{,}16$, $r_2 = 15/100 = 0{,}15$):

$$r_{e1} = \left(1 + \frac{r_1}{k_1}\right)^{k_1} - 1 = \left(1 + \frac{0{,}16}{2}\right)^2 - 1 \approx 0{,}1664;$$

$$r_{e2} = \left(1 + \frac{r_2}{k_2}\right)^{k_2} - 1 = \left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0{,}1611.$$

Расчеты показали, что эффективная годовая ставка первого банка выше, чем у второго.

2.10.3. Аннуитет

Предположим, что через равные промежутки времени клиент вносит на свой счет в банке одинаковые платежи. Такая операция называется *аннуитетом*. Накопленная в банке через некоторое время сумма будет складываться из этих платежей и процентных начислений банка.

Пусть ежегодные платежи в банк, в том числе и начальный взнос, равны ΔS, а ежегодная ставка банка со сложным начислением процентов равна r.

После года хранения начального взноса на него производится начисление $r\Delta S$. Так что начальный взнос через год хранения станет равным $S_1 = \Delta S + r\Delta S = (1 + r)\Delta S$.

В начале следующего года клиент вносит второй взнос в банк. По истечении второго года на счету клиента будет значиться сумма

$$S_2 = (1 + r)(\Delta S + S_1) = (1 + r)\Delta S + (1 + r)^2\Delta S.$$

И так далее. К концу n-го года на счету клиента образуется сумма, определяемая равенством

$$S_n = (1+r)\Delta S + (1+r)^2\Delta S + \ldots + (1+r)^n\Delta S. \qquad (2.19)$$

В правой части записанного равенства стоит сумма n членов геометрической прогрессии, у которой первый член $b = (1+r)\Delta S$, а знаменатель $q = 1 + r > 1$.

Обращаясь к формуле суммы n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b\frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad (2.20)$$

запишем выражение для определения суммы, накопленной за n лет аннуитета:

$$S_n = \frac{1+r}{r}[(1+r)^n - 1]\Delta S. \qquad (2.21)$$

Если начисления производятся банком k раз в году и взносы ΔS_k осуществляются также k раз в году, то вместо (2.21) следует использовать формулу

$$S_n = \left(1 + \frac{k}{r}\right)\left[(1 + r/k)^{kn} - 1\right]\Delta S_k. \qquad (2.22)$$

Пример 1. Руководство предприятия подсчитало, что через 5 лет работы для замены устаревающего оборудования ему потребуется 10 000 д. е. Возникает вопрос, каковыми должны быть ежегодные платежи предприятия в банк, процентная ставка которого составляет 12% годовых?

Р е ш е н и е. Исходные данные для расчета: $n = 5$, $S_n = S_5 = 10\,000$, $n = 5$, $r = 0{,}12$.

Для определения искомой суммы ежегодных платежей ΔS выразим эту величину из соотношения (2.21):

$$\Delta S = \frac{rS_n}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}.$$

Подставим в полученное выражение исходные данные:

$$\Delta S = \frac{0{,}12 \cdot 10\,000}{(1+0{,}12)\left[(1+0{,}12)^5 - 1\right]} \approx 1405{,}4.$$

За 5 лет на счет банка предприятие перечислит $S = \Delta S \cdot n = 1405{,}4 \cdot 5 = 7\,027$ д.е.

В примере 2 раздела 2.10.1 по формуле дисконтирования 2.17 была получена сумма 5 674, которую единовременно необходимо внести в банк, чтобы при условиях рассмотренного примера получить через 5 лет хранения в банке сумму 10 000 д.е.

Плата за рассрочку внесения взносов значительна: $7\,027 - 5\,674 = 1\,353$ д.е.

Еще большую сумму предприятию пришлось бы выплатить банку при условии ежеквартальных платежей.

Ежеквартальные выплаты подсчитаем по формуле, получаемой из 2.22:

$$\Delta S_k = \frac{S_n}{\left(1+\frac{k}{r}\right)\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}-1\right]} = \frac{10\,000}{\left(1+\frac{4}{0{,}12}\right)\left[\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 5}-1\right]} = 361{,}3.$$

За $kn = 4\cdot 5 = 20$ кварталов в банк будет внесена сумма $kn\Delta S_k = 20\cdot 361{,}3 = 7\,226$ д.е.

Формулы (2.21) и (2.22) получены в предположении, что начисляются сложные проценты.

Если регулярные вклады размера ΔS банк принимает под простые проценты, то начальный взнос ΔS к концу первого года хранения станет равным $S_1 = (1+r)\Delta S$. К концу второго года $S_2 = (1+r)\Delta S + (1+2r)\Delta S$. К концу n-го года хранения и ежегодных взносов сумма накоплений составит

$$S_n = (1+r)\Delta S + (1+2r)\Delta S + \ldots + (1+nr)\Delta S.$$

Преобразуем правую часть равенства с учетом соотношения

$$1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1):$$

$$S_n = n\left[1+\frac{1}{2}(n+1)r\right]\Delta S. \tag{2.23}$$

Пример 2. По данным примера 1 решить задачу с простым начислением процентов.

Р е ш е н и е. Из формулы (2.23) выражаем

$$\Delta S = \frac{S_n}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{2}r(n+1)}.$$

Подставим данные примера 1 ($r = 0{,}12$):

$$\Delta S = \frac{10\,000}{5}\frac{1}{1+\dfrac{1}{2}0{,}12\cdot(5+1)} \approx 1470{,}6,$$

что больше годового взноса (1 405) в банк, начисляющий сложные ежегодные проценты.

2.11. Непрерывность функции в точке

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) определена в точке x_0;

2) имеет конечный предел при $x \to x_0$ (справа и слева);

3) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Продемонстрируем смысл содержания перечисленных пунктов на примерах, в которых требуется исследовать непрерывность функций в точке $x = 0$.

Пример 1. $y = \dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ не определена (не существует, терпит разрыв), поэтому в указанной точке функция не является непрерывной (рис. 2.4,а).

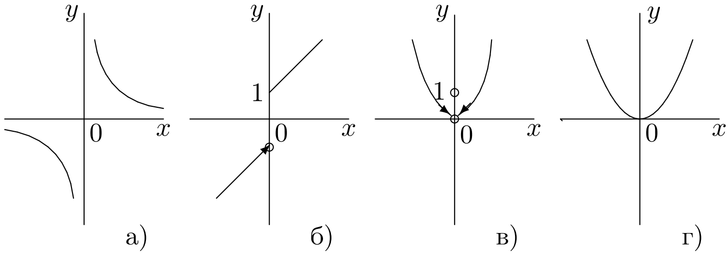


Рис. 2.4. Примеры на проверку условий непрерывности

Пример 2.

$$y = \begin{cases} x-1 & \text{при} \quad x \le 0; \\ x+1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ не является непрерывной (рис. 2.4,б): для второго неравенства $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$, для первого неравенства $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$. То есть в точке $x = 0$ существуют односторонние пределы функции слева и справа, но эти пределы не равны.

Пример 3.

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \neq 0; \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ не является непрерывной (рис. 2.4,в): первые два условия непрерывности выполнены (функция определена $f(0) = 1$ и существует общий предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$), но не выполняется третье условие: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

Пример 4. $y = x^2$.

Р е ш е н и е. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ непрерывна (рис. 2.4,г), так как выполнены все три условия непрерывности: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(x) = 0$.

Условие 2 определения непрерывности функции в точке равносильно следующему утверждению: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется условие

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Разность $x - x_0 = \Delta x$ есть приращение аргумента, а $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ — приращение функции. Условие $x \to x_0$ равносильно условию $x - x_0 = \Delta x \to 0$. Поэтому можно утверждать следующее.

Определение 2. Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если функция в этой точке не является непрерывной. Точкой разрыва *первого рода* называют точки, в которых пределы функции справа и слева не равны между собой, но конечны (рис. 2.4,б).

Точка, в которой хотя бы один (справа или слева) предел равен бесконечности или не существует, называется точкой разрыва *второго рода* (рис. 2.4,а).

Точка $x = 0$, показанная на рис. 2.4,в, называется точкой *устранимого разрыва*. Такие точки относят к точкам разрыва первого рода.

Перечислим основные свойства функций, непрерывных в точке.

Свойство 1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, то их сумма $f(x) + \varphi(x)$, произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ и частное от деления $f(x)/\varphi(x)$ (при условии $\varphi(x) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в этой точке.

Свойство 2. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = u_0$ и функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, причем $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Последнее свойство позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема (правило замены переменной под знаком предела). *Пусть существуют пределы двух функций* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = y_0$ $(\varphi(x) \neq y_0$ *при* $x \neq x_0)$ *и* $\lim\limits_{y \to y_0} f(y)$. *Тогда при* $x \to x_0$ *существует предел сложной функции* $f\big(\varphi(x)\big)$ *такой, что*

$$\lim_{x \to x_0} f\big(\varphi(x)\big) = \lim_{y \to y_0} f(y).$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1 - x) = \{$произведем замену переменной в сложной функции: $1 - x = u$. При $x \to 0$ $u \to 1\} = \lim\limits_{u \to 1} \ln u = 0$.

Свойство 3. Если функция непрерывна в точке $x = x_0$, то знак функции можно выносить за знак ее предела при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right),$$

или (для сложной функции):

$$\lim_{x \to x_0} f\big(\varphi(x)\big) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right).$$

2.12. Функции, непрерывные на промежутках

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на промежутке* $[a, b]$ (в частности, a или b или оба граничные значения могут быть неограниченными), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. При этом под непрерывностью функции в точке $x = a$ подразумевается непрерывность справа, а в точке $x = b$ — непрерывность слева.

Пример. Доказать непрерывность функции $y = x^2$.
Р е ш е н и е. Для доказательства воспользуемся соотношением, вытекающим из определения 2 непрерывной функции.

Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[(x + \Delta x)^2 - x^2] = \lim\limits_{\Delta x \to 0}[2x\Delta x + (\Delta x)^2] = 0.$

На основании определения делаем вывод о том, что функция непрерывна при всех значениях $x \in \Re$.

Сформулируем в виде теорем некоторые свойства функций, непрерывных на отрезке.

Начнем с двух теорем, сформулированных и доказанных Вейерштрассом (Wierstras Karl, 1815–1897, немецкий математик).

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Всякая функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке* (рис. 2.5,а).

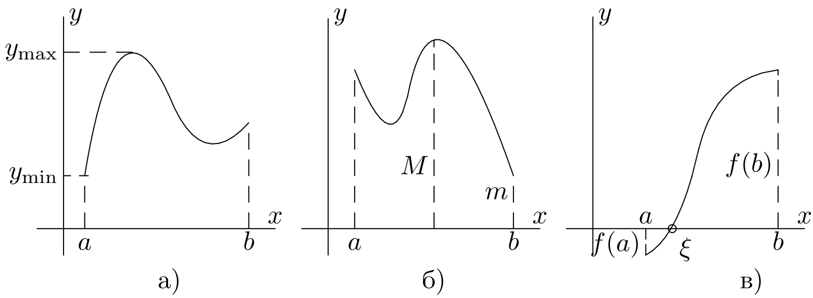


Рис. 2.5. К свойствам непрерывных функций

Не останавливаясь на строгом доказательстве теоремы (как и других теорем параграфа), отметим, что смысл этой и других теорем интуитивно понятен и может быть пояснен графическими построениями.

Теорема 1 может быть несправедливой для интервалов, открытых хотя бы с одного конца. Например, функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, но на концах отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ терпит разрыв.

Теорема 2 (Вейерштрасса). *Всякая функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.* (Точки M и m на рис. 2.5,б).

Теорема 3 (Больцано-Коши) (Bolzano Bernard, 1781–1848, чешский математик). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и ее значения на концах отрезка имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется по меньшей мере одна точка $\xi \in (a, b)$ та-*

кая, что $f(\xi) = 0$ — график функции пересекает ось x хотя бы в одной точке (рис. 2.5,в).

Теорема 4 (Коши) *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа C, заключенного между A и B существует такая точка ξ, что $f(\xi) = C$.*

Другая формулировка теоремы Коши: *если непрерывная функция принимает в некоторых точках два различных значения, то она принимает и любые значения, заключенные между A* и B.

В исследовании поведения функций важное значение имеют два следствия из теоремы Коши.

Следствие 1. Из теоремы Коши вытекает теорема 3.

Следствие 2. Пусть на отрезке $[a, b]$ верхняя грань непрерывной функции $\sup\limits_{[a,b]} f(x) = M$, нижняя грань — $\inf\limits_{[a,b]} f(x) = m$. Тогда на $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает любые значения из отрезка $[m, M]$.

В заключение параграфа напомним известные из школьного курса математики области определения элементарных функций, являющиеся промежутками их непрерывности.

Многочлен n-ной степени $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (n \in N)$, представляющий собой линейную комбинацию степенных функций x^n, непрерывен на всей числовой оси.

Рациональная функция $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(P_n(x), Q_m(x)$ — многочлены) непрерывна во всех точках, где $Q_m(x) \neq 0$.

Степенная функция $x^a \quad (a \in \Re)$ непрерывна при всех $x \geq 0$. Кроме того, при $x < 0$ степенная функция определена и непрерывна при некоторых значениях a. Например, $x^{2n} \quad \sqrt[2n+1]{x} \quad (n \in Z)$.

Показательная функция a^x при $a > 0$ определена и непрерывна при всех $x \in \Re$. Если $a < 1$, то функция монотонно убывает, при $a > 1$ — монотонно возрастает. При $a = 1$ показательная функция равна единице при всех числовых значениях x. Функция $e^x = \exp x$ наиболее широко используемая в различных математических моделях называется *экспоненциальной.*

Логарифмическая функция $\log_a x$. При $a > 1$ и $a \neq 1$ функция определена при всех $x > 0$. На указанном множестве изменения a функция непрерывна, причем она монотонно убывает при $a < 1$ и монотонно возрастает при $a > 1$. Особую роль в математике играют логарифмические функции с основанием $a = 10$ и $a = e$: $\log_{10} x = \lg x$; $\log_e x = \ln x$. Логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной функции.

Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ определены и непрерывны при всех $x \in \Re$. Обе функции ограничены $(-1 \leq \sin x \leq 1)$, $(-1 \leq \cos x \leq 1)$. Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны во всех точках числовой оси, кроме точек, соответственно $x = \pi n$ и $x = \pi n/2$. Функция $\operatorname{tg} x$ монотонно возрастает, $\operatorname{ctg} x$ монотонно убывает в области определения этих функций.

Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны в областях их определения.

При анализе непрерывности обратных функций следует руководствоваться следующим утверждением. Если функция $f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то обратная функция $f^{-1}(x)$ определена, строго монотонна, непрерывна и однозначна на отрезке $[f(a), f(b)]$.

Так, например, функция $\cos x$ монотонно убывает на отрезке $[0, \pi]$. При этом $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$. Поэтому на рассматриваемом отрезке изменения функции $\cos x$ отрезок монотонности $\arccos x$: $[-1, 1]$.

2.13. Сравнение функций

Нахождение пределов частного от деления бесконечно малых, бесконечно больших и конечных величин может привести к различным результатам. В частности, под знаком предела частного от деления функций может оказаться конечное число, бесконечное или результатом деления могут быть неопределенности типов $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

В связи со сказанным уместно вести речь о сравнении функций.

Пусть $c \neq 0$ — произвольная постоянная.

Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестности точки x_0 (за исключением, может быть, самой точки) выполняется неравенство $|f(x)| \leq c|g(x)|$, то говорят, что $f(x)$ *ограниченная функция* по сравнению с $g(x)$ в окрестности точки x_0.

Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ ограниченная по сравнению с функция $g(x)$ и одновременно функция $g(x)$ ограниченная по сравнению с функция $f(x)$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются *функциями одного порядка.*

Из определения функций одного порядка следует: если при $x \neq x_0$

$f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ и существует

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0,$$

то функции $f(x)$ и $g(x)$ — функции одного порядка.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to x_0$, если выполняется неравенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Приведенные понятия справедливы, в частности, при сравнении бесконечно малых или бесконечно больших величин.

Если для двух бесконечно малых (при $x \to x_0$) величин $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ выполняется условие $\dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_2(x)} = c$, то функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки x_0.

Например, $\operatorname{tg}(x-1)$ и x^2-1 — бесконечно малые функции одного порядка в окрестности точки $x = 1$, так как

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1} = \lim_{(x-1) \to 0} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)\cos(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Если $\dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_1^k(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_2(x)} = c$ то $\alpha_2(x)$ называется бесконечно малой функцией k-го порядка малости по сравнению с $\alpha_1(x)$ в окрестности точки x_0.

Аналогичные определения вводятся и для бесконечно больших величин. Пусть $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ — бесконечно большие величины в точке x_0.

Если $\dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} \beta_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \beta_2(x)} = c$, то функции $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ называются бесконечно большими одного порядка в окрестности точки x_0.

Если $\dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} \beta_1^k(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \beta_2(x)} = c$ то $\beta_2(x)$ называется бесконечно большой функцией k-го порядка по сравнению с $\beta_1(x)$ в окрестности точки

x_0. Например, функция x^3 является бесконечно большой третьего порядка по сравнению с x при $x \to \infty$.

Обозначим эквивалентность знаком $\sim$ и приведем примеры величин, которые при $x \to 0$ эквивалентны:

$$\sin x \sim \arcsin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 - x).$$

В эквивалентности этих функций можно убедиться, вычисляя пределы их попарных отношений. Проверку рекомендуется провести после изучения правила Лопиталя (§ 4.2).

Сравнение порядков функций позволяет зачастую упростить преобразования при отыскании пределов этих функций.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \{y = \arcsin x,\ x = \sin y,\ y \to 0\} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Преобразования свели пример к первому замечательному пределу, а результат указывает на эквивалентность функций, стоящих в числителе и знаменателе.

Если $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 0$, то $f(x)$ — бесконечно малая функция по сравнению с функцией $g(x)$. Обозначение: $f = o(g)$.

Порядок малости функций можно оценить, вычисляя предел их отношения. Например,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0. \tag{2.24}$$

Равенство нулю предела отношения, указывает на то, что в числителе стоит величина x^2, которая при $x \to 0$ является функцией, более высокого порядка малости, чем функция $\sin x$, стоящая в знаменателе.

В заключение параграфа сформулируем две теоремы.

Теорема 1. *Функции $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ эквивалентны при $x \neq x_0$ если при $x \to x_0$ выполняется одно из условий $f(x) - g(x) = o(f)$* или *$g(x) - f(x) = o(g)$.*

Теорема 2. *Пусть $f(x) \sim \varphi(x)$ и $g(x) \sim \gamma(x)$ при $x \to x_0$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\gamma(x)}$. При этом*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\gamma(x)}.$$

Пример 2. Найти $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x - x^2) - \arcsin 2x + x^4}{(e^x - 1)^2 + \sin 3x}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем функции, стоящие в числителе и знаменателе под знаком предела, заменяя некоторые из них на эквивалентные и отбрасывая слагаемые с большим порядком малости $o(u)$ (u — функция, с которой сравниваются другие величины) при $x \to 0$:

$\ln(1 + x - x^2) \sim x - x^2 + o(x - x^2)$. Но $o(x - x^2) = o(x)$ и $x^2 = o(x)$, поэтому $\ln(1 + x - x^2) = x + o(x)$.

$\arcsin 2x \sim 2x + o(2x) = 2x + o(x)$. $\quad x^4 = o(x)$.

$(e^x - 1)^2 = x^2 = o(x)$. $\quad \sin 3x = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$.

Так как конечная сумма бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая, то

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x) + 2x + o(x) + o(x)}{2x + o(x) + 3x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x + o(x)}{5x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Пример 3. Найти $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$.

Р е ш е н и е. Введем новую переменную $y = a^x - 1$. При $x \to 0$ $y \to 0$ поэтому переменные x и y эквивалентны $x \sim y$. Выразим x через y, прологарифмировав выражение $a^x = 1 + y$: $x = \dfrac{\ln(1 + y)}{\ln a}$. Проведем замену переменных в исходном пределе и затем перейдем к эквивалентным функциям в знаменателе:

$$L = \lim_{y \to 0} \frac{y \ln a}{\ln(1 + y)} = \ln a \lim_{y \to 0} \frac{y}{y + o(y)} = \ln a.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{2.25}$$

В частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 -$$

выражение, которое можно отнести к «замечательным пределам».

Пример 4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 - x^2 + 3x - 1}{2x^3 + 5x - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 + O(x^3)}{2x^3 + O(x^3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x^3}{2x^3} = 3.$$

2.14. Резюме

Для исследования числовых множеств их, как правило, упорядочивают, в частности, располагают в порядке увеличения счетного номера элемента множества. При этом могут иметь место различные особенности поведения элементов. Элементы могут возрастать (в частности, неограниченно), убывать (в частности, до нуля или до неограниченной отрицательной величины), колебаться с некоторыми периодами, могут стремиться к определенной предельной величине по мере роста ее счетного номера.

Изучение характера поведения таких величин важно, в том числе в экономических исследованиях при обработке и анализе статистических данных и при составлении прогнозов.

Потребность в исследовании поведения последовательностей привела к необходимости определения их предельных значений.

Поведение дискретных множеств легко обобщается на непрерывные множества. При описании поведения непрерывных величин приходится иметь дело и исследовать поведение бесконечно малых и бесконечно больших величин, вычислять пределы функций, которые могут иметь неопределенности при подстановке в них конечных значений аргумента. Характерные неопределенности:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad 0^{\infty},\quad \infty^{0},\quad 0^{0},\quad 1^{\infty},\quad \infty-\infty.$$

Есть два характерных предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=(1^{\infty})=e,$$

называемых первым и вторым замечательными пределами. К этим пределам сводятся многие реальные задачи. В частности, в банковских операциях используется процедура непрерывного начисления процентов, которая определяется после раскрытия неопределенности с помощью второго замечательного предела:

$$r=e^{-nt}.$$

Математика, используемая в банковских операциях, имеет дело с простым начислением процентов, при котором сумма начального вклада S_0 через n лет при ежегодном начислении $r\% = 100r$ процентов возрастает до $S_n = S_0(1 + rn)$.

Если осуществляется начисление «процентов на проценты» ежегодно, то через n лет $S_n = S_0(1 + r)^n$.

В ряде банковских операций расчеты производят с использованием формул, базирующихся на простой и сложной схемах начисления процентов. Так, при операции дисконтирования (определения суммы начального вклада S_0, которая через n лет должна превратиться в S_n):

$$S_0 = S_n(1 + r)^{-n}.$$

Эффективная годовая процентная ставка r_e (ставка при простом начислении процентов, дающая тот же результат, что и сложные проценты при начислении k раз в году):

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1.$$

Ставка аннуитета (одинаковые платежи ΔS в банк через равные промежутки времени со сложным начислением процентов) приводит к итоговой сумме:

$$S_n = \frac{(1 + r)}{r}[(1 + r)^n - 1]\Delta S.$$

Для углубленного изучения материала главы следует обратиться к учебникам [2, 10, 11, 15].

2.15. Вопросы

1. Дайте определение числовой последовательности.
2. Какая последовательность чисел называется монотонной? ограниченной? сходящейся? расходящейся?
3. Что такое предел числовой последовательности?
4. Что называется пределом функции на бесконечности? в точке? Поясните эти понятия на графике понятия предела функции на бесконечности и в точке.
5. Как связаны между собой понятия ε-окрестности функции и δ-окрестности аргумента?

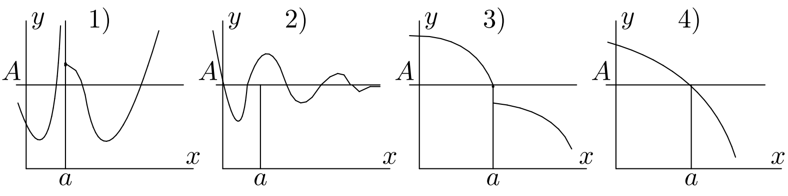
6. Какие величины называются бесконечно малыми? бесконечно большими?
7. Как с пределом функции связано понятие бесконечно малой величины? бесконечно большой величины?
8. Перечислите основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин.
9. Перечислите основные свойства пределов функций. В каких случаях можно менять местами знаки предела и функции?
10. Какие пределы называют «замечательными»?
11. Запишите выражение для первого замечательного предела. Поясните на рисунке его смысл.
12. Запишите выражение для второго замечательного предела.
13. Приведите примеры экономических задач, в которых используется второй замечательный предел.
14. Перечислите основные виды неопределенностей и назовите характерные приемы их раскрытия.
15. Дайте определения непрерывной функции. Как связано понятие непрерывности функции с понятием предела?
16. Перечислите основные свойства функций, непрерывных в точке, на отрезке.
17. Какие функции называются эквивалентными?

Вопросы для тестирования

1. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5 $\big(a_n$ — действительные числа; $N\in\boldsymbol{N}$, A, ε — фиксированные числа$\big)$.

1. Числовая последовательность	1. $\lvert a_n - A\rvert < \varepsilon$ при $n > N$;
2. Последовательность сходится	2. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;
3. Последовательность расходится	3. $a_n < a_{n-1}$;
4. Монотонно убывающая последовательность	4. $\lvert a_n\rvert > A$ при $n > N$.

2. Расположите номера ответов в порядке следования нумерации графиков для функции $y = f(x)$. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.



1. $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; 2. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$;

3. $A = \lim\limits_{x\to\pm a} f(x)$; 4. $A = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

3. Перечислите величины, которые можно назвать бесконечно малыми.

1. $\operatorname{tg} x$ при $x\to\pi/2$; 2. $f(x)-A$ при $x\to a$, если $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3. $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to\infty$; 4. $\sin x \cos x$ при $x \to \pi/2$.

5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

4. Какие функции можно отнести к бесконечно большим (в скоб ках — значения абсцисс рассматриваемых точек)?

1. $\operatorname{ctg} x$ $(x \to 0)$; 2. $\dfrac{\cos x}{x}$ $(x \to 0)$; 3. $\dfrac{1}{\ln x}$ $(x \to e)$;

4. $f(x) - A$ $\left(x \to a,\ A = \lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$; 5. $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$ $(x \to \pi/2)$.

5. Какие из перечисленных ниже величин *всегда* справедливы для непрерывных функций при любых значениях a?

1. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$;

3. $\lim\limits_{x\to a} (\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x) = 1$; 4. $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

6. Выполнение каких признаков необходимо для того, чтобы функция была непрерывной в рассматриваемой точке?

1. Пределы функции справа и слева от точки должны иметь противоположные знаки.
2. Предел функции в точке равен значению функции в этой точке.
3. Пределы функции справа и слева от точки должны быть равны.
4. Функция должна быть определена в точке.
5. Среди указанных в пунктах 1–4 признаков нет требуемых.

7. Какие признаки характеризуют функцию, непрерывную в рассматриваемой области?

1. Приращение функции стремится к постоянной величине при стремлении приращения аргумента к нулю.
2. Область допустимых значений функции должна быть ограниченной.
3. Функция должна пересекать ось абсцисс.
4. Функция должна быть монотонной.
5. Среди признаков 1–4 нет требуемых.

8. Перечислите выражения, которые могут быть сведены к первому или второму замечательным пределам.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{m}{x}\right)^{nx}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + mx)^{n/x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{m}{x} \ln(1 + nx)$.

5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

9. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка) относительно итоговой величины вклада в банк с различными видами процентных ставок $r\%$. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5 (S_0 — начальный вклад; ΔS — периодические платежи; n — число сроков начисления процентов; $r = r\%/100$).

1. Простые проценты	1. $S_0(1+r)^n$;
2. Сложные проценты	2. $S_0(1+nr)$;
3. Эффективная ставка	3. $S_0(1+r/n)^n$;
4. Аннуитет	4. $\Delta S[(1+r)^n-1](1+r)/r$.

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕМА 2.1

(§ 2.1–2.3 теории)

Последовательности

Вопросы

1. Дайте определение числовой последовательности. Какая последовательность чисел называется монотонной? ограниченной? сходящейся? расходящейся?
2. Что такое предел числовой последовательности?

Задачи

В задачах 1–6 написать пять первых членов последовательностей.

1. $a_n = (-1)^n$.

Решение. Четная степень числа (-1) дает «+1», нечетная – «–1». Поэтому последовательность

$$a_n = (-1)^n: \ 1;\ -1;\ 1; -1;\ 1;\ \ldots.$$

При изменении четности n на единицу получим:

$$a_n = (-1)^{n+1}: \ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \ldots.$$

2. $a_n = \cos\big((n+1)\pi\big)$ и $a_n = \cos\big(n\pi\big)$.

Решение. Свойства тригонометрических функций позволяют утверждать, что заданные последовательности совпадают с соответствующими последовательностями задачи **1**.

3. $a_n = (-1)^n + 1.$

Р е ш е н и е. Последовательность чисел представляет собой чередование цифр 0 и 2:

$$a_1 = (-1)^1 + 1 = 0,\ a_2 = (-1)^2 + 1 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = 2,\ a_5 = 0\ldots$$

4. $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n - 1}.$

Р е ш е н и е.

$$a_1 = \frac{1 + (-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{0}{1} = 0,\ a_2 = \frac{3}{3} = 1,\ a_3 = \frac{2}{5},\ a_4 = \frac{5}{7},\ a_5 = \frac{4}{9}\ldots$$

5. $a_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right).$

Р е ш е н и е.

$$a_1 = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1; \quad a_2 = \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1;$$

$$a_3 = \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1;$$

$$a_4 = \sin\left(4\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(4\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1;\ a_5 = a_1 = 1 + 0 = 1\ \ \ldots$$

6. $a_n = 2n,\ \ a_n = 2n - 1$ и $a_n = 2n + 1.$

Р е ш е н и е.

$$a_n = 2n:\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ldots.$$

$$a_n = 2n - 1:\ 1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ldots.$$

$$a_n = 2n + 1:\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ldots.$$

Характерной особенностью трех рассмотренных последовательностей является то, что «первые разности» – разности между двумя соседними элементами – постоянны $\Delta_1 = a_n - a_{n-1} = 2$. Эта особенность обусловлена появлением перед n множителя $\Delta_1 = 2$.

Наличие перед n множителя $\Delta_1 = k$ приведет к последовательности, в выражение для которой будет входить kn. Например, в последовательности

$$a_n = 3n - 2: \ 1; \ 4; \ 7; \ 10; \ 13; \ \ldots$$

первая разность $\Delta_1 = 3$.

7. Для последовательности

$$a_n = n^2: \ 1; \ 4; \ 9; \ 16; \ 25; \ldots$$

первые разности не постоянны:

$$\Delta_1: \ 3; \ 5; \ 7; \ 9; \ldots.$$

Однако, разности между элементами первых разностей «вторые разности» $\Delta_2 = 2$ – постоянны.

Рассмотрение примеров последовательностей, элементы которых представляют собой степенные функции, приводит к выводу: если элементы последовательности содержат n^k $(k \in N)$, то «k-тая разность» Δ_k ее элементов будет постоянной.

В задачах 8–10 написать формулу общего члена последовательности.

8. $-1, \ 3, \ -5, \ 7, \ -9, \ldots$

Р е ш е н и е. Выделяем характерные признаки последовательности чисел.

Во-первых, в последовательность входят только нечетные числа. Поэтому в образование чисел должен входить множитель $2n - 1$ или $2n + 1$. Но при $n = 1$ $2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, а $2n + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. С модулем первого члена последовательности совпадает первый вариант записи, поэтому останавливаемся на варианте $2n - 1$.

Во-вторых, знаки членов последовательности чередуются, при этом первый член последовательности имеет отрицательное значение. Чередование знаков может обеспечить множитель $(-1)^n$. При n нечетном, в том числе при $n = 1$ (первый член последовательности), множитель отрицателен. Если бы при чередовании знаков в последовательности первое слагаемое было положительным, то ее элементы следовало умножать на $(-1)^{n-1}$ или $(-1)^{n+1}$.

Учитывая сказанное, запишем n-й член последовательности:

$$a_n = (-1)^n(2n - 1).$$

9. $\frac{1}{3}, \ \frac{4}{5}, \ \frac{7}{7}, \ \frac{10}{9} \ldots$

Р е ш е н и е. Соседние числа, стоящие в числителях последовательности, отличаются друг от друга на 3, в знаменателях — на 2. Поэтому значения n, ответственные за номера членов последовательности, умножаются в числителе на 3, в знаменателе — на 2.

Так как числа последовательности $3n$ $(3, \ 6 \ldots)$ отличаются от числителей заданной последовательности на $+2$, то искомое выражение для числителя может быть представлено в виде $3n - 2$.

Рассуждая аналогично по отношению к знаменателю, устанавливаем, что числа последовательности $2n$ $(2, \ 4 \ldots)$ отличаются от чисел заданной последовательности на $+1$. Поэтому выражения в знаменателях $2n + 1$.

В результате для n-го члена последовательности получим

$$a_n = \frac{3n-2}{2n+1}.$$

10. $\frac{3}{1}, \ \frac{6}{8}, \ -\frac{11}{27}, \ -\frac{18}{64}, \ \frac{27}{125} \ldots$

Р е ш е н и е. Отметим особенности числовой последовательности. Во-первых, разность последующего и предыдущего значений числителя возрастает каждый раз на 2: $a_2 - a_1 = 3$; $a_3 - a_2 = 5$; $a_4 - a_3 = 7$ ... Следовательно, к изменяемому значению числителя каждый раз добавляется число 2. Если из всех значений числителей вычесть 2, придем к последовательности: 1, 4, 9, 16, 25 ... Эта последовательность представляет собой квадраты номера элемента. Поэтому в числителе должно стоять выражение $n^2 + 2$.

Во-вторых, числа знаменателя представляют собой кубы порядковых номеров элементов n^3.

В-третьих, знаки элементов последовательности изменяются через каждую пару элементов. Обеспечить такое чередование могут множители, в аргументах тригонометрических функций которых (пример 5) будут стоять номера не n, а $n - 1$.

Сказанное приводит к выражению для n-го члена последовательности:

$$a_n = \left[\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{n^2+2}{n^3}.$$

В задачах 11–13 найти наибольший (наименьший) член ограниченной сверху (снизу) последовательности.

11. $a_n = e^{-n}$.

Р е ш е н и е. При росте n последовательность чисел $\dfrac{1}{e^n}$, оставаясь положительной, монотонно уменьшается. При неограниченном росте n знаменатель стремится к бесконечности, поэтому дробь стремится к нулю.

12. $a_n = n^2 - 4n + 3$.

Р е ш е н и е. Структура формулы представляла бы из себя параболу в случае, когда вместо n стоит непрерывная функция. Если максимальное (минимальное) значение функции $y = x^2 - 4x + 3$ достигается при целом значении x, то это целое число будет определять значение n, соответствующее искомому наибольшему (наименьшему) члену последовательности.

Ветви параболы направлены вверх, поэтому функция имеет минимум. Минимуму соответствует значение x, равное полусумме корней уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_{cp} = 2$; $y_{\min} = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$.

Таким образом $\min\{a_n\} = a_2 = -1$.

13. $a_n = n^2 - 5n + 4$.

Р е ш е н и е. Корни уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$ и $x_{\text{ср}} = 2{,}5$ не являются целым числом. В этом случае наибольшее (наименьшее) значение у элементов последовательности будет совпадать с одним из ближайших целых к $x_{\text{ср}} = 2{,}5$ чисел. Находим элементы последовательности при $n = 2$: $a_2 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -2$ и $n = 3$: $a_3 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 4 = -2 = a_2$.

Так как ветви параболы направлены вверх, то $\min\{a_n\} = a_2 = a_3 = -2$.

В задачах 14–19 вычислить пределы последовательностей.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-5}{3n}$.

Р е ш е н и е. При $n \to \infty$ и числитель и знаменатель выражения, стоящего под знаком предела, стремятся к бесконечности. Чтобы сделать выражение определенным, поделим выражение в числителе почленно на $3n$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3n} \right).$$

Второе слагаемое под знаком предела стремится к нулю при

$n \to \infty$, а первое слагаемое — определенное число. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{3n} = \frac{2}{3}.$$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n}$.

Р е ш е н и е. Поделив почленно числитель на знаменатель, под знаком предела получим сумму двух слагаемых. Первое, n, при неограниченном росте n стремится к бесконечности, второе, $\dfrac{1}{n}$, — к нулю. Сумма этих слагаемых стремится к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n} = \infty.$$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}-1}{n}$.

Р е ш е н и е. Поделив почленно числитель и знаменатель на n, получим под знаком предела сумму двух слагаемых. И первое из них, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, и второе, $\dfrac{1}{n}$, при неограниченном росте n стремятся к нулю. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = 0.$$

Три рассмотренных примера приводят к выводу, что предел дроби, в числителе и знаменателе которой стоят степенные функции от n, равен отношению коэффициентов при старшей степени n, если эти старшие степени равны у числителя и знаменателя. Предел дроби равен ∞, если максимальная степень n числителя больше соответствующей степени знаменателя, и равен нулю в противном случае.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–2 записать пять первых членов последовательности.

1. $\dfrac{n^2-1}{n^2+1}(-1)^n$; **2**. $\dfrac{n}{n+1}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)$.

В задачах 3–5 записать n-й член последовательности.

3. 1, 2, 6, 24, 120 … **4.** $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{5}, \frac{7}{6}, \frac{9}{7} \ldots$

5. $-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{9}{7}, \frac{16}{9}, -\frac{25}{11}$.

В задачах 6–8 вычислить пределы числовых последовательностей.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(3n+1)^2}$; **7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^3}$; **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n}$.

9. Найти минимальное значение элемента последовательности $a_n = n^2 - 5n$.

10. Найти максимальное значение элемента последовательности $a_n = -2n^2 + 7n + 9$.

ТЕМА 2.2

(§ 2.4–2.8 теории)

Пределы

Вопросы

1. Что называется пределом функции на бесконечности? в точке?
2. Поясните на графике понятия предела функции на бесконечности и в точке.
3. Как связаны между собой понятия ε-окрестности функции и δ-окрестности аргумента? Что будет с этой связью, если функция в рассматриваемой точке не определена?
4. Какие величины называются бесконечно малыми? бесконечно большими?
5. Как связано с пределом функции понятие бесконечно малой величины? бесконечно большой величины?
6. Перечислите основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин. Как связаны между собой бесконечно малая и бесконечно большая величины?
7. Перечислите основные свойства пределов функций. Может ли функция иметь несколько пределов в одной точке?
8. В каких случаях можно менять местами знаки предела и функции?
9. В каких случаях нельзя использовать свойство предела частного от деления двух функций?

Задачи

Найти пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+1}{\sqrt{2x}+3}$.

Р е ш е н и е. Функция под знаком предела определена и непрерывна при всех положительных значениях x. Поэтому, подставив вместо x значение 2, к которому стремится переменная, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+1}{\sqrt{2x}+3}=\frac{2\cdot 2^2-5\cdot 2+1}{\sqrt{2\cdot 2}+3}=-0{,}2.$$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{(-1)^2-1}{(-1)^2+1}=\dfrac{0}{2}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{1+1}{(1)^2-1}=\dfrac{2}{0}=\infty.$

В задачах 16–20 найти пределы функций, раскрывая неопределенности.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$

К анализу пределов функций, аргумент которых стремится к бесконечности, применим подход, рассмотренный в предыдущей теме при определении пределов бесконечных последовательностей.

Поделим числитель и знаменатель на x^2, имея в виду, что эта величина под знаком предела только стремится, но не равна ∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=2.$$

Результат следует из того, что вторые слагаемые числителя и знаменателя стремятся к нулю при неограниченном росте x.

5. $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Р е ш е н и е. Подставляя в функцию под знаком предела вместо переменной x ее предельное значение, получим $\dfrac{1^2-1}{1^2-3\cdot 1+2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Это неопределенность типа «ноль делить на ноль».

Равенство нулю многочленов в числителе и знаменателе при $x = 1$ говорит о том, что единица является корнем уравнений $x^2 - 1 = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$. Если это так, то многочлены числителя и знаменателя должны без остатка делиться на множитель $x - 1$. Найдем частные от деления числителя и знаменателя на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^2 \qquad -1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^2 - x \qquad} & x + 1, \\ \underline{x \ -1} & \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} x^2 - 3x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^2 \ -x \qquad} & x - 2. \\ \underline{-2x + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Результаты деления позволяют разложить числитель и знаменатель на множители и представить выражение для предела в виде

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Сокращение на множитель $x - 1$, в пределе равный нулю, допустимо, так как под знаком предела эта величина стремится, но не равна нулю. Поэтому

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2.$$

Конечно, при разложении многочленов на множители можно использовать другие приемы, в том числе отыскание корней соответствующих уравнений посредством вычисления дискриминанта или с использованием теоремы Виета. Преимущество использованного в примере метода в том, что при разложении на множители один корень известен, что помогает выделить множитель с ним в многочленах любых степеней.

6. $L = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^3 + 4x^2 + 3x - 2}$.

Р е ш е н и е. Подстановка вместо x его предельного значения $x = -2$ приводит к неопределенности типа «ноль делить на ноль». Поэтому в многочленах числителя и знаменателя выделяем множитель $x + 2$. Из школьного курса математики известно разложение на множитель суммы кубов:

$$x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

Частное от деления знаменателя на $x+2$ определим непосредственным делением:

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2+3x-2 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} \qquad\qquad & \overline{x^2+2x-1.} \\ 2x^2+3x-2 & \\ \underline{2x^2+4x} \quad\ & \\ -x-2 & \\ \underline{-x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

После сокращения под знаком предела числителя и знаменателя на $x+2$ придем к выражению

$$L = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x-1} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2)^2+2(-2)-1} = -12.$$

7. $L = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{5-x^2}-\sqrt{3-x}}{x^2-3x+2}$.

Р е ш е н и е. Подставим предельное значение $x = 2$:

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5-2^2}-\sqrt{3-2}}{2^2-3\cdot 2+2} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Под знаком предела в числителе стоит иррациональное выражение, из которого трудно выделить множитель $x-2$. Чтобы это сделать, следует в числителе избавиться от иррациональности. Для этого достаточно числитель и знаменатель умножить на сопряженное по отношению к разности корней выражение. Таким выражением по отношению к разности квадратных корней является сумма этих корней. Поэтому

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{5-x^2}-\sqrt{3-x})(\sqrt{5-x^2}+\sqrt{3-x})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{5-x^2}+\sqrt{3-x})}.$$

Раскроем скобки в произведении сопряженных выражений числителя с учетом формулы $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$:

$$(\sqrt{5-x^2}-\sqrt{3-x})(\sqrt{5-x^2}+\sqrt{3-x}) =$$

$$= 5-x^2-3+x = -(x^2-x-2) = -(x-2)(x+1).$$

Квадратный трехчлен в знаменателе также разложим на множители: $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. В результате после сокращения дроби под знаком предела на $x-2$ получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{-(x+1)}{(x-1)(\sqrt{5-x^2}+\sqrt{3-x})}=$$

$$=\frac{-(2+1)}{(2-1)(\sqrt{5-2^2}+\sqrt{3-2})}=\frac{-3}{2}=-1{,}5.$$

8. $L=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2+1})=(\infty-\infty)$.

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x-1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{x^2+1}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{x^2+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Поделим числитель и знаменатель на x:

$$L=2\lim_{x\to\infty}\frac{2-1/x}{\sqrt{1+4/x-1/x^2}+\sqrt{1+1/x^2}}=2.$$

9. $L=\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2-1}-x)=(\infty(\infty-\infty))$.

Р е ш е н и е. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$L=\lim_{x\to\infty}x\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}+x};$$

Поделим числитель и знаменатель на $x\to\infty$. После сравнения порядков малости слагаемых в числителе и знаменателе, полученных после упомянутого деления, получим $L=-1/2$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^3-3x+1}{3x^2+5x+7}$; **2**. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\cos x}{x+\sin x}$;

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^k+3x-1}{x^n+x}$; при: а) $k=n>2$; б) $k=3$; $n=2$; в) $k=1$; $n=2$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$; **5**. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x}{|x+3|}$; **6**. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; **8**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$; **9**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

10. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x)$.

ТЕМА 2.3

(§ 2.9, 2.11–2.13 теории)

Разрывы функций. Замечательные пределы

Вопросы

1. Какие функции называют непрерывными? Перечислите типы разрывов функции.
2. Что такое предел функции «справа»? «слева»?
3. Какие пределы называют «замечательными»?
4. Запишите выражение для первого замечательного предела. Поясните на рисунке его смысл.
5. Запишите выражение для второго замечательного предела.
6. Приведите примеры экономических задач, в которых используется второй замечательный предел.

Задачи

В задачах 1 и 3 исследовать функции на непрерывность.

1. $y=\dfrac{x-3}{|x-3|}$.

Р е ш е н и е. При $x=3$ знаменатель функции обращается в нуль. Для установления факта наличия разрыва функции найдем ее пределы при стремлении x к 3 справа и слева. При стремлении x к 3 слева x остается меньше 3. Тогда $x-3<0$ и вместо $|x-3|$ в знаменателе можно записать $-(x-3)$. Поэтому

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{-(x-3)}=-1.$$

При стремлении x к 3 справа $x>3$, $x-3>0$ и знак абсолютной величины в знаменателе можно опустить. Поэтому

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3}=+1.$$

Разрыв функции в точке с координатой $x=3$ конечен (первого рода) и определяется разностью найденных пределов функции:

$$\Delta y = y(3^+)-y(3^-)=1-(-1)=2.$$

2. $y=\operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е. Известно, что $\operatorname{tg} x$ терпит разрывы при $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $(k\in Z)$. Исследуем поведение функции при $x\to(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ слева и справа от этих значений. При $x\in\left(2k\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} x>0$ и

$$\operatorname{tg}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}^-\right)<\operatorname{tg}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg} x=+\infty$.

Рассуждая аналогично, получим $\lim\limits_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}+}\operatorname{tg} x=-\infty$.

В точке с абсциссой $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ функция $y=\operatorname{tg} x$ терпит бесконечный разрыв (разрыв второго рода):

$$\Delta y=\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg} x-\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}+}\operatorname{tg} x=\infty-(-\infty)=\infty.$$

3. $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Р е ш е н и е. Функция не определена при $x=0$. Пределы заданной функции слева и справа равны:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доопределим функцию значением $y(0)=1$. Тем самым устраним ее разрыв при $x=0$. В итоге получаем непрерывную функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если}\quad x\neq 0;\\ 1, & \text{если}\quad x=0.\end{cases}$$

В задачах 4–11 найти пределы функций, сводя их к первому или второму замечательным пределам.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{3}{2}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\operatorname{tg} 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\cos 2x}=1\cdot\dfrac{2}{1}=2.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x\operatorname{ctg} 3x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos 3x}{\sin 3x}=$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\lim_{x\to 0}\cos 3x=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

В следующих примерах использовано свойство пределов непрерывных функций: их предел в точке равен значению функции в этой точке. Свойство позволяет знак функции выносить за знак предела.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{5x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{5x^2}=\dfrac{2}{5}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=\dfrac{2}{5}\cdot 1^2=\dfrac{2}{5}.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^2\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^5=e^2\cdot 1=e^2.$

9. $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}.$

Введем новую переменную $t=-\dfrac{x}{2}$. Тогда $x=-2t$ $t\to-\infty$ и

$$L=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-6t}=\left[\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-6}=e^{-6}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)^{1/4x}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/2x}\right]^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

11. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(1-3x)^{1/5x}\right).$

Введем обозначение $t=-3x$, $t\to 0$. Тогда

$$L=\ln\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right)^{-3/5}=\ln e^{-3/5}=-\frac{3}{5}.$$

Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to 0$.

11. $\alpha(x) = x^2 \sin^2 x, \quad \beta(x) = x \operatorname{tg} x$.

Для сравнения функций найдем предел их отношения при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2 + O(x^2))}{x(x + O(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Равенство нулю предела отношений функций указывает на то, что при $x \to 0$ $\alpha(x) = x \sin^2 x$ — является бесконечно малой величиной более высокого (второго) порядка малости по сравнению с $\beta(x) = x \operatorname{tg} x$: $x^2 \sin^2 x \sim (x \operatorname{tg} x)^2$.

12. $\alpha(x) = 2^x - 1, \quad \beta(x) = x \ln 2$.

Введем новую переменную $y = 2^x - 1$. При $x \to 0 \Longrightarrow y \to 0$. Найдем логарифм по основанию 2 от обеих частей выражения $2^x = 1 + y$: $x = \log_2(1 + y)$. С учетом равенства $\log_2(1 + y) = \dfrac{\ln(1 + y)}{\ln 2}$ получим $\alpha(y) = y$ и $\beta(y) = \ln(1 + y)$.

Составим отношение преобразованных функций и найдем их предел:

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha(y)}{\beta(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1 + y)}.$$

Преобразуем полученное выражение ко второму замечательному пределу. Используя свойства логарифмов и имея в виду непрерывность функции, стоящей под знаком предела, в окрестности точки $y = 0$, найдем предел, обратный по отношению к L:

$$L^{-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = \ln\left[\lim_{y\to 0} (1 + y)^{1/y}\right] = \ln e = 1 \quad \longrightarrow \quad L^{-1} = 1.$$

Равенство единице предела отношений двух функций при $y \to 0$ указывает на то, что заданные функции эквивалентны.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–5 исследовать функции на непрерывность. Определить величины разрывов.

1. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; **2**. $y = \dfrac{1}{1 + 2^{1/(x-1)}}$; **3**. $y = \dfrac{1}{x - 1}$;

4. $y = \operatorname{ctg} x$; **5**. $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & \text{если } x \neq 1; \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$

В задачах 6–10 вычислить пределы, сводя их к замечательным.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; **7**. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$; **8**. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{2x}\right)^{-x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x}$.

10. Сравнить функции $\ln x$ и $x-1$ при $x \to 1$.

ТЕМА 2.4

(§ 2.10 теории)

Математика финансов

Вопросы

Что в банковских операциях представляют собой простые проценты? сложные проценты? эквивалентные процентные ставки? дисконтирование? аннуитет?

Задачи

1. В банке 1 принимают вклады с простым ежегодным начислением 9%, в банке 2 производится сложное ежеквартальное начисление при годовой ставке 8%. В какой из этих банков выгоднее вложить сбережения на три года? на четыре года?

Р е ш е н и е. По формуле простого начисления процентов для первого банка найдем ($n_{13} = 3$, $n_{14} = 4$, $r_1 = 0{,}09$):

$$S_{13} = S_0(1 + n_{13}r_1) = S_0(1 + 3 \cdot 0{,}09) = 1{,}27S_0;$$

$$S_{14} = S_0(1 + n_{14}r_1) = S_0(1 + 4 \cdot 0{,}09) = 1{,}36S_0.$$

Для определения величины S_n во втором банке воспользуемся формулой сложных процентов ($n_{23} = 3 \cdot 4 = 12$, $n_{24} = 4 \cdot 4 = 16$, $r_2 = 0{,}08/4 = 0{,}02$):

$$S_{23} = S_0(1 + r_2)^{n_{23}} = S_0(1 + 0{,}02)^{12} \approx 1{,}268S_0;$$

$$S_{24} = S_0(1 + r_2)^{n_{24}} = S_0(1 + 0{,}02)^{16} \approx 1{,}373S_0.$$

Сравнение результатов говорит о том, что на 3 года выгоднее вкладывать деньги в первый банк, на 4 года—во второй.

2. Определить срок, в течение которого взнос в банк увеличится в 2 раза, если банк начисляет ежемесячно сложные проценты под 18% годовых.

Р е ш е н и е. Из формулы сложных начислений процентов

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

найдем ($k = 12$, $r/k = 18\%/(100 \cdot 12) = 0{,}015$, $S_n = 2S_0$):

$$n = \frac{1}{k}\frac{\ln(S_n/S_0)}{\ln(1 + r/k)} = \frac{1}{12}\frac{\ln 2}{\ln(1 + 0{,}015)} \approx 3{,}87.$$

Так как начисления производятся по истечении месяца, то целое число месяцев должно быть не меньше полученного дробного результата: 0,87 года равны $12 \cdot 0{,}87 = 10{,}44$ месяцев. Ближайшее большее целое число 11. Поэтому для удвоения вклада, вложенного в банк под заданный процент, необходимо, чтобы он пролежал 3 года и 11 месяцев (47 месяцев).

По истечении этого времени вкладчик получит сумму

$$S_n = S_0\,(1 + 0{,}015)^{47} \approx 2{,}013S_0.$$

3. Государство планирует годовую инфляцию 16%. Определить процентную ставку банка со сложным ежеквартальным начислением процентов, которая позволит вкладчику банка не уменьшить ценность своих сбережений.

Р е ш е н и е. Планируемая инфляция равносильна годовой эффективной процентной ставке, т.е. $r_e = \dfrac{16\%}{100} = 0{,}16$. Из формулы определения эффективной ставки $r_e = \left(1 + \dfrac{r}{k}\right)^k - 1$ определим величину ежеквартального начисления r/k, соответствующую сложному начислению r процентов $k = 4$ раза в год:

$$\frac{r}{k} = (\sqrt[k]{r_e + 1} - 1) = (\sqrt[4]{0{,}16 + 1} - 1) \approx 0{,}0378.$$

Таким образом, для сохранения платежеспособности накоплений при 16% инфляции необходимо разместить вклад в банк со сложным начислением ежеквартально не менее 3,78% ($\approx$ 15,2% годовых).

4. Сопоставить размеры накоплений за три года в банке при одинаковом начальном вкладе и одинаковых ($r\% = 10\%$ годовых) сложных процентах, начисляемых в одном случае раз в год, во втором — ежеквартально, в третьем — непрерывно.

Р е ш е н и е. В первых двух случаях воспользуемся формулой сложного начисления процентов. Для первого случая ($k = 1,\ n = 3$):

$$\frac{S_1}{S_0} = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn} = (1 + 0{,}1)^{1\cdot 3} = 1{,}331.$$

Для второго случая ($k = 4$):

$$\frac{S_2}{S_0} = \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{4\cdot 3} \approx 1{,}345.$$

Для третьего случая ($k \to \infty$) справедлива формула непрерывного начисления процентов:

$$\frac{S_1}{S_0} = e^{rn} = e^{0{,}1\cdot 3} \approx 1{,}350.$$

Как и следовало ожидать, наибольший прирост вклада получается в третьем случае, наименьший — в первом.

5. Для замены автомобиля на новый, которую автомобилист планирует осуществить через пять лет, требуется накопить 100 000 д.е. Автомобилист предполагает размещать в банке ежеквартально (периодичность начисления банком сложных процентов) необходимые суммы. Определить размер этих сумм, если годовая ставка банка равна 8%. Определить размер ежегодных взносов при простом ежегодном начислении процентов для этой же задачи.

Р е ш е н и е. Для решения воспользуемся формулой аннуитета со сложным начислением процентов (2.22):

$$S = \left(1 + \frac{k}{r}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn} - 1\right]\Delta S.$$

Отсюда ($r = 0{,}08,\ \ k = 4,\ \ n = 5,\ \ S_5 = 10^5$)

$$\Delta S = \left(1+\frac{k}{r}\right)^{-1}\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}-1\right]^{-1} S =$$

$$\left(1+\frac{4}{0{,}08}\right)^{-1}\left[\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4\cdot 5}-1\right]^{-1}\cdot 10^5 \approx 4033.$$

Найденная величина — это ежеквартальный взнос. Годовой взнос в банк составит $4\Delta S = 4\cdot 4\,033 = 16\,132$. Для второго варианта задачи из формулы (2.22)

$$S = n\left(1+\frac{n+1}{2}r\right)\Delta S$$

находим размер годового взноса:

$$\Delta S = \frac{S}{n}\left(1+\frac{1}{2}r(n+1)\right)^{-1} = \frac{10^5}{5}\left(1+\frac{1}{2}0{,}08(5+1)\right)^{-1} \approx 16\,129.$$

Величины ежегодных взносов обоих вариантов практически совпадают.

Задачи для самостоятельного решения

1. Первоначальный вклад, положенный в банк под 6% годовых, составил 0,5 млн. д. е. Найти размер вклада через 5 лет при начислении сложных процентов: а) ежегодном; б) поквартальном; в) непрерывном.

2. Найти эффективную годовую процентную ставку, эквивалентную сложному ежемесячному начислению под 18% годовых.

3. Определить размер ежегодных вкладов в банк под 10% годовых с целью получить через 4 года накопленную сумму 1000 д. е. при двух вариантах вложений: а) с простым ежегодным начислением процентов; б) со сложным ежеквартальным.

Типовые контрольные работы

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ (на 15 минут)

1. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов относительно свойств функций (левая колонка). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. Четная	1. $\operatorname{tg} x + \ln x$;
2. Нечетная	2. $x^3 - \sin x$;
3. Периодическая	3. $\cos^3 x + x^2$;
4. Монотонно возрастающая	4. $e^x + \operatorname{arctg} x$.

2. Перечислите бесконечно малые величины.

1. $\operatorname{tg} x$ при $x = \pi/2$; 2. $f(x) - A$ при $x \to a$, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

3. $\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}$ при $x \to \infty$; 4. $\sin x \cos x$ при $x \to \pi/2$;

5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

3. Выполнение каких признаков необходимо для того, чтобы функция была непрерывной в рассматриваемой точке?

1. Пределы функции справа и слева от точки должны иметь противоположные знаки.
2. Предел функции в точке равен значению функции в этой точке.
3. Пределы функции справа и слева от точки должны быть равны.
4. Функция должна быть определена в точке.
5. Среди указанных в пунктах 1–4 признаков нет требуемых.

4. Перечислите выражения, которые могут быть сведены к первому или второму замечательным пределам.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{m}{x}\right)^{nx}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + mx)^{n/x}$; 4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{m}{x} \ln(1 + nx)$.

5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

5. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов относительно банковских операций определения процентных ставок (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Простые	1. $(1 + r/k) - 1$;
2. Сложные	2. $(1 + r)^n$;
3. Эффективные	3. $1 + nr$;
4. Номинальная	4. e^{nr}.

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ (на 75 минут)

1. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника касается круга радиуса R, а вершина его прямого угла является центром круга. Определить площадь, являющуюся геометрическим местом точек пересечения площадей треугольника и круга.

2. Найти область определения и область значений функции
$y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$.

3. Запишите n-й член последовательности $1, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{7}, \dfrac{5}{9} \ldots$

В задачах 4–6 найти пределы функций.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + 2x\right)^{1/3x}$.

7. При каком значении A будет непрерывной функция

$$y=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}, & \text{при} \quad x\neq 1; \\ A, & \text{при} \quad x=1 \end{cases} ?$$

8. Определить, в каком из двух банков выгоднее хранить вклад в течение года, если первый банк начисляет ежемесячно по 1%, второй — ежеквартально по 12%.

Глава 3

Производная и дифференциал

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим три задачи, приводящие к производной и связанные со следующими понятиями:

1) касательная к графику функции (геометрическая задача);
2) скорость движения (механическая задача);
3) производительность труда (экономическая задача).

1. Касательная к графику функции

Пусть задана непрерывная функция $y = f(x)$. Требуется записать уравнение касательной к графику этой функции (рис. 3.1) в некоторой фиксированной точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, и найти тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс.

Дадим аргументу функции приращение Δx. Координате $x_0 + \Delta x$ на кривой $y = f(x)$ будет соответствовать точка M_1 с ординатой $y_0 + \Delta y$, причем $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Касательной к графику функции (*к кривой*) $y = f(x)$ *в точке* M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1 при стремлении точки M_1 к M_0, т. е. при $\Delta x \to 0$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где
$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg}\alpha$$
представляет собой угловой коэффициент или тангенс угла α наклона прямой к оси x.

Таким образом,
$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

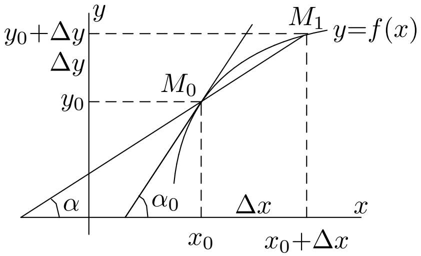


Рис. 3.1. Секущая и касательная

2. Скорость движения

Рассмотрим прямолинейное движение тела. Путь s, пройденный телом, зависит от времени t продолжительности движения: $s = s(t)$.

Обозначим через $s_0 = s(t_0)$ путь, пройденный телом к некоторому фиксированному моменту времени t_0, а через $s(t_0 + \Delta t) = s_0 + \Delta s$ — путь, пройденный к моменту времени $t_0 + \Delta t$.

Средняя скорость $v_{\text{ср}}$, с которой тело двигалось, пройдя расстояние Δs за промежуток времени Δt: $v_{\text{ср}} = \Delta s / \Delta t$. Чем меньше промежуток времени Δt, тем больше средняя скорость будет приближаться к мгновенной *скорости v в момент времени* t_0.

Таким образом,
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

3. Производительность труда

Пусть функция $Q = Q(t)$ выражает количество продукции Q, произведенной к текущему моменту времени t, и пусть известно количество продукции Q_0, произведенной к моменту времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество продукции изменится на величину $\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)$. Тогда средняя производительность труда за время Δt: $q_{\text{ср}} = \Delta Q / \Delta t$.

Производительность труда в момент времени t_0 определится как предельное значение средней производительности при $\Delta t \to 0$:
$$q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Рассмотрение трех различных по характеру задач привело к однотипным соотношениям, связанным с понятием предела функции. Этот предел играет основополагающее значение в математическом анализе.

Замечание. Свойство непрерывности было оговорено в первой задаче. Непрерывность имела место и во второй задаче, где путь — непрерывная функция времени. Относительно третьей задачи свойство непрерывности по отношению к производительности труда можно поставить под сомнение, особенно если речь идет о производительности труда по изготовлению исчисляемой (штучной) продукции.

Математиками давно доказано, что при оперировании дискретно заданными величинами (при их достаточно большом количестве), изменяемыми на величины, малые по сравнению с базовыми, можно использовать математический аппарат непрерывных функций. Этим объясняется повсеместное применение аппарата математического анализа в экономических задачах.

3.2. Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Отметим, что в экономических задачах, где исходные для анализа данные, как правило, представляются в виде дискретных величин, находят применение и *средние величины* $y_{cp} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, и производные $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, называемые в экономике *предельными величинами.*

Наряду с обозначением штрихом, использованным в (3.1), для производной часто используют обозначения $\dfrac{dy}{dx}$, y'_x, $y_{,x}$.

Операция взятия производной от функции называется *дифференцированием.*

Ссылаясь на предыдущий параграф, напомним, что производная с геометрической точки зрения представляет собой тангенс угла между касательной к графику функции и осью абсцисс; с точки зрения механики — это скорость движения; с точки зрения экономики — производительность труда.

Пример 1. График функции $y = f(x)$ представляет собой полуокружность (рис. 3.2,а). Используя геометрический смысл производ-

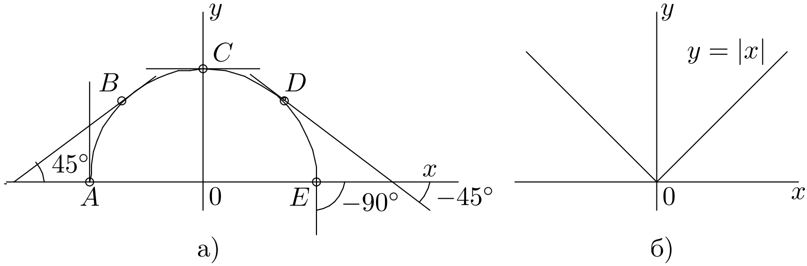


Рис. 3.2. Примеры определения производных

ной, найти ее значения для $y = f(x)$ в точках A, B, C, D и E, делящих полуокружность на четыре равные части.

Р е ш е н и е. Угол наклона α касательной к полуокружности в точке C равен $0°$, поэтому $y'_C = \operatorname{tg} \alpha_C = 0$.

В точках B и D углы наклона касательных составляют $45°$ и $135°$, поэтому $y'_B = \operatorname{tg} 45° = 1$; $y'_D = \operatorname{tg} 135° = -1$.

В точках A и E касательные перпендикулярны оси x. В этих точках $y'_A = +\infty$; $y'_E = = -\infty$. Знаки у ∞ определяются тем, что в окрестности точки A производная положительна, а в окрестности точки E — отрицательна (приближается к $-\infty$ по кривой со стороны отрицательных значений производной).

Пример 2. Найти производную функции $y = |x|$ в точке $x = 0$ (рис. 3.2,б).

Р е ш е н и е. Находим производную функции, следуя ее определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

В точке $x = 0$

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{при } \Delta x > 0, \\ -1 & \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Ясно, что в точке $x = 0$ касательной к графику функции не существует.

Если производная функции в некоторой точке конечна и однозначна, то функция называется *дифференцируемой* в этой точке. В противном случае — *недифференцируемой.*

Функция, дифференцируемая во всех точках некоторого промежутка изменения аргумента, называется *дифференцируемой на* этом *промежутке.*

3.3. Вычисление производной

Производная функции $y = f(x)$ может быть найдена по нижеследующей схеме.

1. Аргументу x дают приращение Δx и находят соответствующее этому приращению значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.
2. Определяют приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. Составляют отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
4. Находят производную как предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Примеры. Используя определение найти производные функций.

1. $y = c$ (c — постоянная)

Так как $\Delta y = c - c = 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Поэтому

$$c' = 0.$$

2. $y = x^2$.

Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем приращенное значение функции: $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$.

Определим приращение функции: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Составим отношение: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Найдем производную: $(x^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

3. $y = x^n \quad (n \in N)$.

Для определения приращения функции воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n - x^n.$$

Первое и последнее слагаемые правой части бинома уничтожаются. Кроме того, при $\Delta x \to 0$ все оставшиеся слагаемые, начиная с третьего являются бесконечно малыми более высокого порядка малости по сравнению с Δx. То есть,

$$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x).$$

Найдем производную

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

4. $y = \log_a x$.

1. $y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$.
2. $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\dfrac{x + \Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.
4. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

Для вычисления предела в последнем выражении введем обозначение $u = \Delta x/x$ $(u \to 0$ при $\Delta x \to 0)$. Тогда, используя определение второго замечательного предела, найдем

$$y' = \lim_{u \to 0}\frac{1}{xu}\log_a(1 + u) = \frac{1}{x}\lim_{u \to 0}\log_a(1 + u)^{1/u} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

В частности

$$\ln x = \frac{1}{x}.$$

5. $y = a^x$.

Найдем приращение заданной функции

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \left\{u = a^{\Delta x} - 1;\ \Delta x = \frac{\ln(1 + u)}{\ln a};\ \text{при } \Delta x \to 0 \quad u \to 0\right\} =$$

$$= a^x\ln a\lim_{u \to 0}\frac{u}{\ln(1 + u)} = a^x\ln a\lim_{u \to 0}\left(\ln(1 + u)^{1/u}\right)^{-1}.$$

Поменяем местами знаки lim и ln (функция непрерывна). В результате получим:

$$(a^x)' = a^x\ln a.$$

В частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

Экспоненциальная функция e^x — единственная функция, которая равна своей производной. Этим, в частности, объясняется ее широкое использование в математических исследованиях.

6. $y = \sin x$.

При определения приращения функции воспользуемся формулой разности синусов:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Находим производную

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x/2 \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x.$$

По приведенной схеме можно найти производные от всех основных элементарных функций. Предоставляем эту возможность читателям. Примеры получения производных от обратных тригонометрических функций рассмотрены в § 3.5.

В заключение приведем *таблицу производных* основных элементарных функций:

$$
\begin{aligned}
&(x^n)' = nx^{n-1}; && \\
&(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}; && (\ln x)' = \frac{1}{x}; \\
&(a^x)' = a^x \ \ln a; && (e^x)' = e^x; \\
&(\sin x)' = \cos x; && (\cos x)' = -\sin x;
\end{aligned}
$$

$$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

3.4. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке $[x - \Delta x; x + \Delta x]$ изменения аргумента и дифференцируема в окрестности точки x этого промежутка. Тогда для приращения функции справедливо соотношение

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)$ — величина того же порядка малости, что и Δx, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Из записанного соотношения видно, что приращение функции Δy складывается из *главной части* $y'\Delta x$ и добавки $\alpha(\Delta x)\Delta x$, величина которой эквивалентна $(\Delta x)^2$ и при $\Delta x \to 0$ стремится к нулю на порядок быстрее, чем Δx. Поэтому слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ является бесконечно малой величиной по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом dy функции $y = f(x)$ в некоторой точке x называется главная часть приращения функции в этой точке:

$$dy = y'\Delta x.$$

Дифференциалом независимой переменной является ее приращение, так как если функция задана в виде $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$. Тогда по определению дифференциала функции находим:

$$dx = f'(x)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Сказанное позволяет для дифференциала функции записать выражение

$$dy = y'dx.$$

Отсюда следует принятая и упоминавшаяся в § 3.2 запись

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Установим геометрический смысл дифференциала. Возьмем на графике функции $y = f(x)$ произвольную точку $m(x, y)$ (рис. 3.3). Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Проведем касательную к графику функции в точке m, которая образует угол Θ с осью абсцисс. Поэтому $f'(x) = \operatorname{tg}\Theta$.

Из прямоугольного треугольника mkn следует:

$$kn = mn \cdot \operatorname{tg}\Theta = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\Theta =$$

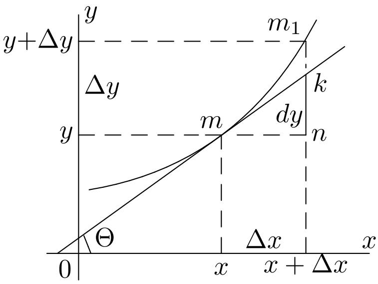


Рис. 3.3. Дифференциал функции

$$= f'(x)\Delta x = y'\,dx = dy.$$

Поэтому $dy = kn$, т. е. дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции в рассматриваемой точке, соответствующему приращению аргумента $\Delta x = dx$.

На рис. 3.3 график функции направлен выпуклостью вниз. Для такой функции $dy < \Delta y$. Если кривая направлена выпуклостью вверх, то $dy > \Delta y$, в чем легко убедиться, осуществив соответствующие построения.

Дифференциал функции находит широкое применение в различных приложениях. В частности, он с успехом используется в приближенных вычислениях, когда известно значение функции $y(x_0)$ и ее производной $y'(x_0)$ при $x = x_0$, а требуется найти значение функции при $x = x_0 + \Delta x$. Для решения этой задачи можно использовать зависимость

$$y = y_0 + \Delta y \approx y_0 + y'(x_0)\Delta x. \tag{3.2}$$

Пример 1. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{16,64}$.

Р е ш е н и е. Получим вначале приближенную формулу для вычисления корней любой n-й степени. Полагая $y = \sqrt[n]{x}$, найдем $y' = \dfrac{1}{n}x^{1/n-1} = \dfrac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$.

Запишем выражение для функции в точке $(x + \Delta x)$, используя зависимость (3.2):

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}\cdot\Delta x}{nx}, \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x}\left(1 + \frac{\Delta x}{nx}\right).$$

В рассматриваемом примере

$$\sqrt[4]{x+\Delta x} \approx \sqrt[4]{x}\left(1 + \frac{\Delta x}{4x}\right).$$

В качестве x возьмем число, достаточно близкое к 16,64 и такое, из которого корень четвертой степени извлекается точно. Таким числом является $x = 16 = 2^4$. Тогда $\Delta x = 0{,}64$.

В этом случае

$$\sqrt[4]{16{,}64} \approx 2\left(1 + \frac{0{,}64}{4\cdot 16}\right) = 2{,}02.$$

Пример 2. Вычислить приближенно $\operatorname{tg} 46^\circ$.

Р е ш е н и е. Положим $y = \operatorname{tg} x$. Тогда $y' = 1/\cos^2 x$.

По формуле связи приращения функции с дифференциалом находим $\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \dfrac{\Delta x}{\cos^2 x}$. Подбираем удобную для вычисления величину $x = 45^\circ = \pi/4$. Тогда $\Delta x = 1^\circ = \pi/180$ и

$$\operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2(\pi/4)}\cdot\frac{\pi}{180} = 1 + \frac{\pi}{90} \approx 1{,}035.$$

Используя дифференциал, легко получить некоторые полезные в приближенных вычислениях формулы (при $a << 1$):

$$(1 \pm a)^n \approx 1 \pm na; \quad \sqrt[n]{(1 \pm a)} \approx 1 \pm \frac{a}{n}; \quad \frac{1}{1 \pm a} \approx 1 \mp a; \quad e^a \approx 1 + a;$$

$$\ln(1 \pm a) \approx \pm a; \quad \sin a \approx a; \quad \cos a \approx 1 - \frac{1}{2}a^2; \quad \ldots$$

Дифференциал часто используется при прогнозировании процессов, описываемых функцией времени $y = f(t)$, когда известно значение функции и ее производной в некоторый момент времени t_0: $y_0 = f(t_0)$ и $y_0' = f'(t_0)$. Для приближенной оценки значения функции в момент времени $t_0 + \Delta t$ можно воспользоваться зависимостью

$$f(t_0 + \Delta t) \approx f(t_0) + df(t)\big|_{t=t_0} = f(t_0) + f'(t)\big|_{t=t_0}\Delta t.$$

Пример 3. Цена товара на рынке в момент времени t_0 равняется $P_0 = 150$ д. е. и известно, что за последний квартал она выросла на 3%. Требуется сделать прогноз стоимости товара через 5 месяцев.

Р е ш е н и е. Считаем, что цена на товар изменяется равномерно, т. е. на 1% в месяц, что составляет 1,5 д. е. Полученное значение — предельное значение изменения цены $P'(t_0)$.

Используя формулу (3.2), определим прогнозируемое значение цены через $\Delta P = 5$ месяцев:

$$P \approx P_0 + P'(t_0)\Delta P = 150 + 1{,}5 \cdot 5 = 157{,}5 \text{ д. е.}$$

3.5. Свойства производных и дифференциалов

Перечислим основные свойства производных. В справедливости этих свойств можно убедиться, используя правило вычисления производных функций, описанное в § 3.3.

Свойство 1. *Производная суммы* конечного числа функций равна сумме производных этих функций. Например, для суммы двух функций:

$$(u+v)' = u' + v'.$$

Свойство доказывается путем определения предела отношения приращений функции (с выделением бесконечно малых) к приращению аргумента с учетом того, что предел суммы функций равен сумме пределов этих функций.

Свойство 2. *Производная произведения* двух функций $u(x) = u$ и $v(x) = v$ равна произведению производной u на v плюс произведение u на производную v:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Убедимся в справедливости приведенного утверждения.

Пусть $y = u(x)v(x)$, $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$. Тогда

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - uv = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv =$$

$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

Последнее слагаемое при $\Delta x \to 0$ — бесконечно малая величина по сравнению с приращениями Δu и Δv, определяющими порядок малости первых двух слагаемых правой части полученного выражения. Учитывая это, найдем производную:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = uv' + u'v.$$

Формула производной от произведения с учетом того, что $c' = 0$ (c — постоянная) позволяет утверждать, что при нахождении производной от произведения функции на постоянную величину постоянную можно выносить за знак производной:

$$(cu)' = cu', \quad \text{в частности,} \quad (cx)' = c.$$

Как следствие свойства 2 можно получить формулу для определения *производной частного от деления* двух функций. Для этого достаточно дробь $\dfrac{u}{v}$ представить в виде произведения uv^{-1} и далее найти производную от произведения. В результате получим:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(uv^{-1}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Следствием первого и второго свойств является заключение о том, что производная от линейной комбинации функций равна линейной комбинации производных этих функций с теми же множителями:

$$(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n)' = c_1u_1' + c_2u_2' + \ldots + c_nu_n'.$$

Пример. Найти производные функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.
Р е ш е н и е. Для определения производных достаточно представить функции в виде дробей, в числителе и знаменателе которых стоят синус и косинус:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Свойства дифференциала во многом повторяют свойства производной. В частности, дифференциал постоянной величины равен нулю, дифференциал суммы двух функций равен сумме дифференциалов этих функций и т. д.

3.6. Производные сложных и обратных функций

Напомним, что одним из обозначений производной функции $y = y(x)$ по переменной x является y'_x.

Сформулируем в виде теоремы правило определения производной сложной функции $y = y\big(u(x)\big)$ по аргументу x.

Теорема 1. *Пусть функция $u = u(x)$ имеет производную по x в точке x_0, а функция $y = y(u)$ имеет производную по u в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда в окрестности точки x_0 существует сложная функция $y = y\big(u(x)\big)$, которая в точке x_0 имеет производную*

$$y'_x(x_0) = y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0).$$

Доказательство. Следуем утверждению свойства 2 §2.11. Так как функции $u = u(x)$ и $y = y(u)$ непрерывны в окрестностях точек x_0 и $u_0 = u(x_0)$, то существует сложная функция $y = y\big(u(x)\big)$. Функция y дифференцируема по переменной u в точке u_0, поэтому

$$\Delta y = y'(u_0)\Delta u + \alpha(u)\Delta u,$$

где $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(u) = 0$, т. е. $\alpha(u)$ — величина бесконечно малая того же порядка, что и Δu.

Поделим обе части последнего равенства на Δx и найдем предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$. По определению этот предел равен производной функции y по переменной x:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u(u_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(u) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (3.3)$$

Второе слагаемое можно отбросить как величину бесконечно малую по сравнению с первым слагаемым, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_k(x_0)$. Утверждение теоремы 1 доказано.

Теорема естественным образом обобщается на формулы с более сложной структурой. Пусть $y(x) = y(u(v \ldots (w(x)) \ldots))$. Тогда

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot \ldots \cdot w'_x \ldots . \qquad (3.4)$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$.
Решение. Введем обозначение: $u = x^2 - 1$. Тогда $y = \sqrt{u}$ и по правилу дифференцирования сложной функции, сформулированному в теореме 1, запишем

$$y'_x = (\sqrt{u})'_u \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}(x^2 - 1)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Применим сформулированное в Теореме 1 правило дифференцирования сложной функции к вычислению дифференциала.

Пусть задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = g(x)$. С учетом условий Теоремы 1 найдем дифференциал y как функции от u и дифференциал u как функции x:

$$dy = f'_u(u_0)\, du; \qquad du = u'_x(x_0)\, dx. \qquad (3.5)$$

Подставим второе из записанных равенств в первое:

$$dy = f'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0)\, dx.$$

Последняя формула является выражением дифференциала сложной функции.

Первое выражение для дифференциала dy по форме совпадает с соотношением

$$dy = f'_x(x)\, dx,$$

записанным в предположении, что y зависит только от x. Этот факт отражает свойство *инвариантности формы дифференциала* (безразличия к выбору переменной).

Теорема 2. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна, строго монотонна и имеет производную $f'_x(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, во-первых, в окрестности этой точки $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = g(y) = f^{-1}(y)$; во-вторых, обратная функция имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. При этом*

$$g'_y(y_0) = \frac{1}{f'_x(x_0)}, \tag{3.6}$$

т. е. производная обратной функции равна обратной по отношению к величине производной исходной функции.

Доказательство. Так как обе функции (исходная и обратная) определены, монотонны и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то приращения переменных $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ как катеты прямоугольного треугольника равнозначны: их отношение равно конечной величине — тангенсу угла наклона к оси x касательной к кривой — гипотенузы треугольника.

Запишем очевидное соотношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Учитывая равнозначность приращений аргумента и функции, найдем предел их отношения:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'_x(x_0)}.$$

В левой части равенства стоит производная обратной функции $g(y)$ по переменной y в точке $y_0 = f(x_0)$.

Теорема доказана.

Геометрически производная обратной функции равна тангенсу угла наклона к оси ординат касательной к кривой.

Пример 3. Найти производную функции, обратной к $y = a^x$.

Р е ш е н и е. Так как обратной по отношению к заданной является функция $x = \log_a y$, то

$$x'_y = (\log_a y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Пример 4. Найти производную функции, обратной к $y = f(x) = \arcsin x$.

Р е ш е н и е. Обратной по отношению к заданной является функция $x = g(y) = \sin y$. Области монотонности этих функций

$$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Обратимся формуле (3.6):

$$f'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{g'_y} = \frac{1}{\cos y.}$$

Так как $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos y \ge 0$. Поэтому $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, т. е.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогично получается формула

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример 5. Найти производную функции, обратной к $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Р е ш е н и е. Обратной по отношению к заданной является функция $x = g(y) = \operatorname{tg} y$. Области монотонности этих функций:

$$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

По аналогии с преобразованиями примера 4 получим:

$$f'_x = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{g'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогично получается формула для производной $\operatorname{arcctg} x$. Тогда

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = -(\operatorname{arcctg} x)'_x = \frac{1}{1+x^2}.$$

3.7. Производные параметрически и неявно заданных функций

Теорема 1. *Если функция задана параметрически:* $y = f(t)$, $x = g(t)$, *причем функции* $f(t)$ *и* $g(t)$ *определены, непрерывны и строго монотонны, то для ее производной справедлива формула*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.7}$$

Дадим приращение переменной t: $\Delta t = t - t_0$. В силу монотонности и непрерывности функций $f(t)$ и $g(t)$ будут иметь место равнозначные при $\Delta t \to 0$ приращения: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$

Составим отношение приращений функций Δy и Δx к приращению переменной функций Δt.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}.$$

Найдем пределы этих соотношений

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Получена формула, приведенная в определении теоремы.

Пример 1. Найти производную y'_x для параметрически заданного уравнения эллипса: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$.

Р е ш е н и е.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Производная не существует при $t = k\pi \quad (k \in Z)$.

Прежде чем находить производные от параметрически заданных уравнений гиперболы, рассмотрим основные гиперболические функции и их свойства.

Гиперболическими косинусом и синусом называют функции, определяемые равенствами:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \tag{3.8}$$

Подстановка параметрических уравнений гиперболы

$$x = a \operatorname{ch} t; \qquad y = b \operatorname{sh} t$$

в ее каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

обращает последнее в тождество:

$$\frac{a^2}{4a^2}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{b^2}{4b^2}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(2e^x e^{-x} + 2e^x e^{-x}) = \frac{4}{4} = 1.$$

Сформулируем некоторые из свойств гиперболических функций, в справедливости которых можно убедиться непосредственной подстановкой функций в формулы.

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

2. $2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} 2x$.

Гиперболическими тангенсом и котангенсом называют отношения:

3. $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

Производные от гиперболических функций:

4. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

Пример 2. Найти производную y'_x для параметрически заданного уравнения гиперболы: $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t$.

Р е ш е н и е. Ссылаясь на формулу 3.7 получим:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b \operatorname{ch} t}{a \operatorname{sh} t} = \frac{b}{a} \operatorname{cth} t.$$

Если в полученном выражении перейти к переменным $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t$, то получим

$$y'_x = \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}.$$

Теорема 2. *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $u(x, y) = 0$, то определение y'_x сводится к нахождению производной от сложной функции и к дальнейшему выражению из полученного равенства производной в явном виде:* $y'_x = f'(x)$.

В § 5.5 при рассмотрении дифференциалов функции нескольких переменных будет получена удобная формула (5.7) для нахождения производной неявно заданной функции $u(x, y) = 0$:

$$y'_x = -\frac{u'_x}{u'_y}.$$

Пример 3. Найти производную y'_x неявно заданной функции (эллипса): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Р е ш е н и е. Продифференцируем по независимой переменной x обе части записанного уравнения эллипса:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

Выражая отсюда производную, находим

$$y'_x = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Отметим, что записанное выражение может быть получено из выражения для y'_x (пример 1), если в него вместо котангенса параметра t подставить следующее из параметрических уравнений значение: $\operatorname{ctg} t = \dfrac{b}{a}\dfrac{x}{y}$.

Пример 4. Записать уравнение касательной к кривой $y = f(x) = 1/x$ в точке с ординатой $y = 1$.

Р е ш е н и е. Заданной ординате на кривой соответствует точка $M(1, 1)$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку M:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \longrightarrow y - 1 = k(x - 1).$$

Угловой коэффициент касательной k — это производная от функции в точке M:

$$k = \left(\frac{1}{x}\right)'\bigg|_{x=1} = (x^{-1})'|_{x=1} = -x^{-2}\big|_{x=1} = -1.$$

Используя полученные соотношения, запишем искомое уравнение касательной:

$$y - 1 = -1(x - 1) \quad \longrightarrow \quad y = 2 - x.$$

3.8. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ является функцией переменной x, и от нее, как от любой функции, можно взять производную, которая называется *второй производной от функции* $f(x)$, или *производной второго порядка.* Производная от производной второго порядка называется производной третьего порядка и т. д. *Производной n-го порядка* от функции называется производная от производной $(n-1)$-го порядка этой функции.

Для обозначения производных функции $y = f(x)$ используют символы: $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ или $f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$.

Пример 1. Найти вторую производную функции $y = e^{2x}\sin x$.
Решение. Последовательно находим первую, затем вторую производные:

$$y' = (e^{2x})'\sin x + e^{2x}(\sin x)' = 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x = e^{2x}(2\sin x + \cos x);$$

$$y'' = (e^{2x})'(2\sin x + \cos x) + e^{2x}(2\sin x + \cos x)' = e^{2x}(3\sin x + 4\cos x).$$

Отметим, что $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$; $(\sin x)^{(n)} = \sin\Big(x + (-1)^n\dfrac{\pi}{2}n\Big)$.

Пример 2. Найти третью производную функции $y = x^2\ \ln x$.
Решение. Последовательно находим:

$$y' = (x^2)'\ \ln x + x^2\,(\ln x)' = 2x\ \ln x + x^2/x = x(2\ \ln x + 1);$$

$$y'' = x'(2\ \ln x + 1) + x(2\ \ln x + 1)' = 2\ \ln x + 1 + x\cdot 2/x = 2\ \ln x + 3;$$

$$y''' = \frac{2}{x}.$$

Механический смысл второй производной — это скорость изменения скорости, т. е. ускорение точки тела.

Сформулируем два полезных свойства производных n-го порядка.

Теорема. *Если существуют производные n-го порядка от двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, то справедливы формулы:*

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \tag{3.9}$$

где $C_n^k = \dfrac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$ — число сочетаний из n элементов по k.

Формула (3.9), называется *формулой Лейбница* (Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646–1716 — немецкий философ и математик, один из основоположников дифференциального и интегрального исчисления). Справедливость формулы доказывается методом математической индукции.

Найдем дифференциал функции $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{3.10}$$

Вторым дифференциалом, или *дифференциалом второго порядка*, d^2y называется дифференциал от дифференциала (введенный ранее дифференциал можно считать дифференциалом первого порядка).

При нахождении второго дифференциала в произведении $f'(x)\cdot dx$ множитель $dx = \Delta x$ считается постоянной величиной.

Найдем дифференциал от (3.10):

$$d(dy) = d^2y = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Используя это выражение, найдем (в предположении, что $(dx)^2 = dx^2$ — постоянная величина) дифференциал третьего порядка, затем четвертого и т. д.

Дифференциал n-го порядка определяется формулой

$$d^ny = y^{(n)}(x)dx^n. \tag{3.11}$$

Отсюда можно выразить производную n-го порядка функции $y = f(x)$:

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Пример 3. Найти четвертый дифференциал функции $y = x^5 - x^3 + \ln x$.

Р е ш е н и е. Найдем сначала производные функции вплоть до четвертой:

$$y' = 5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{x}; \quad y'' = 20x^3 - 6x - \frac{1}{x^2};$$

$$y''' = 60x^2 - 6 + \frac{2}{x^3}; \quad y^{(4)} = 120x - \frac{6}{x^4}.$$

Тогда $\quad d^{(4)}y = \left(120x - \dfrac{6}{x^4}\right)dx^4.$

3.9. Производные в задачах экономики

3.9.1. Предельные величины в экономике

В § 3.1 говорилось о производительности труда как о задаче, которая приводит к понятию производной.

Рассмотрим еще одну экономическую задачу.

Пусть x и Δx — затраты предприятия на производство продукции и их приращение; y и Δy — объем производства и его приращение. Тогда *среднее приращение* выпуска продукции на единицу дополнительных затрат определится отношением $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельное значение приращения объема выпускаемой продукции, обусловленное дополнительными затратами.

Напомним, что любые производные функций в экономике принято называть *предельными значениями функции.*

Пример. Зависимость между объемом производства y и затратами x на его производство описывается функцией: $y = 50x - 0,05x^2$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 единиц.

Р е ш е н и е. Средний объем производства, приходящийся на единицу затрат, определяется отношением: $y_{\text{ср}} = y/x = 50{-}0{,}05x^2$ и при $x = 10$ $y_{\text{ср}}(10) = 50{-}0{,}05{\cdot}10^2 = 45$ д.е.

Здесь, как и ранее и в дальнейшем, сокращением «д.е.» обозначены денежные единицы.

Функция предельных издержек равна производной по x от функции y: $y' = 50 - 0,1x$; $y'(10) = 50 - 0,1 \cdot 10 = 49$ д.е.

Применение производной в экономических задачах не исчерпывается определением предельных объемов производства. С равным эффектом производные позволяют находить другие предельные величины: доход, полезность, проигрыш и т.д.

Предельные величины характеризуют в экономике не состояние, а *процесс* изменения экономического объекта. Производная выступает как скорость изменения рассматриваемого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого изменяемого фактора. Производная, таким образом, характеризует динамику экономических процессов.

3.9.2. Темп изменения функции

Темпом (*относительной скоростью*) *изменения функции* $y = f(x)$ называется отношение производной функции к самой функции:

$$T_{y(x)} = T_y = \frac{y'}{y} = \ln' |y|. \tag{3.12}$$

Последнее равенство записано на основании определения логарифмической функции и ее производной. Таким образом, темп изменения функции равен производной от логарифма этой функции, называемой *логарифмической производной*.

Логарифмическая производная, в частности, дает возможность вычислить производную от показательно-степенной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Выражая y'_x из (3.12), получим

$$y'_x = y \ln'_x |y| = u^v (v \ln |u|)'_x = u^v \left(v'_x \ln |u| + \frac{v}{u} u'_x \right).$$

Темп изменения функции находит применение в экономических задачах. В частности, банковская ставка $r = r\%/100$ является темпом изменения величины вклада $S(t)$ $(S > 0)$ в банк, являющейся функцией времени t:

$$T_{r(t)} = r(t) = \frac{S'_t(t)}{S(t)} = \ln'_t S(t). \tag{3.13}$$

Пример. По установленному закону изменения величины вклада $S(t) = S_0(1 + t)^{0,12}$ требуется определить, как по годам изменялась процентная ставка банка.

Р е ш е н и е. Для решения задачи используем формулу (3.13) $\big(S(t)$, S_0 и t — положительные величины$\big)$:

$$r(t) = \ln'_t S(t) = [\ln S_0 + 0{,}12 \ln(1 + t)]'_t = \frac{0{,}12}{1 + t}.$$

Так, через три года хранения вклада в банке ставка равнялась $r(3) = \dfrac{0{,}12}{1 + 3} = 0{,}03$ или 3%, через 5 лет $r(5) = \dfrac{0{,}12}{1 + 5} = 0{,}02$ или 2%. Процентная ставка уменьшилась, хотя вклад непрерывно растет, так как $S'_t = 0{,}12 S_0 (1 + t)^{-0{,}88} > 0$.

3.9.3. Эластичность

Еще одной характеристикой экономических процессов является эластичность.

Отношение относительного приращения функции $(\Delta y/y)$ к относительному приращению независимой переменной $(\Delta x/x)$ называют *дуговой эластичностью*:

$$\breve{E}_y = \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Дуговую эластичность используют в задачах, где неизвестна производная функции в точке, а приращение функции при переходе к новому значению аргумента задано. Такая ситуация типична для экономических задач, когда известно изменение некоторой исследуемой величины за определенный промежуток времени Δt.

Эластичностью $E_{y(x)}$ функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\Delta y/y$ к относительному приращению независимой переменной $\Delta x/x$ при $\Delta x \to 0$:

$$E_{y(x)} = E_y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y' = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим графики различных видов функций (рис. 3.4) и поясним на них геометрический смысл эластичности.

На рис. 3.4,а изображена убывающая функции $y = f(x)$, график которой направлен выпуклостью вниз.

Найдем эластичность функции $f(x)$ в точке $k(x_k, y_k)$. Для этого проведем касательную к графику функции, проходящую через точку k. Из треугольника mkq следует $qm = qk/\operatorname{tg}\alpha = op/\operatorname{tg}\alpha = y_k/\operatorname{tg}\alpha$ $(op = y_k)$. Так как $y'_k = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = -y'_k$. Поэтому $qm = -y_k/y'_k$.

Из подобия треугольников knp и kmq следует $(pk = oq = x_k)$:

$$\frac{kn}{km} = \frac{pk}{qm} = -x_k\frac{y'_k}{y_k} = -E_{y(x_k)},$$

или

$$E_{y(x_k)} = -\frac{kn}{km}.$$

Таким образом, эластичность убывающей функции в рассматриваемой точке (k) равна отношению расстояний по касательной от точки касания k до точек пересечения касательной с осями ординат (n) и абсцисс (m) соответственно, взятому со знаком минус.

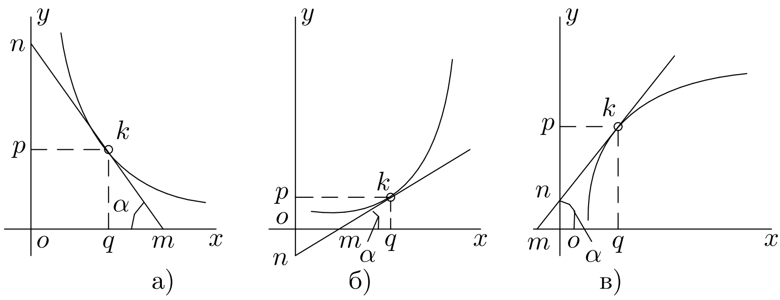


Рис. 3.4. К понятию «эластичность» функции

На рис. 3.4,а направления от точки k до точек m и n противоположные. Этим обычно объясняется присутствие знака минус в выражении для эластичности.

Преобразования, подобные описанному, можно провести для случаев поведения функций $y = f(x)$, представленных на рис. 3.4,б и 3.4,в, где направления прямых kn и km совпадают и поэтому эластичность положительна:

$$E_{y(x_k)} = \frac{kn}{km}.$$

Отметим некоторые полезные свойства эластичности.

Свойство 1. Эластичность функции равна отношению ее предельного значения к среднему.

Для доказательства преобразуем выражение (3.14):

$$E_y = y' : \frac{y}{x} = \frac{y'}{y_{\text{ср}}}.$$

Числитель этого выражения представляет собой предельное, а знаменатель — среднее значения процесса, описываемого функцией y.

Свойство 2. Эластичность функции равна произведению независимой переменной на темп изменения функции:

$$E_y = x\,T_y.$$

Свойство 3. Эластичность суммы положительных функций $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ в фиксированной точке $x = x_0$ удовлетворяет соотношению

$$E_{\min} \le E_y(x) \le E_{\max},$$

где

$$E_{\min} = \min\{E_{y_1}(x), E_{y_2}(x), \dots, E_{y_n}(x)\},$$
$$E_{\max} = \max\{E_{y_1}(x), E_{y_2}(x), \dots, E_{y_n}(x)\}.$$

Свойство 4. Эластичность произведения (частного от деления) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:

$$E_{uv} = E_u + E_v, \qquad E_{u/v} = E_u - E_v.$$

Пример. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y и количеством выпускаемой продукции x выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 ед.
Р е ш е н и е. По формуле (3.14) находим

$$E_{y(x)} = \frac{x}{-0{,}5x + 80} \cdot (-0,5) = \frac{x}{x - 160}.$$

При $x = 60$

$$E_{y(60)} = \frac{60}{60 - 160} = -0{,}6.$$

Полученный результат означает, что при выпуске продукции, равном 60 ед., его увеличение на 1% приведет к снижению (знак минус) себестоимости на 0,6%.

Заметим, что при $E_y > 0$ (положительная эластичность) произошло бы увеличение себестоимости. При $E_y > 1$ себестоимость будет увеличиваться быстрее выпуска продукции. Рост производства станет невыгодным.

3.9.4. Распределение налогового бремени

Пусть для некоторого анклава (автономной группы людей) с рыночной экономикой известны зависимости от цены P спроса $D = D(P)$ и предложения $S = S(P)$ (рис. 3.5).

Непривычное расположение независимой переменной P вдоль оси ординат, а функций S и D вдоль оси абсцисс принято в экономических задачах.

Так как при увеличении цены спрос уменьшается, то эластичность спроса $E_D < 0$. Спрос называется *эластичным*, если $|E_D| < 1$, и *неэластичным*, если $|E_D| > 1$.

Говорят, что спрос *совершенно неэластичен*, если $E_D = 0$. В этом случае изменение цены не приводит к изменению спроса (товары, без которых нельзя обойтись, например, хлеб). При $|E_D| \to \infty$ спрос *совершенно эластичен* — малейшее отклонение от цены товара приводит к его панической закупке.

Равновесная рыночная цена P_0 может быть определена из уравнения

$$D(P_0) = S(P_0).$$

Пусть руководство анклава решило ввести дополнительный налог с производителей товара в размере t. Как ответное действие на повышение налога производитель будет вынужден повысить цены на товар, причем для сохранения прибыли он увеличит цену продукции на t. В результате новая кривая предложения, соответствующая добавленному налогу, будет располагаться выше исходной.

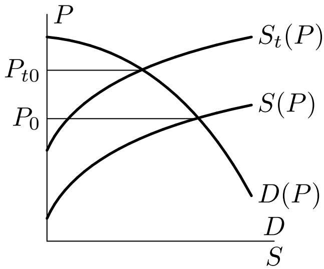


Рис. 3.5. Влияние изменения налога

Новая равновесная цена при условии, что кривая спроса не изменится, определится из уравнения ($P_{t0} = P_0 + \Delta P$):

$$D(P_{t0}) = S_t(P_{t0}),$$

эквивалентного уравнению

$$D(P_{t0}) = S(P_{t0} - t). \tag{3.15}$$

Рассмотрим приращения функций спроса и предложения и заменим их на дифференциалы ($dP \approx \Delta P = P_{t0} - P_0$ — изменение равновесной цены):

$$S(P_0 + \Delta P) \approx S(P_0) + S'(P_0)\Delta P; \quad D(P_0 + \Delta P) \approx D(P_0) + D'(P_0)\Delta P.$$

Учитывая эти соотношения, перепишем (3.15):

$$S(P_0) + S'(P_0)(\Delta P - t) \approx D(P_0) + D'(P_0)\Delta P.$$

В этом равенстве $S(P_0) = D(P_0)$, поэтому

$$S'(P_0)(\Delta P - t) \approx D'(P_0)\Delta P.$$

Отсюда следует

$$\Delta P \approx \frac{tS'(P_0)}{S'(P_0) - D'(P_0)}. \tag{3.16}$$

Записанная формула позволяет приближенно определить дополнительные затраты потребителя, обусловленные повышением налога на t д. е. При этом доход производителя уменьшится:

$$t - \Delta P \approx \frac{-tD'(P_0)}{S'(P_0) - D'(P_0)}.$$

Налоговое бремя распределяется между потребителем и производителем в отношении

$$\frac{\Delta P}{t - \Delta P} = \frac{S'(P_0)}{-D'(P_0)}.$$

Поскольку при цене P_0 спрос равен предложению $\big(S(P_0) = D(P_0)\big)$, то

$$\frac{S'(P_0)}{-D'(P_0)} = \frac{S'(P_0)P_0}{S(P_0)} \Bigg/ \frac{-D'(P_0)P_0}{D(P_0)} = E_S/(-E_D).$$

Таким образом, налоговое бремя между потребителем и производителем распределяется пропорционально эластичностям спроса и предложения.

Пример. Пусть эластичность спроса на некоторый товар $-E_D = -2$, а предложения $E_S = 3$ и пусть вводимый налог на товар $t = 10$ д. е. Требуется определить налоговое бремя на потребителя (увеличение рыночной цены ΔP товара) и производителя (уменьшение дохода $t - \Delta P$).

Р е ш е н и е. Преобразуем формулу (3.16), представляя входящие в нее производные через соответствующие эластичности:

$$\Delta P = t \Bigg/ \left(1 + \frac{-D'(P_0)}{S'(P_0)}\right) = t \Bigg/ \left(1 + \frac{-E_D}{E_S}\right) = 10 \Bigg/ \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 6 \text{ д. е.}$$

Прибыль производителя уменьшится и будет равна

$$t - \Delta P = 10 - 6 = 4 \text{ д. е.}$$

3.10. Резюме

Важное значение в исследовании поведения процессов и систем имеют производные, которые, в частности, связаны со скоростью изменения процессов, производительностью труда в экономике и т.д., т.е. с явлениями или процессами, которые изменяются во времени или в пространстве.

Еще во времена зарождения математического анализа составлены таблицы производных основных элементарных функций, известных в настоящее время каждому выпускнику средней школы. В средних школах учат брать производные от сумм, произведений функций, а также от сложных функций.

Скорость изменения производной определяет вторая производная; второй производной — третья, и так далее, что приводит к понятию производной n-го порядка — производной от производной $(n-1)$-го порядка.

С производной тесно связано понятие дифференциала — главной части приращения функции. Дифференциал функции позволяет во многих задачах, где затруднено прогнозирование поведения функции, предсказать приближенно ее будущее значение.

Для более глубокого знакомства с производными и дифференциалами функций следует обратиться к [24].

3.11. Вопросы

1. Как на языке пределов дать определение касательной к графику функции?

2. В чем заключается геометрический смысл производной? механический смысл? экономический смысл?

3. Дайте определение производной и запишите его в виде математической формулы.

4. Какая функция называется дифференцируемой в точке? в области? Как связаны понятия дифференцируемости и непрерывности?

5. Может ли непрерывная функция быть недифференцируемой? Поясните на примере.

6. Какие ситуации скрываются за словами: «Производная не существует в точке»?
7. Можно ли говорить о производных дискретных функций? Если да, то при каких условиях?
8. Приведите схему (последовательность) вычисления производной.
9. Перечислите основные свойства производных. Приведите соответствующие математические соотношения.
10. Получите формулу определения производной от произведения трех функций.
11. Как найти производную от сложной функции? Запишите соответствующую формулу.
12. Воспроизведите последовательность получения формул для вычисления производной от степенной и логарифмической функций.
13. Воспроизведите по памяти таблицу производных основных элементарных функций.
14. Что такое предельные издержки производства и как они связаны с понятием производной?
15. Дайте определение эластичности функции. Поясните это понятие на графике.
16. Как связана эластичность с темпом изменения функции?
17. Чему равна эластичность произведения двух функций? частного от деления функций?
18. Что такое дифференциал функции и как он связан с производной? Как связаны между собой приращения функции и ее дифференциал? приращение аргумента и его дифференциал?
19. Как можно использовать дифференциал в приближенных вычислениях?
20. Покажите на графиках выпуклой и вогнутой функций ее приращение и дифференциал.

Вопросы для тестирования

1. Перечислите правильные утверждения, касающиеся производной функции. Производная:

1. от объема выпускаемой продукции по времени есть производительность труда;
2. равна отношению приращения функции к приращению аргумента;
3. положительна для монотонно возрастающей функции;
4. не равна нулю для непрерывной функции.
5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

2. Перечислите правильные утверждения.

1. $\big(f(g(x))\big)' = f\big(g'(x)\big)$;
2. Производная от произведения функций равна произведению производных;
3. Производная от неявно заданной функции вычисляется в предположении, что аргумент функции постоянен;
4. Производная частного от деления двух функций равна разности производных от этих функций;
5. В пунктах 1–4 не содержится требуемых.

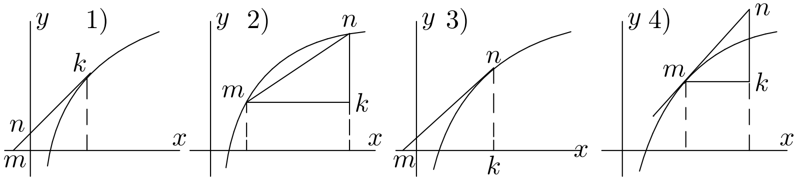
3. Какие из определений являются производной функции.

1. Главная часть приращения функции;
2. Отношение отрезков, отсекаемых касательной к графику функции соответственно на осях абсцисс и ординат;
3. Тангенс угла наклона к оси ординат касательной к графику функции;
4. Предел отношения приращения аргумента к приращению функции при стремлении последней к нулю;
5. Среди ответов 1 – 4 нет требуемых.

4. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка) для функции $y = y(x)$. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Приращение функции	1. dx;
2. Приращение аргумента	2. $y'dx$;
3. Производная функции	3. $y(x+\Delta x) - y(x)$;
4. Дифференциал функции	4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. Расположите номера определений, соответствующих отношению kn/km в порядке следования номеров рисунков. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.



1. Дифференциал;
2. Эластичность;
3. Производная функции;
4. Темп изменения функции.

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕМА 3.1
(§ 3.2, 3.3, 3.5 теории)

Производные

Вопросы

1. Как на языке пределов дать определение касательной к графику функции?
2. В чем заключается геометрический смысл производной? механический смысл? экономический смысл?
3. Дайте определение производной и запишите его в виде математической формулы.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке? в области?
5. Как связаны понятия дифференцируемости и непрерывности? Может ли непрерывная функция быть недифференцируемой?
6. Перечислите основные свойства производных.
7. Почему производную от частного можно рассматривать как частный случай производной от произведения?
8. Как найти производную от сложной функции? Запишите соответствующую формулу.
9. Воспроизведите по памяти таблицу производных основных элементарных функций.

Задачи

В задачах 1–11 найти производные функций, используя таблицу и свойства производных.

1. $y = 2x^4 - \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x} + 3.$

Решение. $y' = 8x^3 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}.$

2. $y = 3x^2\sqrt{x}.$

Решение. Найдем производную:

1) от произведения:

$y' = 6x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{15}{2}x\sqrt{x}.$

2) объединив множители:

$y' = \left(3x^{\frac{5}{2}}\right)' = \dfrac{15}{2}x\sqrt{x}.$

3. $y = x^5 \ln x.$

Решение. $y' = 5x^4 \ln x + x^5 \dfrac{1}{x} = x^4(5\ln x + 1).$

4. $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2-1}.$

Решение.

$$y' = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1) - (\sqrt{x}+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2 - 4x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}.$$

5. $y = \ln\sqrt{x^2+3}.$

Решение. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = \dfrac{x}{x^2+3}.$

6. $y = \operatorname{tg} x.$

Решение. $y' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Аналогично получить самостоятельно формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

7. $y = \sin\sqrt{x^3}.$

Решение. $y' = \cos\sqrt{x^3} \cdot \dfrac{3}{2}\sqrt{x}.$

8. $y = \ln\sin x^3.$

Решение. $y' = \dfrac{1}{\sin x^3} \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \operatorname{ctg} x^3.$

9. $y=\sqrt{\operatorname{tg} x^2-\log_a \cos\sqrt{x}}$.

Р е ш е н и е. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^2-\log_a \cos\sqrt{x}}}\left(\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}+\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\ln a}\right)$.

10. $y=\operatorname{arctg}\big(\ln(\operatorname{tg} x^3)\big)$.

Р е ш е н и е. $y'=\dfrac{1}{1+\ln^2(\operatorname{tg} x^3)}\dfrac{3x^2}{\operatorname{tg} x^3\cos^2 x^3}$.

11. $y=\ln\left(\cos^3 x+\sqrt{1-\sin 2x}\right)$.

Р е ш е н и е. $y'=-\dfrac{1}{\cos^3 x+\sqrt{1-\sin 2x}}\left(3\sin x\cos^2 x+\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}\right)$.

В задачах 12–13 найти производные функций, используя прием логарифмического дифференцирования.

12. $y=x^{\sqrt{x}}$.

Р е ш е н и е. Предварительно прологарифмируем выражение: $\ln y=\sqrt{x}\ln x$. Продифференцируем обе части полученного равенства: $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

Умножим обе части полученного выражения на $y=x^{\sqrt{x}}$:

$$y'=\frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\ln x+2).$$

13. $y=\left(\sin x^2\right)^{\ln x}$.

Р е ш е н и е. $\ln y=\ln x\ln(\sin x^2)$; $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{x}\ln(\sin x^2)+\ln x\dfrac{\cos x^2}{\sin x^2}2x$; $y'=\left(\sin x^2\right)^{\ln x}\left(\dfrac{1}{x}\ln(\sin x^2)+2x\ln x\operatorname{ctg} x^2\right)$.

14. Найти производную функции $y=\sin\sqrt{x}$ при $x=\dfrac{\pi^2}{9}$.

Р е ш е н и е. $y'=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $\Rightarrow y'\left(\dfrac{\pi^2}{9}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\dfrac{3}{2\pi}=\dfrac{3}{4\pi}$.

15. Найти тангенс угла наклона к оси x кривой $y=\dfrac{1}{x}$ в точке, где $x=\dfrac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. $y' = -\dfrac{1}{x^2}; \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4.$

16. Найти тангенс угла наклона к оси x кривой $y = e^{-x}$ при $x \to \infty$.
Р е ш е н и е. $y' = -e^{-x}; \Rightarrow y'(x \to \infty) = -\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = -\dfrac{1}{e^{\infty}} = 0.$

Равенство нулю производной и самой функции при $x \to \infty$ говорит о том, что x является горизонтальной асимптотой кривой.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–5 вычислить производные функций, используя определение (в скобках даны вспомогательные для решения задач соотношения и пояснения).

1. $y = x^3 \quad \left((x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3\right)$.

2. $y = e^x$ (предварительно прологарифмировать функцию, затем найти производную от обеих частей полученного равенства и выразить из него производную).

3. $y = x^x$ (предварительно прологарифмировать, найти производную от обеих частей равенства и выразить из него y' с учетом записанного в условии выражения).

4. $y = \sin x$ (воспользоваться формулой разности синусов

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

и первым замечательным пределом).

5. $y = \cos x$ (воспользоваться формулой разности косинусов

$$\cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

и первым замечательным пределом).

В задачах 7–14 вычислить производные, используя таблицу производных основных элементарных функций, правило вычисления производных сложных функций, а также производных от сумм и произведений, вычислить производные.

6. $y = \operatorname{ctg} x$ (представить котангенс в виде частного от деления косинуса на синус);

7. $y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3$. **8**. $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$. **9**. $y=e^x\operatorname{arctg}x$ при $x=0$.

10. $y=x^3(2\ln^2x-4\ln x+1)$. **11**. $y=\sqrt[4]{1-xe^{4x}}$ при $x=1/4$.

12. $y=\ln\sin 2x$. **13**. $y=3\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

14. $y=\sqrt{e^{x-1}+\ln x}$ при $x=1$.

15. Составить уравнения касательных к кривой $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ в точке ее пересечения с осью ординат и в точке $x=2$.

Т Е М А 3.2

(§ 3.4–3.8 теории)

Дифференциал. Производные n-го порядка

Вопросы

1. Что такое дифференциал функции и как он связан с производной?
2. Как связаны между собой приращение функции и ее дифференциал? приращение аргумента и его дифференциал?
3. Как можно использовать дифференциал в приближенных вычислениях?
4. Покажите на графиках выпуклой и вогнутой функций их приращения и дифференциалы.
5. Как определяется производная n-го порядка?

Задачи

В задачах 1 и 2 найти дифференциалы функций.

1. $y=x^3+2\sqrt{x}+1$.

Р е ш е н и е. Дифференциал равен произведению производной функции на приращение (дифференциал) аргумента. Поэтому

$$dy=\left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

2. $y = \ln\left(3 - x^2 - x\right)$ при $dx = 0{,}1$; $x = 1$.

Р е ш е н и е. $dy = -\dfrac{2x+1}{3-x^2-x}\,dx$;

при $x = 1$: $dy(1) = -\dfrac{2\cdot 1+1}{3-1^2-1}\cdot 0{,}1 = -0{,}3.$

В задачах 3 и 4 найти приближенные значения, используя понятие дифференциала функций.

3. $\sqrt[3]{9}$.

Р е ш е н и е. Для вычисления используем формулу $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Положим $x_0{=}8{=}2^3$; $\Delta x{=}1$; $f(x){=}\sqrt[3]{x}$. Тогда $f(x_0){=}\sqrt[3]{8} = 2$;

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\quad f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2^{3\cdot 2}}} = \frac{1}{12};$$

$$f(x_0+\Delta x) = \sqrt[3]{9},\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{9} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{12}\cdot 1 \approx 2{,}083.$$

4. $\ln 11$.

Р е ш е н и е. Положим $x_0 = e^2 \approx 7{,}39$; $\Delta x = 11 - 7{,}39 = 3{,}61$;

$f(x) = \ln x$. Тогда $f(x_0) = \ln e^2 = 2$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'(x_0) = \dfrac{1}{e^2} \approx \dfrac{1}{7{,}39}$;

$$f(x_0+\Delta x) = \ln 11,\ \Rightarrow\ \ln 11 \approx 2 + \frac{1}{7{,}39}\cdot 3{,}61 \approx 2{,}49.$$

В задачах 5 и 6 найти производные n-го порядка.

5. $y = x^3 + 4x + 2$.

Р е ш е н и е. $y' = 3x^2 + 4$; $y'' = 6x$; $y''' = 6$; $y^{(n)} = 0$, $n > 3$.

6. $y = \dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$; $y'' = \dfrac{1\cdot 2}{x^3}$; $y''' = -\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$;

$$y^{(4)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5};\quad \ldots,\quad y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 и 2 найти приращения и дифференциалы функций, в том числе при заданных x и Δx.

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

2. $y = \sqrt{5 + x^2}$ при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

В задачах 3–5 найти приближенные значения выражений, используя дифференциал.

3. $\sqrt[5]{65}$. **4**. $e^{1{,}03}$. **5**. $\ln(e + 0{,}2)$.

В задачах 6–10 получить выражение для n-ной производной функции.

6. $x \ln x$. **7**. $x^2 - 3\ln x$. **8**. $\sqrt{x^3}$. **9**. $\sqrt[3]{x}$. **10**. e^{-3x}.

ТЕМА 3.3

(§ 3.9 теории)

Эластичность. Производные в задачах экономики

Вопросы

1. Что понимается под предельными величинами в экономике?
2. Дайте определение эластичности и темпа изменения функции. Как связана эластичность с темпом изменения функции?
3. Поясните, как найти эластичность функции в точке по виду ее графика.
4. Что такое дуговая эластичность?
5. Чему равна эластичность произведения двух функций? частного от деления функций?
6. Как определить экстремальные значения эластичности суммы нескольких функций?

Задачи

В задачах 1 и 2 найти эластичность и темп изменения функций. (Результаты сопроводить поясняющими рисунками).

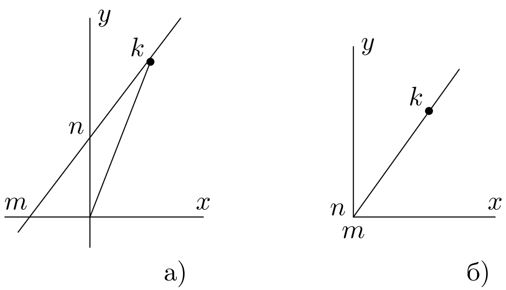


Рис. 3.6. Графики функций задачи 1

1. $y = a + bx$.

Р е ш е н и е. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx} = b$, то

$$E_y = \frac{bx}{a+bx}, \qquad T_y = \frac{E_y}{x} = \frac{b}{a+bx}.$$

При неограниченном росте x эластичность, оставаясь меньше единицы, стремится к единице, а темп роста функции — к нулю:

$$\lim_{x\to\infty} E_y = \lim_{x\to\infty} \frac{bx}{a+bx} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} T_y = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a+bx} = 0.$$

Из рис. 3.6,а видно, что отношение kn/km также стремится к единице при $x \to \infty$.

Если $a = 0$, то $E_y = 1$. Это видно и из рис. 3.6,б, на котором точки m (пересечение касательной с осью x) и n (пересечение касательной с осью y) совпадают, так что $kn/km = 1$.

2. $y = kx^n$.

Р е ш е н и е. $E_y = \dfrac{knx^{n-1}x}{kx^n} = n; \qquad T_y = \dfrac{n}{x}.$

Эластичность степенных функций равна постоянной величине — показателю степени. При $n > 1$ (рис. 3.7,а) степенная функция эластична, при $0 \le n \le 1$ — неэластична.

Частный случай $n = 1$ рассмотрен в примере 1. При $n = -1$ функция $y = \dfrac{k}{x}$ представляет собой гиперболу (рис. 3.7,б) и отношение $\dfrac{kn}{km} = -1$. Знак минус указывает на то, что точки m и n лежат на касательной к кривой по разные стороны от точки k.

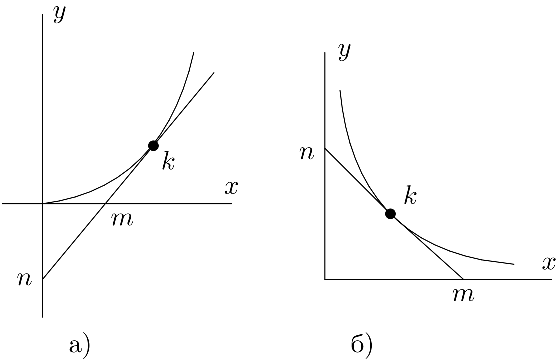


Рис. 3.7. Графики функций задачи 2;
а) – при $n > 1$; б) – при $n = -1$

3. Сравнить с единицей величины эластичности для кривых, изображенных на рис. 3.8.

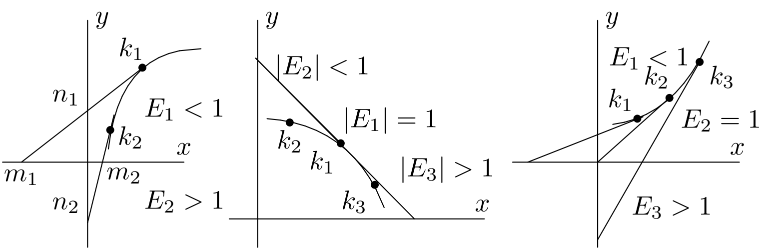


Рис. 3.8. Графики функций задачи 3

4. Найти эластичность произведения функций $y_1 = x$ и $y_2 = e^{-2x}$.
Р е ш е н и е. Для произведения функций $y = y_1 y_2 = xe^{-2x}$:

$$E_y = y' \frac{x}{y} = e^{-2x}(1-2x)\frac{x}{xe^{-2x}} = 1 - 2x = E_{y_1} + E_{y_2}.$$

5. Найти наибольшее и наименьшее, в том числе по модулю, значения эластичности функции

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \ldots + b_k x^{-k}.$$

Р е ш е н и е. Определим эластичности слагаемых:

$$E_{a_0} = a_0' \frac{x}{a_0} = 0; \quad E_{a_i x^i} = i, \ (i = \overline{1, n}); \quad E_{b_j x^{-j}} = -j \ (j = \overline{1, k}).$$

Следуем свойству эластичности: максимальное и минимальное значения эластичности равны соответственно максимальному и минимальному из значений эластичностей ее слагаемых. Поэтому

$$E_{\max} = E_{a_n x^n} = n; \quad E_{\min} = E_{b_k x^{-k}} = -k.$$

Если эластичность берется по абсолютной величине, то

$$E_{\max} = \max\{n, k\}, \quad E_{\min} = E_{a_0} = 0.$$

6. Найти эластичность функции $y = 2x^2 + x + 1$ в точке с абсциссой $x = 1$ и дуговую эластичность при $\Delta x_1 = 0{,}1$ и $\Delta x_2 = 0{,}2$.
Р е ш е н и е.

$$E_{y(x)} = \frac{(4x+1)x}{2x^2 + x + 1}; \qquad E_{y(1)} = \frac{(4 \cdot 1 + 1) \cdot 1}{2 \cdot 1^2 + 1 + 1} = 1{,}25.$$

Определим приращения функции при двух вариантах задания приращения аргумента ($y(1) = 4,\ \ y(1{,}1) = 4{,}52$, $y(1{,}2) = 5{,}08$):

$$\Delta y_1 = y(1{,}1) - y(1) = 4{,}52 - 4 = 0{,}52; \ \ \Delta y_2 = y(1{,}2) - y(1) = 5{,}10 - 4 = 1{,}08.$$

Дуговая эластичность

$$\breve{E}_{y_1(1)} = \frac{\Delta y_1}{y_1} \frac{x}{\Delta x_1} = \frac{0{,}52}{4} \frac{1}{0{,}1} = 1{,}35 > E_{y(1)};$$

$$\breve{E}_{y_2(1)} = \frac{1{,}1}{4} \frac{1}{0{,}2} = 1{,}375 > \breve{E}_{y_1(1)}.$$

7. Между прибылью П предприятия и затратами C на производство продукции установлена зависимость $\Pi = \ln C$ (при $C \le 1$ прибыли нет). Определить: а) максимальную прибыль, на которую может рассчитывать предприятие; б) эластичность $E_{\text{п}(C)}$. По величинам эластичности определить, до какой величины предприятию выгодно увеличивать затраты на производство продукции.
Р е ш е н и е.

а) Для определения максимальной прибыли найдем и приравняем нулю производную от прибыли:

$$\Pi' = \ln' C = \frac{1}{C} = 0, \implies C_* \to \infty.$$

Локального максимума функция прибыли не имеет: функция монотонно возрастает, начиная с $C = 1$, где $\Pi(t) = 0$.

б) Найдем эластичность:

$$E_{\text{п}(C)} = \Pi' \frac{C}{\Pi} = \frac{1}{C}\frac{C}{\ln C} = \frac{1}{\ln C}.$$

Эластичность — монотонно убывающая от бесконечности (при $C = 1$) функция. Найдем значение C, при котором эластичность обращается в единицу:

$$E_{\text{п}(C)} = \frac{1}{\ln C} = 1, \implies \ln C = 1, \implies C = e.$$

При $C > e$ эластичность функции прибыли меньше единицы. Это говорит о том, что издержки производства при $C > e$ растут быстрее, чем прибыль предприятия, и поэтому увеличивать затраты на развитие предприятия дальше нецелесообразно.

8. Заданы функции спроса и предложения (переменные заданы в д.е.):

$$D = 20\sqrt{300 - P}, \quad S = 10\sqrt{6(P - 200)}.$$

При установившемся равновесии рынка введен дополнительный налог на продажу $t = 44$ д.е. Определить рыночную цену на товар и прибыль производителя после введения налога.

Р е ш е н и е. Предварительно установим равновесную цену на рынке до введения налога. Для этого решим получаемую из заданных функций систему уравнений ($D = S = Q$):

$$\begin{cases} P = 300 - Q^2/400, \\ P = 200 + Q^2/600. \end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнений, после преобразования приходим к квадратному уравнению:

$$Q^2 = 2{,}4 \cdot 10^4,$$

положительное решение которого $Q_* = 100\sqrt{2{,}4}$. Равновесная рыночная цена $P = 300 - \dfrac{1}{400}(2{,}4 \cdot 10^4) = 240$.

Определим эластичность функций спроса и предложения:

$$E_{D(P)} = D'\frac{P}{D} = \frac{-P}{2(300-P)}, \quad \Longrightarrow \quad E_{D(240)} = \frac{-240}{2(300-240)} = -2;$$

$$E_{S(P)} = S'\frac{P}{S} = \frac{P}{P-200}, \quad \Longrightarrow \quad E_{S(240)} = \frac{240}{240-200} = 1{,}2.$$

В точке рыночного равновесия эластичности кривых спроса и предложения по модулю больше единицы. Это говорит о том, что спрос и предложение эластичны.

Определяем прирост цены, обусловленный введением налога $t = 44$:

$$\Delta P = \frac{|E_{D(P)}|}{|E_{D(P)}| + |E_{S(P)}|}t = \frac{2}{2+1{,}2}44 = 27{,}5.$$

При этом цена на рынке увеличится на ΔP и станет равной

$$P_t = P_* + \Delta P = 240 + 27{,}5 = 267{,}5,$$

а прибыль производителя (до налога $\Pi_* = P_*$) уменьшится на ΔP:

$$\Pi_t = P_* - \Delta P = 240 - 27{,}5 = 212{,}5.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–5 найти эластичность и области изменения аргумента, соответствующие неравенству $|E_{y(x)}| > 1$.

1. $y = 3e^{-2x}$. **2.** $y = 2e^{3x}$. **3.** $y = x^n$.

4. $y = 2 + 3x$. **5.** $y = e^{3x}x^{-2}$.

6. Найти эластичность функции $y = x^2 - x + 2$ в точке с абсциссой $x = 2$ и дуговую эластичность при $\Delta x_1 = 0{,}1$ и $\Delta x_2 = 0{,}2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения эластичности функции $y = 2 + x^{-2} + x$.

8. Между прибылью предприятия Π и затратами C на производство продукции установлена зависимость $\Pi = e^C$. Найти выражение для эластичности функции прибыли. Путем анализа этого выражения определить значения C, при которых выгодно развивать производство.

9. Между количеством выпускаемой предприятием продукции Q и количеством вложенного труда (численность работающих) L установлена зависимость $Q = 8\sqrt{L}$. Цена единицы продукции 200 д.е., средняя заработная плата работающего 160 д.е. Найти оптимальное количество работающих, при котором прибыль предприятия достигает максимума.

10. Определить, как изменятся цена на товар и прибыль производителя после введения налога на продажу товара $t\% = 5\%$, если до ввода налога на рынке установилось равновесие при известных функциях спроса $D = 2P - 300$ и предложения $S = 500 - 2P$.

Глава 4

Исследование функций

4.1. Теоремы о среднем

Рассмотрим некоторые из основных теорем дифференциального исчисления, на которых основаны методы исследования функций. Авторами сформулированных ниже теорем являются французские математики 17-19 столетий: Ферма (Fermat Pierre, 1601–1665); Ролль (Rolle Michel, 1652-1719); Лопиталь (Lhopital Fransois Antoine, 1661-1704); Лагранж (Lagrange Joseph Louis, 1736-1813); Коши (Cauchy Augusten Louis, 1789-1857).

Перед формулировкой теорем обратим внимание на то, что в них оговариваются требования непрерывности и (или) дифференцируемости функций. Не следует отождествлять эти понятия: функция, терпящая разрыв в точке, может в этой точке иметь непрерывную производную; непрерывная в точке функция может быть недифференцируемой в этой точке (иметь различные значения производной справа и слева от точки).

Теорема Ферма. *Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) *дифференцируема на интервале (a, b);*

2) *достигает наибольшего (наименьшего) значения во внутренней точке ξ интервала. Тогда $y'(\xi) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi \in (a, b)$ — единственная точка, в которой функция $y(x)$ достигает своего максимального (для определенности) значения. В этом случае в окрестности точки ξ выполняется неравенство $y(x) \leq y(\xi)$ $\big(y(x) - y(\xi) \leq 0\big)$ для всех $x \in (a, b)$.

При $x < \xi$ $(x - \xi < 0)$: $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0.$

При $x > \xi$ $(x - \xi > 0)$: $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0.$

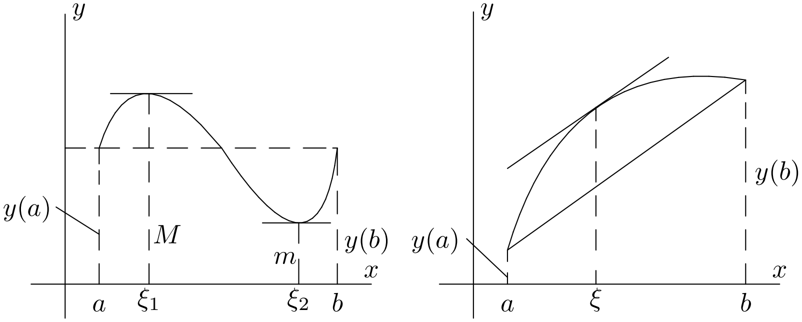
Так как $y(x)$ — дифференцируемая функция, то существует производная $y'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{y(x) - y(\xi)}{x - \xi}$.

При приближении переменой x к ξ слева $(x \to \xi^-)$ производная $y'(x) \leq 0$, справа $(x \to \xi^+)$ $y'(x) \geq 0$.

В пределе оба последних неравенства выполнимы совместно (т. е. в точке $x = \xi$) только в случае равенства производной нулю.

Аналогично доказывается теорема для случая существования минимального значения функции на (a, b).

Справедливость теоремы следует и из графика функции, приведенного на (рис. 4.1,а).



а) б)

Рис. 4.1. Теоремы дифференцирования

В точке $x = \xi_1$ функция достигает наибольшего, а в точке $x = \xi_2$ — наименьшего значений. В этих точках касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (тангенс ее наклона к оси x равен нулю). Из геометрического смысла производной следует утверждение теоремы Ферма:

$$y'(\xi_1) = y'(\xi_2) = 0.$$

Теорема Ролля. *Пусть функция* $y(x)$ *удовлетворяет условиям:*

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *дифференцируема на интервале* (a, b);

3) *на концах отрезка принимает равные значения:* $y(a) = y(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, в которой $y'(\xi) = 0$.

Доказательство. Исходим из того, что непрерывная на отрезке функция принимает внутри отрезка (включая точки его концов) максимальное M и минимальное m значения.

В частном случае $y(x) = y(a) = y(b) = M$ (или $= m$) для всех $x \in [a,b]$ (функция постоянна на отрезке). В этом случае во всех точках отрезка производная функции равна нулю.

Если функция достигает максимума (или минимума) в некоторой точке $\xi \in [a,b]$, то по теореме Ферма в этой точке $y'(\xi) = 0$.

Обратимся к рис. 4.1,а, на котором изображен график функции $y = y(x)$. Указанные в теореме Ферма точки ξ_1 и ξ_2 соответствуют точкам, упомянутым в теореме Ролля (в этих точках функция достигает максимального M и минимального m значений). Касательные к графику функции в этих точках параллельны оси абсцисс и, следовательно, производные равны нулю. В этом заключается смысл теоремы Ролля.

Теорема Лагранжа. *Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) *непрерывна на отрезке $[a,b]$;*
2) *дифференцируема на интервале (a,b).*

Тогда внутри отрезка найдется по крайней мере одна точка $\xi \in (a,b)$, в которой

$$y'(\xi) = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = y(x) - \lambda x$.

Постоянную λ выберем из условия $F(a) = F(b)$:

$$\lambda = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}. \tag{4.2}$$

В этом случае функция $F(x)$ будет удовлетворять условиям теоремы Ролля: непрерывна, дифференцируема и принимает равные значения на концах отрезка $[a,b]$. Поэтому внутри отрезка найдется хотя бы одна точка ξ, в которой производная функции $F'(\xi) = y'(\xi) - \lambda = 0$.

Из полученного равенства с учетом (4.2) получим формулу (4.1).

Рассмотрим графический метод доказательства справедливости формулы Лагранжа.

Выражение в правой части (4.1) представляет собой тангенс угла наклона хорды, стягивающей концы дуги кривой графика функции на отрезке $[a, b]$ (рис. 4.1,б). В левой части равенства стоит тангенс угла наклона касательной к графику функции. Ясно, что для непрерывной и дифференцируемой функции всегда найдется точка $\xi \in [a, b]$, в которой касательная к графику функции параллельна хорде.

Формула (4.1), представленная в виде

$$y(b) - y(a) = f'(\xi)(b - a), \tag{4.3}$$

называется *формулой конечных приращений.* Для дифференцируемых функций формула Лагранжа связывает приращение аргумента с приращением функции.

Если вспомнить о механическом смысле производной (в математике принято говорить о скорости изменения функции), то правая часть равенства (4.1) представляет собой среднюю скорость изменения функции на отрезке $[a, b]$, а левая часть — мгновенную скорость изменения функции в точке $x = \xi$.

Таким образом, для функций, дифференцируемых на некотором отрезке, внутри этого отрезка существует точка, мгновенная скорость изменения функции в которой равна средней скорости ее изменения на отрезке.

Теорема Коши. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям*:

1) *непрерывны на отрезке* $[a, b]$;

2) *дифференцируемы на интервале* (a, b);

3) *для всех точек интервала* (a, b) $\ g'(x) \neq 0$.

Тогда внутри отрезка найдется по меньшей мере одна точка $\xi \in [a, b]$, в которой

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$. Постоянную λ выберем из условия $F(a) = F(b)$. Из равенства найдем:

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{4.5}$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому существует точка $\xi \in [a,b]$, в которой $F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$.

Отсюда найдем $\lambda = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Приравнивая правые части последнего равенства и (4.5), получим формулу Коши (4.4).

В частном случае при $g(x) = x$ формула Коши превращается в формулу Лагранжа.

4.2. Правило Лопиталя

Сформулируем теорему (правило) Лопиталя, широко используемую при вычислении пределов функций для раскрытия неопределенностей (Lhopital (англ), L'Hospital (фр) Guillaume Fransois (1661 – 1704), французский математик).

Теорема (правило) Лопиталя. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки $x = x_0$, за исключением, может быть, самой точки, и пусть при стремлении x к x_0 частное от деления функций представляет собой неопределенность типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ и справедлива формула*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (4.6)$$

Подразумевается, что в качестве x_0 под знаком предела может стоять любое число, в том числе 0, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$.

Из-за громоздкости преобразований, сопровождающих доказательство теоремы при различных вариантах пределов (x_0^+, x_0^-, $\pm\infty$), эти доказательства не приводятся. Доказательство можно найти в учебниках [11], [15].

Правило Лопиталя можно применять неоднократно, если ограничения теоремы при каждом его применении выполняются.

Продемонстрируем применимость правила Лопиталя на примерах вычисления пределов с неопределенностями.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \{\text{по правилу Лопиталя}\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1.$

Получили формулу первого замечательного предела.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \{\text{по правилу Лопиталя}\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x} =$

$= \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \{\text{по правилу Лопиталя}\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$\{по правилу Лопиталя\} $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}}{1}=2.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$\{по правилу Лопиталя\} $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0.$

Существуют неопределенности, отличные от примененных в примерах 1–4, которые путем преобразований можно привести к неопределенностям вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Приведем примеры таких преобразований.

5. $\lim\limits_{x\to0+}x\ln x=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{1/x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$ \{по правилу Лопиталя\}$=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=-\lim\limits_{x\to0+}x=0.$

6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$ \{по правилу Лопиталя\}$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\cos x}=0.$

7. $L=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}=(1^{\infty}).$

Преобразуем логарифм L: $\ln L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$ \{по правилу Лопиталя\} $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+x}=1$. Тогда $L=e^1=e$.

Получили формулу второго замечательного предела.

4.3. Формула Тейлора

Рассмотрим определенную в окрестности точки x_0 дифференцируемую функцию $y=y(x)$, которая в точке x_0 принимает значение $y(x_0)$. Пусть приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$ соответствует приращение функции $\Delta y=y(x)-y(x_0)$. Предположим, что эти приращения связаны линейной зависимостью $\Delta y=c\Delta x+o(\Delta x)$, так что

$$y(x)=y(x_0)+c(x-x_0)+o(x-x_0).$$

В дальнейшем будем полагать, что точка x_0 расположена настолько близко к точке x, что $o(x-x_0)$ можно считать величиной более высокого порядка малости по сравнению с $\Delta x=x-x_0$.

Первые два слагаемые правой части последнего выражения представляют собой полином первой степени относительно переменной $x-$

x_0:
$$P_1(x) = y(x_0) + c(x - x_0). \tag{4.7}$$

С учетом (4.7) представим исходную функцию в виде
$$y(x) = P_1(x) + o(x - x_0). \tag{4.8}$$

В этом случае
$$P_1(x_0) = y(x_0), \quad P_1'(x_0) = c = y'(x_0).$$

Обобщим представление (4.8), заменив в нем полином первой степени на полином степени n:
$$y(x) = P_n(x) + o(x - x_0)^n, \tag{4.9}$$

где
$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n.$$

Подставляя последнее выражение в (4.9), получим:
$$y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n. \tag{4.10}$$

Формула (4.10) представляет собой разложение функции $y(x)$ по степеням переменной $x - x_0$.

Неизвестные коэффициенты c_k $(k = \overline{1, n})$ разложения (4.10) выразим через значения функции $y(x)$ и ее производных. Для этого продифференцируем (4.10) последовательно n раз:

$y'(x) = c_1 + 2\,c_2(x - x_0) + 3\,c_3(x - x_0)^2 + \ldots + nc_n(x - x_0)^{n-1} + 0(x - x_0)^{n-1}$;
$y''(x) = 1\cdot 2\,c_2 + 2\cdot 3\,c_3(x - x_0) + \ldots + (n-1)nc_n(x - x_0)^{n-2} + o(x - x_0)^{n-2}$;
$y'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3\,c_3 + \ldots + (n-2)(n-1)nc_n(x - x_0)^{n-3} + o(x - x_0)^{n-3}$;
. . . .
$y^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,c_n$.

Полагая в этих равенствах и в (4.10) $x = x_0$, получим: $y(x_0) = c_0$, $y'(x_0) = 1\,!\,c_1$, $y''(x_0) = 2\,!\,c_2$, $y'''(x_0) = 3\,!\,c_2$, $\ldots$, $y^{(n)}(x_0) = n!\,c_n$.

Определив отсюда коэффициенты разложения, подставим их значения в выражение для функции $y(x)$ (4.10):
$$y(x) = P_n(x) + R_n(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$
$$+ \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \tag{4.11}$$

Выражение (4.11) в математике называют *рядом Тейлора разложения функции $y(x)$ по степеням переменной* $(x - x_0)$, или *формулой Тейлора n-го порядка.* Формула получена английским математиком Бруком Тейлором (Taylor B., 1685–1731).

Величина $R_n(x) = o(x - x_0)^n$ определяет остаточный член усеченного ряда Тейлора. Это ошибка, обусловленная заменой функции суммой n членов ряда (отбрасывание слагаемых ряда, начиная с $(n+1)$-го). Для сходящегося ряда ошибка, как это следует из определения порядка малости функций, не превосходит величины R_n.

В случае $x_0 = 0$ из (4.11) получим частный вид формулы Тейлора[1]:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x). \qquad (4.12)$$

Здесь $R_n(x) = o(x^n)$.

Формула Тейлора и ее разновидности находят повсеместное применение в математическом анализе и его приложениях. Одним из достоинств представления функции в виде разложения на сумму степенных функций и остаточного члена — возможность выделить главную часть функции, обеспечив при этом любую заданную точность вычисления.

Пример 1. Представить функцию $y = e^x$ в виде полинома степени n в окрестности точки $x = 0$.

Р е ш е н и е. Так как для заданной функции $y(x) = y'(x) = y''(x) = \ldots = y^{(n)}(x) = e^x$ и $y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(n)}(0) = e^0 = 1$, то по формуле (4.12) получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

В частности, при $x = 1$

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(x = 1).$$

Пример 2. Представить функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в виде полиномов степени n в окрестности точки $x = 0$.

Р е ш е н и е. Для заданных функций найдем все необходимые производные:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x, \ldots$$

[1] В математической литературе формулу часто связывают с именем Маклорена (Maclaurin Colin, 1698-1746 — шотландский математик), хотя сам Маклорен, изучавший сходимость рядов, признавал авторство Тейлора.

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x, \quad y''' = \sin x, \quad y^{(4)} = \cos x, \ldots$$

Четвертые производные для обеих функций равны исходным функциям и дальнейшие производные повторяют выражения для исходных функций и их первых трех производных. Отмеченные закономерности позволяют для производных основных тригонометрических функций записать следующие выражения:

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right);$$

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad n \in Z.$$

При $x = 0$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \quad \text{четном}, \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при} \quad n \quad \text{нечетном} \end{cases}$$

и

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \quad \text{нечетном}, \\ (-1)^{n/2} & \text{при} \quad n \quad \text{четном}. \end{cases}$$

Подстановка записанных выражений в формулу (4.12) приводит к разложениям тригонометрических функций:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{(n-1)/2}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n/2}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_n(x).$$

Слагаемые $R_n(x) = o(x^{2n-1})$ или $R_n(x) = o(x^{2n})$ представляют собой остаточные члены разложений. В достаточно малой окрестности точки $x_0 = 0$ — это малые величины по сравнению с предпоследними слагаемыми правых частей приведенных равенств.

Предлагаем читателям самостоятельно получить формулы:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + R_n(x).$$

Из последней формулы в случае, если $m = n \in N$, получается *бином Ньютона*:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n.$$

Остаточный член последнего разложения равен нулю.

Вернемся к формуле Тейлора. Вводя обозначение $x - x_0 = \Delta x = dx$ и вспоминая формулу (3.11) из § 3.8 для дифференциала функции $\left(d^{(n)}y = d^{(n)}y(x) = y^{(n)}(x)dx^n\right)$, перепишем (4.11) в виде

$$\Delta y = y(x) - y(x_0) = \frac{dy(x)}{1!} + \frac{d^2y(x)}{2!} + \ldots + \frac{d^ny(x)}{n!} + R_n(d^ny). \quad (4.13)$$

В формуле предполагается, что $dy(x)$ и дифференциалы высших порядков соответствуют приращению $\Delta x = x - x_0$ аргумента относительно точки x_0.

4.4. Определение остаточного члена ряда Тейлора

Существуют несколько формул, позволяющих в формуле (4.11) вычислить значение остаточного члена $o(x-x_0)^n = R_n(x)$, равного разности значений функции и полинома:

$$R_n(x) = y(x) - P_n(x).$$

Будем искать $R_n(x)$ в виде, подобном $(n+1)$-му члену ряда (4.11):

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \quad (4.14)$$

Неизвестную функцию $Q(x)$ выразим через $(n+1)$-ю производную функции

$$y(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x).$$

Так как при $x = x_0$ $y^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x)$ для всех $k = \overline{0,n}$ (см § 4.3) и $P_n^{(n+1)}(x) = 0$, то

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0, \quad R_n^{(n+1)}(x) = y^{(n+1)}(x).$$

Введем обозначение: $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$. Производные этой функции:

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0, \quad g^{(n+1)}(x) = (n+1)!.$$

Функции $R_n(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши (4.1). Поэтому, учитывая отмеченные выше свойства функций $R_n(x)$ и $g(x)$, следуя формуле (4.4), запишем ($\xi_1 \in (x_0; x)$):

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}.$$

Применяя формулу Коши к первым и старшим производным рассматриваемых функций, получим:

$$\frac{R_n'(x)}{g'(x)} = \frac{R_n'(x) - R_n'(x_0)}{g'(x) - g'(x_0)} = \frac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)};$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$\frac{R_n^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{R_n^{(n)}(x) - R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

Здесь $\xi_k \in (x_0; x) \quad (k = \overline{1, n+1})$.

Следовательно,

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{y^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Обозначая $\xi_{n+1} = \xi$, из последнего равенства получим ($g(x) = (x - x_0)^{n+1}$):

$$R_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{4.15}$$

Функция $R_n(x)$, записанная в виде (4.15) называется *остаточным членом ряда Тейлора в форме Лагранжа.*

Неопределенность переменной $\xi \in (x_0, x)$ порождает неопределенность и остаточного члена $R_n(x)$. Тем не менее, выбирая произвольное значение ξ можно оценить погрешность замены функции на конечную сумму ряда Тейлора.

При $x_0 = 0$ остаточный член ряда Тейлора (Маклорена, в этом случае) в форме Лагранжа представляется в виде

$$R_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \tag{4.16}$$

где принято $\xi = \theta x, \quad \theta \in (0,1)$.

Пример. Для примера 1 предыдущего параграфа определить остаточный член разложения функции e^x в ряд Тейлора степени n в окрестности точки $x_0 = 0$ при $x = 1$.
Р е ш е н и е. Величину остаточного члена (максимальную погрешность) подсчитаем по формуле Лагранжа (4.16), принимая $\theta = 1$:

$$R_n(x{=}1) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Уже при $n = 3$ погрешность $R_3(x{=}1) = \dfrac{1}{4!} \approx 0,05$, т. е. при ограничении тремя слагаемыми в разложении, ошибка составляет примерно 5%.

4.5. Монотонность функции

Напомним определение монотонной функции.

Функция $y(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*) на некотором промежутке изменения аргумента x, если для любых двух значений x_1 и x_2 аргумента, принадлежащих этому промежутку, при $x_2 > x_1$ выполняется условие $y(x_2) \geq y(x_1)$ $\big(y(x_2) \leq y(x_1)\big)$. Указанные условия можно записать иначе: при $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ приращение функции $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0$ (< 0).

Таким образом,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow \begin{cases} \geq 0 - \text{функция возрастает;} \\ \leq 0 - \text{функция убывает.} \end{cases} \tag{4.17}$$

Теорема. *Если производная непрерывной и дифференцируемой функции $y(x)$ положительна (отрицательна) на некотором промежутке изменения аргумента x, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.*

Доказательство теоремы следует из определения производной. Действительно, из 4.17 следует:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow \begin{cases} \geq 0 - \text{функция возрастает;} \\ \leq 0 - \text{функция убывает.} \end{cases} \tag{4.18}$$

Убедиться в справедливости теоремы для $x_2 > x_1$ можно на графике рис. 4.2,а — для возрастающей и 4.2,б — для убывающей функций. На этих рисунках касательная к возрастающей функции (рис. 4.2,а) составляет острый угол с осью абсцисс, следовательно, производная положительна; для убывающей функции (рис. 4.2,б) — наоборот.

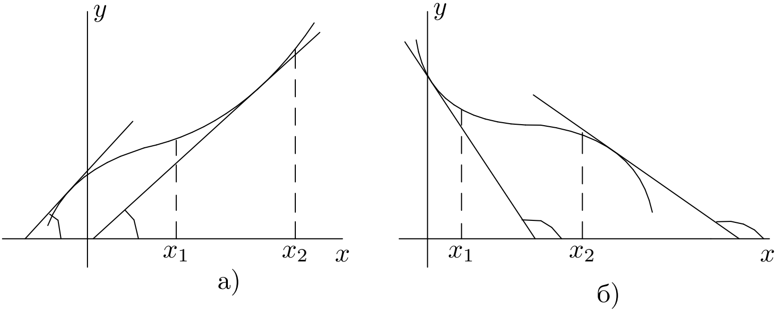


Рис. 4.2. Возрастание и убывание функции

Кроме того, из формулы Лагранжа (4.1):

$$y'(\xi) = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$$

следует, что при положительном (по условию) знаменателе производная будет положительна, если $y(x_2) > y(x_1)$, и отрицательна, если $y(x_2) < y(x_1)$, т. е. выполняется утверждение теоремы.

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции $y=x^2-4x+3$. Р е ш е н и е. Найдем производную: $y' = 2x - 4$. Она положительна при $x > 2$ и отрицательна при $x < 2$. Поэтому функция убывает на промежутке $(-\infty, 2)$ и возрастает на промежутке $(2, +\infty.)$ В точке $x = 2$ (вершина параболы) функция переходит от убывания к возрастанию.

Пример 2. Найти интервалы монотонности функции $y = x^3$. Р е ш е н и е. Найдем производную: $y' = 3x^2$. Она положительна всюду, за исключением точки $x = 0$, где обращается в нуль. Функция всюду монотонная и неубывающая. О точках, подобных $x = 0$ в примере и называемых *точками перегиба,* речь пойдет ниже.

Читателям предлагается самостоятельно построить графики функций примеров 1 и 2 и проанализировать сказанное.

4.6. Экстремумы функции

Важнейшей характеристикой многих функций, моделирующих поведение реальных процессов и явлений, являются их максимальные и минимальные значения. Если речь идет о таких значениях в окрестностях конкретных точек, то эти значения носят в математике обобщенное название: *локальные экстремумы функций.*

Точка $x = x_0$ называется точкой *локального экстремума* функции $y(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется одно из условий $y(x) \le y(x_0)$ (*локальный максимум*), или $y(x) \ge y(x_0)$ (*локальный минимум*).

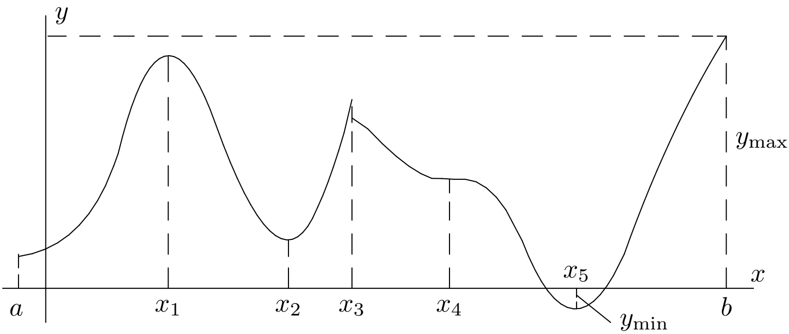


Рис. 4.3. К определению локальных экстремумов

Слово *локальный* связано с тем, что на некотором промежутке $x \in [a, b]$ может находиться несколько точек, отвечающих определению локального экстремума (точки x_1, x_2, x_3 и x_5 на рис. 4.3). Это не означает, что в какой-нибудь из них функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на промежутке. Для представленного на рис. 4.3 графика минимальное значение функция на отрезке $[a, b]$ имеет только в точке x_5: $\min\limits_{[a,b]} y = y(x_5)$. Максимальное значение $\max\limits_{[a,b]} y = y(b)$ на отрезке $[a, b]$ функция имеет в граничной точке b, не являющейся точкой локального максимума.

Сформулированное во втором абзаце определение не требует выполнения условий непрерывности и дифференцируемости функции. Точка $x = x_3$ на графике функции будет точкой локального экстремума (в данном случае максимума) так же, как и точки x_1, x_2 и x_5. Относительно точек x_1, x_2 и x_5 можно сказать, что в них выполняются условия теоремы Ферма (§ 4.1), и, следовательно, производная функции в этих точках равна нулю. Что касается точки локального минимума x_3, то в ней условия теоремы Ферма не выполняются: в этой точке функция не дифференцируема и терпит разрыв первого рода.

Отметим, что в точке x_4 производная функции равна нулю, но экстремум в ней отсутствует. Поэтому условие равенства производной нулю не является ни необходимым, ни достаточным условием существования экстремума. Это условие лишь позволяет выявить так называемые *критические* точки — точки, *подозрительные на экстремум.* К критическим обычно относят и точки, в которых производная не существует (x_3 на рис. 4.3).

Рассмотрим несколько примеров, в которых требуется выявить критические точки и убедиться в наличии или отсутствии в них экстремума.

Пример 1. $y = x^2$.
Решение. Производная функции $y' = 2x$ существует и равна нулю в точке $x = 0$. Производная при $x < 0$ отрицательна, а при $x > 0$ положительна. Следовательно, функция $y = x^2$ монотонно убывает при $x \in (-\infty, 0)$ и монотонно возрастает при $x \in (0, +\infty)$. Такое поведение функции позволяет судить о характере ее экстремума в критической точке, т. е. по значениям функции в двух произвольных точках: одной из левой окрестности критической точки, другой из правой.

Пусть $x_1 = -1$ и $x_2 = +1$. Найдем значения функции в этих точках и сравним их со значением функции в критической точке: $y(-1) = y(1) = 1 > y(0) = 0$. На основании определения точек максимума (минимума) делаем вывод о том, что исследуемая критическая точка $O(0, 0)$ является точкой минимума функции. Отметим, что существование этого экстремума согласуется с теоремой Ролля (функция непрерывна, дифференцируема и на концах отрезка $[-1, 1]$ принимает равные значения).

Пример 2. $y = x^3$.
Решение. Производная функции $y' = 3x^2$ равна нулю в точке $x = 0$. Производная при $x < 0$ и при $x > 0$ – положительна. Следовательно, функция $y = x^3$ монотонно возрастает на всей числовой оси. Значения функции слева от критической точки меньше нуля (ее значения в критической точке) $\big(y(-1) = -1 < y(0) = 0\big)$, справа — больше нуля $\big(y(1) = 1 > y(0) = 0\big)$. Следовательно, экстремума в критической точке нет.

Пример 3. $y = |x|$.
Р е ш е н и е. Обратимся к определению модуля и перепишем заданную функцию в виде

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если} \quad x < 0; \\ \ \ x, & \text{если} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Производная функции

$$y' = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x < 0; \\ +1, & \text{если} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Как видно, производная y' в критической точке терпит разрыв (не существует). Однако при $x = 0$ и в окрестности этой точки функция непрерывна и $y(0) = 0$. Слева и справа от критической точки функция положительна. Поэтому в точке $x = 0$ функция имеет локальный минимум.

Пример 4. $y = \sqrt[3]{x}$.
Р е ш е н и е. Производная функции $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ при $x = 0$ не существует. Функция монотонно возрастает на всей числовой оси. Экстремума не существует.

Рассмотренные примеры подтверждают ранее высказанное утверждение, что для установления факта существования экстремума недостаточно, чтобы производная в критической точке равнялась нулю или не существовала. В следующем параграфе рассмотрены достаточные условия существования локальных экстремумов функций.

4.7. Условия существования экстремумов

Один из способов определения локальных экстремумов функции, следующий из их определения, изложен в § 4.6.

В этом параграфе рассмотрены два условия существования локальных экстремумов и описана последовательность определения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Теорема 1 (первое достаточное условие существования экстремума). *Пусть функция $y(x)$ непрерывна и дифференцируема в окрестности точки x_0 и $y'(x_0) = 0$. Тогда, если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой локального* *максимума функции; если с минуса на плюс — точкой локального минимума.*

Доказательство. Если в точке $x = x_0$ производная меняет знак с плюса на минус, то, согласно признакам монотонности (§ 4.5), делаем заключение о том, что слева от точки x_0 функция монотонно возрастает, справа — монотонно убывает.

По определению для монотонно возрастающей функции выполняется условие $y(x) < y(x_0)$ при $x < x_0$. Для монотонно убывающей функции $y(x) < y(x_0)$ при $x > x_0$. Согласно определению локальных экстремумов (§ 4.6), в точке $x = x_0$ функция имеет локальный максимум.

Аналогично доказывается случай локального минимума.

Таким образом, достаточным признаком существования локального экстремума функции, непрерывной и дифференцируемой в окрестности некоторой точки, является смена знака производной в этой точке: с плюса на минус для максимума функции и с минуса на плюс — для минимума.

Задачу отыскания экстремума, основанную на описанном достаточном признаке, будем называть *решением с использованием первой производной.*

Опишем последовательность решения задачи определения локального экстремума на примере.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $y = x(x-1)^3$.

Решение.

1. Находим первую производную и проверяем функцию на дифференцируемость:

$$y' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1).$$

По виду функции и ее производной заключаем, что функция определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси (отсутствуют точки, в которых функция и ее производная не существуют).

2. Приравнивая производную нулю, находим критические точки: $x_1 = \dfrac{1}{4}$; $x_2 = 1$ и значения функции в этих точках $y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4} - 1\right)^3 =$ $= -\dfrac{27}{256}$; $y(1) = 1(1-1)^3 = 0$.

3. Для установления факта наличия экстремумов исследуем знаки производной слева и справа от каждой критической точки. Для наглядности нанесем критические точки на числовую ось (рис. 4.4).

Чтобы определить знаки производной слева и справа от критической точки $x = 1/4$ выберем две точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1/2$ и найдем в них значения производной от функции: $y'(0) = -1 < 0$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} > 0$.

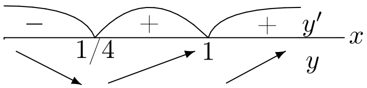


Рис. 4.4. Экстремумы функции

Производная при переходе через точку $x = \dfrac{1}{4}$ меняет знак с минуса на плюс (знаки производной показаны на рис. 4.4). Слева от точки $x = \dfrac{1}{4}$ функция монотонно убывает, справа — монотонно возрастает (стрелки на рис. 4.4). Следуя первому достаточному признаку существования предела, заключаем, что в этой критической точке функция имеет минимум.

Переходим к исследованию функции в окрестности второй критической точки $x = 1$. Значение производной функции слева от точки найдено:

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0.$$

Выберем точку справа от этой точки, и найдем в ней производную функции $y'(2) = (2-1)^2(4\cdot 2-1) = 7 > 0$. Производная при переходе через точку $x = 1$ не меняет знака. Следовательно, точка с абсциссой $x = 1$ не является точкой экстремума функции.

4. Находим минимальное значение функции в точке локального экстремума

$$\min_{(-\infty;\infty)} y = y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}.$$

Теорема 2 (второе достаточное условие существования экстремума). *Если первая производная дважды дифференцируемой функции $y(x)$ равна нулю в некоторой точке $x = x_0$, а вторая производная в этой точке отрицательна (положительна), то x_0 есть точка максимума (минимума) функции.*

Доказательство. Пусть $y'(x_0) = 0$ и $y''(x_0) < 0$ в точке $x = x_0$. В силу непрерывности функции и ее производной производная первой производной $y''(x) = (y'(x))' < 0$ также и в некоторой окрестности точки x_0. Это значит, что первая производная — монотонно убывающая функция, изменяющая знак с плюса на минус при переходе через нуль.

Согласно первому достаточному условию существования экстремумов заключаем, что в точке x_0 функция имеет максимум.

Аналогичные рассуждения приводят к доказательству теоремы для случая минимума функции.

Простой способ доказательства справедливости второго достаточного признака существования экстремума основывается на использовании формулы Тейлора (4.11). Запишем эту формулу, ограничившись в ней тремя слагаемыми $\big($отброшенные слагаемые для достаточно малых приращений Δx малы по сравнению с $(\Delta x)^2\big)$:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(x_0)(\Delta x)^2.$$

Отсюда, если считать x_0 критической точкой (для нее $y'(x_0) = 0$), получим

$$\Delta y = y(x) - y(x_0) = \frac{1}{2}y''(x_0)(\Delta x)^2. \tag{4.19}$$

Из формулы видно, что при $y''(x_0) > 0 \quad y(x) > y(x_0)$ – условие минимума функции в точке x_0. Справедливость второго достаточного признака существования экстремума доказана.

Исследование функций на экстремум, основанное на втором достаточном признаке, называют *исследованием по второй производной.*

По отношению к задаче исследования функций на экстремум по первой производной в этом случае к последовательности решения задачи добавляется пункт по определению второй производной и установлению ее знаков в критических точках.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4$.
Р е ш е н и е.

1. Находим первые две производные функции: $y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$.

Анализ полученных выражений говорит о том, что функция непрерывна и дважды дифференцируема на всей числовой оси.

2. Приравниваем первую производную нулю: $4x^3 = 0$ и находим единственную критическую точку $x = 0$.

3. Определяем значение второй производной в этой точке: $y''(0)=0$, т. е. по второй производной судить об экстремуме функции в критической точке $x = 0$ в данном примере нельзя.

Подстановка отрицательных значений в выражение для первой производной придает ей отрицательный знак ($y'(-1) = -4$), положительных — положительный ($y'(1) = 4$). По первому достаточному условию заключаем, что точка $y(0) = 0$ является точкой минимума функции.

4. Таким образом, $\min\limits_{(-\infty,\infty)} y = y(0) = 0$.

Приведенный пример говорит о том, что исследование функции по ее второй производной не всегда приводит к результату. В случае, если вторая производная в критической точке равна нулю, судить о наличии экстремума можно по первой производной или по поведению самой функции в окрестности критической точки.

Обратим внимание на то, что в теоремах 1 и 2 даны лишь достаточные (не являющиеся необходимыми!) признаки существования экстремумов.

Предлагаем убедиться в том, что в точке $x = 1/4$ в примере 1 вторая производная положительна.

Для определения наибольшего и наименьшего значений функции на всем отрезке $[a, b]$ необходимо сравнить между собой все локальные минимумы и максимумы на этом промежутке и выбранные экстремальные значения сравнить со значениями функции на концах отрезка.

Наибольшее (наименьшее) из перечисленных значений будет максимальным (минимальным) значением функции на отрезке.

Сказанное относится к отрезку (закрытому интервалу) $[a, b]$. Если интервал открыт или полуоткрыт, то со стороны его «открытости» говорить о максимуме или минимуме некорректно — таковые в этих точках не существуют.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x-1)^2 e^{-x}$ на промежутке $[0; 5)$.

Р е ш е н и е.

1. Находим производную функции $y' = e^{-x}(x-1)(3-x)$ и вторую производную $y'' = e^{-x}(x^2 - 6x + 7)$.

Анализ производных говорит о том, что функция дифференцируема дважды на всей числовой оси.

2. Находим критические точки, приравнивая производную нулю $(y' = 0)$: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

3. Находим вторые производные в критических точках:
$y''(1) = \dfrac{2}{e} > 0$; $\quad y''(3) = -\dfrac{2}{e^3} < 0$.

4. По знаку вторых производных определяем локальные максимум $y(3) = \dfrac{4}{e^3}$ и минимум $y(1) = 0$.

5. Определяем значения функций на закрытых концах интервала $[0; 5)$. Только точка $x = 0$ входит в интервал (в точке $x = 5$ он открыт);

$y(0) = 1$.

6. Сравнивая значения функции в критических точках и при $x = 0$, находим

$$\max_{[0;5)} y(x) = y(0) = 1; \quad \min_{[0;5)} y(x) = y(1) = 0.$$

4.8. Экстремумы в экономике

Производные функций, описывающих экономические процессы, в экономике принято называть *предельными величинами.* Рассмотрим и проанализируем некоторые экономические функции.

Производственной функцией в экономике называют функциональную зависимость объема Q выпуска продукции от независимой переменной (независимых переменных) X:

$$Q = Q(X). \tag{4.20}$$

В качестве вектора X могут рассматриваться: количество единиц оборудования, привлеченного к производственному процессу x_1, потребляемые ресурсы x_2, число работающих x_3 и т. д. В общем случае $X{=}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — вектор, заданный в многомерном пространстве. Если требуется исследовать зависимость объема производства от одной из переменных x_i ($X = x_i$, $i = 1, 2, \ldots$), то выражение (4.20) будет представлять собой функцию одной переменной и для определения ее предельного значения применима описанная в § 4.7 процедура отыскания локального экстремума.

Пример 1. Найти оптимальную численность L персонала фирмы, обеспечивающую максимальный выпуск продукции Q, если $Q = 3L^2 - 0{,}1L^3$.

Р е ш е н и е. Найдем и приравняем нулю производную заданной функции:

$$Q' = 6L - 0{,}3L^2 = 0.$$

Из двух стационарных точек $L = 0$ и $L = 20$ выбираем вторую (нулевое значение численности персонала лишено смысла).

Для определения характера экстремума найдем вторую производную:

$$Q'' = 6 - 0{,}6L, \implies Q''(20) = 6 - 0{,}6 \cdot 20 = -6 < 0.$$

Следовательно, значение $L = 20$ соответствует максимальному значению производственной функции:

$$Q_{\max} = Q(20) = 3 \cdot 20^2 - 0{,}1 \cdot 20^3 = 400.$$

Рассмотрим задачу определения максимальной *налоговой ставки*.

Пусть заданы линейные функции спроса $P(D)$ и предложения $P(S)$:

$$P = -aD + b; \qquad P = mS + n, \tag{4.21}$$

где P — цена товара; D, S — количество востребованного и предлагаемого товара на рынке; a, b, m, n — постоянные коэффициенты.

Если на каждую единицу поставляемого на рынок товара с поставщика берется налог t (налог на продажу), то во второй зависимости (4.21) фактическая ценность товара для поставщика уменьшится на t и функция предложения изменится:

$$P - t = mS + n \implies P = mS + n + t. \tag{4.22}$$

Приравняем правые части (4.22) и первого уравнения (4.21). При этом полагаем, что на рынке установилось равновесие спроса и предложения $D = S = Q$:

$$mQ + n + t = -aQ + b.$$

Отсюда

$$Q = \frac{b - n - t}{m + a}.$$

С поступающих на рынок Q единиц товара взимается налог

$$T = tQ = t\frac{b - n - t}{m + a}.$$

Максимальное количество налога соответствует равенствам:

$$\frac{dT}{dt} = 0, \implies \frac{1}{m + a}(b - n - 2t) = 0, \implies t^* = \frac{1}{2}(b - n);$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{2}{m + a} < 0.$$

Последнее неравенство для реальных рыночных отношений выполняется, так как $a > 0$, $m > 0$. Поэтому

$$Q^* = Q(t^*) = \frac{1}{m+a}\left(b - n - \frac{1}{2}(b-n)\right) = \frac{b-n}{2(m+a)}$$

и

$$T_{\max} = t^* Q^* = \frac{1}{2}(b-n)\frac{b-n}{2(m+a)} = \frac{(b-n)^2}{4(m+a)}.$$

Пример 2. Пусть функции спроса и предложения заданы соответственно уравнениями: $P = -3D + 80$ и $P = S + 8$ ($a = 3$, $b = 80$, $m = 1$, $n = 8$).

Требуется определить оптимальный налог на единицу поставляемого на рынок товара t^*, количество товара Q^*, при котором собираемый налог T будет максимальным. Найти $T_{\max}$.

Р е ш е н и е. По полученным выше формулам определяем требуемые величины:

$$t^* = \frac{1}{2}(b-n) = \frac{1}{2}(80-8) = 36,$$

$$Q^* = \frac{b-n}{2(m+a)} = \frac{36}{3+1} = 9,$$

$$T_{\max} = t^* Q^* = 36 \cdot 9 = 324.$$

Рассмотрим еще одну экономическую задачу — *оптимизацию прибыли* Π, определяемую разностью между доходом и затратами:

$$\Pi = R - C.$$

Здесь $R = R(Q)$, $C = C(Q)$ — суммарные доход и затраты, зависящие от количества продукции Q.

Стационарным точкам для определения максимальной прибыли соответствует равенство нулю производной от Π по Q:

$$\Pi' = R' - C' = 0, \implies R' = C'.$$

То есть стационарные точки прибыли соответствуют равенству предельного дохода R' и предельных затрат C'.

Максимальному значению прибыли будут отвечать те точки пересечения кривых $R' = R'(Q)$ и $C' = C'(Q)$, в которых вторая производная от Π будет отрицательной:

$$\Pi'' = R'' - C'' < 0, \implies R'' < C''.$$

С геометрической точки зрения последнее неравенство говорит о том, что тангенс угла наклона касательной к кривой предельного дохода должен быть больше тангенса угла наклона касательной к кривой предельных затрат. Этот факт позволяет по виду кривых предельных значений дохода и затрат сделать заключение о прибыльности или убыточности программ выпуска продукции. Так, по виду кривых, изображенных на рис. 4.5, видно, что количество продукции Q_2 дает максимальную, а количество Q_1 — минимальную прибыль. При $Q < Q_0$ $\big(Q_0$ соответствует точке касания прямой $R'(Q)$ и кривой $C'(Q)\big)$ предприятие работает с убытком.

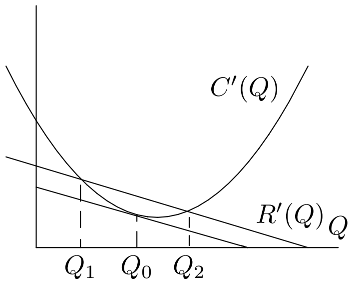


Рис. 4.5. Предельные доход и затраты

Рассмотрим задачу определения *стоимости товара*, поставляемого фирмой различным заказчикам (на различные рынки). Пусть функции спроса для рынков определяются линейными зависимостями:

$$P_i = q_i - k_i Q_i,$$

где P_i — цена товара, поставляемого на i-й рынок $(i = \overline{1,n})$; n — количество рынков; q_i — цена товара на рынке при нулевых поставках товаров с фирмы; k_i — предельный коэффициент спроса на товар; Q_i — объем (количество) товара.

Пусть функция C затрат фирмы-поставщика, идущих на производство товара

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

описывается линейной зависимостью (c, k_c постоянные):

$$C = c + k_c Q.$$

Для решения задачи запишем выражение для доходов от продажи товаров фирмы на i-м рынке:

$$R_i = P_i Q_i = q_i Q_i - k_i Q_i^2.$$

Максимальная прибыль $\Pi = R - C$ достигается при равенстве нулю производной от Π по Q ($\Pi' = 0$). Для упрощения решения задачи (сведения ее к n независимым одномерным задачам) предположим, что максимальную прибыль фирма будет иметь тогда, когда от реализации товара на каждом i-м (из n) рынке будет получена максимальная прибыль $\Pi_{i\,\max}$. В этом случае

$$R_i' = C',$$

где $R_i' = q_i - 2k_iQ_i$; $C' = k_c$.

Приравнивая полученные выражения, приходим к системе n не связанных между собой уравнений:

$$q_i - 2k_iQ_i = k_c,$$

из которых определяем

$$Q_i = \frac{1}{2k_i}(q_i - k_c)$$

и искомые цены на рынках

$$P_i = q_i - k_i\frac{1}{2k_i}(q_i - k_c) = \frac{1}{2}(q_i + k_c) = k_iQ_i.$$

Пример 3. Определить ценовую политику фирмы, поставляющей продукцию на два рынка и максимальную прибыль от реализации товара на этих рынках. Кривые спроса для первого и второго рынков описываются зависимостями:

$$P_1 = 500 - Q_1, \quad P_2 = 360 - 1{,}5Q_2,$$

а функция затрат фирмы

$$C = 50\,000 + 20(Q_1 + Q_2).$$

Р е ш е н и е. Согласно введенным выше обозначениям: $q_1 = 500$; $q_2 = 360$; $c = 50\,000$; $k_1 = 1$; $k_2 = 1{,}5$; $k_c = 20$.

Определяем цены на рынках:

$$P_1=\frac{1}{2}(q_1+k_c)=\frac{1}{2}(500+20)=260, \quad P_2=\frac{1}{2}(q_2+k_c)=\frac{1}{2}(360+20)=190.$$

Находим количество поставляемых товаров:

$$Q_1 = \frac{P_1}{k_1} = \frac{260}{1} = 260, \quad Q_2 = \frac{P_2}{k_2} = \frac{190}{1{,}5} \approx 127.$$

Доход фирмы: $R = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 260 \cdot 260 + 190 \cdot 127 = 91\,730$.

Затраты: $C = 50\,000+20(Q_1+Q_2) = 50\,000+20(260+127) = 57\,740$.

Прибыль: $\Pi = R - C = 91\,730 - 57\,740 = 33\,990$.

4.9. Выпуклость функции и точки перегиба

Дадим определение понятий выпуклости и вогнутости функции.

Функция $y = y(x)$ называется *выпуклой* на некотором промежутке изменения ее аргумента, если для любых двух точек a и b этого промежутка и любого $\nu \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$y\bigl(\nu a + (1-\nu)b\bigr) \le \nu y(a) + (1-\nu)y(b). \tag{4.23}$$

Если в (4.23) знак $\le$ можно заменить на $<$, то функция $y(x)$ называется *строго выпуклой*.

Если в соотношении (4.23) вместо знака $\le$ стоит знак $\ge$ или $>$, то функция $y(x)$ называется *вогнутой* или *строго вогнутой*.

Если функция $y = y(x)$ выпукла, то функция $y = -y(x)$ вогнута.

Геометрический смысл неравенства (4.23) поясняет рис. 4.6. Отрезки AB, являющиеся хордами кривых ANB, состоят из точек M_ν с координатами:

$$x_\nu = \nu a + (1-\nu)b;$$
$$y_\nu = \nu y(a) + (1-\nu)y(b).$$

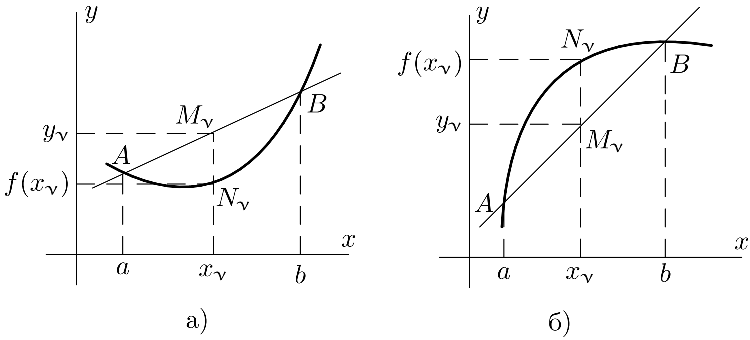


Рис. 4.6. Функции: а) — выпуклая, б) — вогнутая

С учетом записанных зависимостей неравенство (4.23) принимает вид

$$y(x_\nu) \le y_\nu.$$

Это неравенство ординат точек $N\bigl(x_\nu, f(x_\nu)\bigr)$ и $M(x_\nu, y_\nu)$, говорит о том, что для выпуклых функций точки, лежащие на кривой, расположены ниже точек, лежащих на хордах (рис. 4.6,а).

Для вогнутых функций знак неравенства в (4.23) меняется на противоположный. Такому неравенству соответствует рис. 4.6,б.

В курсе «Линейная алгебра» рассматривалась задача деления отрезка в заданном отношении. Для определения координаты точки x_λ, делящей отрезок $[ab]$ в отношении λ, была получена формула

$$x_\lambda = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}.$$

Приравнивая выражение для x_λ аргументу функции, стоящей в левой части неравенства (4.23), получим связь между параметрами λ и ν:

$$\lambda = \frac{1}{\nu} - 1.$$

Обратим внимание на то, что в математической литературе наряду с понятиями «выпуклость» и «вогнутость» функции употребляются понятия «выпуклость» и «вогнутость» кривой (графика функции), которые противоположны тем же понятиям для функции. Так, рис. 4.6,а соответствует вогнутой кривой (кривой с выпуклостью, направленной в сторону отрицательной ординаты), а рис. 4.6,б – выпуклой кривой (кривой с выпуклостью, направленной в сторону положительной ординаты).

Сформулируем в виде теорем понятное из геометрических соображений необходимое и достаточное условие выпуклости (вогнутости) графиков функций.

Теорема 1. *Функция выпукла* (*вогнута*) *на некотором промежутке изменения ее аргумента в том и только в том случае, если ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает* (*убывает*).

Понятно, что при возрастающей (убывающей) первой производной угол наклона касательной к кривой, изображающей эту касательную, возрастает (убывает) с ростом x.

Вспоминая из § 4.8, что монотонность первой производной функции связана со знаком ее второй производной, сформулируем достаточное условие выпуклости и вогнутости функции.

Теорема 2. *Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна* (*отрицательна*) *внутри некоторого промежутка изменения ее аргумента, то функция выпукла* (*вогнута*) *на этом промежутке.*

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы выпуклости и вогнутости функции.

Из определения следует, что точка перегиба графика функции — это точка экстремума первой производной этой функции.

Теорема 3 (необходимое условие существования перегиба). *В точке перегиба графика непрерывной, дважды дифференцируемой функции ее вторая производная равна нулю.*

Теорема 4 (достаточное условие существования перегиба). *Если вторая производная непрерывной функции при переходе через некоторую точку меняет знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.*

На графике функции кривая расположена по разные стороны от касательной к ней, проведенной через точку перегиба.

Продемонстрируем последовательность определения точек перегиба на примере.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x(x-1)^3$.

Р е ш е н и е.

1. Найдем первую и затем вторую производные функции:

$$y' = (x-1)^2(4x-1); \quad y'' = 6(x-1)(2x-1).$$

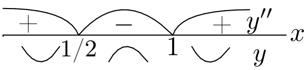


Рис. 4.7. Точки перегиба

2. Приравняем выражение для второй производной нулю и определим точки, подозрительные на перегиб: $x_1 = 1/2; \quad x_2 = 1$.

На рис. 4.7 показана схема изменения второй производной функции на числовой прямой.

3. Вторая производная положительна на интервалах $(-\infty, 1/2)$ и $(1, +\infty)$; отрицательна — на интервале $(1/2; 1)$. В не вошедших в интервалы точках числовой оси $x = 1/2$ и $x = 1$ вторая производная равна нулю — это точки перегиба графика функции.

4. Найдем ординаты точек перегиба: $y(1/2) = -1/16; \quad y(1) = 0$.

4.10. Асимптоты

Важную роль в исследовании поведения функций играют асимптоты.

Асимптотой графика функции $y(x)$ называется прямая, к которой стремится функция при неограниченном ее удалении от начала координат.

Асимптоты в общем случае могут иметь произвольные углы наклона к координатным линиям. В частном случае они могут быть параллельными оси абсцисс. Такие асимптоты называют *горизонтальными. Вертикальными* называют асимптоты, перпендикулярные оси абсцисс.

Уравнение вертикальной асимптоты — это уравнение прямой, перпендикулярной оси x, т. е. $x = x_0$ (пунктир на рис. 4.8,а).

Для того чтобы график функции $y(x)$ стремился к вертикальной асимптоте $x = x_0$, должно выполняться условие:

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \pm\infty.$$

Отметим, что функция может стремиться к $+\infty$ или $-\infty$ при стремлении аргумента к x_0 справа $(x \to x_0^+)$ или слева $(x \to x_0^-)$.

Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если предел $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y(x_0)$.

Последнее равенство является одним из условий непрерывности функции в точке x_0.

Сказанное приводит к выводу о том, что вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечных разрывов функции.

Теорема 1. *Пусть существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = b$. *Тогда прямая* $y = b$ *является горизонтальной асимптотой графика функции* $y = y(x)$ (рис. 4.8,б).

Функция может иметь одностороннюю асимптоту левую $y = b_{\text{л}}$ или правую $y = b_{\text{п}}$ при $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$.

Теорема 2. *Пусть функция* $y(x)$ *определена при достаточно больших* x *и существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y(x)}{x} = k$ *и* $\lim\limits_{x \to \infty} [y(x) - kx] = b$. *Тогда прямая* $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой графика функции* (рис. 4.8,в).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = y(x)$, то разность между ординатами точек графиков функции и прямой должна стремится к нулю при $x \to \infty$. То есть $\lim\limits_{x \to \infty} [y(x) - (kx + b)] = 0$ и тем более $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{y(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x} \right) = 0$.

Из последнего равенства следует $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y(x)}{x}$. Тогда из равенства $\lim\limits_{x \to \infty} [y(x) - (kx + b)] = 0$ (k — число) получим $b = \lim\limits_{x \to \infty} [y(x) - kx]$.

Наклонные асимптоты, как и горизонтальные, могут быть односторонними.

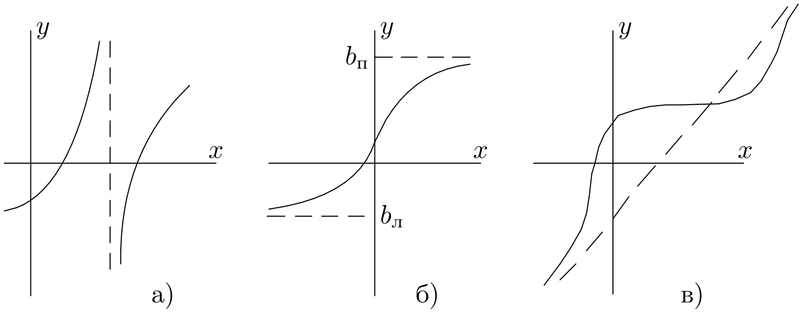


Рис. 4.8. Асимптоты графиков функций

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Р е ш е н и е. Это дробно-линейная функция. Она терпит разрыв при равенстве нулю знаменателя, т. е. при $x = -d/c$. Найдем пределы функции в предположении, что числитель дроби не равен нулю при $x = -d/c$: $\lim\limits_{x\to -d/c} \dfrac{ax+b}{cx+d} = \infty$ или $= -\infty$ в зависимости от знаков и величин постоянных. Прямая $x = -\dfrac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой.

Найдем предел функции, соответствующий возможной горизонтальной асимптоте:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a+\dfrac{b}{x}}{c+\dfrac{d}{x}} = \frac{a}{c}.$$

Отсюда следует, что прямая $y = \dfrac{a}{c}$ является горизонтальной асимптотой.

Наклонной асимптоты график функции не имеет, так как

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{x(cx+d)} = 0.$$

Коэффициент k представляет собой тангенс угла наклона асимптоты к оси абсцисс. При $k = 0$ имеем горизонтальную асимптоту, найденную выше.

Читателям предлагается схематично изобразить график функции и показать на нем найденные асимптоты.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.
Р е ш е н и е. График функции не имеет точек разрыва, поэтому вертикальные асимптоты отсутствуют.

Горизонтальных асимптот также нет, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \pm\infty$.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [y(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x}{x^2+1} \right) = 0.$$

То есть, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x$. Это прямая – биссектриса первого координатного угла.

Читателям предлагается самостоятельно изобразить график функции с асимптотой.

4.11. Схема исследования функций

Приведем ориентировочную схему последовательности исследования функций и построения их графиков.

1. Найти область значений и область определения функции, область непрерывности и точки разрыва.

2. Исследовать функцию на четность и нечетность. Определить периодичность.

3. Найти асимптоты: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

4. Найти критические точки, экстремумы и интервалы монотонности.

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба.

6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и другие точки, уточняющие поведение функции.

Исследование функции рекомендуется проводить параллельно с построением ее графика. При этом необязательно соблюдать приведенную последовательность выполнения пунктов.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. График функции построен на рис. 4.9.

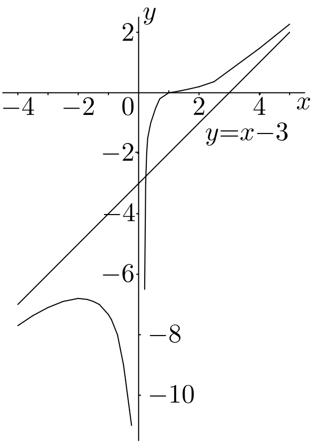


Рис. 4.9. График функции

1. Область определения функции — вся числовая ось, за исключением точки $x = 0$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной. Периода функция не имеет.

3. Найдем предел функции при приближении слева и справа к точке разрыва:

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty.$$

Следовательно, отрицательное направление оси ординат (прямой $x = 0$) является вертикальной асимптотой графика заданной функции. К отрицательной бесконечности стремится функция при стремлении аргумента x к нулю справа и слева от начала координат.

4. Исследуем поведение функции на бесконечности (найдем горизонтальные асимптоты):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \infty,$$

т. е. горизонтальных асимптот нет.

5. Найдем наклонные асимптоты:

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x\cdot x^2} = 1;$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{(x-1)^3}{x^2} - 1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-3x^2+3x-1}{x^2} = -3.$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты: $y = x - 3$.

6. Находим первую производную функции: $y' = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$.

Приравнивая производную нулю, находим абсциссы критических точек функции: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. Этим абсциссам соответствуют ординаты: $y_1 = y(-2) = -6{,}75$; $y_2 = y(1) = 0$.

7. Определяем интервалы монотонности (знаки производной слева и справа от критических точек) и точки разрыва. Данные исследования занесены в таблицу.

x	$(-\infty; -2)$	$[-2]$	$(-2; 0)$	$[0]$	$(0; 1)$	$[1]$	$(1; +\infty)$
y	возр.	$-6{,}75$	убыв.	$-\infty$	возр.	0	возр.
y'	> 0	0	< 0	разр.	> 0	0	> 0
y''	< 0	< 0	< 0	разр.	< 0	0	> 0
y	вог.	вог.	вог.	разр.	вог.	перег.	вып.

Анализ данных таблицы указывает на то, что точка $(-2; -6,75)$ является точкой максимума функции. В этой точке первая производная меняет знак с плюса на минус.

Точка (1, 0) не является точкой экстремума. В ней первая производная не изменяет знак, оставаясь положительной. Функция монотонно возрастает, а точка (1, 0) является точкой перегиба.

8. Находим вторую производную функции: $y'' = 6\dfrac{x-1}{x^4}$. Определяем ее значения в критических точках: $y''(-2) = -9/8 < 0$ и $y''(1) = 0$. Это подтверждает установленный факт, что первая точка является точкой максимума функции, а вторая — точкой перегиба (вторая производная меняет знак).

Исследование знаков второй производной на характерных промежутках изменения переменной x позволяет сделать вывод о выпуклости и вогнутости функции (см. таблицу). Сокращение «вып.» означает выпуклость функции (выпуклость графика функции в сторону отрицательного направления оси ординат); «вог.» — вогнутость функции (выпуклость графика функции в сторону положительного направления оси ординат).

9. По результатам вычислений строим график, показанный на рис. 4.9.

4.12. Выбор и исключение интервалов

Пусть задана непрерывная и дифференцируемая функция $y = y(x)$ и известно, что эта функция имеет единственный экстремум на интервале $[a; b]$ — функция *унимодальна* на $[a, b]$.

Для унимодальных функций сравнение значений функции на концах интервала $[a; b]$ и значений функций $y_1 = y(x_1)$ и $y_2 = y(x_2)$ во внутренних точках x_1 и x_2 этого интервала позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения некоторый подынтервал, на котором не может быть экстремума. Это позволяет уменьшить начальный интервал унимодальности функции.

Приведем два варианта теоремы.

Теорема (для минимума). *Пусть функция $y = y(x)$ унимодальна на интервале $[a; b]$ и достигает минимума в некоторой точке $x_* \in [a; b]$. Тогда из сравнения значений функции в двух точках x_1 и x_2 $(a < x_1 < x_2 < b)$ следует:*

1) *если $y_1 > y_2$, то точка x_* не лежит в интервале $[a; x_1]$, а лежит в интервале $(x_1; b]$*

2) *если $y_1 < y_2$, то точка x_* не лежит в интервале $[x_2; b]$, а лежит в интервале $[a; x_2)$;*

3) *если $y_1 = y_2$, то точка x_* лежит в интервале $[x_1; x_2]$.*

Теорема (для максимума). *Пусть функция $y = y(x)$ унимодальна на интервале $[a; b]$ и достигает максимума в некоторой точке $x_* \in [a; b]$. Тогда из сравнения значений функции в двух точках x_1 и x_2 $(a < x_1 < x_2 < b)$ следует:*

1) *если $y_1 > y_2$, то точка x_* не лежит в интервале $[x_2; b]$, а лежит в интервале $[a; x_2)$;*

2) *если $y_1 < y_2$, то точка x_* не лежит в интервале $[a; x_1]$, а лежит в интервале $(x_1; b]$;*

3) *если $y_1 = y_2$, то точка x_* лежит в интервале $[x_1; x_2]$.*

Точки $x_1, x_2, \ldots \in (a; b)$, выбранные произвольно или следуя какому-либо алгоритму, называют *пробными точками.*

На рис. 4.10,а, б изображены интервалы с минимальными значениями функций, соответствующие пунктам 1 и 2 теоремы.

Читателям предлагается изобразить аналогичные графики функций, имеющих максимум на $[a; b]$, а также график функций с максимумом и минимумом, соответствующий пункту 3 теоремы.

Используя положения 1 и 2 Теоремы для минимума, можно последовательно сужать интервал нахождения экстремума до тех пор, пока

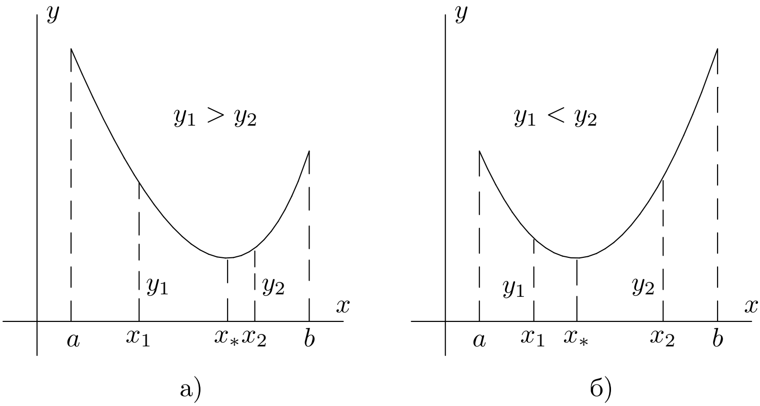


Рис. 4.10. К методу исключения интервалов

значения функции в двух внутренних точках станут достаточно близкими и, следовательно, примерно равными экстремальному значению.

Суть описываемого метода, называемого методом *исключения интервалов*, заключается в том, что на каждом приближении исключается из рассмотрения тот интервал изменения функции, на котором, согласно теореме, отсутствует экстремум. На оставшемся интервале выбирается дополнительная точка и снова производится сравнение значений функции во внутренних точках интервала.

Метод исключения интервалов удобен тем, что при его использовании не привлекаются производные функции (использование производных в численном анализе может привести к существенному снижению точности вычислений).

При формулировке теорем этого параграфа предполагалось, что интервал $[a;b]$ унимодальности функции (интервал, на котором находится один экстремум) найден. Оказывается, что метод исключения интервалов может быть использован и для установления границ начального интервала унимодальности функции.

Опишем процедуру установления такого интервала на примере функции, имеющей минимум справа от некоторой фиксированной координаты $x = x_0$. Для случая максимума все рассуждения аналогичны и будут отличаться лишь знаками неравенств.

Заметим, что при принятых условиях функция, по крайней мере в окрестности точки x_0, справа от нее убывает.

Выберем справа от точки x_0 две пробные точки x_1 и $x_2 > x_1$ и сравним значения функции в этих точках. Как и в изложенной выше теореме, при этом могут иметь место три ситуации:

1) если $y_1 > y_2$, то минимума на интервале $[x_0; x_1]$ нет;

2) если $y_1 < y_2$, то минимум находится на интервале $[x_0; x_2]$;

3) если $y_1 = y_2$, то минимум находится на интервале $[x_1; x_2]$.

В случаях 2 и 3 указанные концы интервалов принимают за границы начального интервала $[a, b]$ и далее решают задачу отыскания минимума функции на этом интервале, используя утверждения обеих теорем.

Для ситуации пункта 1 исключают из рассмотрения полуоткрытый интервал $[x_0; x_1)$, выбирают следующую пробную точку $x_3 > x_2$ и для трех точек x_1, x_2 и x_3 проводят анализ, следуя пунктам 1–3. И так до тех пор, пока не будет найден интервал с минимумом функции.

Значения координаты каждой последующей пробной точки удобно выбирать таким образом, чтобы следовать определенной логике, которая необходима при составлении программ для компьютера. Проще всего выбирать значения координат, отстоящих друг от друга на равных расстояниях. Можно использовать и другие алгоритмы. Например, координаты каждой последующей пробной точки x_{n+1} определять по координатам предыдущей точки x_n и некоторому постоянному параметру d:

$$x_{n+1} = x_n + d, \quad \text{или} \quad x_{n+1} = x_n + 2^n d, \ldots \tag{4.24}$$

Пример. Для функция $y = x^2 - 6x + 12$ определить интервал, на котором она принимает минимальное значение.
Решение. Будем определять координаты пробных точек интервала по второй формуле (4.24), для чего примем $x_0 = 0$; $d = 1$. Тогда $x_1 = x_0 + 2^0 \cdot d = 0 + 1 \cdot 1 = 1$; $x_2 = x_1 + 2^1 \cdot d = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.

Найдем значения функции в точках $x_0,\ x_1,\ x_2$:

$y_0 = y(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 12 = 12$;

$y_1 = y(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 12 = 7 < y_0 = 12$;

$y_2 = y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 12 = 3 < y_1 = 7$.

Сравнение значений функций, согласно изложенной выше схеме, указывает на то, что для выявления интервала, содержащего минимум функции, необходимо рассмотреть следующую пробную точку. Значения ее координат:

$$x_3 = x_2 + 2^2 d = 3 + 4 \cdot 1 = 7;$$

$$y_3 = y(7) = 7^2 - 6 \cdot 7 + 12 = 19 > y_2 = 3.$$

В точке x_3 функция возросла по сравнению с точкой x_2, поэтому минимум следует искать на интервале $[x_1; x_3] = [1; 7]$.

Определение интервала нахождения минимума функции состоялось. Для построения алгоритма уменьшения интервала рассмотрим метод, основанный на понятии золотого сечения.

4.13. Метод золотого сечения

Пусть известно, что функция $y = f(x)$ — унимодальна на интервале $[a; b]$, т. е. она непрерывна, дифференцируема и имеет на этом интервале единственный экстремум. Для удобства его отыскания введем безразмерную координату $\omega = \dfrac{x - a}{b - a}$, которая изменяется в пределах от нуля до единицы. Действительно, $\omega_a = 0$ при $x = a$ и $\omega_b = 1$ при $x = b$.

При введении новой переменной $y = f(x)$ становится сложной функцией от ω, так как $x = a + (b - a)\omega$. Будем считать, что $y = g(\omega)$.

Рассмотрим симметричное расположение двух пробных точек на интервале единичной длины и отстоящих от граничных точек интервала на расстоянии ζ (рис. 4.11).

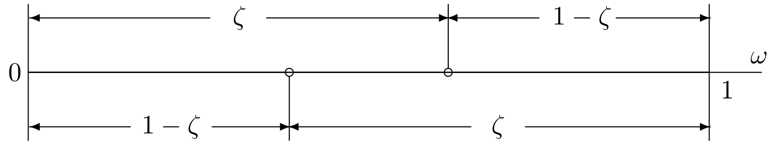


Рис. 4.11. Метод золотого сечения

При таком симметричном расположении пробных точек длина отрезка, остающегося после исключения подынтервала длины $(1 - \zeta)$, равна ζ и не зависит от того, какой именно подынтервал исключается из рассмотрения.

Остающийся отрезок содержит одну пробную точку, расположенную на расстоянии $(1 - \zeta)$ от границы отрезка, противоположной отброшенному подынтервалу.

Для того чтобы симметрия поискового процесса сохранялась, расстояние $(1 - \zeta)$ должно составлять ζ-ю часть длины оставшегося подынтервала, длины ζ. То есть

$$\frac{1-\zeta}{\zeta}=\frac{\zeta}{1}, \qquad \text{или} \qquad \zeta^2+\zeta-1=0.$$

При таком выборе ζ следующая пробная точка размещается на расстоянии от граничной точки, составляющем ζ-ю часть длины оставшегося (большего) интервала.

Решая последнее записанное уравнение, получим

$$\zeta=(-1\pm\sqrt{5})/2.$$

Положительное решение этого уравнения: $\zeta\approx 0,618$.

Схема поиска требуемых значений функции, в частности, ее экстремумов, основанная на изложенном методе симметричного последовательного дробления интервалов, носит название *метода золотого сечения.*

Заметим, что после первых двух вычислений координат точек первоначально единичного интервала каждое последующее вычисление позволяет исключать подынтервал, величина которого составляет $(1-\zeta)$-ю долю от длины интервала поиска. Поэтому при единичной длине исходного интервала (Int) величина подынтервала, получаемого в результате n вычислений, равна Int $\omega_n=\zeta^n$.

Замечание. С понятием «золотое сечение» связана последовательность чисел Фибоначчи (Fibonacci (1180–1240) – итальянский математик. В литературе часто упоминается под именем Леонардо Пизанский): $1,2,3,5,8,13,\ldots$ Каждый последующий член последовательности, кроме $a_1=1$ и $a_2=2$, определяется по рекуррентной зависимости: $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$. Справедлива зависимость:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta\approx 0{,}618.$$

Пример. Найти минимальное значение функции $y=x^2-6x+12$, для которой в § 4.12 установлен начальный интервал $[1;7]$ изменения x, внутри которого располагается экстремум. Относительная ошибка вычислений не должна превосходить величины 0,05.

Р е ш е н и е.

Переходим к безразмерной координате $\omega\in[0,1]$:

$$\omega=\frac{x-a}{b-a}=\frac{x-1}{7-1}=\frac{1}{6}(x-1);$$

тогда $\omega_a = 0$ и $\omega_b = 1$.

Отсюда

$$x = 1 + 6\omega$$

и

$$y = y(x) = x^2 - 6x + 12 = (1 + 6\omega)^2 - 6(1 + 6\omega) + 12 =$$

$$= 36\omega^2 - 24\omega + 7 = g(\omega).$$

Организуем, согласно методу золотого сечения, алгоритм дробления отрезка $\omega \in [0, 1]$. При $\zeta = (-1+\sqrt{5})/2 \approx 0{,}618$ $\omega_1 = \zeta = 0{,}618$, $\omega_2 = 1 - \zeta = \zeta^2 = 0{,}382$. Длины обоих отрезков ζ и ζ^2 откладываем от точки $\omega_a = 0$. Координату точки ω_2 откладываем от граничной точки $\omega_a = 0$ большего отрезка. Она должна принадлежать отрезку $[0, \omega_1]$, так как он больше отрезка $[\omega_1, 1]$.

На рис. 4.12 нанесены эти и последующие точки уменьшающихся от приближения к приближению интервалов. Каждый последующий интервал выделен дополнительной прямой, параллельной оси ω.

Определяем значения $y = g(\omega)$ в точках ω_1 и ω_2 и сравниваем их значения. При этом имеем в виду, что значения функции y на концах исходного интервала известны (были определены в предыдущем разделе $y_a = g(0) = 7$, $y_b = g(1) = 19$) и известно, что функция имеет минимум на интервале.

$y_1 = g(\omega_1) = 36 \cdot 0{,}618^2 - 24 \cdot 0{,}618 + 7 \approx 5{,}92$;

$y_2 = g(\omega_2) = 36 \cdot 0{,}382^2 - 24 \cdot 0{,}382 + 7 \approx 3{,}09 < y_1$.

Согласно пункту 2 теоремы § 4.12 об исключении интервалов приходим к выводу, что минимум функции находится в точке, принадлежащей отрезку $[0;\ \omega_1] = [0; 0{,}618]$. Интервал $(\omega_1;\ \omega_b] = (0{,}618; 1]$ из дальнейшего анализа исключаем (отбрасываем).

Определяем координату пробной точки на следующем приближении $\omega_3 = \zeta^3 = 0{,}618^3 \approx 0{,}236$.

Эту координату отсчитываем от граничной точки $\omega_0 = 0$ большего из двух интервалов, которым является $[0;\ \omega_2]$, но не $[\omega_2;\ \omega_1]$.

Находим

$y_3 = g(\omega_3) = 36 \cdot 0{,}236^2 - 24 \cdot 0{,}236 + 7 \approx 3{,}34$.

Определяем относительную ошибку, сравнивая полученные для двух последних итераций значения функции:

$$\delta_3 = \frac{|y_3 - y_2|}{|y_3 + y_2|/2} = \frac{|3{,}34 - 3{,}09|}{|3{,}34 + 3{,}09|/2} \approx 0{,}16 > 0{,}05.$$

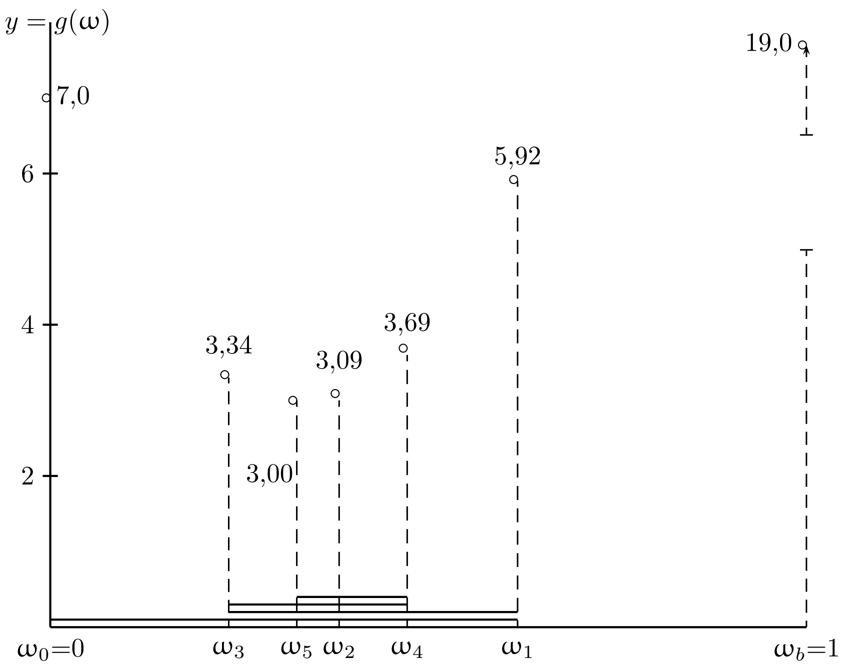


Рис. 4.12. Итерации метода золотого сечения

Ошибка превышает требуемую точность, поэтому процесс приближения продолжаем.

Сравнение значений функции $y_0 = 7$, $y_3 = 3{,}34$, $y_2 = 3{,}09$ и $y_1 = 5{,}92$ позволяет сделать вывод о том что, во первых, минимальное значение функции не может находиться на интервале $[\omega_0, \omega_3)$, поэтому интервал исключаем из дальнейшего рассмотрения, во-вторых, следующую пробную точку выбираем на интервале $[\omega_2, \omega_1]$ откладывая от координаты ω_1 отрезок, равный ζ^4:

$\omega_4 = \omega_1 - \zeta^4 \approx 0{,}618 - 0{,}146 = 0{,}472.$

$y_4 = g(\omega_4) = 36 \cdot 0{,}472^2 - 24 \cdot 0{,}472 + 7 \approx 3{,}69.$

Значение функции превышает значения y_2 и y_3.

Интервал $(\omega_4 \omega_1]$ исключаем из дальнейшего рассмотрения. Пробную точку выбираем на интервале $[\omega_3, \omega_2]$:

$\omega_5 = \omega_3 + \zeta^5 \approx 0{,}236 + 0{,}090 = 0{,}326.$

В этой точке

$y_5 = g(\omega_5) = 36 \cdot 0{,}326^2 - 24 \cdot 0{,}326 + 7 \approx 3{,}00.$

Относительную ошибку определяем, сравнивая два наименьших из полученных значений функции:

$$\delta_5 = \frac{|y_5 - y_2|}{|y_5 + y_2|/2} = \frac{|3{,}00 - 3{,}09|}{|3{,}00 + 3{,}09|/2} \approx 0{,}03 < 0{,}05.$$

Ошибка не превышает требуемую точность, поэтому принимаем за минимальное значение функции наименьшее из найденных значений:

$$y_{\min} \approx 3{,}00.$$

Значение получено с точностью до третьей значащей цифры. Это значение совпадает с минимумом, найденным аналитически.

Основным преимуществом описанного численного метода перед рассматриваемыми ниже методами является то, что при его использовании нет необходимости вычислять производные функции.

Метод золотого сечения позволяет облечь в определенные правила назначение промежуточных пробных точек и таким образом построить алгоритм их определения на каждом шаге вычисления экстремума функции.

Ясно, что можно предложить сколь угодно много способов (методов) выбора промежуточных точек. Простейшим из них, но не самым эффективным, считается метод половинного деления. В этом методе интервал изменения аргумента на каждом последующем шаге отыскания экстремума функции делится пробной точкой пополам.

4.14. Метод хорд

Одним из самых эффективных численных методов определения корней уравнений является метод хорд и касательных.

Считаем, что для заданной непрерывной функции $y = f(x)$ выделен промежуток $[a; b]$, на котором функция имеет единственный корень.

Рассмотрим сначала *метод хорд.*

Определив значения функции на концах промежутка $[a, b]$ $\bigl(y_a = f(a),\ y_b = f(b)\bigr)$, запишем уравнение хорды — прямой AB

(рис. 4.13,а), проходящей через точки графика функции, соответствующие концам промежутка:

$$y - y_a = \frac{y_b - y_a}{b - a}(x - a). \tag{4.25}$$

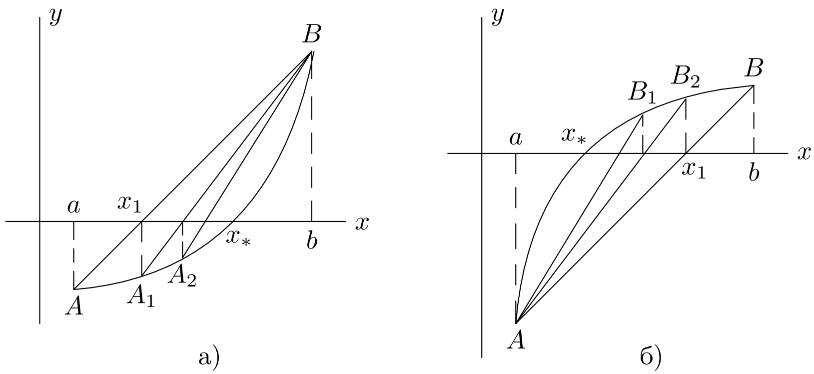


Рис. 4.13. Метод хорд

Найдем координату x_1 точки пересечения этой прямой с осью абсцисс. Из уравнения (4.25) при $y = 0$ получим:

$$x_1 = a - \frac{b - a}{y_b - y_a} y_a.$$

Координата x_1 пересечения хорды AB с осью абсцисс является приближенным значением корня на первой итерации, которая на этом и заканчивается. Чтобы уточнить значение корня, необходимо продолжить итерационный процесс.

Для решения задачи на второй итерации определим на графике функции ординату точки A_1, соответствующую x_1: $y_1 = f(x_1)$. Через точки A_1 и B проводим новую хорду, находим координату x_2 ее пересечения с осью абсцисс. По ней определяем ординату $y_2 = f(x_2)$ точки A_2 и т. д.

Значение корня уравнения на n-й итерации определится по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{y_b - y_{n-1}} y_{n-1}. \tag{4.26}$$

Процесс итераций завершается, когда разность приближенных значений корней $(x_n - x_{n-1})$ становится меньше заданной точности решения задачи. В этом случае считаем, что корень уравнения $f(x) = 0$: $x_0 \approx x_n$.

Процесс последовательных приближений к точному решению x_* рассмотрен на примере выпуклой на отрезке $[a, b]$ функции. В этом случае приближение к x_* шло от точки A к точке B.

Если функция вогнута (рис. 4.13,б), то приближение к точному решению будет идти справа налево. При этом значение корня уравнения на n-й итерации

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - a}{y_{n-1} - y_a} y_{n-1}.$$

В случае, если функция внутри промежутка $[a, b]$ выпукло-вогнутая, направления приближений к точному решению могут в процессе итераций изменяться.

Читателю предлагается изобразить график такой функции и убедиться в справедливости сказанного.

4.15. Метод касательных

Еще одним итерационным методом отыскания корней уравнения непрерывной и дифференцируемой (в методе хорд требование дифференцируемости отсутствовало) функции является *метод касательных*. Он заключается в следующем.

Через точку A графика функции $y = f(x)$, соответствующую началу интервала на рис. 4.14,а (точку B — конца интервала на рис. 4.14,б), проводится касательная к кривой.

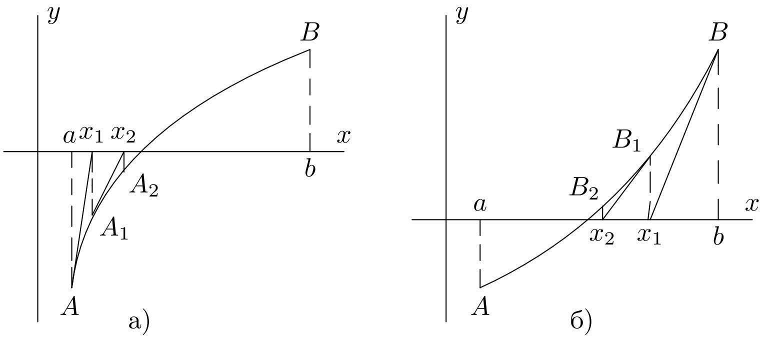


Рис. 4.14. Метод касательных

Уравнение касательной к графику функции — это уравнение прямой, проходящей через заданные точки $A(a, y_a)$ или $B(b, y_b)$ в заданных направлениях, определяемых угловыми коэффициентами (тангенсами углов наклона касательных к оси абсцисс) $k_A = y'(a)$ или $k_B = y'(b)$:

$$y - y_a = y'(a)(x - a) \qquad \text{или} \qquad y - y_b = y'(b)(x - b). \tag{4.27}$$

Находим точку пересечения выбранной прямой (4.27) с осью абсцисс, приравнивая нулю ординату y:

$$x_1 = a - \frac{y_a}{y'(a)} \qquad \text{или} \qquad x_1 = b - \frac{y_b}{y'(b)}. \tag{4.28}$$

Найденное по одной из этих формул значение координаты x_1 является приближенным значением искомого корня на первой итерации. Для его более точного определения переходим ко второй итерации. Для этого находим координату $y_1 = f(x_1)$ точки A_1 (или B_1), проводим через эту точку касательную к графику функции, находим координату x_2 ее пересечения с осью абсцисс, являющуюся значением корня на второй итерации и т. д.

На n-й итерации значение корня определяем из формулы

$$x_n = x_{n-1} - \frac{y_{n-1}}{y'(x_{n-1})}. \tag{4.29}$$

Точность вычисления, как и в методе хорд, можно определить по разности значений корней, найденных в двух последовательных приближениях.

Отметим важную особенность метода касательных. Из рис. 4.14 видно, что начальные касательные к графикам функций проводились в тех граничных точках промежутка $[a, b]$, где выпуклость графика функции направлена в сторону оси абсцисс. Если этого условия не придерживаться и провести касательную к графику функции на другом конце промежутка (в точке B для рис. 4.14,а или в точке A для рис. 4.14,б), то такая касательная может пересечь ось абсцисс далеко за пределами исследуемого интервала. Если продолжить итерационный процесс при таком выборе начальных точек, то он может не сходиться к точному решению.

Для функций, которые изменяют внутри промежутка $[a, b]$ выпуклость так, что на всем промежутке кривая графика функции направлена вогнутостью к оси абсцисс (на оси располагается точка перегиба), применение метода касательных для отыскания корней вообще неприемлемо.

Предлагаем читателю проанализировать описанные ситуации на графиках функций.

Вспоминая связь второй производной с выпуклостью функции, можно записать правило выбора начальной точки для организации итерационного процесса по методу касательных.

Правило. *Начальная точка для организации итерационного процесса по методу касательных выбирается таким образом, чтобы в этой точке знаки функции и второй производной совпадали.*

4.16. Метод хорд и касательных

На практике целесообразно применять методы хорд и касательных одновременно, чередуя их в процессе итераций.

Это во многих случаях дает возможность приближаться к точному решению сразу с двух сторон оси абсцисс.

Пример. Найти экстремальное значение функции

$$g(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + x + \frac{3}{2},$$

если известно, что оно находится на промежутке $[-1{,}5; 0]$.
Р е ш е н и е. График функции $g'(x)$, построенный после описанного ниже решения, показан на рис. 4.15.

Найдем производную заданной функции и приравняем ее нулю (для удобства записи обозначим эту производную через y):

$$y = g'(x) = f(x) =$$
$$= 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Таким образом, задача отыскания экстремального значения функции свелась к задаче определения корня алгебраического уравнения на заданном интервале изменения функции.

Для приближенного анализа характера поведения функции y определим ее первую и вторую производные:

$$y' = 6x(x+1) + 2;$$
$$y'' = 6(2x+1).$$

По поведению первой производной $\big($положительна на всем промежутке $[-1{,}5; 0]$, причем $y'(-1{,}5) = 6{,}5$; $y'(0) = 2\big)$ устанавливаем, что функция монотонно возрастает на рассматриваемом промежутке и ее производная нигде не обращается в нуль. То есть точек экстремума функция не имеет.

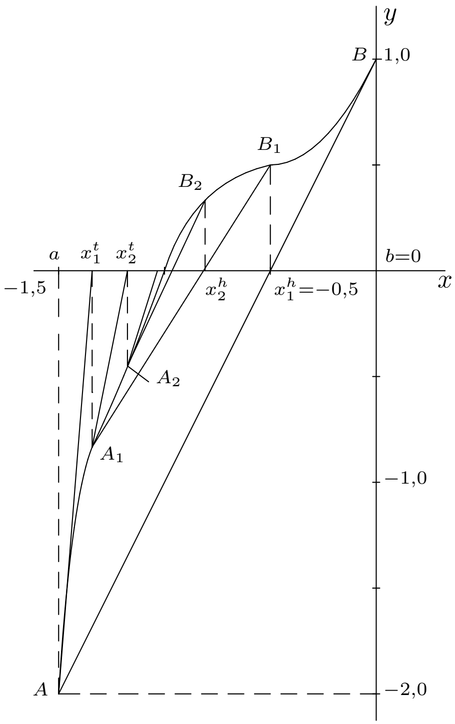


Рис. 4.15. Пример: метод хорд и касательных

Что касается исходной функции $g(x)$, то производная от y является для нее второй производной. Так как $g''(x) = y'$ положительна на всем интервале $[-1{,}5;\ 0]$, то функция $g(x)$ имеет на этом интервале минимум.

Вторая производная $y''(x)$ обращается в нуль в точке $x = -0{,}5 \in [-1{,}5; 0]$.

График функции имеет перегиб в этой точке, где переходит от выпуклости слева от точки $\bigl(y''(-1{,}5) = -12 < 0\bigr)$ к вогнутости — справа от нее $\bigl(y''(0) = 6 > 0\bigr)$.

Знаки функции на концах промежутка $\bigl(y(-1{,}5) = -2 < 0;\ y(0) = 1 > 0\bigr)$ совпадают с соответствующими знаками вторых производных. Поэтому метод касательных можно применить для нахождения корня, опираясь при этом на любую из граничных точек функции или попеременно на обе точки. Будем проводить касательные к графику функции с левой его стороны.

П е р в о е п р и б л и ж е н и е. **Метод хорд** (индекс h). Через точки A и B проводим хорду (4.25) и по формуле (4.26) определяем координату точки ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_1^h = a - \frac{b-a}{y(b)-y(a)}y(a) = -1{,}5 - \frac{0-(-1{,}5)}{1-(-2)}\cdot(-2) = -0{,}5.$$

Метод касательных (индекс t). Через точку A проводим касательную (4.27) к графику функции и по формуле (4.28) определяем координату точки ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_1^t = a - \frac{y(a)}{y'(a)} = -1{,}5 - \frac{-1}{6{,}5} \approx -1{,}346.$$

Интервал $[-1{,}346; -0{,}5]$ является новым, полученным на первой итерации промежутком, внутри которого находится корень уравнения. Этот интервал, как и следовало ожидать, меньше первоначального $\big([-1{,}5; 0]\big)$, но не обеспечивает достаточную точность определения корня. Поэтому переходим ко второму приближению.

Второе приближение. Находим ординаты точек графика функции, соответствующих концам найденного в первом приближении промежутка, содержащего корень уравнения: $y(x_1^t) = y(-1{,}346) = 2(-1{,}346)^3 + 3(-1{,}346)^2 + 2(-1{,}346) + 1 \approx -0{,}83$; $y(x_1^h) = y(-0{,}5) = 0{,}5$.

Таким образом, установлены координаты двух новых точек на графике функции: $A_1(-1{,}346; -0{,}83)$ и $B_1(-0{,}5; 0{,}5)$.

Метод хорд. Через точки A_1 и B_1 проводим хорду и по формуле (4.26) определяем координату точки ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_2^h = x_1^t - \frac{x_1^h - x_1^t}{y(x_1^h) - y(x_1^t)} y(x_1^t) \approx -0{,}81.$$

Метод касательных. Через точку A_1 проводим касательную к графику функции и по формуле (4.29) определяем координату точки ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_2^t = x_1^t - \frac{y(x_1^t)}{y'(x_1^t)} \approx -1{,}17.$$

Таким образом, промежуток, в котором находится корень, снова уменьшился и стал равным $[-1{,}17; -0{,}81]$.

После третьего приближения получим интервал $[-1{,}035; -0{,}985]$, в который заключен корень исходного уравнения.

Точное решение уравнения дает значение корня $x_* = -1$. Разность между значением любой точки, взятой из полученного в третьем приближении интервала, и точным решением отличается от последнего вторым знаком после запятой, что вполне приемлемо для многих реальных задач.

Относительная точность решения определяется по формуле

$$\varepsilon_n = \frac{\big||x_n^{\max}| - |x_n^{\min}|\big|}{\big(|x_n^{\max}| + |x_n^{\min}|\big)/2}.$$

После третьего ($n = 3$) приближения

$$\varepsilon_3 = \frac{\big||-0{,}985| - |-1{,}035|\big|}{\big(|-0{,}985| + |-1{,}035|\big)/2} = \frac{0{,}05}{1{,}01} \approx 0{,}049,$$

т. е. ошибка не превышает 5%.

Приняв корень уравнения $x_* = -1$ и подставляя его значение в исходное уравнение, получим

$$g_{\min} = g(-1) = 1.$$

4.17. Резюме

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши позволяют судить о наличии характерных точек внутри некоторого отрезка изменения аргумента по поведению функции и ее значениям на концах этого отрезка. Одним из приложений формулы Коши является правило Лопиталя раскрытия неопределенности типа «ноль делить на ноль» и «бесконечность делить на бесконечность». Это правило дает возможность заменить отношение функций под знаком предела на отношение производных этих функций.

Свойство первой и второй производных функций помогает проводить исследование поведения функции. В частности, справедливы утверждения:

- в точке экстремума дифференцируемой функции производная равна нулю;
- равенство нулю второй производной характерно для точки перегиба графика функции;
- положительное значение первой производной характерно для возрастающей функции, отрицательное — для убывающей;
- положительное значение второй производной характеризует выпуклую функцию (выпуклость графика функции направлена в сторону отрицательного значения ординаты), отрицательное значение — вогнутую функцию (выпуклость графика функции направлена в сторону положительной ординаты).

Некоторые функции $y = f(x)$ при неограниченном удалении их от начала координат приближаются к фиксированным прямым $y = ax +$

b, называемым асимптотами графиков функций. Параметры асимптоты общего вида определяются по формулам:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx).$$

К задачам исследования функций в экономике сводятся задачи определения максимальных прибыли, производительности и т. п.; минимизации затрат, времени производства и т. п.

Методы пробных точек (половинного деления, золотого сечения) позволяют в уравнениях, связывающих функцию с независимой переменной $y = f(x)$, искусственно сужать интервал изменения x, стягивая его к точке, где функция имеет характерную особенность (экстремум, равенство нулю и т. д.).

Среди численных методов отыскания корней уравнений широкое распространение нашли методы хорд и касательных. Совместное их использование позволяет достаточно быстро (по количеству итераций) стягивать интервал изменения аргумента к искомой точке.

Метод касательных применим для дифференцируемых функций. Если функция дифференцируема и определение ее производной не затруднительно, то метод хорд и касательных позволяет определить стационарную точку функции – точку, где ее производная обращается в нуль.

Более подробные и обширные сведения о численных методах анализа можно найти, в частности, в [2, 8, 15, 20, 23, 24].

4.18. Вопросы

1. Сформулируйте теорему Ферма. Дайте ее геометрическую интерпретацию. Почему для выполнения теоремы Ферма ставится условие дифференцируемости функции? Изобразите графически ситуации, когда невыполнение требования дифференцируемости функции делает несправедливой теорему Ферма.

2. Ответьте на вопросы пункта 1 по отношению к теоремам Ролля и Лагранжа.

3. Запишите формулу Коши. Покажите, как из нее можно получить формулу Лагранжа.

4. Сформулируйте правило Лопиталя. Где оно может быть использовано? Какие виды неопределенностей раскрываются с исполь-

зованием правила Лопиталя? Как к этим видам неопределенностей привести другие неопределенности?

5. Какие функции называются монотонно возрастающими? монотонно убывающими? Могут ли монотонные функции иметь разрывы? иметь равные нулю производные?
6. Сформулируйте необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции. Поясните сказанное на графиках функций.
7. Какие существуют виды экстремумов? Что общего и в чем разница между точкой экстремума и критической точкой?
8. Дайте определения минимума и максимума функции. Запишите соответствующие математические выражения и сделайте графическую иллюстрацию.
9. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума. Почему это условие нельзя считать достаточным? Пояснение сопроводите графиками.
10. Сформулируйте два достаточных условия существования экстремумов. Поясните их смысл.
11. Укажите соответствие между максимумом (минимумом) функции и знаком второй производной. Как связаны выпуклость и вогнутость функций и графиков функций со знаками второй производной?
12. Запишите математическую формулировку определения выпуклости (вогнутости) функции. Сопроводите пояснения графическими построениями.
13. Что называется точкой перегиба графика функции? Запишите и поясните необходимое и достаточное условия существования точки перегиба.
14. Что называется асимптотой графика функции? Какие существуют виды асимптот?
15. Запишите выражения для определения горизонтальной, вертикальной и наклонной асимптот.
16. Опишите общую схему и последовательность исследования функции.
17. Как свести задачи отыскания экстремума и точек перегиба функций к определению корней уравнений?

18. Какие функции называются унимодальными?
19. Какие ограничения должны быть наложены на функцию при отыскании начального интервала существования ее корня? при уменьшении интервалов существования корня?
20. Какие условия должны быть выполнены, чтобы на рассматриваемом интервале существовал экстремум функции? Поясните на графике функции, как выбирается интервал, который можно исключить при отыскании корней уравнений.
21. Поясните на графике функции смысл теоремы об исключении интервалов при определении корней.
22. Что такое золотое сечение? Из каких соображений выбирается положение пробных точек в методе золотого сечения?
23. В чем смысл введения и как вводится безразмерная координата, в частности, в методе золотого сечения?
24. В чем заключается метод хорд? Какие ограничения следует наложить на функцию при использовании метода хорд отыскания корней уравнений?
25. Влияет ли выпуклость функции на организацию итерационного процесса метода хорд? Изобразите на графике функции последовательность отыскания корня методом хорд.
26. В чем заключается метод касательных определения корней уравнений? Какие ограничения накладываются на функцию при определении ее корней методом касательных?
27. Как определить начальную точку итерационного процесса в методе касательных? Каковой для этой точки должна быть связь между значением функции и ее выпуклостью?
28. В каких случаях решение, получаемое методом касательных, не будет сходиться к точному решению? Поясните на графике.
29. Изобразите на графике функции процесс отыскания корня уравнения методом хорд и касательных.

Вопросы для тестирования

1. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров соответствующих теорем (левая колонка). В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Ролля	1. $y'(\zeta) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \zeta \in [a,b];$
2. Ферма	2. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \quad \zeta \in [a,b];$
3. Лагранжа	3. Если дифференцируемая функция достигает наибольшего значения во внутренней точке отрезка, то производная функции в этой точке равна нулю;
4. Коши	4. Если значения дифференцируемой функции на концах отрезка равны, то в некоторой внутренней точке отрезка производная функции равна нулю.

2. Выделите соотношения, справедливые для правила Лопиталя ($f(x)$, $g(x)$ — непрерывные функции, а их отношение представляет собой неопределенность при соответствующем значении x).

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)';$

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)';$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)};$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.$

5. Среди соотношений 1–4 нет требуемых.

3. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка). В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Формула Тейлора	1. $\dfrac{df(x)}{1!} + \dfrac{d^2f(x)}{2!} + \ldots + \dfrac{d^nf(x)}{n!} + \ldots;$
2. Формула Маклорена	2. $1 + \dfrac{n}{1!}x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n;$
3. Приращение функции	3. $f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots;$
4. Бином Ньютона	4. $f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\dfrac{f(n)(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$

4. Расположите ответы (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка). В местах отсутствия правильного ответа поставьте цифру 5.

1. Монотонно возрастающая функция	1. $y' = 0$;
2. Стационарная точка	2. $y' > 0$;
3. Выпуклая функция	3. $y'' = 0$;
4. Возможная точка перегиба	4. $y'' > 0$.

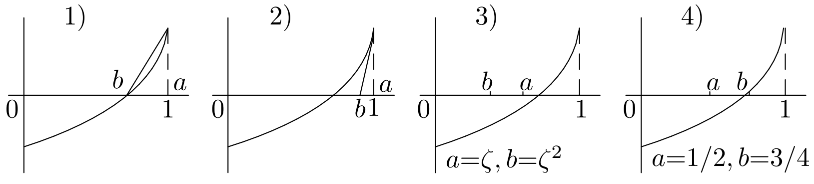
5. Расположите номера условий достаточности (правая колонка) в порядке следования номеров соответствующих им определений (левая колонка), касающихся функции одной переменной. В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Минимум	1. $y' > 0$;
2. Максимум	2. $y' = 0, \quad y'' > 0$;
3. Вогнутость функции	3. $y' = 0, \quad y'' < 0$;
4. Монотонное убывание	4. $y'' < 0$.

6. Расположите номера правильных ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка). В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Горизонтальная асимптота $y = b$	1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$;
2. Вертикальная асимптота $x = a$	2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;
3. Свободный член асимптоты общего вида	3. $\lim\limits_{x\to\infty} \bigl(f(x)\bigr)$;
4. Угловой коэффициент асимптоты	4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

7. Расставьте номера названий методов численного определения корней уравнений, в порядке следования номеров поясняющих эти методы рисунков. При неверном построении рисунка первого приближения в ответе поставьте цифру 5. На рисунках: $[0; 1]$ — интервал, на котором находится корень; a и b координаты точки x, используемые в первой итерации; $\zeta = (\sqrt{5} - 1)/2$.



1. Метод хорд;	2. Метод золотого сечения;
3. Метод касательных;	4. Метод половинного деления;

8. Перечислите соотношения и утверждения, справедливые для метода золотого сечения, если $\omega \in [0,1]$ — точка интервала, где находится корень уравнения.

1. $\zeta^2 + \zeta - 1 = 0$; 2. $\zeta < \omega$; 3. $0 < \zeta < 1$;
4. $\zeta = (\sqrt{5} - 1)/2$ — точка экстремума;
5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

9. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка) для задачи отыскания методом исключения интервалов минимума функции $f(x_*)$ на определенном интервале $[a,b]$, если $a < x_1 < x_2 < b$, $x_* \in [a,b]$. В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. $x_* \in [x_1, b)$	1. $f(x_1) > f(x_2)$;
2. $x_* \in (a, x_2]$	2. $f(x_1) < f(x_2)$;
3. $x_* \in [x_1, x_2]$	3. $f(x_1) < f(b)$;
4. $x_* \in (x_2, b)$	4. $f(x_1) = f(x_2)$.

10. Перечислите соотношения, используемые при приближенном определении корней уравнения на интервале $[a,b]$: а) методом хорд; б) методом касательных.

1. $y - y_a = \dfrac{y_b - y_a}{b - a}(x - a)$; 2. $x_n = x_{n-1} - \dfrac{b - x_{n-1}}{y_b - y_{n-1}} y_{n-1}$;

3. $y - y_a = y'(a)(x - a)$; 4. $x_n = x_{n-1} - \dfrac{y_{n-1}}{y'(x_{n-1})}$;

5. Среди соотношений 1–4 нет требуемых.

11. Перечислите номера обязательных требований к расположению начальной точки метода касательных определения корней уравнений.

1. Для выпуклого графика функции — правая точка;
2. Для вогнутого графика функции — левая точка;
3. Там, где совпадают знаки первой и второй производных;
4. Там, где совпадают знаки функции и второй производной;
5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕМА 4.1
(§ 4.1–4.4 теории)

Правило Лопиталя. Формула Тейлора

Вопросы

1. Сформулируйте теоремы Ролля и Ферма. Докажите их справедливость на графиках функций.
2. Сформулируйте теорему Лагранжа. Докажите ее справедливость на графике функций. Почему теорема называется «теоремой о конечных приращениях»?
3. Сформулируйте правило Лопиталя. Где оно может быть использовано?
4. Запишите формулу Тейлора. Формулу Маклорена.
5. Как оценить точность определения значения функции путем ее разложения в «усеченный» ряд Тейлора?

Задачи

1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 5$ на отрезке $[-3; 2]$.

Р е ш е н и е. Проверим, удовлетворяют ли исходные данные условиям теоремы Ролля:

1) функция непрерывна на любом множестве точек числовой оси, в том числе и на $[-3; 2]$.

2) функция дифференцируема на любом множестве точек числовой оси, в том числе и на $[-3; 2]$.

3) На концах интервала

$$f(-3) = (-3)^3 - 6\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) + 5 = 2; \quad f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 5 = 2,$$

т. е. значения равны.

Все условия теоремы Ролля выполнены. Проверим, найдется ли внутри отрезка (как это утверждает теорема Ролля) хотя бы одна точка, в которой производная функции обратится в нуль. Для этого найдем и приравняем нулю производную функции

$$f'(x) = 3x^2 - 7 = 0$$

Полученное уравнение имеет два корня $x = \pm\sqrt{7/3}$, или $x_1 \approx -1{,}53$; $\quad x_2 \approx +1{,}53$.

Оба корня принадлежат отрезку $[-3; 2]$. Утверждение теоремы Ролля также подтверждены.

При $x = x_1$ функция $f(x)$ принимает максимальное значение:

$$\max_{[-3,2]} f(x) = f(-1{,}53) \approx 15{,}14.$$

при $x = x_2$ минимальное:

$$\min_{[-3,2]} f(x) = f(1{,}53) \approx -0{,}86;$$

В задачах 2–6 вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

2. $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-6}{x^3-8}$

Р е ш е н и е. Функции, стоящие в числителе и в знаменателе, непрерывны и имеют непрерывные производные. При подстановке в функции под знаком предела вместо x бесконечности получаем неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, поэтому правило Лопиталя применимо. Берем производные от числителя и от знаменателя (значение предела при этом не изменится):

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Повторно применяем правило Лопиталя:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{6x} = \left(\frac{2}{\infty}\right) = 0.$$

3. $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{2x^2-5x+3}$.

Р е ш е н и е. Функции, стоящие в числителе и в знаменателе, непрерывны и имеют непрерывные производные. При подстановке вместо x единицы под знаком предела получается неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, поэтому правило Лопиталя применимо:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{4x-5} = \frac{3}{-1} = -3.$$

4. $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sin(1-x)}$.

Р е ш е н и е. Функции, стоящие в числителе и в знаменателе, непрерывны и имеют непрерывные производные. При подстановке вместо x единицы под знаком предела получается неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, поэтому правило Лопиталя применимо:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-\cos(1-x)} = -\lim_{x\to 1} \frac{1}{x\cos(1-x)} = -1.$$

5. $L = \lim\limits_{x\to 0} (1-x^2)^{1/2x}$.

Р е ш е н и е. При подстановке вместо x единицы под знаком предела получается неопределенность типа 1^∞. Правило Лопиталя неприменимо.

Прологарифмируем обе части заданного выражения (в силу непрерывности функции знак логарифма можно внести под знак предела):

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Теперь, при неопределенности типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, правило Лопиталя можно использовать:

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{(1-x^2)\cdot 2} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Отсюда находим

$$L = e^0 = 1.$$

6. $L = \lim\limits_{x\to 0} (1+ax^m)^{b/x^n}$.

Р е ш е н и е. Пример является обобщением предыдущего примера. Последовательности получения решений обоих примеров совпадают.

Найдем

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{b\ln(1+ax^m)}{x^n} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Используем правило Лопиталя:

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{abmx^{m-1}}{(1+ax^m)nx^{n-1}} = \frac{abm}{n} \lim_{x\to 0} x^{m-n} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m > n, \\ ab, & \text{если} \quad m = n, \\ \infty, & \text{если} \quad m < n,\ ab > 0, \\ -\infty, & \text{если} \quad m < n,\ ab < 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$L = \lim_{x\to 0}(1 + ax^m)^{b/x^n} = \begin{cases} e^0 = 1, & \text{если} \quad m > n, \\ e^{ab}, & \text{если} \quad m = n, \\ e^{\infty} = \infty, & \text{если} \quad m < n,\ ab > 0, \\ e^{-\infty} = 0, & \text{если} \quad m < n,\ ab < 0. \end{cases}$$

В частности, при $m = n$ и $a = b = 1$ получаем второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e.$$

7. $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{e^{1/x}}.$

Р е ш е н и е. При подстановке вместо x нуля под знаком предела получается неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, поэтому правило Лопиталя применимо:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{xe^{1/x}\cdot(-1/x^2)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{1/x}} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

8. $L = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x.$

Р е ш е н и е. Обозначим $u = x^x$. Логарифм этого выражения $\ln u = x\ln x$ стремится к нулю (пример 4 § 4.2). Найдем логарифм L:

$$\ln L = \lim_{\ln u\to 0^+} \ln u = 0.$$

Отсюда получим: $L = 1$.

9. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 + x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$. Найти значение $\ln(1{,}2)$ с точностью до 5%

Р е ш е н и е. При $x = 0$ ряд Тейлора представляет собой ряд Маклорена (4.12):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Найдем производные заданной функции:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \quad \ldots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1)}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad \ldots$$

Производные в точке $x = a = 0$:

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1!, \quad f'''(0) = 2!, \quad \ldots$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1)}(k-1)! \quad (k = \overline{1,n}).$$

Подставим найденные значения производных в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_n(x).$$

При $x = 0{,}2$:

$$\ln(1{,}2) = 0{,}2 - \frac{(0{,}2)^2}{2} + \frac{(0{,}2)^3}{3} - \frac{(0{,}2)^4}{4} + \ldots = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}00267 - \ldots$$

Третье слагаемое суммы составляет $\dfrac{0{,}00267}{0{,}2}100 \approx 1{,}33\%$ от величины первого слагаемого. Слагаемые суммы представляют собой монотонно убывающую знакопеременную последовательность. Поэтому их сумма меньше первого слагаемого.

Найдем остаточный член ряда в форме Лагранжа для $n = 3$:

$$R_3(x) = \frac{f^{(3+1)}(\theta x)}{(3+1)!}x^{3+1} = \frac{2}{(1+x\theta)^4}(x\theta)^4.$$

Здесь $\theta \in (0;1)$. Примем $\theta = 0{,}9$. Для $x = 0{,}2$ получим:

$$R_3(0{,}2) = \frac{2}{(1+0{,}9\cdot 0{,}2)^4}(0{,}2)^4 \approx 0{,}0016.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–8 вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x^2-6x}{x^3-x+16}$. **2**. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{x^3+3x-14}$. **4**. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{\ln x}$. **5**. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln x}$. **7**. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$. **8**. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

В задачах 9–10 вычислить пределы, предварительно преобразовав функции к неопределенностям типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ и затем используя правило Лопиталя:

9. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$. **10**. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\sin x}$.

ТЕМА 4.2

(§ 4.5–4.11 теории)

Исследование функций

Вопросы

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции. Поясните сказанное на графиках функций.
2. Что называется локальным экстремумом функции? Какие существуют виды экстремумов?
3. Дайте определения минимума и максимума функции. Запишите соответствующие математические выражения. Изобразите на графике.
4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума. Почему это условие нельзя считать достаточным? Пояснение сопроводите графиками функций.
5. Укажите соответствие между максимумом (минимумом) функции и знаком второй производной.
6. Как связаны выпуклость и вогнутость функций и графиков функций со знаками второй производной?

7. Что называется точкой перегиба графика функции? Запишите и поясните необходимое и достаточное условия существования точки перегиба.
8. Что называется асимптотой графика функции? Запишите выражения для определения различных видов асимптот.
9. Опишите общую схему и последовательность исследования функции.

Задачи

1. Найти критические точки, экстремумы, интервалы возрастания и убывания функции $y = x - 2\ln x$.

Р е ш е н и е. Область определения функции ограничивается свойством логарифмических функций: $x > 0$.

Для определения критических точек найдем и приравняем нулю производную функции:

$$y' = 1 - \frac{2}{x}; \implies y' = 0; \implies 1 - \frac{2}{x_*} = 0; \implies x_* = 2.$$

При $x = 2$ имеем $y(2) = 2 - 2\ln 2 \approx -0{,}613$. Таким образом, критическая (стационарная) точка M_* (точка, подозрительная на экстремум) имеет координаты $M_*(2; -0{,}613)$.

Для определения характера стационарной точки исследуем поведение производной слева и справа от нее:

$$y'(x_*^-) = y'(1) = 1 - \frac{2}{1} = -1 < 0, \qquad y'(x_*^+) = y'(3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0.$$

Слева от точки x_* на интервале $x \in (0, 2)$ производная всюду отрицательна. Функция на этом интервале монотонно убывает. Справа от точки x_* на интервала $x \in (2, +\infty)$ производная всюду положительна. Функция на этом интервале монотонно возрастает. Смена знака производной от минуса к плюсу при переходе через стационарную точку говорит о том, что в этой точке функция принимает минимальное значение:

$$y_{\min} = y(x_*) \approx -0{,}613.$$

Убедиться в том, что стационарная точка является точкой минимума, можно и по знаку второй производной в этой точке:

$$y'' = \frac{2}{x^2}; \quad y''(2) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Положительное значение второй производной говорит о вогнутости графика функции в стационарной точке и, следовательно, подтверждает вывод о минимальном характере экстремума.

В задачах 2–3 найти наибольшее и наименьшее значения функции.

2. $y = x - 2\ln x$ на интервале $x \in [1; e]$.

Р е ш е н и е. Для заданной функции в задаче 1 на заданном интервале найден локальный минимум $y_{\min} = y(2) \approx -0{,}613$. Других локальных минимумов функция не имеет. Поэтому остается найти значения функции на концах интервала:

$$y(1) = 1 - 2\ln 1 = 1; \quad y(e) = e - 2\ln e \approx 0{,}72.$$

Сравнивая значения функций в стационарной точке и на концах интервала, устанавливаем:

$$\min(y|x \in [1; e]) = y(2) \approx -0{,}613; \quad \max(y|x \in [1; e]) = y(1) = 1.$$

3. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$.

Р е ш е н и е. Функция терпит разрыв второго рода (бесконечный) при $x = 0$. Четная степень аргумента x говорит о том, что функция симметрична относительно оси y.

Найдем и приравняем нулю производную от функции:

$$y' = \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)' = -\frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^5} = 4\frac{1 - x^2}{x^5} = 0.$$

Отсюда находим стационарные точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Исследуем поведение производной слева и справа от стационарных точек.

$$y'(x_1^-) = y'(-2) = 4\frac{1 - (-2)^2}{(-2)^5} = \frac{3}{8} > 0;$$

$$y'(x_1^+) = y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1 - (-1/2)^2}{(-1/2)^5} = -96 < 0.$$

При переходе через стационарную точку x_1 производная меняет знак с плюса на минус (от монотонного возрастания переходит к монотонному убыванию), поэтому

$$y_{\max} = y(-1) = 1.$$

Для точки $x_2 = 1$ получим такое же максимальное значение y. Это следует из симметрии функции относительно оси y.

Интервалы монотонности устанавливаем по знакам производной:
$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ – функция монотонно возрастает;
$x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$ – функция монотонно убывает.

4. Найти асимптоты графика функции $y = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

Р е ш е н и е.

1. Горизонтальные асимптоты функция имеет, если существует ее предел при $x \to \pm\infty$:

$$\text{при} \quad x \to +\infty \quad y \to +\infty; \qquad \text{при} \quad x \to -\infty \quad y \to -\infty.$$

Поэтому горизонтальных асимптот функция не имеет.

Вертикальная асимптота существует, если при конечном значении x функция обращается в бесконечность. Такое значение имеется и вытекает из свойства логарифмических функций. Так как

$$\lim_{x \to -1/e} y = \lim_{x \to -1/e} \left[x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) \right] = -\frac{1}{e} \ln(e - e) = -(-\infty) = +\infty,$$

то прямая $x = -\dfrac{1}{e} \approx -0{,}37$ является вертикальной асимптотой заданной функции.

Проверим существование асимптот общего вида $y = kx + b$. Найдем параметры прямой:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = \ln e = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x \left[\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] = (\infty \cdot 0).$$

Для использования правила Лопиталя к определению предела функции разделим числитель и знаменатель выражения под знаком предела на x, тем самым перейдем к неопределенности типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(e + 1/x) - 1}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Согласно правилу Лопиталя продифференцируем выражения, стоящие в числителе и знаменателе под знаком предела:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(e+\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{e}.$$

Таким образом, асимптота общего вида существует и представляет собой прямую:

$$y = x + \frac{1}{e}.$$

5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = x^2\ln x + 1$.

Р е ш е н и е. Функция определена при $x > 0$.

Выпуклость и вогнутость функций характеризует знак ее второй производной. Найдем ее:

$$y' = x(2\ln x + 1); \qquad y'' = 2\ln x + 3.$$

Найдем значение $x = x^*$, при котором вторая производная функции обращается в нуль:

$$2\ln x_* + 3 = 0, \implies \ln x_* = -\frac{3}{2}, \implies x_* = e^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \approx 0{,}223.$$

Слева от точки x_*

$$y''(x_*^-) = y''(e^{-2}) = 2\ln e^{-2} + 3 = -4 + 3 = -1 < 0;$$

справа —

$$y''(x_*^+) = y''(e) = 2\ln e + 3 = 2 + 3 = 5 > 0.$$

Следовательно, точка с абсциссой $x_* = 1/\sqrt{e^3}$ является точкой перегиба при переходе функции от вогнутости $y'' < 0$ к выпуклости $y'' > 0$.

Интервал вогнутости функции: $x \in \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$.

Интервал выпуклости : $x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}; +\infty\right)$.

6. Зависимость взносов S населения в банк от ставки начисления процентов r описывается функцией $S = 10^3 r^3(12 - r)$. Найти процентную ставку, при которой взносы в банк будут максимальными.

Р е ш е н и е. Найдем и приравняем нулю производную от функции взносов:

$$S' = 10^3[3r^2(12-r) - r^3] = 4r^2 \cdot 10^3(9-r) = 0, \implies r_* = 9.$$

Значение $r = 0$ не имеет смысла.

Чтобы убедиться в том, что найденное значение r_* соответствует максимальному значению S, исследуем вторую производную:

$$S''{=}10^3\big(8r(9{-}r){-}4r^2\big){=}12{\cdot}10^3 r(6-r); \quad S''(r_*){=}12cd10^3{\cdot}9(6{-}9){<}0.$$

Отрицательное значение второй производной говорит о том, что стационарная точка является точкой максимума. Поэтому

$$S_{\max} = S(r_*) = 10^3 \cdot 9^3(12-9) = 2{,}187 \cdot 10^6.$$

7. Для производственной фирмы известны функции дохода $R = 200Q - Q^2$ и затрат $C = 30(Q+100)$ (Q — объем производимой продукции). Определить величины оптимальных прибыли и объема выпускаемой продукции, позволяющих фирме получать эту прибыль.

Р е ш е н и е. Прибыль определяется разностью дохода и затрат:

$$\Pi = R - C = -Q^2 + 170Q - 3000.$$

Чтобы найти максимальное значение прибыли, необходимо определить стационарное значение Q_*, соответствующее равенству нулю производной от Π по Q:

$$\Pi' = -2Q + 170 = 0, \implies Q_* = 85,$$

и убедиться в том, что вторая производная от Π по Q при $Q_* = 85$ отрицательна:

$$\Pi'' = \Pi''(Q_*) = -2 < 0 \ (!).$$

Таким образом, максимальную прибыль предприятие получит, выпуская $Q_* = 85$ единиц продукции. Величина этой прибыли:

$$\Pi_{\max} = \Pi(Q_*) = -85^2 + 170 \cdot 85 - 3000 = 4225.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–3 найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

1. $y = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$. **2**. $y = x^{-1}(1 + x^2)$. **3**. $y = x \ln x$.

В задачах 4–5 найти наибольшее и наименьшее значения функций:

4. $y = 9 - x^2$ на промежутке $[-3,\ 1)$.

5. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ на промежутке $(1,\ \mathrm{e}]$.

В задачах 6–8 найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функций:

6. $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$. **7**. $y = 2x^2 + \ln x$.

8. $y = x^3 - 6x^2$.

В задачах 9–10 найти асимптоты графиков функций:

9. $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$. **10**. $y = \dfrac{3x^5}{2 + x^4}$.

Задание на расчетную работу 1

В расчетной работе $k = 1 + \sqrt{10N/(n + 10)}$, ($N$ — последняя цифра номера группы; n — порядковый номер студента в списке группы, или последние две цифры номера студенческого билета).

Задана функция $g(x) = \dfrac{k}{x} + \dfrac{x}{k + 4} + k^2$.

1. Установить один интервал унимодальности функции при $x > 0$.
2. Найти локальный экстремум на этом интервале:
   2.1 аналитическим методом;
   2.2 методом золотого сечения;
   2.3 методом хорд и касательных.
3. Построить график функции, предварительно определив ее характеристики (точки пересечения с осями координат, точки перегиба, асимптоты, интервалы монотонности).

Глава 5

Функции нескольких переменных (ФНП)

5.1. Функции в n-мерных пространствах

Рассматриваемые до сих пор функциональные зависимости $y = f(x)$ предполагали соответствие между элементами x и y, принадлежащими двум одномерным числовым множествам: $x \in X \subset \Re$; $y \in Y \subset \Re$.

Упомянутую функциональную зависимость называют *отображением* множества X в множество Y и обозначают

$$f:\ X \to Y. \tag{5.1}$$

Такое обозначение позволяет формально обобщить понятие функции одной переменной на функции нескольких переменных (ФНП). Действительно, заменим множество $X \subset \Re$ на декартово произведение n одномерных множеств $X = X^1 \otimes X^2 \otimes \ldots \otimes X^n \subset \Re_n$. Множество X в этом случае является *n-мерным множеством* и представляет собой совокупность n независимых (в общем случае) переменных $x_1 \in X^1,\ x_2 \in X^2, \ldots,\ x_n \in X^n$. При этом запись (5.1) представляет собой отображение n-мерного пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на одномерное пространство Y переменной y.

Если вновь вернуться к функциональной зависимость $y = y(x)$, то вместо отображения (5.1) для *функции нескольких переменных* можно записать выражение:

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n).$$

Функция двух переменных может интерпретироваться как некоторая переменная y, значение которой зависит от положения точки $(x_1; x_2)$ на координатной плоскости. Если функция однозначна, то каждой точке плоскости будет соответствовать одно конкретное значение функции (рис. 5.1).

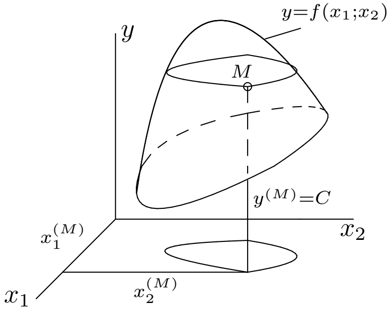


Рис. 5.1. Функция двух переменных

Графиком такой функции будет множество точек, лежащих на некоторой трехмерной поверхности. Уравнение этой поверхности можно представлять в явном

$$y = f(x_1; x_2),$$

или неявном

$$F(x_1; x_2; y) = 0$$

видах.

Примером поверхности в трехмерном пространстве может служить сферическая поверхность, задаваемая в декартовой ортогональной системе координат x, y, z уравнением:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r — радиус сферы.

Если в уравнении поверхности, в n-мерном пространстве принять одну из переменных равной постоянной величине, то в результате размерность рассматриваемого пространства снизится на единицу. Предположение о постоянстве одной переменной равносильно пересечению поверхности плоскостью, перпендикулярной координатной оси этой переменной. Функция n переменных превратится в функцию $(n-1)$ переменной. Так, если в приведенном выше уравнении сферы положить $z = c$, то уравнение преобразуется к виду

$$x^2 + y^2 = (r^2 - c^2),$$

а это — уравнение окружности, радиус которой $R = \sqrt{r^2 - c^2}$.

Линией уровня функции $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных называется множество точек на плоскости, таких, для которых значение y равно некоторой постоянной C.

Геометрически линии уровня представляют собой кривые, получаемые в сечении поверхности (рис. 5.1) плоскостями, перпендикулярными оси y и отстоящими от координатной плоскости x_1x_2 на расстоянии $y^{(M)} = y(x_1^M; x_2^M) = C$.

На рис. 5.1 показана линия уровня, проходящая через точку M, и ее проекция на координатную плоскость x_1x_2. Проекция линии уровня — это, по существу, та же линия уровня, но перенесенная параллельно самой себе на координатную плоскость.

Линиями уровня обычно на географических картах соединяют точки земной поверхности, имеющие одинаковые высоты (находящиеся на одном уровне) по отношению к уровню моря.

Если говорить о функции $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданной в пространстве $\Re_n$, то уравнение $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ определит для нее гиперповерхность равного уровня в пространстве $\Re_{n-1}$.

5.2. Последовательности и пределы функций нескольких переменных

При изучении функций одной переменной рассматривались последовательности в пространстве действительных чисел (на числовой оси). Обобщим сказанное на евклидово пространство E_n — пространство, в котором расстояние между произвольными точками $A = (x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a)$ и $B = (x_1^b, x_2^b, \ldots, x_n^b) \in E_n$ определяется формулой:

$$AB = \sqrt{(x_1^a - x_1^b)^2 + (x_2^a - x_2^b)^2 + \ldots + (x_n^a - x_n^b)^2}.$$

Рассмотрим пространство E_n с n переменными, определяемыми вектором $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть в этом пространстве задана точка, определяемая радиусом-вектором $A = (x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a)$, и последовательность точек, положение которых в пространстве определяется радиусами-векторами $X^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Совокупность точек X^k пространства E_n, таких, что для них и для точки A выполняется условие:

$$|\Delta X| = |X^k - A| = \sqrt{(x_1^k - x_1^a)^2 + (x_2^k - x_2^a)^2 + \ldots + (x_n^k - x_n^a)^2} < \delta \tag{5.2}$$

принадлежит *n-мерному шару* радиуса δ с центром в точке A, который образует *δ-окрестность точки A.*

Говорят, что точка X^k пространства E_n находится в δ-окрестности точки A, если для любого числа $\delta > 0$ выполняется неравенство (5.2).

Последовательность точек $\{X^k\} = X^1, X^2, \ldots X^k$ пространства E_n называется *сходящейся*, если существует такая точка $A = (x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a)$, что для любого числа $\delta > 0$ можно указать номер N, начиная с которого (при $k > N$) все точки последовательности будут находиться в δ-окрестности точки A.

Если условие (5.2) выполняется при $k > N$ и любом $\delta > 0$, то точка A называется *пределом числовой последовательности* $\{X^k\}$:

$$\lim_{k\to\infty} X^k = A.$$

Для сходящейся последовательности $\{X^k\}$ точек пространства E_n справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность точек* $\{X^k\} = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$
$(k = 1, 2, \ldots)$ *евклидова n-мерного пространства E_n сходилась к точке $A = (x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a)$, необходимо и достаточно чтобы последовательности координат $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k$ точек X^k сходились к соответствующим координатам $x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a$ точки A :*

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i^a, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Пусть с евклидовым пространством E_n связана совокупность n переменных, определяемых вектором $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и задана некоторая скалярная функция этих переменных $u(X) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть радиус-вектор $A = (x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a)$ определяет точку пространства E_n, имеющую δ-окрестность. Модуль вектора $\Delta X = X - A$ определяет расстояние от точки A до точки X в δ-окрестности точки A:

$$|\Delta X| = |X - A| = \sqrt{(x_1 - x_1^a)^2 + (x_2 - x_2^a)^2 + \ldots + (x_n - x_n^a)^2} \le \delta. \tag{5.3}$$

Число b называется *пределом функции* $u(X)$ в точке A, если для любой последовательности точек $\{X^k\}$ из множества X, сходящихся к точке A, соответствующая последовательность значений функции $\{u(X_k)\}$ сходится к b.

Другое определение предела функции нескольких переменных опирается на $\varepsilon - \delta$ формулировку.

Число b называется *пределом функции* $u(X)$ в точке A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех точек X множества $\{X\}$ из δ-окрестности точки A, удовлетворяющих неравенству $|\Delta X| \le \delta$ (5.3), выполняется неравенство $|u(X) - b| \le \varepsilon$.

Сформулированные определения можно записать в символах математики:

$$\lim_{X \to A} u(X) = b \qquad \text{или} \qquad \lim_{x_i \to a_i} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b \quad (i = \overline{1, n}).$$

Аналогично функции одной переменной, для функции нескольких переменных, имеющих предел в рассматриваемой точке, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $f(X)$ и $g(X)$, определенные на одном множестве $X \subset \Re_n$, имеют соответственно пределы b и d в некоторой точке A. Тогда функции $f(X) + g(X), f(X) \cdot g(X)$, и $f(X)/g(X)$ (при $d \neq 0$) имеют пределы в точке A, равные соответственно $b + d$; $b{\cdot}d$ и b/d.*

Задача нахождения предела функции нескольких переменных является более сложной по сравнению с функцией одной переменной, особенно для случаев наличия в пределах неопределенностей.

Пример. Найти $L = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

Р е ш е н и е. Введем переменную $\rho = x^2 + y^2$, тогда $\rho \to 0$ при $x \to 0$ и $y \to 0$. Подставим введенную переменную в исходный предел:

$$L = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho} = \left(\frac{0}{0}\right) = \{\text{правило Лопиталя}\} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{1 + \rho} = 1.$$

Как и для функции одной переменной, для функции нескольких переменных существует понятие бесконечно малой величины.

Функция $\alpha(X)$ $(X \subset \Re_n)$ называется *бесконечно малой* в окрестности точки A при $X \to A$, если предел функции в этой точке равен нулю:

$$\lim_{X \to A} \alpha(X) = 0.$$

5.3. Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть функция нескольких переменных $u = u(X)$ определена на множестве точек $X(x_1, \ldots, x_n)$ евклидова пространства и на этом множестве задана некоторая точка $A(a_1, \ldots, a_n)$ вместе со своей δ-окрестностью.

Функция нескольких переменных называется *непрерывной в точке* A, если в этой точке:
1) функция определена;
2) предел функции существует;
3) предел функции равен значению функции:

$$\lim_{X \to A} u(X) = u(A).$$

Формально определение непрерывности функции нескольких переменных не отличается от определения непрерывности функции одной переменной. Отличие состоит лишь в том, что вместо значения функции одной переменной, получаемого при стремлении этой переменной к фиксированному числу, в определении функции нескольких переменных фигурирует значение функции $u(A)$ в точке, определяемой совокупностью числовых значений координат: $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Точки пространства E_n, в которых функция $u(X)$ не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва функции.*

Если функция $u = u(X)$ непрерывна в любой точке множества X, то она называется *непрерывной на этом множестве.*

Полным приращением функции $u = u(X)$ в точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется функция

$$\Delta u = u(X) - u(A),$$

где $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная точка рассматриваемого пространства.

Вводя обозначения:

$$\Delta x_1 = x_1 - a_1,\ \Delta x_2 = x_2 - a_2,\ \ldots,\ \Delta x_n = x_n - a_n,$$

для координат приращения вектора X: $\Delta X(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, выражение для функции $u(X)$ в точке $X = A + \Delta X$ запишем в виде

$$u = u(X) = u(A + \Delta x) = u(a_1 + \Delta x_1,\ a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n).$$

Сформулируем определение непрерывной функции на языке приращений.

Функция $u{=}u(X)$ называется *непрерывной в точке* A, если ее полное приращение в этой точке является бесконечно малой величиной при $X{\to}A$:

$$\lim_{X\to A} \Delta u = \lim_{X\to A} [u(X) - u(A)] = 0. \tag{5.4}$$

Стремление вектора X, характеризующего положение произвольной точки пространства E_n, к вектору A, характеризующему положение фиксированной точки A, равносильно условию $\Delta X = X - A \to 0$.

Напомним, что условие $X \to A$ равносильно соблюдению таких же условий для каждой из переменных, т. е. $x_k \to a_k$ или $\Delta x_k \to 0$ $(k = \overline{1,n})$.

В этом случае равенства (5.4) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta X\to\Theta} \Delta u = 0. \tag{5.5}$$

Геометрический смысл непрерывности функции двух переменных сводится к непрерывности некоторой поверхности в трехмерном пространстве. На рис. 5.2 показана такая поверхность и на ней изображены две кривые, соответствующие фиксированным значениям одной из переменных $x_1 = c_1$ и $x_2 = c_2$. Эти кривые описываются уравнениями $u_1 = u(x_1, c_2)$ и $u_2 = u(c_1, x_2)$.

Придадим одной из независимых переменных x_k $(k \in \overline{1,n})$ функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нескольких переменных приращение Δx_k, а остальные переменные зафиксируем. Это приращение переведет точку X с координатами $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ в точку X_k с координатами $(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n)$.

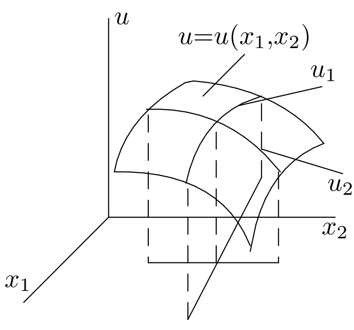


Рис. 5.2. Функция двух переменных

Приращение функции $u(X)$, соответствующее указанному приращению аргумента, называется *частным приращением функции* — приращением при переходе точки X в точку X_k вдоль координаты x_k:

$$\Delta_k u = u(X_k) - u(X) = u(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) -$$

$$-u(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n).$$

Функция $u = u(X)$ называется *непрерывной в точке X по переменной x_k*, если соответствующее частное приращение этой функции является бесконечно малой при $\Delta x_k \to 0$:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_k u = 0.$$

Отметим, что при фиксированных значениях всех переменных множества $\{X\}$, кроме одной, функция $u = u(X)$ становится функцией этой *одной* переменной.

Если функция нескольких переменных $u = u(X)$ непрерывна в некоторой точке пространства E_n, то она непрерывна по каждой из координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Но если функция нескольких переменных непрерывна по части, но не по всем координатам в рассматриваемой точке пространства, то это еще не означает, что она непрерывна в этой точке.

5.4. Частные производные

В § 5.3 дано определение частного приращения функции нескольких переменных $u = u(X) = u(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ по координате x_k. Это величина

$$\Delta_k u = u(X_k) - u(X),$$

где $u(X_k)$ — значение $u(X)$ в точке X_k с координатами $\big(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n\big)$, т. е. в точке, у которой по сравнению с точкой X получила приращение только одна координата x_k, остальные координаты остаются неизменными.

В отличие от функции одной переменной для функции нескольких переменных вводится понятие *частной производной.*

Частной производной функции нескольких переменных называется предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующей независимой переменной при стремлении последнего к нулю:

$$u'_k = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k}.$$

Принятые обозначения частных производных: u'_{x_k}, u'_k, $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

Отметим еще раз, что смысл частной производной тот же, что и производной функции одной переменной, но только в предположении, что изменяется только одна независимая переменная, а остальные зафиксированы (постоянны). Фиксируя все переменные в функции $u = u(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$, кроме x_k, получим функцию одной переменной $u_k = u_k(x_k)$ (k – фиксировано, x_k – переменная, x_m ($m = \overline{1, n}$; $m \neq k$) — постоянные).

Частная производная от функции u по x_k, очевидно, равна обыкновенной производной от u_k по той же координате:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{d\,u_k}{d\,x_k}.$$

Частные производные по координатам определяют тангенсы углов наклона касательных к графику функции (прямых, лежащих в плоскости, касательной к гиперповерхности, описываемой функцией $u = u(X)$) к соответствующим осям координат.

Пример 1. Найти все частные производные функции $u = x^y + \dfrac{y}{x}$.
Р е ш е н и е. Для определения частной производной функции u по переменной x считаем, что y — постоянная величина. Тогда

$$u'_x = yx^{y-1} - \frac{y}{x^2}.$$

При определении u'_y считаем x постоянной:

$$u'_y = x^y \ln x + \frac{1}{x}.$$

Если функция нескольких переменных непрерывна по всем своим независимым переменным вместе со своими первыми частными производными, то по каждой из этих переменных можно производить дифференцирование требуемое количество раз. Например, для функции двух переменных $u = u(x, y)$ можно записать различные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Последнее соотношение указывает на то, что в так называемых *смешанных производных* порядок дифференцирования безразличен.

Для функции нескольких переменных $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражение k-й производной можно записать в виде

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

причем $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Пример 2. Задана функция $u = x^3 + xy^2 - xy + x + y + y^4$. Найти все ее вторые производные.

Р е ш е н и е. Последовательно дифференцируем заданную функцию:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - y + 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - x + 1 + 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y - 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y - 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x + 12y^2.$$

5.5. Дифференциал функции нескольких переменных

Обобщим понятие дифференциала на функции нескольких переменных.

По аналогии с функциями одной переменной линейные функции $u'_k\, dx_k \quad (k = \overline{1, n})$ переменных $d\, x_k$, называемых *дифференциалами независимых переменных*, называются *частными дифференциалами* функции $u(X)$ по переменным x_k:

$$du_k = u'_k\, dx_k.$$

Как и для функции одной переменной, приращение Δu, называемое *полным приращением* функции нескольких переменных, можно представить как сумму дифференциала du (*главной части приращения*) и бесконечно малых при $\Delta x_k \to 0$ величин $\alpha_k\, \Delta x_k$:

$$\Delta u = du + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \Delta x_k = du + o(\Delta \rho). \tag{5.6}$$

Здесь $o(\Delta \rho)$ — при $\Delta \rho \to 0$ бесконечно малая величина по сравнению с du;

$$\Delta \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\Delta x_k)^2}.$$

Итак, полным дифференциалом функции $u = u(X)$ нескольких переменных называют величину

$$du = \sum_{k=1}^{n} u'_k \, dx_k.$$

Если в последнем выражении приравнять дифференциал приращению функции: $du = \Delta u = u(X) - u(X_0) = u - u_0$, то придем к уравнению плоскости, касательной к гиперповерхности $u = u(X)$ в точке $X_0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$:

$$u - u_0 = u'_1(X_0)(x_1 - x_1^0) + u'_2(X_0)(x_2 - x_2^0) + \ldots + u'_n(X_0)(x_n - x_n^0).$$

В частном случае, для функции одной переменной, получается известное уравнение касательной к плоской кривой:

$$u - u_0 = u'(x_0)(x - x_0).$$

Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных связано, в частности, с записью (5.6).

Функция нескольких переменных $u = u(X)$ называется *дифференцируемой в точке* X с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если ее полное приращение может быть представлено в виде (5.6).

Можно показать, что функция нескольких переменных дифференцируема в точке, если все частные производные функции существуют в окрестности этой точки.

Дифференциал функции двух переменных позволяет получить удобную формулу для нахождения производной от неявно заданной функции одной переменной $u(x, y) = 0$. Действительно,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = u'_x dx + u'_y dy = 0.$$

Отсюда при $u'_y \neq 0$ получим:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{u'_x}{u'_y}. \tag{5.7}$$

Отметим, что существование не равной нулю производной u'_y в окрестности точки (x_0, y_0), удовлетворяющей равенству $u(x_0, y_0) = 0$, указывает на то, что в окрестности этой точки функция u монотонно изменяется (возрастает или убывает) в зависимости от y. В этом случае уравнение $u(x, y) = 0$ определяет взаимно однозначное соответствие между переменными y и x и функция y может быть в явном виде выражена через x:

$$y = y(x).$$

Подробнее об этом сказано в § 5.9.

Пример 1. Найти производную y'_x для неявно заданной функции $xy - 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Заданное уравнение имеет решение всюду, за исключением точек, где $x = 0$ или $y = 0$. Найдем производную:

$$y'_x = -\frac{(xy-1)'_x}{(xy-1)'_y} = -\frac{y}{x}.$$

Производная не равна нулю во всех точках числовой оси за исключением $x = 0$. Поэтому из уравнения $xy - 1 = 0$ можно в явном виде выразить переменную y: $y = 1/x$ при $x \neq 0$.

Последняя зависимость позволяет выразить производную y'_x через переменную x: $y'_x = -\dfrac{1}{x^2}$.

Пример 2. Установить, можно ли из зависимости $4x + y^2 - 1 = 0$ выразить в явном виде функцию $y = y(x)$ в окрестности точек, в которых $y = 0$.

Р е ш е н и е. Следуя формуле (3.8), найдем производную:

$$y'_x = -\frac{(4x+y^2-1)'_x}{(4x+y^2-1)'_y} = -\frac{2}{y}.$$

При $y = 0$ производная не существует. Поэтому в точках, где $y = 0$, однозначно в явном виде выразить y через x невозможно.

Разрешая заданное уравнение относительно y, получим неоднозначное решение $y = \pm\sqrt{1-4x}$. Неоднозначность решения противоречит определению функции.

Однозначная зависимость, вытекающая из неявно заданной функции примера, может быть получена, если рассмотреть окрестности других точек ($y \neq 0$). Так, при $y > 0$ существует функция, явно выражаемая через x: $y = +\sqrt{1-4x}$.

В качестве иллюстрации одного из приложений дифференциала функции нескольких переменных рассмотрим задачу Кобба–Дугласа. Ученые, рассмотревшие эту задачу, ввели производственную функцию объема выпуска продукции Q (функцию Кобба–Дугласа), зависящую от двух (в частном случае) переменных (затрат капитала K и трудовых ресурсов L), и установили между этими функциями зависимость:

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{5.8}$$

где A, α — положительные коэффициенты, причем $\alpha \in (0, 1)$.

Пример 3. Используя формулу Кобба–Дугласа, установить, на какую величину $\Delta K = d\,K$ следует изменить объем вложенного капитала K, чтобы при изменении трудовых ресурсов на $\Delta L = d\,L$ выпуск продукции оставался неизменным.

Р е ш е н и е. Полагая по условию задачи, что Q постоянная, потребуем, чтобы ее дифференциал (главная часть приращения) равнялся нулю:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K}d\,K + \frac{\partial Q}{\partial L}d\,L = 0.$$

Отсюда найдем

$$d\,K = -d\,L\frac{\partial Q}{\partial L}\Big/\frac{\partial Q}{\partial K}, \quad \text{или} \quad d\,K = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}d\,L.$$

Умножив обе части полученного выражения на $\dfrac{L}{K\,d\,L}$, придем к выражению для эластичности:

$$E_{K(L)} = \frac{d\,K}{d\,L}\frac{L}{K} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{5.9}$$

Анализ последней формулы говорит о том, что при изменении трудовых ресурсов на 1% ресурс капитала следует изменить на величину $\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.

От соотношения (5.9) можно перейти к математической формулировке важного экономического понятия — *предельной нормы* замены трудовых ресурсов L капиталом K. Эта величина представляется эластичностью (5.9).

5.6. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных

Рассмотрим предварительно функцию $u = u(x, y)$ двух переменных, которые в свою очередь являются функциями одной переменной

t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Считаем, что x и y дифференцируемы по переменной t в точке t_0.

Теорема. *Если функция $u = u(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то в окрестности точки t_0 существует сложная функция $u\big(x(t), y(t)\big)$, производная которой по переменной t в этой точке определяется формулой:*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{5.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируемость функции $u(x, y)$ в точке (x_0, y_0) позволяет утверждать, что ее приращение

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\rho), \tag{5.11}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\lim\limits_{\rho\to 0} o(\rho) = 0$.

Пусть Δt – приращение переменной t в точке t_0 и

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), \quad \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0).$$

Разделим обе части равенства (5.11) на Δt:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу в обеих частях этого равенства при $\Delta t \to 0$ (последнее слагаемое стремится к нулю), получим формулу (5.10). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь функцию $u = u(x, y)$ двух переменных, которые, в отличие от первого случая, являются функциями двух переменных t и s: $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$. Функции x и y дифференцируемы в точке (t_0, s_0).

Как следствие рассмотренной выше теоремы можно утверждать следующее.

Если функция $u = u(x, y)$ дифференцируема в точке $\big(x(t_0, s_0), y(t_0, s_0)\big)$, то в этой точке существуют частные производные u_t и u_s сложной функции $u = u\big(x(t, s), y(x, y)\big)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}. \tag{5.12}$$

Утверждение очевидно, так как при фиксировании одной из переменных (t или s) в (5.12) приходим к формуле (5.10).

Обобщим формулы (5.10) и (5.12) на функции нескольких переменных. Пусть при условиях теоремы существует функция $u = u(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$, где, в свою очередь $x_k = x_k(t_1, \ldots, t_m)$ $(k = \overline{1, n})$. Тогда сложная функция $u = u\big(x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_m)\big)$, дифференцируемая в точке $\big(x_1(t_1^0, \ldots, t_m^0), \ldots, x_n(t_1^0, \ldots, t_m^0)\big)$, имеет в этой точке частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \quad (i = \overline{1, m}). \tag{5.13}$$

Если функция $u = u(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то в окрестности точки t_0 существует сложная функция $u\big(x(t, s), y(t, s)\big)$, производная которой по переменной t в этой точке определяется формулой

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}. \tag{5.14}$$

Запишем без доказательства формулу для вычисления частных производных сложной функции нескольких переменных вида

$$u = u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),$$

где

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_k) \quad (i = \overline{1, n},\ r = \overline{1, k}).$$

Считаем, что приведенные функции дифференцируемы (имеют частные производные по всем своим аргументам) в рассматриваемых точках. В этом случае справедлива формула $(r = \overline{1, k})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t_r} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_r} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_r} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_r}.$$

Пример Найти частные производные по переменным s и t от функции $u = xy^2$, где $x = 2s + t$, $\ y = s \sin t$.

Р е ш е н и е. В приведенной формуле для вычисления частных производных сложной функции принимаем: $x_1{=}x,\ x_2{=}y,\ t_1{=}s,\ t_2{=}t$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = y^2 \cdot 2 + 2xy \sin t =$$
$$= 2s^2 \sin^2 t + 2s(2s + t) \sin^2 t = 2s(3s + t) \sin^2 t;$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = y^2 + 2xys \cos t = s^2 \sin^2 t + (2s + t) s \sin 2t.$$

5.7. Производная по направлению

Рассмотрим на плоскости, с которой связана декартова ортогональная система координат, некоторый вектор $\boldsymbol{l}$ и совпадающий с ним по направлению единичный вектор $\boldsymbol{n}$ (рис. 5.3). Пусть α и β — углы между вектором $\boldsymbol{n}$ и осями координат. Тогда проекции вектора $\boldsymbol{n}$ на оси координат (произведение модуля вектора, равного единице, на косинусы углов между этим вектором и направлениями осей координат) будут равны $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. Представим вектор $\boldsymbol{n}$ в виде совокупности его координат (проекций):

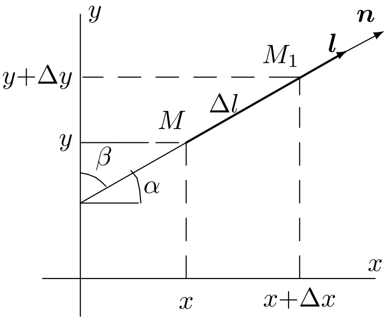


Рис. 5.3. Векторы на плоскости

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta).$$

При этом

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Пусть на плоскости xy задана функция двух переменных $u{=}u(x,y)$ и пусть эта функция определена в некоторой точке M, непрерывна и дифференцируема в ее окрестности.

На прямой, проходящей через точку M в направлении вектора $\boldsymbol{n}$ на расстоянии Δl от $M(x,y)$, выберем точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Длина отрезка MM_1 определится по теореме Пифагора:

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Запишем выражение для приращения функции u:

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y),$$

где Δx и Δy связаны с Δl соотношениями:

$$\Delta x = \Delta l\, \cos\alpha; \quad \Delta y = \Delta l\, \cos\beta. \tag{5.15}$$

Предел отношения $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ называется *производной по направлению* $\boldsymbol{l}$ функции $u = u(x,y)$ в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Так как по предположению функция u дифференцируема в точке $M(x, y)$, ее приращение в этой точке с учетом соотношений (5.15) может быть записано в виде, аналогичном (5.6):

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\Delta l) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l \cos\beta + o(\Delta l).$$

Поделив это равенство на Δl и переходя к пределу при $\Delta l \to 0$, получим формулу для производной функции $u = u(x, y)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ $\left(\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{o(\Delta l)}{\Delta l} = 0\right)$:

$$u'_l = \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta.$$

Обобщением полученной формулы на случай функции n переменных является выражение:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} n_k, \tag{5.16}$$

где $n_k = \dfrac{\Delta x_k}{\Delta l}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} n_k^2 = 1$.

Пример. Найти производную функции $u = x^2 + y^2$ по направлению вектора $\boldsymbol{l}$, составляющего угол $\alpha = \pi/3$ с осью x, в точках $M_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ и $M_3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Р е ш е н и е. Отметим, что во всех заданных точках $u = 2$, т. е. точки лежат на одной линии уровня $x^2 + y^2 = 2$.

Так как угол β дополняет угол α до $\pi/2$, то $\beta = \pi/6$.

Найдем производную от u по направлению вектора $\boldsymbol{l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{6} = 2x\,\frac{1}{2} + 2y\,\frac{\sqrt{3}}{2} = x + \sqrt{3}y.$$

В точке M_1:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_1} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

В точке M_2:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73 < 2.$$

В точке M_3:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

5.8. Градиент функции

Градиентом функции n переменных $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным функции по переменным x_k $(k = \overline{1, n})$ в рассматриваемой точке пространства $\Re_n$. В ортонормированном базисе $(\boldsymbol{i}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{i}_n)$ этого пространства

$$\boldsymbol{grad}\, u = \boldsymbol{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\boldsymbol{i}_n. \tag{5.17}$$

Здесь $\boldsymbol{\nabla}$ — математический знак (читается «набла»), представляющий собой векторный дифференциальный оператор:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\boldsymbol{i}_n, \tag{5.18}$$

называемый *оператором Гамильтона.* (Hamilton William, 1805–1865 — шотландский математик).

Если базис задан и не изменяется в процессе, то в записи градиента достаточно ограничиться только совокупностью его координат:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

В отличие от векторного оператора $\boldsymbol{\nabla}$ оператор ∇ является матрицей-строкой этого векторного оператора).

В литературе часто используется еще одно обозначение градиента:

$$\nabla u = \frac{du}{dX}.$$

В частном случае пространства $\Re_2$ с ортонормированным базисом $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$

$$\boldsymbol{\nabla} u = \boldsymbol{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j},$$

или

$$\nabla u = grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Рассмотрим поверхность $u = u(x_1, x_2, x_3)$ в пространстве $\Re_3$ и единичный вектор $\boldsymbol{n}$, задающий некоторое направление в этом пространстве. Производная по направлению единичного вектора $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ от функции u:

$$u'_n = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cos\alpha_3.$$

В правой части записанного равенства стоит скалярное произведение вектора $\boldsymbol{n}$ на градиент $\boldsymbol{\nabla} u$ функции u, т. е. ($|\boldsymbol{n}| = 1$):

$$u'_n = (\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{n}) = |\boldsymbol{\nabla} u|\cos\theta, \tag{5.19}$$

где $\theta = (\boldsymbol{\nabla} u \hat{,} \boldsymbol{n})$.

Из свойств скалярного произведения следует, что максимального значения скалярное произведение достигает в случае, когда векторы, входящие в это произведение, соосны ($\theta = 0$). Таким образом, производная по направлению достигает своего максимального значения в направлении градиента функции. Кроме того, производная функции по направлению градиента равна модулю градиента. В направлениях, составляющих угол θ с градиентом, производная определяется по формуле (5.19) — производная по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ является проекцией вектора-градиента функции на направление $\boldsymbol{l}$.

Производная по направлению единичного вектора $\boldsymbol{s}$ касательной к линии уровня $u = u(X) = C$: $u'_s = C'_s = 0$. В этом случае угол θ между градиентом функции и направлением $\boldsymbol{s}$ равен $\pi/2$ (5.19). Из сказанного следует, что градиент — это вектор, ортогональный линии уровня и лежащий в плоскости, касательной к поверхности, описываемой функцией $u = u(X)$. Можно показать, что вектор градиента направлен в сторону возрастания функции u.

Пример. По данным примера § 5.7 найти градиент функции u и его модуль.

Решение. В упомянутом примере были найдены значения частных производных функции $u = x^2 + y^2$. Эти значения являются координатами вектора-градиента (на рис. 5.4 градиент отмечен символом $\boldsymbol{\nabla}$):

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = (2x, 2y);$$

$$\nabla u|_{M_1} = \left(2\frac{1}{2}, 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1, \sqrt{3}); \quad \nabla u|_{M_2} = \left(2\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{3}, 1);$$

$$\nabla u|_{M_3} = \left(2\frac{\sqrt{3}}{2}, -2\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{3}, -1).$$

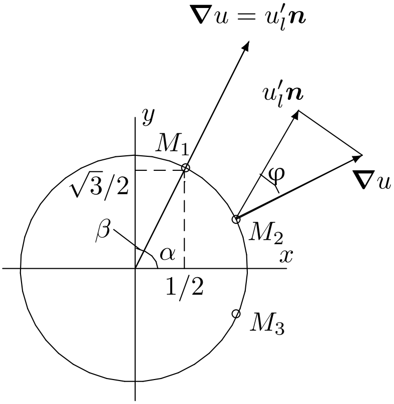


Рис. 5.4. Производная по направлению и градиент

Три найденные пары проекций градиента на оси координат x и y геометрически представляют собой катеты в прямоугольных треугольниках, гипотенузами которых является модуль (длина) вектора. Поэтому

$$|\boldsymbol{\nabla} u|_{M_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{M_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2_{M_1}} =$$

$$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Легко убедиться в том, что градиенты в двух других точках также равны двум.

Обобщим и проанализируем полученные в примерах (в том числе § 5.7) результаты.

1. Нетрудно заметить, что все выбранные точки (M_1, M_2 и M_3) лежат на окружности единичного радиуса. Эта окружность представляет собой линию уровня функции $u = x^2 + y^2$ при $u = 1$.

2. В точке M_1 производная по направлению совпадает с градиентом функции. Это естественно, так как заданное направление является нормальным по отношению к линии уровня.

3. В точке M_3 производная по направлению равна нулю. Это объясняется тем, что направление вектора $\boldsymbol{l}$ в этой точке касательно к линии уровня и поэтому движение в направлении касательной не изменяет значения функции u (вдоль линии уровня функция не изменяется).

4. Векторы-градиенты функции во всех точках, лежащих на одной линии уровня, имеет одинаковую длину. Это свойственно только линиям уровня, представляющим концентрические окружности. Для линий уровня произвольных функций их градиент изменяется при переходе от одной точки линии уровня к другой.

5. Модуль градиента функции в рассматриваемой точке равен наибольшему из возможных значений производной по направлению в этой точке.

6. Производная по направлению равна произведению модуля градиента функции на косинус угла между нормалью к линии уровня (направлением градиента) и вектором $\boldsymbol{l}$. Это проекция вектора-градиента на направление вектора $\boldsymbol{l}$:

$$u_l' = |\boldsymbol{\nabla} u| \cos \varphi.$$

5.9. Неявно заданные функции одной переменной

Определим при каких предпосылках будут выполняться условия существования и единственности функции $y = y(x)$, заданной в неявном виде:

$$u(x, y) = 0. \tag{5.20}$$

Рассмотрим функцию $u = u(x, y)$, линия уровня которой $u = 0$ представлена графиком на рис. 5.5,а. Такой вид имеет, например, парабола

$$(y - y_2)^2 - 2p(x - x_2) = 0.$$

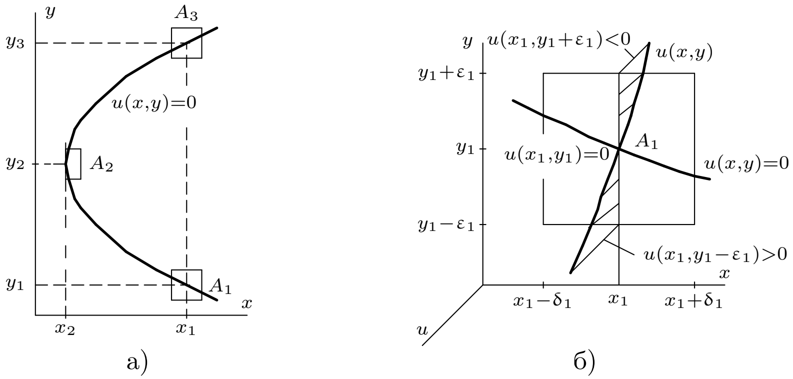


Рис. 5.5. Линия уровня (а) функции и окрестность ее точки A_1 (б)

Из уравнения параболы можно выразить координату y через x в явном виде

$$y = y_2 \pm \sqrt{2p(x - x_2)}.$$

В области $x \geq x_2$ функция y однозначно определяется через x только в одной точке $x = x_2$. Во всех остальных точках области определения ($x > x_2$) функция неоднозначна. Например, значению x_1 независимой переменной соответствует, как видно из рис. 5.5,а, два значения функции: y_1 и y_3 (точки A_1 и A_3).

Чтобы однозначно определить зависимость $y = y(x)$ необходимо выделить непересекающиеся области изменения переменных в окрестности рассматриваемых точек. На рис. 5.5,а показаны такие области $\big(D(A_i) \subset \Re_2 \quad (i = 1, 3)\big)$, имеющие вид прямоугольных параллелепипедов, окаймляющих окрестности точек A_i:

$$D(A_i) = ([x_i - \delta_i, x_i + \delta_i];\ [y_i - \varepsilon_i, y_i + \varepsilon_i])\,.$$

Здесь δ_i и ε_i — некоторые положительные числа, определяющие размеры областей.

Отметим, что вид границ областей, окаймляющих рассматриваемые точки, не имеет значения. Форма прямоугольных параллелепипедов выбрана лишь для удобства рассуждений.

Если в области $([x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1];\ [-\infty < y < \infty])$ располагаются два значения y_1 и y_3, удовлетворяющие уравнению $u(x, y) = 0$, то в подобластях $D(A_1)$ и $D(A_3)$ этой области — по одному значению.

Установим, что обусловливает однозначность переменной y. Для этого обратимся к укрупненному изображению области точки A_1 (рис. 5.5,б).

Рассмотрим случай, когда функция $u = u(x, y)$ монотонно изменяется (возрастает или убывает) в окрестности точки A_1. На рис. 5.5,б показана монотонно убывающая функция при фиксированном значении $x = x_1$: меньшему значению y $(y_1 - \varepsilon_1)$ соответствует большее значение u, большему значению y $(y_1 + \varepsilon_1)$ — меньшее значение u:

$$u(x_1, y_1 - \varepsilon_1) > 0, \quad u(x_1, y_1 + \varepsilon_1) < 0. \tag{5.21}$$

На интервале $[y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1]$, монотонно изменяющаяся функция u меняет знак. Согласно Теореме 3 Больцано-Коши (§ 2.12) найдется такая координата $y \in [y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1]$, в которой $u(x_1, y) = 0$. Такой единственной координатой является y_1. Чтобы в этом убедиться, достаточно в неравенствах (5.21) устремить ε_1 к нулю. В пределе придем к неравенствам:

$$u(x_1, y_1) > 0, \quad u(x_1, y_1) < 0.$$

Одновременное выполнения обоих неравенств приводит к необходимости выполнения равенства $u(x_1, y_1) = 0$. К таким же результатам приведет анализ поведения функции при фиксировании любого значения x из области $[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1]$.

Таким образом, в монотонной функции $u = u(x_1, y)$ при выполнении условия $u(x, y) = 0$ заданному значению $x = x_1$ соответствует единственное значение переменной y, т. е. существует однозначная функция $y = y(x)$ такая, что $y_1 = y(x_1)$. Точка $A_1(x_1, y_1)$ лежит на линии уровня $u(x, y) = 0$, поэтому справедливо тождество $u\,(x_1, y(x_1)) = 0$.

Требование монотонности изменения функции $u = u(x_1, y)$ перекликается с требованием неравенства нулю производной от u по y: $u'_y(x_1, y) \neq 0$.

Аналогичный анализ поведения функции $u(x, y)$ в окрестности точки A_3 приведет к такому же результату.

Рассмотрим лежащую на линии уровня $u(x, y) = 0$ точку A_2, принадлежащую области $(x \geq x_2)$ $D(A_2) = ([x_2, x_2{+}\delta_2]; [y_2{-}\varepsilon_2, y_2{+}\varepsilon_2])$.

Фиксируя значение переменной $x_{21} \in (x_2, x_2{+}\delta_2]$, приходим к уравнению для функции $u = u(x_{21}, y)$, зависящей только от одной переменной y. Эта функция не может быть монотонной на интервале изменения $y \in [y_2 - \varepsilon_2, y_2 + \varepsilon_2]$ при конечных достаточно малых значениях $\varepsilon_2 > 0$. Утверждение следует из того, что внутри интервала имеются по меньшей мере две точки, лежащие на линии уровня и в которых поэтому функция равна нулю. Устремляя к нулю δ_2 приходим к точке (x_2, y_2), в которой прямая $x = x_2$ является касательной к линии уровня и связана со скоростью изменения функции $u = u(x_2, y)$ вдоль этой линии. Так как на линии уровня $u(x, y) = 0$, то $u'_y(x_2, y_2) = 0$.

В окрестности точки (x_2, y_2) условия Теоремы Больцано-Коши не выполняются и не выполняется условие $u'_y \neq 0$. Поэтому нельзя единственным образом выразить y через x.

Обобщим полученные выводы в виде теоремы.

Теорема. *Пусть функция двух переменных* $u = u(x, y)$:

1) *определена и непрерывна по переменным* x *и* y *в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0);

2) *обращается в нуль в точке* (x_0, y_0): $u(x_0, y_0) = 0$;

3) *при постоянном значении* $x = x_0$ *монотонно возрастает* (*или монотонно убывает*) *с ростом* y, *т. е.* $u'_y(x_0) \neq 0$.

Тогда:

а) *в окрестности точки* (x_0, y_0) *уравнение* $u(x, y) = 0$ *определяет* y *как однозначную функцию* x: $y = y(x)$;

б) *при* $x = x_0$ *функция* $y(x_0) = y_0$;

в) *функция* $y(x)$ *непрерывна.*

Условия теоремы удовлетворяются в точках A_1 и A_3, но не удовлетворяются в точке A_2.

Отметим, что при рассмотрении функции $u = u(x, y)$ разницы между переменными x и y не делалось. Поэтому проведенные рассуждения в одинаковой мере относятся к выражению в явном виде переменной x через переменную y. В частности, условия теоремы распространяются на задачу определения явно заданной функции $x = x(y)$ по известной явно заданной функции $y = y(x)$. Обращение функции возможно, если $y'_x \neq 0$.

5.10. Неявно заданные функции нескольких переменных

Рассмотрим скалярную функцию u $n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n,\ y$:

$$u = u(x_1, \ldots, x_n, y) = u(X, y).$$

Записанное уравнение представляет собой гиперповерхность в пространстве $\Re_{n+2}$; $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \Re_n$ — вектор независимых переменных.

Приравняем нулю функцию u:

$$u(x_1, \ldots, x_n, y) = u(X, y) = 0. \tag{5.22}$$

Записанное уравнение представляет собой гиперповерхность уровня пространства $\Re_{n+1}$ переменных X и y. С другой стороны это уравнение можно рассматривать как неявное задание скалярной функции y n переменных X.

Как и в предыдущем параграфе, поставим задачу сформулировать условия, при которых из уравнения (5.22) можно выразить однозначно в явном виде функцию y через переменные X:

$$y = y(x_1, \ldots, x_n) = y(X). \tag{5.23}$$

Функция y должна быть такой, чтобы подстановка (5.23) в (5.22) обращала последнее уравнение в тождество $u\,(X, y(X)) = 0$ в рассматриваемой точке пространства $(n+1)$.

Для формулировки условий существования и единственности функции (5.23) рассмотрим точку (X_0, y_0), лежащую на гиперповерхности уровня (5.22), вместе с окрестностью этой точки,

$$D(X_0, y_0) = ([X_0 - \Delta_0, X_0 + \Delta_0],\ [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]) \subset \Re_{n+1}.$$

Здесь $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T$, $\Delta_0 = (\delta_1^0, \dots, \delta_n^0)^T$.

Дальнейшее исследование поведения функции в окрестности точки (X_0, y_0) повторяет соответствующие исследования для функции одной переменной предыдущего параграфа. Отличие состоит только в том, что вместо фиксации одной переменной $x = x_0$ для функции n переменных фиксируется совокупность координат $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Если функция $u(X_0, y)$ монотонная в окрестности точки (X_0, y_0) и, следовательно, изменяет знак при переходе от точки с координатой $y_0 - \varepsilon_0$ к точке с координатой $y_0 + \varepsilon_0$, то согласно теореме Больцано-Коши в интервале $[y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$ имеется единственная точка $y = y_0$, где функция $u(X_0, y)$ обращается в нуль.

Таким образом, принципиальных отличий в установлении условий существования и единственности неявно заданных скалярных функций y одной и нескольких переменных не существует. Соответствующая теорема для функции нескольких переменных также во многом повторяет формулировку теоремы предыдущего параграфа. Не приводя формулировки теоремы, подчеркнем лишь, что для обеспечения единственности функции y необходимо выполнение требования монотонности изменения функции одной переменной $u = u(X_0, y)$. Это равноценно требованию неравенства нулю производной: $u'_y(X_0, y) \neq 0$.

Рассмотрим общий случай задания системы m уравнений, соответствующих неявному заданию m функций $y_1, \dots, y_m$, зависящих от n переменных $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} u_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{5.24}$$

Вводя обозначения для векторов $U=(u_1, \dots, u_m)^T$, $Y=(y_1, \dots, y_m)^T$ и $X=(x_1, \dots, x_n)^T$, систему уравнений перепишем в компактном виде:

$$U(X, Y) = \Theta. \tag{5.25}$$

Задача состоит в формулировке условий существования и единственности определения в явном виде зависимостей

$$Y = Y(X), \tag{5.26}$$

где $Y = (y_1, \ldots, y_m)^T$, таких, которые обращают в тождество векторное равенство

$$U\left(X, Y(X)\right) = \Theta.$$

Прежде, чем сформулировать соответствующую теорему, введем новое понятие.

Функциональной матрицей первых производных называется матрица, элементы которой представляют собой совокупность первых производных координат одного вектора $U \in \Re_m$ по координатам другого вектора $X \in \Re_n$ $(i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, n})$:

$$\frac{dU}{dX} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}. \end{pmatrix}$$

Важной характеристикой квадратной $(m = n)$ функциональной матрицы первых производных является ее определитель:

$$J = \det\frac{dU}{dX} = \det\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \tag{5.27}$$

называемый *функциональным определителем Якоби*, или *якобианом* (Jacobi Carl Gustav, 1804–1851, немецкий математик).

Не останавливаясь на обосновании роли функциональных определителей в задачах установления условий существования и единственности неявно заданных функций нескольких переменных, отметим, что якобиан в этих задачах играет ту же роль, что и производная от функции u по переменной x в неявно заданных функциях одной переменной.

Отсылая читателя за доказательством к специальной литературе, приведем формулировку следующей теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что у вектор-функции* $U = U(X, Y)$ $\left(U = (u_1, \ldots, u_m)^T,\ X = (x_1, \ldots, x_n)^T,\ Y = (y_1, \ldots, y_m)^T\right)$:

1) *все функции* u_k $(k = \overline{1, m})$ *определены и непрерывны по переменным* X *и* Y *в некоторой области* Ω_{m+n}, *окаймляющей точку* $A_0(X_0, Y_0)$;

2) *координаты* (X_0, Y_0) *точки* A_0 *удовлетворяют векторному уравнению* $U(X, Y) = \Theta$;

3) *в точке* A_0 *якобиан не равен нулю* $J(A_0) = \det \dfrac{dU}{dY}\Big|_{A_0} \neq 0.$

Тогда в окрестности точки A_0

а) *уравнение* (5.25) $\big($*система уравнений* (5.24)$\big)$ *определяет* Y *как однозначную функцию* X:

$$Y = Y(X) \quad \text{или} \quad y_k = y_k(x_1, \ldots, x_n) \ \ (k = \overline{1, m});$$

б) *при* $X = X_0$ *функция* $Y(X)$ *принимает значение* Y_0:

$$Y(X_0) = Y_0 \quad \text{или} \quad y_k(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_k^0 \ \ (k = \overline{1, m});$$

в) *функции* $Y(X) \quad \big(y_k(x_1, \ldots, x_n), \ \ (k = \overline{1, m})\big)$ *непрерывны.*

С задачей установления единственности неявно заданных функций перекликается задача отыскания обратных функций. Действительно, рассмотрим матричное уравнение (5.26)

$$Y = Y(X),$$

которое очевидным образом преобразуется к уравнению (5.25)

$$U(X, Y) = Y - Y(X) = \Theta.$$

В последнем уравнении X имеет единственное значение в некоторой точке X_0, если в этой точке $J(X_0) = \dfrac{dU}{dX}\Big|_{X_0} = \dfrac{dY(X)}{dX}\Big|_{X_0} \neq 0.$

Приведем без доказательства теорему о существовании обратной функции $\big(Y(X) = (y_1(X), \ldots, y_n(X))^T, \ X = (x_1, \ldots, x_n)^T\big)$.

Теорема 2. *Пусть* $Y(X)$ *в области* $\Omega \subset \Re_n$ *непрерывно дифференцируемая функция и пусть в некоторой точке* $X_0 \in \Omega$ *якобиан* (5.27) $J(X_0) \neq 0$. *Тогда существует окрестность точки* X_0, *которая функцией* Y *однозначно отображается на некоторую окрестность точки* $Y(X_0)$. *При этом в окрестности указанной точки* $Y(X_0)$ *существует обратная по отношению к* $Y(X)$ *функция.*

Повторим сказанное, представив выписанные соотношения в координатной форме.

Если для системы алгебраических уравнений

$$y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = \overline{1, n})$$

в некоторой точке $X_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$

$$J(X_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{X_0} \neq 0,$$

то в окрестности точки $Y_0 = Y(X_0)$ существуют непрерывно дифференцируемые функции $x_k(y_1, \dots, y_n)$ такие, что

$$x_k = x_k(y_1, \dots, y_n) \qquad (k = \overline{1, n}).$$

Пример. Задана зависимость $Y = \dfrac{dY}{dX}X$ между векторами $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha, \\ y_2 = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Определив все частные производные координат вектора Y по координатам вектора X, построим и вычислим значение якобиана:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0.$$

Якобиан равен единице при всех значениях переменных (исходная система уравнений линейная). Поэтому в окрестности любых точек пространства $\Re_3$ можно получить зависимости, обратные по отношению к исходным $X = \left(\dfrac{dY}{dX}\right)^{-1} Y$. Для этого достаточно обратить ортонормированную матрицу $\dfrac{dY}{dX}$. Соответствующие зависимости были получены при рассмотрении преобразования поворота систем координат:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, \\ x_2 = y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

5.11. Формула Тейлора. Квадратичные формы

Полученная в § 4.3 формула (4.13) разложения функции одной переменной в ряд Тейлора формально обобщается на функцию нескольких переменных $u = u(X) = u(x_1, \dots, x_n)$. Для приращения Δx функции $u = u(X)$ в окрестности точки $X_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ справедлива формула Тейлора:

$$\Delta u = u(X) - u(X_0) = \frac{du(X_0)}{1!} + \frac{d^2u(X_0)}{2!} + \dots$$

$$+\frac{d^n u(X_0)}{n!} + R_n\big(d^{n+1}u(X_0)\big). \tag{5.28}$$

Здесь:

$du(X) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1} \ \dots \ \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k =$ – первый дифференциал функции u;

$$d^2u(X) = (dx_1 \ \dots \ dx_n)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} =$$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_r} dx_k dx_r$ – второй дифференциал функции u;

$R_n\big(d^{n+1}u(X_0)\big)$ — ошибка ограничения функции суммой n слагаемых ряда Тейлора. Для сходящегося ряда эта ошибка не превосходит дифференциал n-го порядка от функции $u(X)$ в точке $X_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

В выражение для второго дифференциала входит *функциональная матрица вторых производных*, называемая *матрицей Гессе*. Элементами этой матрицы являются вторые частные производные от скалярной функции нескольких переменных $u = u(X) = u(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\frac{d^2u}{dX^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Определитель записанной матрицы называется *функциональным определителем матрицы Гессе.*

Дифференциал второго порядка представляет собой *квадратичную форму* относительно $dX = (dx_1, \ldots, dx_n)^T$ с коэффициентами, определяемыми матрицей вторых производных.

Рассмотрим квадратичную форму $K = K(X)$ для вектора X, представляющего собой совокупность декартовых ортогональных координат в $\Re_n$: $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Коэффициенты квадратичной формы образуют квадратную матрицу $A = \big(a_{kr}\big)$ $(k, r = \overline{1, n})$:

$$K(X) = X^T A X = (x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + \ldots + a_{nn}x_n^2.$$

В выражениях для квадратичных форм матрицу A всегда можно сделать симметричной. Утверждение следует из равенств:

$$a_{kr}x_kx_r + a_{rk}x_rx_k = (a_{kr} + a_{rk})x_kx_r = 2\tilde{a}_{kr}x_kx_r = 2\tilde{a}_{rk}x_rx_k, \longrightarrow \tilde{a}_{kr} = \tilde{a}_{rk}.$$

Известно [3], что путем преобразования координат $x_1, \ldots, x_n$ квадратичную форму можно привести к каноническому виду

$$K = \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n\tilde{x}_n^2. \tag{5.29}$$

Операция осуществляется матрицей преобразования поворота:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица ортогональна, т. е. $S^T = S^{-1}$. С ее помощью вектор координат исходного базиса $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ преобразуются в вектор собственных координат $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$, а матрица A коэффициентов квадратичной формы — к матрице собственных значений

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}:$$

$$\tilde{X} = S^{-1}X,\ \tilde{X}^T = X^T S, \quad \tilde{A} = S^{-1}AS,\ A = S\tilde{A}S^T.$$

При этом структура записи квадратичной формы в разных базисах остается неизменной:

$$K = \tilde{X}^T \tilde{A} \tilde{X} = X^T S \tilde{A} S^T X = X^T A X.$$

В базисе собственных значений квадратичная форма содержит только квадраты переменных (5.29).

Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если при любых значениях переменных $K > 0$, и *отрицательно определенной*, если $K < 0$. Если при разных значениях координат знак K может изменяться, то квадратичная форма не имеет определенного знака.

Ясно, что $K > 0$, если в (5.29) все $\lambda_i > 0$ и $K < 0$, если все $\lambda_i < 0$ $(i = \overline{1, n})$.

Теорема 1. *Если квадратичная форма положительно определена, то соответствующее ей квадратное уравнение описывает выпуклую функцию, если отрицательно определена, то вогнутую.*

Справедливость теоремы доказывается по аналогии с доказательством выпуклости функции одной переменной. Разница состоит в том, что анализ проводится для вторых производных по всем переменным.

Положительность (отрицательность) квадратичной формы устанавливается по знакам главных миноров матрицы A без ее приведения к собственным значениям.

Главным k-м минором M_k $(k = \overline{1, n})$ квадратной матрицы n-го порядка $(k \le n)$ называется определитель матрицы, стоящий на пересечении ее k первых строк и k первых столбцов.

Приведем сформулированную и доказанную Сильвестром теорему (Sylvester James, 1814–1897, английский математик).

Теорема 2 *Если все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны, то квадратичная форма положительно определена. Если знаки главных миноров чередуются, причем* $\operatorname{sign} M_k = (-1)^k$, *то квадратичная форма определена отрицательно.*

Пример. Для квадратичной формы $K = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$ матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ положительно определена, так как $M_1 = 1 > 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0$.

Для квадратичной формы $-K = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2$ матрица $-A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ отрицательно определена, так как $M_1 = -1 < 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 > 0$.

5.12. Локальные экстремумы функции нескольких переменных

Описанный в § § 4.6 и 4.7 процесс определения экстремума функции одной переменной обобщим на функции n переменных, представляющих собой координаты вектора $X^T = (x_1, \ldots, x_n) \subset \Re_n$.

Пусть функция $u = u(X) = u(x_1, \ldots, x_n)$ определена и дифференцируема требуемое число раз в некоторой области $\Omega \subset \Re_n$.

Точка X_0, определяемая радиусом-вектором $X_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$, называется точкой *локального максимума* (*локального минимума*) функции $u(X)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется условие:

$$u(X_0) \geq u(X) = u(X_0 + \mu \Delta X) \quad \big(u(X_0) \leq u(X) = u(X_0 + \mu \Delta X)\big). \tag{5.30}$$

Множитель μ представляет собой произвольное положительное число, а вектор $\Delta X^T = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = dX^T$ $(\Delta x_i = x_i - x_i^0 = dx_i,\ i = \overline{1, n})$ характеризует изменение вектора X по величине и направлению.

Считая функцию $u(X)$ непрерывной и дифференцируемой не менее, чем дважды, по каждому из своих аргументов x_i $(i = \overline{1, n})$, разложим ее в ряд Тейлора (5.28) в окрестности точки X_0:

$$u(X_0 + \mu \Delta X) = u(X_0) + \mu \frac{du}{dX}\bigg|_{X_0} \Delta X +$$

$$+\frac{1}{2!}\mu^2(\Delta X)^T \left.\frac{d^2u}{dX^2}\right|_{X_0}\Delta X + \mu^3 R_2(d^3\,u(X_0)). \tag{5.31}$$

Второе слагаемое ряда Тейлора представляет собой произведение множителя μ на дифференциал du функции u:

$$du = \frac{du}{dX}\Delta X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n,$$

заданный в точке $X = X_0$.

Отметим, что множитель μ делает члены ряда Тейлора по модулю независимыми от углов между векторами, образующими скалярное произведение.

В третьем слагаемом ряда присутствует квадратная матрица Гессе (функциональная матрица второго порядка). Так что

$$d^2u = (\Delta X)^T \frac{d^2u}{dX^2}\Delta X =$$

$$= (\Delta x_1 \ \dots \ \Delta x_n) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Delta x_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Delta x_n^2.$$

Последнее слагаемое ряда Тейлора определяет его остаток $R_2(d^3\,u(X_0))$.

Перенесем первое слагаемое правой части равенства (5.31) в его левую часть. Если точка X_0 соответствует локальному максимуму (для определенности) функции $u(X)$, то из первого неравенства (5.30) следует

$$u(X_0 + \mu\Delta X) - u(X_0) \le 0.$$

При этом оставшаяся справа часть ряда (5.31) также не должна быть положительной:

$$\mu\left.\frac{du}{dX}\right|_{X_0}\Delta X + \frac{1}{2!}\mu^2(\Delta X)^T \left.\frac{d^2u}{dX^2}\right|_{X_0}\Delta X + \mu^3 R_2(d^3u(X_0)) \le 0. \tag{5.32}$$

Разделим полученное неравенство на положительное число μ. При $\mu \to 0$ придем к неравенству:

$$\left.\frac{du}{dX}\right|_{X_0} \Delta X \leq 0.$$

Неравенство представляет собой скалярное произведение вектора-градиента, характеризуемого матрицей-строкой $\left.\frac{du}{dX}\right|_{X_0}$, и вектора, характеризуемого вектором-столбцом ΔX. При произвольности направления ΔX неравенство может выполняться только при условии

$$\nabla u(X_0) = \left.\frac{du}{dX}\right|_{X_0} = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right|_{X_0} = \Theta. \tag{5.33}$$

Равенство (5.33), называемое *условием первого порядка*, является необходимым (но не достаточным) условием существования локального экстремума функции n переменных. Условие не определяет характер экстремума и не гарантирует его существование.

Итак, *необходимым условием* существования локального экстремума в точке области допустимых значений функции нескольких переменных является равенство нулю градиента (всех координат вектора-градиента) функции в этой точке.

Точки, в которых выполняются необходимые условия существования экстремума, называются *критическими* или *стационарными.*

Продолжим анализ соотношения (5.32). При выполнении (5.33) оно примет вид

$$\frac{1}{2!}\mu^2(\Delta X)^T \left.\frac{d^2u}{dX^2}\right|_{X_0} \Delta X + \mu^3 R_2(d^3u(X_0)) \leq 0.$$

Разделим выписанное неравенство на положительное число $\mu^2/2$ и устремим μ к нулю. Второе слагаемое полученного неравенства при этом обратится в нуль (будет содержать множитель $\mu \to 0$). В результате придем к *условию второго порядка*:

$$(\Delta X)^T \left.\frac{d^2u}{dX^2}\right|_{X_0} \Delta X \leq 0. \tag{5.34}$$

Условие указывает на то, что квадратичная форма должна быть отрицательно полуопределенной (определенной при строгом неравенстве) для случая определения локального максимума функции n переменных.

При рассмотрении задачи определения локального минимума функции знак неравенства в условии второго порядка (5.34) сменится на противоположный. То есть в этом случае квадратичная форма должна быть положительной полуопределеной.

Напомним, что знакоопределенность квадратичной формы устанавливается по знакам главных миноров матрицы вторых производных $\dfrac{d^2u}{dX^2}$ в стационарной точке $X_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Прокомментируем полученные результаты для частного случая функции двух переменных $u = u(x, y)$.

На рис. 5.6,а изображены точки координатной плоскости: в точке A функция двух переменных имеет локальный минимум, в точке B — локальный максимум.

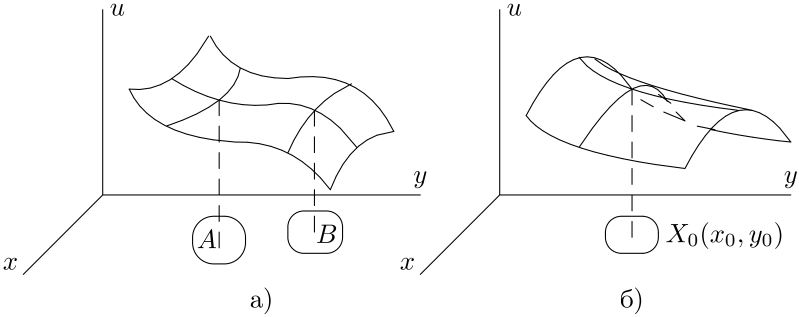


Рис. 5.6. Критические точки функций двух переменных

Градиент — это вектор, ортогональный линии уровня. Но в точках, где функция имеет локальные максимумы или минимумы, линия уровня стягивается в точку (плоскость, параллельная плоскости переменных x и y и проходящая через стационарные точки, касается поверхности, изображающей функцию, в этой точке). Сказанное приводит к выводу о том, что в стационарных точках производные от функции двух переменных по любому направлению, параллельному координатной плоскости (не только вдоль координатных линий), равны нулю.

То, что равенство нулю частных производных выражает лишь необходимое, но не достаточное условие существования экстремума, иллюстрирует выпукло-вогнутая поверхность, изображенная на рис. 5.6,б. В стационарной точке с координатами (x_0, y_0) этой поверхности вдоль координаты x (при фиксированном y) имеет место максимум, а вдоль координаты y (при фиксированном x) — минимум. Это так называемая *седловая точка.*

Достаточное условие существования локального экстремума функции двух переменных получается в результате анализа матрицы Гессе

$$\left.\frac{d^2u}{dX^2}\right|_{X_0} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

где

$$A = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}; \quad B = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}; \quad C = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

Запишем условия теоремы Сильвестра.

Если знаки обоих главных миноров матрицы Гессе положительны

$$M_1 = A > 0 \text{ и } M_2 = \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0,$$

то квадратичная форма в ряде Тейлора положительно определена и в стационарной точке функция $u(x_0, y_0)$ принимает минимальное значение. Если же $M_1 = A < 0$, а $M_2 = \Delta > 0$, то в стационарной точке функция принимает максимальное значение.

Пример. Найти экстремумы функции:

$$u = \frac{2(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Р е ш е н и е.

1. Находим частные производные:

$$u'_x = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}; \qquad u'_y = \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

2. Приравнивая частные производные нулю, записываем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} &= 0, \\ \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} &= 0. \end{cases}$$

Система имеет четыре решения (четыре стационарных точки): $(1,\ 1)$, $(1,-1)$, $(-1,\ 1)$ и $(-1,-1)$, в правильности определения которых можно убедиться подстановкой их координат в систему.

3. Находим все частные производные второго порядка:

$$u''_{xx} = -\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}; \qquad u''_{xy} = u''_{yx} = 0; \qquad u''_{yy} = -\frac{4y(y^2-3)}{(1+y^2)^3}$$

и их значения в стационарных точках.

Для точки $(1,\ 1)$: $A = u''_{xx}(1,1) = -\dfrac{4\cdot 1(1^2-3)}{(1+1^2)^3} = -1$; $B = 0$; $C = -1$. Так как $\Delta = AC - B^2 = (-1)^2 - 0 = 1 > 0$ и $A = -1 < 0$, то точка $(1,\ 1)$ является точкой максимума функции.

Аналогично устанавливаем, что $(-1,-1)$ — точка минимума ($\Delta > 0$, $A = 1 > 0$), а в оставшихся двух точках, где $\Delta = 0$, экстремума нет. Эти точки — седловые.

4. Находим экстремумы функции:

$$u_{\max} = u(1,1) = 2; \qquad u_{\min} = u(-1,-1) = -2.$$

5.13. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных

Выше описан метод определения локальных экстремумов дифференцируемых функций n и, в частности, двух переменных. Для того чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции в области задания переменной X, включающей границу области, необходимо сравнить между собой все локальные экстремумы функции внутри области и экстремальные значения функции на ее границе.

В экономике задачам отыскания экстремумов функций нескольких переменных уделяется исключительно большое внимание. В последнее время сформирован самостоятельный раздел математики, называемый «*Исследование операций*», который призван облечь в математические модели сложные процессы, происходящие в реальном мире, в том числе в управлении и экономике.

Факт существования наибольшего и наименьшего значений функции (глобальных максимума и минимума) утверждает следующая теорема.

Теорема Вейерштрасса. *Пусть функция $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна в окрестности некоторой ограниченной замкну-*

той (включающей граничные точки) области $\Omega \subset \Re_n$ *и имеет в этой области (за исключением, возможно, некоторых точек) конечные частные производные по всем переменным. Тогда внутри или на границе этой области найдется точка* $M(x_1^*, \ldots, x_n^*)$, *в которой функция принимает наибольшее (наименьшее) из всех значений.*

Своего наибольшего (наименьшего) значения в некоторой замкнутой области Ω определения функции $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ эта функция может достигнуть или во внутренней точке Ω, или на ее границе. Поэтому для определения наибольшего (наименьшего) значения функции в области Ω следует найти все внутренние точки, «подозрительные» на экстремум, вычислить в них значения функции и сравнить эти значения с экстремальными значениями функции на границе Ω. Наибольшее (наименьшее) из этих значений и будут наибольшим (наименьшим) значением функции в замкнутой области Ω.

Поясним сказанное на конкретном примере функции двух переменных.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$u(x_1, x_2) = 4(x_1-1)^2+(x_2-0{,}5)^2 \quad (5.35)$$

в области, ограниченной прямыми (рис. 5.7):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

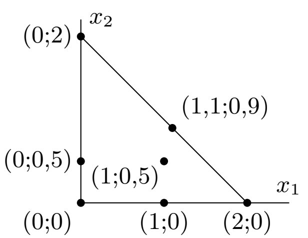


Рис. 5.7. Область Ω

Р е ш е н и е. Функция u определена на $\Re_2$ и в области $\Omega \in \Re_2$, ограниченной осями координат и прямой (5.36), изображенной на рис. 5.7. Наибольшее и наименьшее значения функции следует выбрать, сравнивая значения локальных экстремумов функции во внутренних точках области Ω с ее экстремальными значениями на границах области.

1. Начнем решение задачи с определения локального экстремума, следуя методике, описанной в § 5.12.

Найдем и приравняем нулю частные производные от функции u по обеим переменным (координаты вектора-градиента функции):

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 8(x_1 - 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad x_1^* = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2(x_2 - 0{,}5) = 0 \quad \longrightarrow \quad x_2^* = 0{,}5.$$

Из необходимого признака существования экстремума следует, что точка (1; 0,5) может быть точкой локального экстремума функции.

Обратимся к достаточному признаку. Для этого составим матрицу вторых производных (матрицу Гессе):

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица не зависит от координат. Поэтому ее определитель и главные миноры во всей области $\Re_2$, где функция определена, и, в частности, в области Ω, не изменяются:

$$\det\, G = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad M_1 = 8 > 0, \quad M_2 = \det\, G = 16 > 0.$$

Полученные значения говорят о том, что квадратичная форма, определяющая функцию $u(x_1, x_2)$, положительно определена в области Ω. Это означает, что во всей рассматриваемой области функция выпукла и, следовательно, точка $(1; 0{,}5) \in \Omega$ является точкой локального минимума: $u_{\min} = u(1; 0{,}5) = 0$.

2. Определим экстремальные значения функции на границе области Ω, являющейся отрезком $x_1 \in [0; 2]$ координатной прямой x_1. Уравнение прямой $x_2 = 0$.

Подставляя это значение x_2 в выражение (5.35), получим функцию, зависящую только от переменной x_1:

$$u(x_1) = 4(x_1 - 1)^2 + (0 - 0{,}5)^2 = 4x_1^2 - 8x_1 + \frac{17}{4}. \tag{5.37}$$

Найдем и приравняем нулю производную от этой функции по единственной переменной x_1:

$$u'(x_1) = 8x_1 - 8 = 0, \quad \longrightarrow \quad x_1^* = 1.$$

Так как вторая производная от функции в найденной точке положительна ($u''(x_1) = 8$), то функция принимает минимальное значение

$$u_{\min}|_{x_2=0} = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + \frac{17}{4} = \frac{1}{4}.$$

Такое же значение функции получается, если в выражение (5.35) подставить координаты точки (1; 0):

$$u(1;0) = 4(1-1)^2 + (0-0{,}5)^2 = \frac{1}{4}.$$

3. По аналогии с пунктом 2 определим экстремальное значение функции на границе $x_1 = 0$, соответствующей отрезку оси ординат $x_2 \in [0,2] \subset \Omega$:

$$u(x_2) = 4(0-1)^2 + (x_2-0{,}5)^2 = x_2^2 - x_2 + \frac{17}{4}; \tag{5.38}$$

$$u'(x_2) = 2x_2 - 1 = 0, \quad \longrightarrow \quad x_2^* = 0{,}5;$$

$$u''(x_2) = 2 > 0 \quad \longrightarrow \quad u_{\min}|_{x_1=0} = u(0;0{,}5) = (0{,}5)^2 - 0{,}5 + \frac{17}{4} = 4.$$

4. Перейдем к последнему участку границы Ω, соответствующему отрезку прямой $x_1 + x_2 = 2$, заключенному между точками (2; 0) и (0; 2).

Из уравнения прямой выразим в явном виде любую из переменных, например,

$$x_2 = 2 - x_1,$$

и подставим полученное выражение в (5.35). Придем к функции одной переменной

$$u(x_1) = 4(x_1-1)^2 + (2-x_1-0{,}5)^2 = 5x_1^2 - 11x_1 + \frac{25}{4}. \tag{5.39}$$

Для определения экстремума полученной функции одной переменной обратимся с необходимому и достаточному условиям его существования:

$$u'(x_1) = 10x_1 - 11 = 0, \longrightarrow x_1^* = 1{,}1;$$

$$u''(x_1)=10>0 \longrightarrow u_{\min}|_{x_2=2-x_1}=u(1{,}1;0{,}9)=5\cdot(1{,}1)^2-11\cdot1{,}1+\frac{25}{4}=0{,}2.$$

Все стационарные точки области Ω являются точками локальных минимумов. Выберем из них наименьшее:

$$\min(u_{\min}) = \min\{u(1;0{,}5); u(1;0); u(0;0{,}5); u(1{,}1;0{,}9)\} =$$

$$= \{0; 0{,}25; 4; 0{,}2\} = 0 = u(1;\ 0{,}5).$$

Так как функция $u(x_1; x_2)$ монотонно возрастает с ростом координат, принимая наименьшее значение в точке $(1; 0{,}5)$, то следует ожидать, что наибольшего своего значения в области Ω она достигнет в угловых точках границы.

Найдем эти значения:

$$u(0;0)=4(0-1)^2+(0-0{,}5)^2=4{,}25; \quad u(2;0)=4(2-1)^2+(0-0{,}5)^2=4{,}25;$$

$$u(0;2) = 4(0-1)^2 + (2-0{,}5)^2 = 6{,}25.$$

Выберем из полученных значений наибольшее:

$$\max(u_{\max}) = \max\{u(0;0); u(2;0); u(0;2)\} =$$
$$= \max\{4{,}25; 4{,}25; 6{,}25\} = 6{,}25 = u(0;2).$$

5.14. Условный экстремум

Рассмотренную в § 5.13 задачу отыскания наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных можно трактовать как задачу отыскания экстремума функции (5.35) при накладываемых на изменение ее переменных ограничениях (5.36). Такие задачи называются задачами на отыскание *условного экстремума*.

В отличие от рассмотренных в § 5.13 задач определения наибольших (наименьших) значений функции в области Ω, включая (в общем случае) и ее границы, при отыскании условных экстремумов рассматриваются значения функции только на множестве, определяемом некоторыми условиями.

Для примера, рассмотренного в § 5.13, условными экстремумами заданной функции, например, будут:
при условии $x_2 = 0$

$$u_{\min}\Big|_{x_2=0} = 0{,}25, \quad u_{\max}\Big|_{x_2=0} = 4{,}25;$$

при условии $x_1 + x_2 = 2$

$$u_{\min}\Big|_{x_1+x_2=2} = 0{,}2, \quad u_{\max}\Big|_{x_1+x_2=2} = 6{,}25.$$

В рассмотренном примере из ограничения удалось выразить в явном виде одну из независимых переменных. Подстановка найденного выражения в функцию цели позволила свести задачу отыскания условного экстремума функции двух переменных (наибольшего и наименьшего значений функции на границах области Ω) к отысканию безусловного экстремума функции одной переменной: формула (5.37) — для x_1 и (5.38) — для x_2.

Обобщим результаты упомянутого примера на общий случай m ограничений (условий).

Рассмотрим пространство $\Re_n$ и связанную с ним декартову ортогональную систему координат, определяемую вектором $X^T{=}(x_1,\ldots,x_n)$.

Пусть требуется найти экстремум функции

$$u(X) = u(x_1,\ldots,x_m,x_{n-m+1},\ldots,x_n) \tag{5.40}$$

при условиях

$$g_i(X) = b_i, \quad (i = \overline{1,m}, \quad m \leq n). \tag{5.41}$$

Для удобства дальнейшего изложения наряду с записью (5.41) условий задачи будем использовать их матричное представление:

$$B - G(X) = \Theta. \tag{5.42}$$

Слагаемые в этой записи представляют собой векторы — совокупности m координат:

$$B = (b_1,\ldots,b_m)^T; \quad G(X) =\big(g_1(X),\ldots,g_m(X)\big)^T; \quad \Theta = (0,\ldots,0)^T.$$

Точка $X^*(x_1^*,\ldots,x_n^*)^T$ называется *точкой условного экстремума* (максимума или минимума), если существует такая окрестность точки, что для всех X из этой окрестности, удовлетворяющих равенствам (5.42), выполняются неравенства

$$u(X^*) \geq u(X) \quad \text{или} \quad u(X^*) \leq u(X).$$

Если ранг матрицы первых производных $\dfrac{dG}{dX} = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)$ $(i = \overline{1,m};$ $k = \overline{1,n})$ в окрестности некоторой точки X_0 из области определения функций (5.41) равен m:

$$\operatorname{rang}\frac{dG}{dX}\bigg|_{X_0} = \operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)\bigg|_{X_0} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{X_0} = m,$$

то, как говорилось в §5.10, из соотношений (5.41) можно, в принципе, выразить в явном виде m неизвестных (например, x_1, ..., x_m) через остальные $n-m$ неизвестных (x_{n-m+1}, ..., x_n):

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{n-m+1}, \dots, x_n); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m = f_m(x_{n-m+1}, \dots, x_n). \end{cases} \tag{5.43}$$

После подстановки (5.43) в (5.40) задача отыскания условного экстремума сведется к задаче отыскания безусловного экстремума функции $n-m$ переменных:

$$u = \tilde{u}(x_{n-m+1}, \dots, x_n). \tag{5.44}$$

Представление (5.43) части переменных через оставшиеся во многих случаях отыскания условных экстремумов функций нескольких переменных является непростой задачей, особенно если ограничения задаются в виде трансцендентных (неалгебраических: логарифмических, тригонометрических ...и обратных к ним) функций.

5.15. Множители Лагранжа

Лагранж предложил универсальный метод решения задач определения условных экстремумов, который позволяет обойти упомянутые трудности. Метод Лагранжа заключается в следующем.

Вводится скалярная функция $\Lambda(X, Y)$ n основных переменных $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ и m переменных $Y = (y_1, \dots, y_m)^T$, называемых *множителями Лагранжа*:

$$\Lambda(X, Y) = u(X) + Y^T(B - G(X)). \tag{5.45}$$

Или в координатной форме:

$$\Lambda(X, Y) = u(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i \big(b_i - g_i(x_1, \dots, x_n)\big).$$

Теорема. *Если точка $X^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ является точкой условного экстремума функции $u(X)$ при условии $B - G(X) = \Theta$, то существует вектор Y^* такой, что точка (X^*, Y^*) является точкой экстремума функции $\Lambda(X, Y)$.*

Необходимыми условиями существования экстремума функции нескольких переменных, как было показано в § 5.12, является равенство нулю градиента функции. Это приводит к векторным равенствам:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial X} = \frac{\partial u(X)}{\partial X} - Y^T\frac{\partial G}{\partial X} = \Theta;$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial Y} = B - G(X) = \Theta.$$

В координатной форме равенства превращаются в систему $n+m$ уравнений с n переменными x_k и m переменными y_i:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_k} - \sum\limits_{i=1}^{m} y_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k} = 0 \quad (k=\overline{1,n}); \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial y_i} = b_i - g_i(X) = 0 \quad (i=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{5.46}$$

Вторая группа уравнений (5.46) повторяет уравнения (5.41).

Пример 1. Обратимся к примеру § 5.13.

С использованием функции Лагранжа найти экстремум функции

$$u(x_1,x_2) = 4(x_1-1)^2 + (x_2-0{,}5)^2$$

при условии

$$2 - x_1 - x_2 = 0.$$

Для определения условного экстремума составим функцию Лагранжа:

$$\Lambda(x_1,x_2,y) = 4(x_1-1)^2 + (x_2-0{,}5)^2 + y(2-x_1-x_2).$$

Найдем и приравняем нулю частные производные от функции Лагранжа по всем координатам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_1} = 8(x_1-1) - y = 0; \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_2} = 2(x_2-0{,}5) - y = 0; \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial y} = 2 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Исключая y из первых двух уравнений, получим

$$8x_1 - 2x_2 = 7.$$

Вместе с последним уравнением системы, повторяющим условие исходной задачи, это уравнение приводит к искомым значениям переменных:

$$x_1^* = 1{,}1; \qquad x_2^* = 0{,}9.$$

Решение, как следовало ожидать, совпадает с решением этой задачи, полученным в § 5.13 методом исключения переменных.

Пример 2. В управлении запасами предприятий важнейшей задачей является определение оптимальной партии товара, которую следует хранить в складских помещениях. Известны следующие характеристики товара и процессов предприятия и поставщика:

- годовая потребность предприятия в товаре B;
- стоимость хранения единицы товара на складе c_p;
- стоимость оформления и доставки одной партии товара на склад c_o;
- расход товара в производственном процессе предприятия равномерный по времени;
- поставщик доставляет заказанный товар на склад без задержек по первому требованию предприятия.

Требуется определить:

- оптимальное количество q товара, поставляемого на предприятие в одной партии;
- годовое количество n поставок;
- общую стоимость хранения и доставки товара на склад.

Р е ш е н и е. График изменения количества товара на складах предприятия представляет собой пилообразную функцию с периодом, равным времени расхода одной партии товара. Этот период равен N/n, где N – количество дней в году. На каждом периоде текущее количество товара на складе определяется функцией, изменяющейся по линейному закону (равномерное расходование товара предприятием) от своего максимального значения q до нуля. Задел предприятию не нужен, так как поставщик доставляет товар без промедления по первому требованию предприятия.

Сказанное позволяет определить среднее количество товара, хранящегося на складе: $(q + 0)/2 = q/2$.

Общая годовая стоимость поставки и хранения товара на складе

$$C = c_p \frac{q}{2} + c_o n.$$

Эта стоимость должна быть определена при условии, что годовая потребность предприятия в товаре равна B:

$$nq = B.$$

Таким образом, поставленная задача свелась к определению минимального значения функции $C(n,q)$ при условии $B - nq = 0$.

Составим функцию Лагранжа:

$$\Lambda(n,q,y) = c_p\frac{q}{2} + c_o n + y(B - nq).$$

Найдем и приравняем нулю производные от функции Лагранжа по всем переменным:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Lambda}{\partial q} = \dfrac{c_p}{2} - ny = 0; \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial n} = c_o - qy = 0; \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial y} = B - nq = 0. \end{cases}$$

Записанной системе уравнений соответствуют две пары решений. Из них выбираем только положительные:

$$n^* = \sqrt{\frac{c_p}{2c_o}B}; \qquad q^* = \sqrt{\frac{2c_o}{c_p}B}.$$

При этих значениях переменных

$$C^* = c_p q^*/2 + c_o n^*.$$

Ответить на вопрос о том, что собой представляет найденное решение (минимум или максимум), с помощью матрицы вторых производных невозможно — вторые производные функции по обеим переменным равны нулю.

Проанализируем поведение функции $C(n,q)$ по отношению к условию $nq = B$. При фиксированном B ограничение представляет собой гиперболу с асимптотами $n = 0$ и $q = 0$, расположенную в первой координатной четверти. Функция $C(n,q)$ линейная, монотонно возрастающая при росте n и q. Ее минимальное значение соответствует точке касания одной из ее линий уровня $C = C^*$ кривой $nq = B$. Следовательно, $\min\ C = C^*$.

5.16. Симплексный метод поиска экстремума

Перейдем к рассмотрению методов приближенного вычисления экстремумов функций нескольких переменных. Для простоты и наглядности изложения материала ограничимся функцией двух переменных.

Одним из простейших методов поиска экстремума является метод симплексов (от англ. *simple* — простой).

Регулярный симплекс в двухмерном пространстве представляет собой равносторонний треугольник (в трехмерном пространстве — правильный тетраэдр).

Симплексный метод заключается в следующем.

Предположим, что некоторая непрерывная (условия дифференцируемости не требуется) функция двух переменных $u = u(x, y)$ имеет локальный экстремум в некоторой точке $M_*(x_*, y_*)$.

Рассмотрим на координатной плоскости xy проекцию области функции $u(x, y)$, прилегающую к точке M_*. На рис. 5.8 показаны симплексы, координаты которых соответствуют разобранному в конце параграфа примеру.

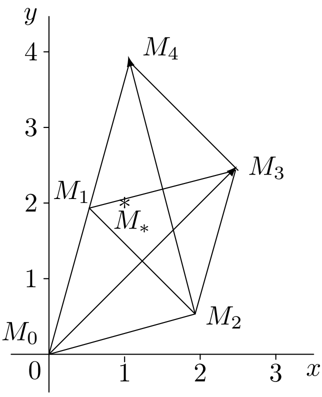


Рис. 5.8. Симплексный метод

В произвольно выбранной точке M_0 области определения функции строится исходный равносторонний треугольник $M_0M_1M_2$ — первый симплекс. О способе построения симплексов будет сказано ниже.

Определяются значения функции $u(x, y)$ в каждой из вершин построенного треугольника. При определении локального минимума (максимума) для точки вершины, в которой функция имеет наибольшее (наименьшее) из трех вершин значение функции (пусть это будет M_0), определяется симметричная ей относительно прямой M_1M_2 точка M_3. Точки M_1, M_2 и M_3 образуют новый симплекс-треугольник.

Далее находится значение функции в точке M_3; выявляется вершина треугольника $M_1M_2M_3$, имеющая наибольшее (наименьшее) значение функции (пусть это вершина M_2). Определяется точка M_4, симметричная M_2 относительно прямой M_1M_3, нового симплекс-треугольника. И так далее до тех пор, пока очередной треугольник не накроет точку минимума (максимума) функции.

Критерием того, что треугольник накрыл точку экстремума, является увеличение (уменьшение для максимума) значения функции в точках следующих треугольников.

Опишем один из способов построения симплекс-треугольников.

Исходная точка M_0 выбирается произвольно (с учетом опыта и интуиции расчетчика). Координаты двух других точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ можно определить, например, по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + p; \\ y_1 = y_0 + q; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_0 + q; \\ y_2 = y_0 + p. \end{cases} \tag{5.47}$$

Параметры p и q выбираются так, чтобы точки M_0, M_1 и M_2 являлись вершинами равностороннего треугольника, в котором сторона M_1M_2 является отрезком прямой, отсекающей на координатных осях равные отрезки. Характерный размер получаемого равностороннего треугольника определяется параметром $d > 0$. Из перечисленных соображений следуют формулы:

$$p = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}d; \qquad q = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}d. \tag{5.48}$$

При $d = 1$ стороны симплекс-треугольников $l = \sqrt{p^2 + q^2} = 1$. С увеличением d стороны треугольника увеличиваются, что ведет, в общем, к уменьшению количества приближений, необходимых для достижения конечной цели — накрытия точки экстремума. Но при этом уменьшается точность решения. При уменьшении d наблюдается обратная картина.

Записанные для определения p и q формулы (5.48) являются частным (при $n = 2$) случаем общих для n-мерного пространства соотношений:

$$p = \left(\frac{\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{2}}\right)d; \qquad q = \left(\frac{\sqrt{n+1}+n-1}{n\sqrt{2}}\right)d. \tag{5.49}$$

В аналитической геометрии показано, что координаты точки M_3, симметричной вершине M_0 равностороннего треугольника относительно стороны M_1M_2, определяются по формулам:

$$x_3 = x_1 + x_2 - x_0; \qquad y_3 = y_1 + y_2 - y_0. \tag{5.50}$$

Пример. Найти минимальное значение функции

$$u = (1-x)^2 + (2-y)^2,$$

если известно, что точка $(0, 0)$ входит в область локального минимума (область унимодальности) этой функции.

Р е ш е н и е. Примем точку $M_0(0,0)$ за исходную для построения начального симплекса и зададимся величиной $d = 2$.

По формулам (5.48) (для $n = 2$) находим:

$$p = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} 2 \approx 0{,}518; \qquad q = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} 2 \approx 1{,}932.$$

Используя эти параметры, вычислим координаты двух других вершин симплекса по формулам (5.47):

$$x_1 = x_0 + p = 0 + 0{,}518 = 0{,}518; \quad y_1 = y_0 + q = 0 + 1{,}932 = 1{,}932;$$

$$x_2 = x_0 + q = 0 + 1{,}932 = 1{,}932; \quad y_2 = y_0 + p = 0 + 0{,}518 = 0{,}518.$$

Найдем значения функции в вершинах исходного симплекс-треугольника:

$$u(M_0) = u(0;0) = (1-0)^2 + (2-0)^2 = 5;$$

$$u(M_1) = u(0{,}518;1{,}932) = (1-0{,}518)^2 + (2-1{,}932)^2 \approx 0{,}237;$$

$$u(M_2) = u(1{,}932;0{,}518) = (1-1{,}932)^2 + (2-0{,}518)^2 \approx 3{,}066.$$

Так как наибольшее из полученных значений функция имеет в точке M_0, то вершину M_3 следующего симплекс-треугольника выберем симметричной этой точке относительно прямой M_1M_2.

По формулам (5.50) находим:

$$x_3 = x_1 + x_2 - x_0 = 0{,}518 + 1{,}932 - 0 = 2{,}450;$$

$$y_3 = y_1 + y_2 - y_0 = 1{,}932 + 0{,}518 - 0 = 2{,}450.$$

В полученной точке M_3 значение функции

$$u(M_3) = u(2{,}45;2{,}45) = (1-2{,}45)^2 + (2-2{,}45)^2 \approx 2{,}303.$$

Сравнивая значения функции в трех вершинах нового симплекс-треугольника $M_1M_2M_3$, устанавливаем, что ее максимальное значение имеет вершина M_2. При построении следующего симплекс-треугольника симметрично именно этой точке относительно стороны M_1M_3 следует искать новую вершину M_4 с координатами:

$$x_4 = x_1 + x_3 - x_2 = 0{,}518 + 2{,}45 - 1{,}932 = 1{,}036;$$

$$y_4 = y_1 + y_3 - y_2 = 1{,}932 + 2{,}45 - 0{,}518 = 3{,}864.$$

Значение функции в этой точке

$$u(M_4) = u(1{,}036; 3{,}864) = (1 - 1{,}036)^2 + (2 - 3{,}864)^2 \approx 3{,}475.$$

Это значение больше, чем значения функции в любой из вершин симплекс-треугольника $M_1M_2M_3$. Такая ситуация говорит о том, что точка экстремума находится внутри указанного треугольника и продолжение приближений лишено смысла.

В общем, если процесс приближений был направлен на отыскание минимального значения функции, за ее значение можно принять наименьшее из значений функции в вершинах треугольника. То есть положить $u_{\min} \approx u(M_1) = 0{,}232$.

Точное минимальное значение функции, найденное аналитически: $u_{\min} = u(1; 2) = 0$.

Замечание. Параметр d, отвечающий за размер симплекс-треугольника, можно изменять в процессе приближений. В частности, при приближении к точке экстремума этот параметр, как правило, уменьшают для достижения большей точности вычислений.

Изменяют этот параметр и в ситуациях, когда симплекс-треугольники выстраиваются в «циклические кольца», замыкающиеся вокруг точки экстремума.

Симплексный метод отыскания экстремумов ФНП отличается простотой и не требует вычисления производных. Как и методы пробных точек для функций одной переменной, этот метод позволяет накрывать и уменьшать область определения функции, стягивая ее к стационарной точке. Симплексный метод обладает простотой и наглядностью, но зачастую не отличается быстротой сходимости и устойчивостью решения — итерационный процесс может не сходиться (образуются циклические кольца из симплекс-треугольников).

Лучшие результаты дают методы, использующие производные от функции (частные производные для функций нескольких переменных).

Наиболее распространенным из таких методов является *метод градиентного спуска,* называемый часто *методом Коши.*

5.17. Метод градиентного спуска

Возвратимся к понятию градиента функции и для простоты ограничимся рассмотрением функции $u = u(x, y)$ двух переменных. Напомним, что градиент функции — это вектор, ортогональный линии уровня функции; он лежит в плоскости, касательной к поверхности, описываемой этой функцией, и направлен в сторону ее возрастания.

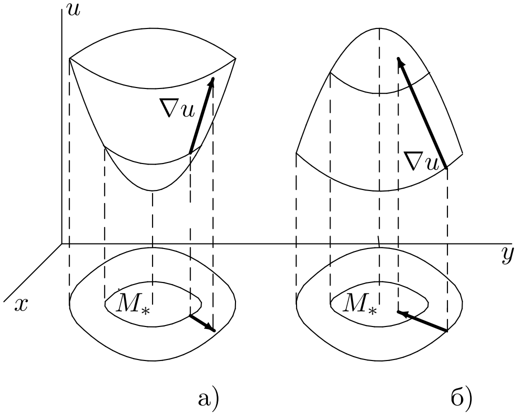


Рис. 5.9. Направления вектора градиента

На рис. 5.9,а $\operatorname{grad} u = \nabla u$ направлен в сторону, противоположную локальному минимуму функции; на рис. 5.9,б — в сторону локального максимума.

Существуют методы градиентного спуска, основанные на использовании частных производных первого и более высоких порядков. Как и любой численный метод, этот метод использует последовательные приближения (итерации) к точному решению. Остановимся на описании градиентного метода первого порядка.

Пусть $X_k = \left(x_k,\ y_k\right)^T$ — вектор, характеризующий положение точки M_k на плоскости координат (x, y) на k-й итерации (рис. 5.10,а).

Будем строить итерационный процесс в предположении, что в следующее положение M_{k+1}, характеризуемое вектором X_{k+1}, точка переводится вектором градиентом $\nabla u(X_k)$, умноженным на некоторый

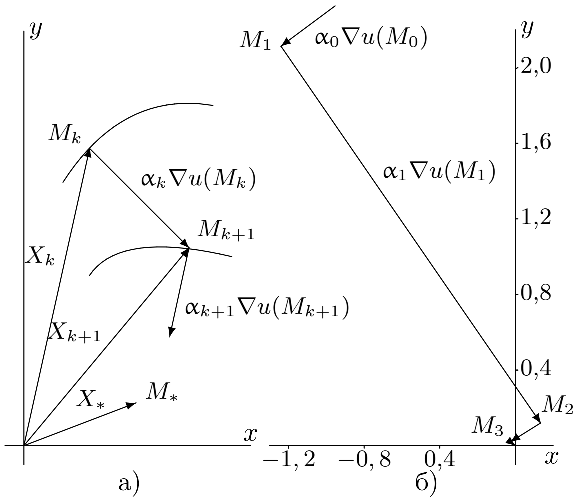


Рис. 5.10. Итерации метода градиентного спуска

корректирующий положительный множитель α_k. Тогда вектор, определяющий положение M_{k+1} точки экстремума на $(k+1)$ итерации, определится по рекуррентной формуле:

$$X_{k+1} = X_k \pm \alpha_k \nabla u(X_k). \tag{5.51}$$

Величину множителя α_k в каждом приближении подсчитывают исходя из требования экстремальности функции u, а знак перед ней зависит от направления вектора градиента. Если отыскивают максимум функции, выбирают знак плюс, минимум — знак минус. Это связано с тем, что, как отмечено выше, вектор градиента направлен в сторону возрастания функции.

Рассмотрим подробности организации итерационного цикла метода градиентного спуска на примере.

Пример. Найти минимальное значение функции:

$$u = 8x^2 + 4xy + 5y^2,$$

если известно, что точка $M_0(10; 10)$ принадлежит области унимодальности функции (области с единственным минимумом).

Р е ш е н и е.

Первое приближение.

Принимая точку M_0 (находится за пределами изображенной части рисунка) за начальную (рис. 5.10,б), найдем в ней значение функции:

$$u(M_0) = 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 = 1700.$$

1. Найдем первые производные функции, представляя их в виде совокупности двух (по размерности пространства) координат вектора:

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16x + \;\,4y \\ 4x + 10y \end{pmatrix}.$$

Подставляя в эти соотношения значения координат точки M_0, найдем совокупность координат вектора градиента:

$$\nabla u(M_0) = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix}\Bigg|_{M_0} = \begin{pmatrix} 16 \cdot 10 + \;\,4 \cdot 10 \\ 4 \cdot 10 + 10 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

2. Подставим полученные выражения для векторов в формулу (5.51):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix}\Bigg|_{M_0},$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 200\alpha_0 \\ 10 - 140\alpha_0 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем значения функции в первом приближении с точностью до множителя α_0:

$$u(x_1, y_1) = 8(10 - 200\alpha_0)^2 + 4(10 - 200\alpha_0)(10 - 140\alpha_0) + 5(10 - 140\alpha_0)^2.$$

4. Определим α_0 из условия минимума функции $u(x_1, y_1)$ одной переменной α_0. Для этого производную от функции по переменной α_0 приравниваем нулю $\left(\dfrac{\partial u(x_1, y_1)}{\partial \alpha_0} = 0\right)$:

$$-8 \cdot 2 \cdot 200(10 - 200\alpha_0) - 4 \cdot 200(10 - 140\alpha_0) -$$

$$-4\cdot 140(10-200\alpha_0)-5\cdot 2\cdot 140(10{-}140\alpha_0)=0.$$

Отсюда:

$$\alpha_0=\frac{596}{10600}\approx 0{,}056.$$

5. Найдем координаты независимых переменных точки первого приближения:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}-0{,}056\begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 2{,}16 \end{pmatrix}\longrightarrow M_1(-1{,}2;\ 2{,}16).$$

6. Определим значение функции в точке M_1:

$$u(M_1)=24{,}23.$$

Функция убывает (приближается к своему минимальному значению):

$$u(M_1)<u(M_0).$$

На этом первое приближение заканчивается.

Второе приближение. Выполним все действия в последовательности первого приближения.

1. $\nabla u(M_1)=\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix}\Bigg|_{M_1}=\begin{pmatrix} 16\cdot(-1{,}2)+\ 4\cdot 2{,}16 \\ 4\cdot(-1{,}2)+10\cdot 2{,}16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10{,}56 \\ 16{,}8 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}-\alpha_1\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix}\Bigg|_{M_1}=\begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 2{,}16 \end{pmatrix}-\alpha_1\begin{pmatrix} -10{,}56 \\ 16{,}8 \end{pmatrix}.$

3. $u(x_2,y_2)=8(-1{,}2{+}10{,}56\alpha_1)^2+4(-1{,}2{+}10{,}56\alpha_1)(2{,}16{-}16{,}8\alpha_1)+$
$+5(2{,}16{-}16{,}8\alpha_1)^2.$

4. Найдем производную от полученного выражения по α_1 и приравняем ее нулю $\left(\dfrac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial\alpha_1}=0\right)$:

$$8\cdot 2\cdot 10{,}56(-1{,}2+10{,}56\alpha_1)+4\cdot 10{,}56)(2{,}16-16{,}8\alpha_1)+$$

$$+4\cdot(-16{,}8)(-1{,}2+10{,}56\alpha_1)+5\cdot 2\cdot(-16{,}8)(2{,}16{-}16{,}8\alpha_1)=0.$$

Отсюда:

$$\alpha_1 \approx 0{,}152.$$

5. $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}144 \\ 0{,}145 \end{pmatrix} \longrightarrow M_2(0{,}144;\ 0{,}145).$

6. $u(M_2) = 0{,}354 < u(M_1)$.

Второе приближение закончено.

После вычислений в следующих приближениях получим:

$M_3(-0{,}018; 0{,}031)$; $u(M_3) = 0{,}0052$.

$M_4(0{,}002; 0{,}002)$; $u(M_4) = 0{,}0000\ldots$

Точное минимальное значение $u(M_*) = 0$ функция имеет в точке $M_*(0,0)$.

Как видно из хода решения задачи, сходимость метода градиентного спуска, по крайней мере для рассмотренной функции, очень хорошая. Уже после второго шага значение функции уменьшилось по сравнению с нулевой точкой на три порядка, а после третьего шага практически не отличалось от нуля — локального минимума функции.

Недостатком метода градиентного спуска по сравнению с симплексным методом является требование дифференцируемости функции. Градиент — это вектор, координатами которого являются частные производные от функции.

5.18. Резюме

При исследовании функций нескольких переменных вводят частные производные, определяющие «скорости» изменения функций вдоль координат (независимых переменных). Частные производные играют ту же роль, что и обычные производные в исследовании функций одной переменной.

При необходимости исследования поведения функций вдоль произвольного направления (не связанного, в общем, с направлениями координат) вводят понятие производной по направлению. Эта производная в рассматриваемой точке пространства определяется не однозначно, а зависит от направления, вдоль которого рассматривается изменение функции. Важнейшими из этих направлений являются те, вдоль которых происходят наибольшие (наименьшие) изменения функции. Величину и направление этих изменений определяют вектором, называемым градиентом функции. Координатами градиента функции $u = u(x, y, z, \ldots)$ являются частные производные по всем независимым переменным:

$$\boldsymbol{\nabla} u = (u'_x, u'_y, u'_z, \ldots).$$

Модуль градиента (как и модуль любого другого вектора) для ортогональных координат равен корню квадратному от суммы квадратов его координат:

$$|\boldsymbol{\nabla} u| = \sqrt{{u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2 + \ldots},$$

а направление определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\boldsymbol{\nabla} u \hat{,} x) = \frac{u'_x}{|\boldsymbol{\nabla} u|}, \quad \cos(\boldsymbol{\nabla} u \hat{,} y) = \frac{u'_y}{|\boldsymbol{\nabla} u|}, \quad \cos(\boldsymbol{\nabla} u \hat{,} z) = \frac{u'_z}{|\boldsymbol{\nabla} u|}, \quad \ldots$$

Важную роль в исследовании экстремумов функций нескольких переменных играют функциональные матрицы и их определители. В частности, по знакам главных миноров квадратной функциональной матрицы второго порядка можно определить, является ли матрица положительно или отрицательно определенной.

Среди численных методов определения экстремумов функций нескольких переменных наибольшее распространение нашли два. Первый из них — симплексный метод — применим к исследованию, в частности, недифференцируемых функций. В случае, если функция имеет непрерывные частные производные, наиболее эффективным является второй — градиентный метод. Оба отмеченных метода имеют несколько разновидностей.

Если одним из достаточных условий существования экстремума функции одной переменной является положительность (отрицательность) второй производной при равенстве нулю первой производной, то для функции нескольких переменных необходимым условием существования локальных экстремумов является равенство нулю вектора-градиента функции, а достаточным условием является положительность (для минимума) или отрицательность (для максимума) функциональной матрицы второго порядка. Например, для функции двух переменных $u = u(x, y)$ необходимое условие существования локального экстремума: $\boldsymbol{\nabla} u = (u'_x, u'_y) = \Theta$. Достаточное условие: в стационарной точке $M_*(x_*, y_*)$ должно выполняться неравенство

$$u''_{xx}(M_*)u''_{yy}(M_*) - \big(u''_{xy}(M_*)\big)^2 > 0.$$

При этом, если $u''_{xx}(M_*) > 0$, точка M_* является точкой минимума функции, при $u''_{xx}(M_*) < 0$ — максимума.

Наряду с локальными важную роль при исследовании поведения функций нескольких переменных играют экстремумы, называемые условными и имеющие место при введении дополнительных ограничений на поведение функций. Наибольшее распространение среди аналитических методов определения условных экстремумов функций нескольких переменных получил метод неопределенных множителей Лагранжа.

Сведения об исследовании функций нескольких переменных можно найти в [1], [11], [15].

5.19. Вопросы

1. Дайте определение функции нескольких переменных (ФНП). Поясните смысл понятий: явное и неявной задание ФНП.
2. Что собой представляет график функции двух переменных?
3. Что называется линией уровня? поверхностью уровня?
4. Что такое частное приращение ФНП?
5. Что понимать под непрерывностью ФНП?
6. Как определить дифференциал функции нескольких переменных?
7. Что называется производной функции по направлению?
8. Что такое градиент функции и как он связан с производной по направлению? Запишите выражения для градиента функции двух переменных и для его модуля. Как градиент функции расположен по отношению к линии уровня функции двух переменных?
9. На графике функции двух переменных, линии уровня которой — концентрические окружности, покажите расположения векторов, связанных с производной по направлению, и векторов-градиентов в характерных точках. Почему производная функции по направлению касательной к линии уровня равна нулю?
10. Сколько видов неравных частных производных второго порядка может иметь функция двух переменных?

11. Что понимается под высшими производными ФНП?

12. Дайте определение экстремума функции двух переменных. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования экстремума функции двух переменных.

13. Какие точки функций двух переменных называют экстремумами? критическими точками? стационарными?

14. В чем смысл симплексного метода отыскания экстремума ФНП? Что собой представляют симплексы для двух- и трехмерных областей?

15. Как организуется процесс последовательных приближений в симплексном методе? Поясните на рисунке. Как выбрать направление продвижения к очередному симплексу при отыскании минимума функции? максимума?

16. Каким параметром и как можно регулировать скорость и точность решения в симплексном методе? Каков критерий накрытия симплексом точки экстремума?

17. В чем смысл метода градиентного спуска? Как определяется направление вектора градиента по отношению к точке экстремума для выпуклых и вогнутых функций? Каким способом можно регулировать это направление?

18. Опишите последовательность определения параметров процесса итераций в методе градиентного спуска первого порядка. Как строится итерационный процесс в методе градиентного спуска?

19. Из каких соображений выбирается множитель, корректирующий величину вектора градиента на итерациях? Покажите на графике линий уровня последовательные положения вектора градиента при определении точки экстремума функции двух переменных.

20. Что такое локальные экстремумы функций двух переменных и как они связаны с понятиями наибольшего и наименьшего значений функции в заданной области?

21. Что такое условный экстремум функции нескольких переменных? Поясните понятие условного экстремума на рисунке функции двух переменных.

22. Каким образом можно свести задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум?

23. В чем суть метода неопределенных множителей Лагранжа? Как записываются условия для определения множителей Лагранжа? Каков математический смысл этих условий?

Вопросы для тестирования

1. Перечислите номера пунктов, в которых корректно сформулированы свойства гиперповерхностей уровня Π_h гиперповерхностей Π.

1. Это Π, в уравнении которой одна из координат — постоянная величина;
2. Это подобласть Π с той же размерностью пространства;
3. Для функции одной переменной Π_h — точка;
4. Размерность Π_h на единицу меньше размерности Π;
5. Для $\Re_3$ — это кривая, лежащая в плоскости, параллельной координатной плоскости.

2. Перечислите номера пунктов, в которых отражены свойства евклидова пространства.

1. Соблюдается непрерывность координат;
2. Расстояние между точками пространства измеряются длиной дуги, соединяющей эти точки;
3. Число независимых координат не должно превышать трех;
4. Квадрат расстояния между точками равен сумме квадратов разностей соответствующих координат;
5. Среди пунктов 1–4 нет требуемых.

3. Перечислите номера свойств, выполнение которых гарантирует непрерывность функции $u(X)$ нескольких переменных $X{=}(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $A(x_1^a, \ldots, x_n^a)$; $\Delta_k u$ — частное приращение функции.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_r} \quad (k, r = \overline{1, n},\ k \neq r)$; 2. $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \Delta_k u = 0$;

3. $\lim\limits_{X \to A} u(X) = u(A)$; 4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_r} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_k}$;

5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

4. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5 (u – функция n переменных, $k, r = \overline{1, n}$).

1. Дифференциал функции	1. $\left\lvert \dfrac{\partial y_k}{\partial x_r} \right\rvert$;
2. Слагаемое ряда Тейлора	2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} dx_k$;
3. Производная по направлению	3. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$;
4. Градиент	4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \dfrac{dx_k}{dl}$.

5. Перечислите номера соотношений, выполнение которых является достаточным условием существования локального максимума функции двух переменных $u = f(x, y)$ в некоторой точке, если в этой точке $u''_{xx} = A,\ u''_{xy} = B,\ u''_{yy} = C,\ \Delta = AC - B^2,\ \nabla u = \left(u'_x, u'_y\right)$.

1. $\Delta > 0$; 2. $\Delta < 0$; 3. $A < 0$; 4. $A = 0$; 5. $|\nabla u| = 0$.

6. Перечислите утверждения, входящие в необходимое и достаточное условия существования локального минимума функции $u = u(x; y)$ $(A = u''_{xx},\ B = u''_{xy},\ C = u''_{yy})$.

1. $\nabla u = 0$; 2. $u'_x = u'_y = 0$; 3. $AC > B^2$; 4. $B = 0$;

5. Среди утверждений 1–4 нет требуемых.

7. Перечислите правильные утверждения, справедливые для функции $u = u(x, y)$, имеющей в точке A локальный минимум, единственный во всей рассматриваемой области определения функции.

1. $u(X) > u(A)$ $(X \in (x, y) \neq (a, b) = A)$;

2. $u''_{xx}(A) < 0, \quad |\nabla u|_A = 0$;
3. В симплексном методе треугольник $M_{n-1}M_nM_{n+1}$ «накрывает» точку A, если $u(M_{n+2}) > u(M_{n-1})$, где M_{n+2} — вершина треугольника $M_nM_{n+1}M_{n+2}$;
4. В методе градиентного спуска вектор градиента совпадает по направлению с касательной к линии уровня функции u;
5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

8. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5 (u – функция n переменных; $k, r = \overline{1, n}$).

1. Функциональная матрица второго порядка	1. $\left\|\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right\|$;
2. Функциональная матрица первого порядка	2. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right)$;
3. Первый главный минор	3. $\left\|\dfrac{\partial y_k}{\partial x_r}\right\|$;
4. Якобиан	4. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_r}\right)$.

9. Перечислите номера пунктов положений, при выполнении которых матрица A будет положительно определенной.

1. Все элементы матрицы положительны;
2. Все главные значения матрицы положительны;
3. Главные миноры положительны;
4. Знаки главных миноров удовлетворяют условию $\mathrm{sign} M_k = (-1)^{k+1}$;
5. Пункты 1–4 не содержат требуемых ответов.

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕМА 5.1
(§ 5.1–5.4 теории)

Линии уровня. Частные производные

Вопросы

1. Что собой представляет частная производная?
2. Что представляет собой линия уровня функции двух переменных? поверхность уровня функции n переменных?

Задачи

В задачах 1–4 построить графики функций и показать на них линии уровней.

1. $u^2 = x$

Р е ш е н и е. График функции представляет собой параболу на плоскости с декартовыми координатами xu. «Поверхности» уровня представляют собой точки на кривой, удаленные от оси x на расстояния, равные конкретным значениям переменной u.

На рис. 5.11,а показаны точки разных уровней на кривой. На оси ординат отмечены соответствующие этим «точкам» уровней значения u:1; 0,6; 0; $-0{,}9$.

2. $u = -2x + y + 4.$

Р е ш е н и е. Функция представляет собой плоскость в пространстве координат xyu.

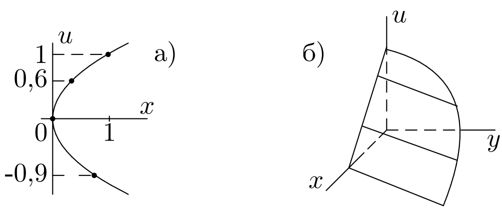


Рис. 5.11. Равные уровни: а) – задача 1; б) – задача 2

Ориентировочный график функции изображен на рис. 5.11,б. Там же показаны линии уровня, представляющие собой прямые, параллельные плоскости xy — геометрические места точек пересечения заданной плоскости и плоскостей $u = C$, параллельных координатной плоскости xy.

3. Для функции $u = x^2 - y$ изобразить линии уровня $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ и $u_3 = -2$. Записать уравнение линии уровня, проходящей через точку (1;2), и изобразить ее.

Р е ш е н и е. Заданные линии уровня представляют собой параболы (рис. 5.12):

$$1)\ x^2 = y; \quad 2)\ x^2 = y + 1; \quad 3)\ x^2 = y - 2,$$

симметричные относительно оси y и проходящие через точки: 1) (0;0); 2) (0;-1); 3) (0;2). Через точку (1;2) проходит линия уровня (4), в которой $u_4 = 1^2 - 2 = -1$ и которая описывается уравнением: $x^2 = y - 1$.

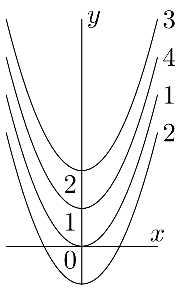


Рис. 5.12. Линии уровни задачи 3

4. $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$.

Р е ш е н и е. Поверхностями уровня для представленной функции трех переменных при фиксированных значениях $u = C_i$ (i — номер поверхности уровня) являются эллипсоиды

$$\frac{x^2}{a_i^2} + \frac{y^2}{b_i^2} + \frac{z^2}{c_i^2} = 1,$$

где

$$a_i^2 = a^2 C_i; \quad b_i^2 = b^2 C_i; \quad c_i^2 = c^2 C_i \ -$$

полуоси эллипсоида.

В задачах 5–9 найти частные производные.

5. До любого порядка от функции $u = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$.

Р е ш е н и е. $u'_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + By + D$; $u'_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = Bx + 2Cy + E$;

$$u''_{x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2A; \quad u''_{y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2C; \quad u''_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{yx} = B; \ \ldots,$$

$u^{(n)}_{x^m y^k} = 0$, если $n > 2$ $\quad (n = m + k)$.

6. До любого порядка от $u = xy + \sqrt{x}$.
Р е ш е н и е. $u'_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $u'_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = x$;

$$u''_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=1; \quad u''_{x^2}=-\frac{1}{2^2\sqrt{x^3}}; \quad u^{(n)}_{y^n}=u^{(k_1+k_2)}_{x^{k_1} y^{k_2}}=0 \quad (k_1 + k_2 > 2);$$

$$u^{(n)}_{x^n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \sqrt{x^{2n-1}}} \quad (n > 2).$$

7. Смешанную производную второго порядка от $u = \dfrac{y}{x} + xe^{-xy}$.
Р е ш е н и е. $u'_x = -\dfrac{y}{x^2} + (1 - xy)e^{-xy}$; $\quad u'_y = \dfrac{1}{x} - x^2 e^{-xy}$;

$$u''_{xy} = -\frac{1}{x^2} - x(2 - xy)e^{-xy}.$$

8. Частные производные первого порядка от $u = x^y$.
Р е ш е н и е. $u'_x = yx^{y-1}$; $\quad u'_y = x^y \ln x$.

9. Все частные произвоные до n-го порядка от функции трех переменных $u = ax_1^2 x_2 x_3$.
Р е ш е н и е. $u'_1 = 2ax_1x_2x_3$; $u'_2 = ax_1^2x_3$; $u'_3 = ax_1^2x_2$; $u''_{11} = 2ax_2x_3$;

$u''_{12} = u''_{21} = 2ax_1x_3$; $u''_{13} = u''_{31} = 2ax_1x_2$; $u''_{23} = u''_{32} = ax_1^2$;

$u''_{22} = u''_{33} = 0$; $u'''_{112} = 2ax_3$; $u'''_{113} = 2ax_2$;

$u'''_{321} = u'''_{231} = u^{(4)}_{1123} = u^{(4)}_{1132} = 2a$.

Остальные производные равны нулю.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для функции $u = 2x$, заданной в пространствах: а) $\Re$, б) $\Re_2$ записать уравнения «линий уровня», проходящих через точки с координатами $x = 0$ и $x = 1$.

2. Для функции $u = x^2 - y$ изобразить линии уровня $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ и $u_3 = -2$. Записать уравнение линии уровня, проходящей через точку (1; 2), и изобразить ее.

В задачах 3–10 найти смешанные частные производные второго порядка ($a, b, \alpha, \beta, \gamma, x_0, y_0$ — постоянные).

3. $u = x^3y^2 - 2xy^3$; **4**. $u = \ln(x - 2y^3)$; **5**. $u = (1 + x^2)^y$;

6. $u = \ln^x y$; **7**. $u = e^{xy}$ quad в точке $x = y = 1$;

8. $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$; **9**. $u = a\ln(x - x_0) + b\ln(y - y_0)$;

10. $u = \left(ax^\alpha + by^\beta\right)^\gamma$.

ТЕМА 5.2
(§ 5.7–5.8 теории)

Производная по направлению. Градиент

Вопросы

1. Что называется производной ФНП по направлению? Как она определяется?
2. Что такое градиент функции и как он связан с производной по направлению? Запишите выражения для градиента функции двух переменных и для его модуля.
3. Как градиент функции расположен по отношению к линии уровня функции двух переменных? На линии уровня, представляющей собой эллипс, покажите расположения векторов, связанных с производной по направлению, и векторов-градиентов в характерных точках.
4. Почему производная функции по направлению касательной к линии уровня равна нулю?

Задачи

1. Для функции $u = xy$ найти производную по направлению вектора $\boldsymbol{l} = (1; 1)$ и градиент в точке $M(1; 2)$. Изобразить результаты решения задачи на графике.

Р е ш е н и е. Для записи искомого выражения производной по направлению
$$u'_l = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta$$
определим направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{l}$. Для этого найдем модуль вектора $\boldsymbol{l}$: $l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, и, поделив на него обе координаты $\boldsymbol{l}$, запишем выражение для единичного вектора: $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{l}}{l} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Координатами этого вектора являются направляющие косинусы. Поэтому $\cos\alpha = \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$.

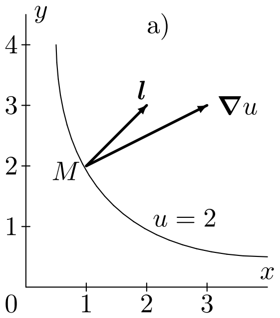
Найдем частные производные от u по координатам:
$$u'_x = y; \qquad u'_y = x,$$
и запишем производную u по направлению $\boldsymbol{l}$:
$$u'_l = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + x).$$

В точке $M(1; 2)$:
$$u'_l\big|_M = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2 + 1) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}12.$$

Имея выражения для частных производных от u по координатам, запишем выражение для градиента:
$$\boldsymbol{\nabla} u = (u'_x; u'_y) = (y; x).$$

В частности, в точке $M(1; 2)$: $\boldsymbol{\nabla} u\big|_M = (2; 1)$.

Модуль этого вектора
$$\big|\boldsymbol{\nabla} u\big|_M = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24,$$
а направляющие косинусы — это координаты единичного вектора:
$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{\boldsymbol{\nabla} u\big|_M}{\big|\boldsymbol{\nabla} u\big|_M} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$



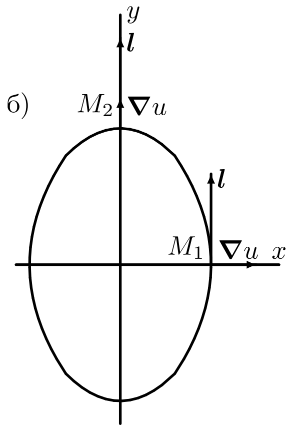


Рис. 5.13. Производные по направлению и градиенты:
а) – задача 1; б) – задача 2

То есть

$$\cos\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}895; \qquad \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}448.$$

Значение заданной функции в точке $M(1;2)$: $u\big|_M = 1 \cdot 2 = 2$, а линия уровня, проходящая через эту точку, является гиперболой: $xy = 2$.

На рис. 5.13,а в одном масштабе показаны линия уровня, градиент и вектор $\boldsymbol{l}$ в точке M.

2. Для функции $u = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ найти производные по направлению вектора $\boldsymbol{l} = (0;2)$ и градиенты в точках $M_1(2;0)$ и $M_2(0;3)$. Результаты представить на рисунке.

Р е ш е н и е. Найдем значения функции u в заданных точках.

$$u\big|_{M_1} = \frac{2^2}{4} + \frac{0^2}{9} = 1; \qquad u\big|_{M_2} = \frac{0^2}{4} + \frac{3^2}{9} = 1.$$

Таким образом, обе точки лежат на одной линии уровня $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, представляющей собой эллипс (рис. 5.13,б).

Для определения направляющих косинусов вектора $\boldsymbol{l}$ найдем сонаправленный ему единичный вектор. Так как $l = 2$, то $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{l}}{l} = (0;1)$.

Отсюда следует:

$$\cos\alpha = 0 \ (\alpha = \pi/2), \qquad \cos\beta = 1 \ (\beta = 0).$$

Найдем частные производные от u по координатам:

$$u'_x = \frac{1}{2}x, \qquad u'_y = \frac{2}{9}y$$

и запишем выражение для производной от u по направлению $\boldsymbol{l}$:

$$u'_l = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta = \frac{1}{2}x \cdot 0 + \frac{2}{9}y \cdot 1 = \frac{2}{9}y.$$

В заданных точках:

$$u'_l\Big|_{M_1} = \frac{2}{9} \cdot 0 = 0; \qquad u'_l\Big|_{M_2} = \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3}.$$

Градиент функции u:

$$\boldsymbol{\nabla} u = (u'_x; u'_y) = \left(\frac{1}{2}x;\ \frac{2}{9}y\right),$$

$$\boldsymbol{\nabla} u\Big|_{M_1} = \left(\frac{1}{2}\cdot 2;\ \frac{2}{9}\cdot 0\right) = (1;\ 0), \quad \boldsymbol{\nabla} u\Big|_{M_2} = \left(\frac{1}{2}\cdot 0;\ \frac{2}{9}\cdot 3\right) = \left(0;\ \frac{2}{3}\right).$$

Модули этих векторов, имеющих только по одной ненулевой координате, равны своим ненулевым координатам:

$$\left|\boldsymbol{\nabla} u\right|_{M_1} = 1, \qquad \left|\boldsymbol{\nabla} u\right|_{M_2} = \frac{2}{3},$$

а направления совпадают с направлениями ненулевых координат.

3. Для функции $u = x^3y - 5xy^2 + 8$ найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла в точке M(1; 2).

Р е ш е н и е. Биссектрису первого координатного угла описывают уравнением $y = x$. Радиус-вектор, соединяющий начало координат (0; 0) с любой другой точкой, лежащей на биссектрисе, например, точкой (1; 1): $\boldsymbol{l} = (1;\ 1)$, определяет направление, по которому следует искать требуемую производную.

Найдем единичный вектор в направлении $\boldsymbol{l}$. Так как $l = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, то $\boldsymbol{n} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Координатами единичного вектора являются направляющие косинусы. Поэтому: $\cos\alpha = \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдем частные производные от функции u по координатам:

$$u'_x = 3x^2y - 5y^2; \qquad u'_y = x^3 - 10xy.$$

Тогда $u'_l = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x^3 + 3x^2y - 5y^2 - 10xy)$.

В точке M:

$u'_l\big|_M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot 2 - 5\cdot 2^2 - 10\cdot 1\cdot 2) = -33\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Найти величину и направление градиента функции $u = \operatorname{tg} x - x + 6\sin y - 2\sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Р е ш е н и е. Определим частные производные по координатам:

$$u'_x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x; \quad u'_y = 6\cos y - 6\sin^2 y\cos y = 6\cos^3 y;$$

$$u'_z = 1 - \frac{1}{\sin^2 z} = -\operatorname{ctg}^2 z.$$

В точке M:

$$u'_x\Big|_M = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} = 1; \quad u'_y\Big|_M = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}; \quad u'_z\Big|_M = 0.$$

$$\boldsymbol{\nabla} u\Big|_M = \left(1; \frac{3}{4}; 0\right); \qquad \Big|\boldsymbol{\nabla} u\Big|_M = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 0^2} = \frac{5}{4}.$$

Единичный вектор в направлении градиента в точке M:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\nabla} u}{|\boldsymbol{\nabla} u|} = \frac{4}{5}\left(1; \frac{3}{4}; 0\right) = (0{,}8;\ 0{,}6;\ 0).$$

Его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = 0{,}8; \qquad \cos\beta = 0{,}6; \qquad \cos\gamma = 0.$$

Проверка правильности определения направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0{,}8^2 + 0{,}6^2 + 0^2 = 1.(!)$$

Задачи 5 и 6 студентам рекомендуется решить самостоятельно, после чего сопоставить полученные результаты с приведенными ниже.

5. Для функции $u = x^2 - xy + y^2$ найти производную по направлению вектора $\boldsymbol{l} = (6; 8)$ и градиент в точке $M(1; 1)$.

Р е ш е н и е. Определяем единичный вектор в направлении $\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{l}}{l} = \frac{(6; 8)}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = (0{,}6;\ 0{,}8).$$

Отсюда следует: $\cos\alpha = 0{,}6$; $\cos\beta = 0{,}8$.

Находим частные производные по координатам:

$$u'_x = 2x - y; \qquad u'_y = 2y - x,$$

производную по направлению:

$$u'_l = 0{,}6(2x - y) + 0{,}8(2y - x)$$

и градиент:

$$\boldsymbol{\nabla} u = (2x - y;\ 2y - x).$$

В точке M:

$$u'_l\Big|_M = 0{,}6(2\cdot 1 - 1) + 0{,}8(2\cdot 1 - 1) = 1{,}4;$$

$$\boldsymbol{\nabla} u\Big|_M = \big((2\cdot1-1); (2\cdot1-1)\big) = (1; 1); \qquad \Big|\boldsymbol{\nabla} u\Big|_M = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}42.$$

Направляющие косинусы градиента:

$$\cos\alpha_1 = \cos\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1 = \frac{\pi}{4}.$$

6. Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M(1; 2; 1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = (2; 4; 4)$.

Р е ш е н и е. Находим единичный вектор в направлении $\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{l}}{l} = \frac{2(1; 2; 2)}{2\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}(1; 2; 2).$$

Отсюда следует:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}; \qquad \cos\beta = \frac{2}{3}; \qquad \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Находим частные производные по координатам:

$$u'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}; \qquad u'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}; \qquad u'_z = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

и производную по направлению:

$$u'_l = \frac{2}{3(x^2+y^2+z^2)}(x+2y+2z).$$

В точке M:

$$u'_l\Big|_M = \frac{2}{3(1^2+2^2+1^2)}(1+2\cdot 2+2\cdot 1) = \frac{7}{9}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Для функций $u = e^x + e^y$ в точке $O(0;0)$ найти: производные по направлениям векторов $\boldsymbol{l}_1 = (1;0)$ и $\boldsymbol{l}_2 = (0;1)$; градиент, его модуль и направление.

Задана функция $u = 2x^2 + 4xy + y^2$.

2. Найти производные от u по направлениям, заданным векторами (1;1) и $(\sqrt{3};1)$ в точке $M(1,2)$;

3. Записать выражения для градиента и его модуля в произвольной точке плоскости xy;

4. Найти модуль градиента в точке M и сравнить его с производными по направлению. Пояснить причины расхождения в значениях градиента и производных по направлению;

5. Изобразить линию уровня, проходящую через точку M. На линии уровня изобразить градиент и направления, в которых определялись производные.

ТЕМА 5.3
(§ 5.12–5.13 теории)

Экстремумы ФНП

Вопросы

1. Дайте определение экстремума функции нескольких переменных.
2. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования экстремумов функции двух переменных. Какие точки функций двух переменных называют экстремумами? критическими точками? стационарными?
3. Как понятие необходимого условия существования экстремума функции двух переменных связано с градиентом функции? с производной функции по любому направлению?
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования экстремума функции двух переменных. Как определить тип экстремума (максимум или минимум)?
5. Что такое локальные экстремумы функций двух переменных и как они связаны с понятиями наибольшего и наименьшего значений функции в заданной области?

Задачи

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

$$u = 2x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20$$

в области, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $y - x = 6$.

Р е ш е н и е. Функция определена при $x \in \Re$ и $y \in \Re$. Определитель матрицы коэффициентов при квадратах переменных x и y функции: $\Delta = AB - C^2 = 1 \cdot 2 - 0^2 = 2 > 0$ (в сечении функции плоскостью $u = 0$ получается эллипс). Поэтому функция представляет собой эллиптический параболоид с центральной осью, параллельной u. Функция монотонно возрастает при удалении независимых координат от точки минимума (коэффициенты при x^2 и y^2 положительны).

Следуя теореме о достаточном условии существования экстремума функции двух переменных последовательно выполним следующие действия.

1. Находим первые частные производные функции. Из их равенства нулю находим значения x_* и y_* критической точки:

$$u'_x = 4x + 4 = 0, \implies x_* = -1;$$

$$u'_y = 2y - 8 = 0, \implies y_* = 4.$$

Таким образом, точка $M_*(-1;4)$ является критической точкой – точкой, в которой может существовать локальный экстремум функции u. Точка отмечена на рис. 5.14,а.

2. Найдем вторые частные производные u:

$$A = u''_{xx} = (u'_x)'_x = 4 > 0; \quad B = u''_{xy} = u''_{yx} = 0; \quad C = u''_{yy} = 2$$

и дискриминант

$$\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 2 - 0^2 = 8 > 0.$$

Положительное значение Δ говорит о том, что точка $M_*(-1;\ 4)$ является точкой локального экстремума, а положительность A (или C) говорит о том, что этот экстремум является минимальным значением функции: $u_{\min} = u(-1;\ 4) = 2$.

Для определения наибольшего значения функции u в заданной и показанной на рис. 5.14,а области изменения функции определим ее экстремальные значения на границах.

В сечении поверхности, заданной функцией u, плоскостью $y = 0$ получается кривая:

$$u_x = 2x^2 + 4x + 20.$$

Для определения экстремального значения функции найдем абсциссу критической точки и вторую производную:

$$u'_x = 4x + 4 = 0, \implies x = -1; \quad u''_x = 4 > 0.$$

Следовательно, точка $M_1(-1;\ 0)$ (рисунок) является минимальным значением функции: $u_1 = u(-1;\ 0) = 18$ на границе области, ограниченной плоскостью $y = 0$.

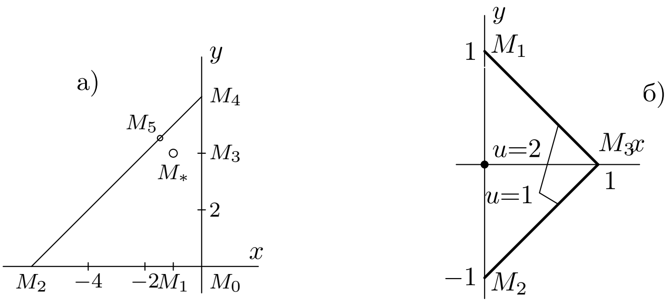


Рис. 5.14. Границы областей задания функций:
а) – для задачи 1; б) – для задачи 2

Найдем значения функции в угловых точках $O(0;0)$ и $M_2(-6;\ 0)$ области ограничения при $y = 0$ (координаты точек находятся из совместного решения уравнений каждой пары плоскостей: $x = 0$, $y = 0$ и $y - x = 6$):

$$u_0 = u(0;0) = 20, \qquad u_2 = u(-6;0) = 68.$$

В сечении поверхности плоскостью $x = 0$ получается кривая:

$$u_y = y^2 - 8y + 20.$$

Найдем экстремальное значение функции u на этой кривой:

$$u'_y = 2y - 8 = 0, \implies y = 4; \quad u''_y = 2 > 0.$$

Следовательно, в точке $M_3(0;4)$ функция принимает минимальное значение: $u_3(0;4) = 18$ на границе области, ограниченной плоскостью $x = 0$.

Найдем значения заданной функции в точке $M_4(0;6)$ кривой: $u_4 = u(0;6) = 8$.

Последняя граница соответствует сечению поверхности плоскостью $y = 6+x$. Подставляя это значение y в выражение для заданной функции, получим функцию одной переменной $u_{y=6+x} = 3x^2 + 8x + 8$.

Найдем экстремум этой функции:

$$u'_{y=6+x} = 6x + 8 = 0, \implies x_5 = -\frac{4}{3}; \implies$$

$$\Longrightarrow \quad u_5 = u_{y=6+x}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

Отметим, что последний результат можно было получить, подставляя в исходную зависимость $u(x, y)$ выражение x через y ($x = y - 6$) и определяя затем экстремальное значение полученной функции одной переменной y. В результате получим значение $y_5 = \left(\frac{14}{3}\right)$, соответствующее критической точке с $u_5 = \frac{8}{3}$.

Координаты точки $M_5\left(-\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right)$ превращают в тождество уравнение $y - x = 6$ одной из граничных плоскостей.

Из всех найденных значений функции в граничных точках выбираем максимальное (минимум равен локальному минимуму $u_{\min} = 2$):

$$u_{\max} = \max\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = u_2 = u(-6, 0) = 68.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = -y^2 + (x-1)^2 + 1$ в области, ограниченной плоскостями: $x + y = 1$, $x - y = 1$ и $x = 0$.

Р е ш е н и е. Заданная функция описывает гиперболический параболоид и определена при $x \in \Re$ и $y \in \Re$. Ограничивающая область в сечении $u = \text{const}$ представляет собой треугольник с вершинами $M_1(0, 1)$, $M_2(0, -1)$, $M_3(1, 0)$ (рис. 5.14,б).

Следуя теореме о достаточном условии существования экстремума функции двух переменных, последовательно выполним следующие действия.

1. Найдем первые частные производные функции. Из их равенства нулю определяем значения x_* и y_* координат критической точки:

$$u'_x = 2(x-1) = 0, \quad \Longrightarrow \quad x_* = 1;$$

$$u'_y = -2y = 0, \quad \Longrightarrow \quad y_* = 0.$$

Таким образом, точка $M_*(1, 0)$ является критической точкой — точкой, в которой может существовать локальный экстремум функции u.

2. Найдем вторые производные u:

$$A = u''_{xx} = 2 > 0; \quad B = u''_{xy} = u''_{yx} = 0; \quad C = u''_{yy} = -2$$

и определитель:

$$\Delta = AC - B^2 = -2 \cdot 2 = -4 < 0.$$

Отрицательное значение Δ говорит о том, что в точке $M_*(1,0)$ $u(1,0){=}1$ локальный экстремум не существует. Действительно, рассматриваемая точка для гиперболического параболоида является седловой точкой: по сечению плоскостью $y = 0$ — минимум; плоскостью $x = 1$ — максимум.

Рассмотрим поведение функции $u = u(x,y)$ на границах области ограничений.

При $x = 0$ $u_y = -y^2 + 2$. Исследуем полученную функцию одной переменной на экстремум.

$$u'_y = -2y = 0, \implies y_1 = 0; \quad u''_y = -2 < 0.$$

Значения производных говорят о том, что точка $O(0,0)$ является точкой локального максимума на границе, задаваемой плоскостью $x = 0$. В этой точке $u_0 = u(0,0) = 2$.

Найдем значения функции в угловых точках $M_1(0,1)$ и $M_2(0,-1)$:

$$u_1 = u(0,1) = 1; \quad u_2 = u(0,-1) = 1.$$

На границе $x + y = 1$ $(x = 1 - y)$ получим:

$$u_y = -y^2 + (1 - y - 1)^2 + 1 = 1.$$

Функция на границе M_1M_3 постоянна. M_1M_3 — линия уровня заданной функции. Как известно, гиперболический параболоид имеет прямолинейные образующие, одной из которых и является прямая $x = 1 - y$, получаемая в сечении заданной поверхности плоскостью $u = 1$.

Аналогичный результат получается в сечении поверхности плоскостью $x = 1 + y$ (прямая M_2M_3):

$$u_y = -y^2 + (1 + y - 1)^2 + 1 = 1.$$

Таким образом, минимальное значение $u_{\min} = 1$ функция u имеет во всех точках границы $M_1M_3M_2$ (на рисунке выделены жирными линиями), а в точке $O(0,0)$ значение функции максимально $u_{\max} = u(0,0) = 2$.

3. Фирма выпускает два вида товаров и реализует их: первого вида по цене $P_1 = 800$ д.е., второго — по цене $P_2 = 500$ д.е. Требуется определить объемы Q_1 и Q_2 выпуска продукции, обеспечивающие предприятию наибольшую прибыль, если известно, что затраты C на производство двух видов продукции определяются зависимостью:

$$C = 4Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2.$$

Р е ш е н и е. Доход R предприятия от реализации двух видов продукции:

$$R = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 800Q_1 + 500Q_2.$$

Прибыль Π определяется разностью дохода и затрат:

$$\Pi = R - C = 800Q_1 + 500Q_2 - 4Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2.$$

Для определения наибольшей прибыли достаточно найти максимум функции Π, если он существует.

Следуя схеме определения локального экстремума функции двух переменных, необходимые вычисления проводим в два этапа.

1. Найдем частные производные функции Π по двум независимым переменным Q_1 и Q_2:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = 800 - 8Q_1 - 2Q_2,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = 500 - 2Q_1 - 2Q_2.$$

Приравнивая производные нулю, приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} 800 - 8Q_1 - 2Q_2 = 0, \\ 500 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0, \end{cases}$$

решение которой:

$$Q_1^* = 50, \qquad Q_2^* = 200.$$

2. Найдем вторые производные функции Π в точке $M_*(Q_1^*; Q_2^*) = M_*(50; 200)$:

$$A = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2}\right|_{M_*} = -8 < 0, \quad B = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right|_{M_*} = -2, \quad C = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2}\right|_{M_*} = -2.$$

Положительное значение определителя:

$$\Delta = AC - B^2 = (-8)(-2) - (-2)^2 = 12 > 0$$

говорит о существовании экстремума, а отрицательное значение $A = -8$ (или $C = -2$) указывает на то, что экстремальное значение — максимум.

Искомая величина

$$\Pi_{\max}{=}\Pi(50;200){=}800{\cdot}50{+}500{\cdot}200{-}4{\cdot}50^2{-}2{\cdot}50{\cdot}200{-}200^2{=}70000\ (\text{д.е.})$$

Таким образом, для обеспечения максимальной прибыли $\Pi_{\max}$ фирма должна производить 50 единиц товаров первой и 200 единиц товаров второй группы.

4. Первая часть производимого предприятием товара реализуется на внешнем, вторая часть — на внутреннем рынке. Спрос на внешнем и внутреннем рынках описывается линейными функциями (Q_1, Q_2 — объемы производимой продукции для внешнего и внутреннего рынков; P_1, P_2 — цены единицы соответствующей продукции):

$$Q_1 = 50 - P_1, \qquad Q_2 = 40 - 2P_2.$$

Суммарные затраты фирмы представляются зависимостью:

$$C = 4000 + 20(P_1 + P_2).$$

Требуется определить, какую ценовую политику должно вести предприятие, чтобы его прибыль была максимальной.

Р е ш е н и е. Суммарный доход фирмы от реализации товаров на внешнем и внутреннем рынках:

$$R = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 50P_1 + 40P_2 - P_1^2 - 2P_2^2.$$

Прибыль равна доходу за вычетом затрат:

$$\Pi = R - C = 30P_1 + 20P_2 - P_1^2 - 2P_2^2 - 4000.$$

Это функция двух переменных, экстремальное значение которой определим по принятой схеме.

1. Частные производные от Π по независимым переменным приравняем нулю и из полученных уравнений определим значения P_1^* и P_2^* координат стационарной точки:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = 30 - 2P_1 = 0, \implies P_1^* = 15;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = 20 - 4P_1 = 0, \quad \Longrightarrow \quad P_2^* = 5.$$

2. Вторые частные производные Π в стационарной точке:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2} = -2 < 0, \quad B = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2} = -4$$

позволяют найти значение определителя:

$$\Delta = AC - B^2 = (-2)(-4) - 0^2 = 8 > 0.$$

Положительное значение определителя говорит о существовании экстремума, а отрицательное значение A (или C) — о том, что это максимум. Поэтому

$$\Pi_{\max} = 30 \cdot 15 + 40 \cdot 5 - 15^2 - 2 \cdot 5^2 = 275.$$

Таким образом, максимальное значение прибыли $P_{max} = 275$ д.е. фирма получит, если будет продавать на внешнем рынке товары по цене 15 д.е., а на внутреннем рынке — по цене 5 д.е.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти экстремальные значения функции $u = x^3 - 3x^2 + 6y^2 - 9x + 12y + 5$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = -3x^2 - 4y^2 + 2xy + x - 4y - 8$ в области, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $2x - y + 2 = 0$.

3. Функцию затрат на производство двух видов продукции объемами Q_1 и Q_2 описывают зависимостью $C = 4Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + Q_2^2$, а стоимости товаров соответственно равны $P_1 = 125$ д.е., $P_2 = 60$ д.е. Найти объемы производимой продукции, которые принесут предприятию максимальную прибыль.

Типовые контрольные работы

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ (на 15 минут)

1. Перечислите правильные утверждения.

1. Вторая смешанная производная функции двух переменных не зависит от порядка дифференцирования.
2. При определении производной по одной из переменных от функции нескольких переменных другие переменные считаются постоянными.
3. Для любой элементарной функции всегда найдется такое натуральное число N, что при $n > N$ n-я производная функции обратится в нуль.
4. Если существует и конечна какая-либо производная функции нескольких переменных в некоторой точке, то этого достаточно, чтобы функция была непрерывна в этой точке.
5. Среди ответов 1–4 нет требуемых.

2. Расположите номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка) для функции $y = y(x)$. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Приращение функции	1. dx;
2. Приращение аргумента	2. $y'dx$;
3. Производная функции	3. $y(x+\Delta x) - y(x)$;
4. Дифференциал функции	4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Выделите соотношения, справедливые для правила Лопиталя ($f(x)$, $g(x)$ — непрерывные функции, а их отношение представляет собой неопределенность при соответствующем значении x).

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$.

2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$.

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

5. Среди соотношений 1–4 нет требуемых.

4. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Градиент функции	1. $u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta$;
2. Производная по направлению	2. $(u'_x; u'_y)$;
3. Модуль градиента	3. $\sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2}$;
4. Отношение приращения функции к приращению аргумента	4. $u'_x dx + u'_y dy$.

5. Перечислите утверждения, входящие в необходимое и достаточное условия существования локального минимума функции $u = u(x; y)$ $(A = u''_{xx},\ B = u''_{xy},\ C = u''_{yy})$.

1. $\nabla u = 0$; 2. $u'_x = u'_y = 0$; 3. $AC > B^2$; 4. $B = 0$.
5. Среди утверждений 1 – 4 нет требуемых.

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ (на 75 минут)

1. Найти производную функции

$y = x \ln^2 \sqrt{x^3 - 1}$.

2. При $x = \pi$ и $\Delta x = 0,1$ вычислить производную и найти дифференциал функции

$y = \sqrt{x/\pi} + \operatorname{tg} x$.

3. Найти вторую смешанную производную функции

$u = e^x y^3 + \sqrt{x} \ln y$.

4. Найти: а) производную по направлению биссектрисы первого координатного угла; б) градиент в точке $M(0,\ 1)$; в) модуль градиента в точке M для функции двух переменных

$u = x^2 y + \sqrt{y}$.

5. Используя правило Лопиталя, найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln 2x$.

Задание на расчетную работу 2

В расчетной работе $k = 1 + \sqrt{10N/(n+10)}$, ($N$ — последняя цифра номера группы; n — порядковый номер студента в списке группы, или последние две цифры номера студенческого билета).

Найти локальный экстремум функции

$$u = \frac{(x-2k)^2}{16} + \frac{(y-k)^2}{9} - k^2 :$$

1. аналитическим методом;
2. симплексным методом $\big($начальная точка $O(0,0); \quad d = 1\big)$;
3. методом градиентного спуска $\big($начальная точка $M_0(5,5)\big)$.

Приближенные вычисления проводить или с точностью до третьей значащей цифры, или ограничиться пятью итерациями.

Дать оценку точности полученных результатов.

Глава 6

Интегрирование

6.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Интегрирование является операцией, обратной по отношению к дифференцированию. Целью интегрирования является определение такой функции $F(x)$, производная от которой равна $f(x)$. Например, для $f(x) = x^3$ функция $F(x) = x^4/4$ удовлетворяет таким требованиям, так как $(x^4/4)' = x^3$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Если в первообразную входит в качестве слагаемого постоянная C, т.е. $F(x) \Longrightarrow F(x) + C$, то такая функция также будет первообразной той же функции $f(x)$, так как

$$(F(x) + C)' = f(x). \tag{6.1}$$

Таким образом, первообразную функции можно определить только с точностью до постоянного слагаемого. Отсюда следует, что если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$, то эти первообразные отличаются друг от друга только постоянным слагаемым ($F_1(x) - F_2(x) = C$). Конечно, в частном случае постоянная C может быть равной нулю.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных $F(x) + C$.

Это определение имеет символическую запись

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{6.2}$$

где $\int$ — знак интеграла; $f(x)$ — подынтегральная функция; $f(x)dx$ — подынтегральное выражение.

Процесс нахождения интеграла называется *интегрированием.*

6.2. Свойства неопределенного интеграла

Сформулируем некоторые основные свойства неопределенного интеграла в виде теорем.

Теорема 1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал — подынтегральному выражению.*

Действительно,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = f(x)dx.$$

Теорема 2. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.*

Покажем, что это так:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{6.3}$$

Так как $dF(x) = F'(x)\,dx$ и $F(x)$ — первообразная, то из определения интеграла следует (6.3).

Теорема 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Убедимся в этом.

Согласно Теореме 1 для левой части равенства запишем

$$\left(\int kf(x)\,dx\right)' = kf(x).$$

Дифференцирование правой части равенства приводит, очевидно, к тому же результату, так как постоянный множитель выносится за знак производной.

Теорема 4. *Интеграл от алгебраической суммы подынтегральных функций равен сумме интегралов от этих функций*:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 3, т.е. с использованием дифференцирования обеих частей равенства и сравнения полученных результатов.

6.3. Таблица основных интегралов

Знание таблицы производных дает возможность определить первообразные многих функций, а корректность их определения проверить обратным действием — дифференцированием. Нижеследующие интегралы называются *табличными.*

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \ (n \neq -1).$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$
4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
5. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

Проверим, например, формулы 2 и 8:

$$(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x > 0,$$

$$(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x < 0;$$

$$(\operatorname{tg} x + C)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + C\right)' = \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Искусство интегрирования функций сводится, как правило, к преобразованию интегралов к табличным. Существуют несколько известных приемов выполнения этих операций. Рассмотрим некоторые из них. В нижеследующих преобразованиях не будут даваться пояснения очевидных приемов, основанных на использовании сформулированных в § 6.2 свойств интегралов, например, разложение на сумму интегралов, вынесение за знак интеграла постоянного множителя и т.д.

6.4. Метод замены переменной

Метод замены переменной в неопределенных интегралах опирается на правило дифференцирования сложной функции $f'_x(u) = f'_u u'_x$ и сводится к следующему преобразованию интеграла:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \{u = \varphi(x);\ du = \varphi'(x)\,dx\} = \int f(u)\,du. \tag{6.4}$$

Обозначение переменного аргумента под знаком интеграла может, конечно, быть любым: $x, t, u, \ldots$

Общего правила замены переменной под интегралом не существует. Однако навыки интегрирования, приобретаемые в процессе решения задач, вырабатывают интуицию в выборе функций, приводящих подынтегральное выражение к табличному путем замены переменной.

Приведем некоторые примеры решения задач интегрирования указанным методом. При преобразованиях интегралов в фигурных скобках приводятся обозначения, промежуточные преобразования и пояснения.

Примеры.

$$J_1 = \int x\sqrt[3]{x+1}\,dx =$$

$$=\Big\{\text{введем переменную } t=\sqrt[3]{x+1},\ \text{ тогда } x=t^3-1;\ dx=3t^2\,dt\Big\}=$$

$$= \int (t^3 - 1)t3t^2\,dt = 3\left(\int t^6\,dt - \int t^3\,dt\right) = \{\text{табличные}$$

$$\text{интегралы}\} = 3\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{4}t^4\right) + C = \frac{3}{28}t^4(4t^3 - 7) + C =$$

$$\{\text{возвращаемся к исходной переменной}\} = \frac{3}{28}(4x-3)(x+1)^{4/3} + C.$$

$$J_2 = \int xe^{-x^2}\,dx = \{t = -x^2; dt = -2x\,dx\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

$$J_3 = \int \frac{1}{x}\ln^2 x\,dx = \left\{t = \ln x; dt = \frac{dx}{x}\right\} = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C.$$

$$J_4 = \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \{t = \cos x;\ dt = -\sin x\,dx\} =$$
$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

При замене переменной справедливо соотношение

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать обе части последнего выражения:

$$f(ax+b) = \frac{a}{a}F'(ax+b) + C' = F'(ax+b).$$

Поэтому формулы табличных интегралов легко обобщаются. Например, формула 5:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$

6.5. Метод интегрирования по частям

Из формулы дифференциала произведения

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

следует:

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интегрируя последнее равенство почленно, запишем

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Формула представляет метод *интегрирования по частям* и во многих случаях облегчает задачу сведения интеграла к табличному. Постоянную интегрирования при первоначальной записи формулы можно не писать — она появится при взятии интеграла от второго слагаемого.

Рассмотрим типичные примеры использования процедуры взятия интегралов по частям.

$$J_1 = \int xe^{2x}\,dx = \{u{=}x;\ dv{=}e^{2x}\,dx \Longrightarrow du{=}dx;\ v{=}\frac{1}{2}e^{2x}\} =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C.$$

$$J_2 = \int x^3 \ln x\,dx = \left\{u{=}\ln x;\ dv{=}x^3\,dx \Longrightarrow du{=}\frac{1}{x}\,dx;\ v{=}\frac{1}{4}x^4\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C.$$

Иногда интегрирование по частям приходится применять неоднократно. Например,

$$J_3{=}\int (x^2{+}1)e^{-x}\,dx = \{u = x^2{+}1;\ dv = e^{-x}\,dx \Longrightarrow du = 2x\,dx;$$

$$v = -e^{-x}\} = -(x^2+1)e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx.$$

Преобразования не дали возможности привести интеграл к табличному. Применим вновь к полученному интегралу метод интегрирования по частям:

$$\int xe^{-x}\,dx = \{u{=}x;\ dv{=}e^{-x}\,dx \ \Longrightarrow\ du{=}dx;\ v{=}{-}e^{-x}\} =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Тогда

$$J_3 = -e^{-x}(x^2 + 1 + 2x + 2) + C = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x} + C.$$

Интегрирование по частям рационально применять в случаях, когда подынтегральные функции содержат произведения полиномов n-й степени

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

на другие функции:

$$\int P(x)e^{ax}\,dx; \qquad \int P(x)\sin mx\,dx; \qquad \int P(x)\cos nx\,dx;$$

$$\int P(x)\ln x\,dx; \qquad \int P(x)\arcsin x\,dx.$$

Отметим очевидные рекомендации для вычисления приведенных типов интегралов. Для интегралов первой строки в качестве переменной u следует выбирать полином ($u = P(x)$), так как взятие дифференциала от u в этом случае понижает порядок полинома на единицу. В интегралах второй группы новые переменные следует вводить так, чтобы $dv = P(x)dx$. Тогда дифференцирование второй функции в произведении подынтегральной функции переведет ее в степенную.

Рассмотренные методы замены переменной и интегрирования по частям требуют интуиции исполнителя и определенных навыков решения задач. Существуют приемы интегрирования (конечно для определенного вида подынтегральных функций), которые однозначно приводят к упрощению задачи взятия интегралов. В следующих разделах рассмотрены именно такие методы.

6.6. Преобразование рациональных дробей

Прежде чем приступить к изложению правил интегрирования дробных функций, рассмотрим некоторые понятия и положения, связанные с дробями.

Рациональной дробью называется выражение $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены (полиномы) в общем случае различных степеней. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то рациональная дробь называется *правильной.* В противном случае дробь называется *неправильной.*

Теорема. *Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы полинома и правильной дроби.*

Продемонстрируем справедливость теоремы на примере неправильной дроби $\dfrac{3x^3+x^2-1}{x+2}$.

Осуществим деление числителя на знаменатель, используя известное из арифметики правило деления чисел «в столбик»:

$$
\begin{array}{llll|l}
3x^3 & +\ x^2 & -1 & & \underline{x+2} \\
\underline{3x^3} & \underline{+6x^2} & & & 3x^2-5x+10 \\
 & -5x^2 & -1 & & \\
 & \underline{-5x^2} & \underline{-10x} & & \\
 & & 10x & -1 & \\
 & & \underline{10x} & \underline{+20} & \\
 & & & -21 &
\end{array}
$$

Первое слагаемое частного от деления $(3x^2)$ выбираем таким образом, чтобы результат его умножения на первое слагаемое делителя (x) в результате равнялся первому слагаемому делимого $(3x^3)$. Второе слагаемое частного $(-5x)$ при умножении на первое слагаемое делителя (x) должно равняться слагаемому с наибольшей степенью переменной $(-5x^2)$, получаемому после вычитания результата первого действия из делимого, и т.д.

В результате осуществленного деления из дроби выделены целая часть (частное от деления) $(3x^2-5x+10)$ и новый числитель правильной дроби (остаток от деления) (-21), поэтому исходная неправильная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{3x^3+x^2-1}{x+2} = 3x^2-5x+10-\frac{21}{x+2}.$$

Если знаменатель правильной дроби содержит полином, степень которого выше или равна второй, то этот полином, как известно из алгебры, можно разложить на множители, равные в случае действительных корней разностям переменной в первой степени и корней полинома. Разложение полинома знаменателя дроби дает возможность представить эту дробь в виде суммы простейших слагаемых.

Продемонстрируем сказанное на примере правильной дроби, которую представим в виде суммы двух слагаемых с неизвестными коэффициентами разложения A и B:

$$\frac{x+a}{(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-b} + \frac{B}{x-c}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x+a}{(x-b)(x-c)} = \frac{A(x-c)+B(x-b)}{(x-b)(x-c)} = \frac{(A+B)x-(Ac+Bb)}{(x-b)(x-c)}. \tag{6.5}$$

Для того чтобы представленные дроби с равными знаменателями были равны, достаточно приравнять в их числителях множители, стоящие при x, и свободные члены. В результате придем к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными A и B:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ cA + bB = -a. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений являются выражения:

$$A = \frac{b+a}{b-c}, \qquad B = \frac{a+c}{c-b}.$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x является универсальным методом определения неизвестных и может быть использовано и в случаях, когда степени полиномов в числителях правой и левой частей равенств выше первой.

Для первой степени полиномов (как в рассмотренном выражении) более эффективным является другой подход к определению неизвестных.

Равенство (6.5) справедливо при любых значениях x, в том числе при $x=b$ и $x=c$. Приравнивая числители при $x=b$, получим

$$b+a = A(b-c), \implies A = \frac{b+a}{b-c}.$$

При $x=c$

$$c+a = B(c-b), \implies B = \frac{c+a}{c-b}.$$

Аналогичные разложения можно осуществить при любом числе множителей в знаменателе.

Если корни полинома знаменателя комплексно-сопряженные, в разложении дроби на простейшие знаменатели слагаемых с мнимыми корнями должны представлять собой полиномы второй степени. В числителях таких слагаемых должен стоять полином первой степени. Степень полинома числителя на единицу меньше степени полинома знаменателя.

Пример. Разложить на сумму простейших рациональную дробь $\dfrac{2x-1}{x^3+1}$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой разложения на множители суммы кубов, преобразуем заданную дробь:

$$\frac{2x-1}{x^3+1} = \frac{2x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (A+B-C)x + (B+C)}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях x числителей заданной дроби и полученной, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} A+C = 0, \\ A+B-C = 2, \\ B+C = -1; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1, \\ B &= 0, \\ C &= -1. \end{aligned}$$

Разложение заданной дроби на простейшие:

$$\frac{2x-1}{x^3+1} = \frac{x}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}.$$

6.7. Примеры интегрирования рациональных дробей

В результате осуществления действий над дробями, описанных в §6.6, интегрирование выражений, содержащих рациональные дроби, можно свести к следующим шести видам интегралов:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x \pm a}; \qquad J_2 = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}; \qquad J_3 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2};$$

$$J_4 = \int \frac{dx}{(x \pm a)^2}; \qquad J_5 = \int \frac{x\,dx}{(x \pm a)^2}; \qquad J_6 = \int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2}.$$

Рассмотрим последовательно каждый из шести представленных интегралов.

$$J_1 = \int \frac{dx}{x \pm a} = \{\text{табличный интеграл}\} = \ln|x \pm a| + C;$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \left\{ \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \{x = at;\ dx = a\,dt\} = \int \frac{a\,dt}{a^2t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \{\text{табличный интеграл}\} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$J_4 = \int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = \{x \pm a = t;\ dx = dt\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x \pm a} + C;$$

$$J_5 = \int \frac{x\,dx}{(x \pm a)^2} = \left\{ \frac{x}{(x \pm a)^2} = \frac{1}{(x \pm a)} \mp \frac{a}{(x \pm a)^2} \right\} =$$

$$= \int \frac{dx}{x \pm a} \mp a\int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = \ln|x \pm a| \pm \frac{a}{x \pm a} + C;$$

$$J_6 = \int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2} = \{t = x^2 \pm a^2;\ dt = 2x\,dx\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a^2| + C.$$

Подынтегральные функции рассмотренных интегралов $J_1 - J_6$ являются рациональными дробями — частным случаем рациональных функций. В математической литературе описаны различные приемы приведения интегралов от рациональных функций к табличным интегралам. Мало того, разработаны многочисленные приемы сведения некоторых иррациональных подынтегральных функций к рациональным с помощью специальных подстановок. Так, для интегралов с рациональными (R) подынтегральными функциями

$$R_1\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right), \quad R_2\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right), \quad R_3\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

используются подстановки, соответственно

$$x = a\sin t, \quad x = a\cos t, \quad x = a\,\mathrm{tg}\,t,$$

где $t \in [0, \pi]$ и $t \neq \pi/2$ для функций R_1 и R_2.

Пример. $$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx = \left\{ x = \frac{2}{\cos t} \;\to\; dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt; \right.$$
$$\left. \sqrt{x^2-4} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = 2\frac{\sin t}{\cos t} \right\} = \int \frac{2\sin t}{\cos t}\frac{\cos t}{2}\frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt =$$
$$= 2\int \mathrm{tg}^2\, t\,dt = 2\int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt = 2\,\mathrm{tg}\,t - t =$$
$$= \left\{ \mathrm{tg}\,t = \frac{\sin t}{\cos t} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \right\} =$$
$$\sqrt{x^2-4} - \arccos\frac{2}{x} + C.$$

Для подынтегральных рациональных функций от иррациональных выражений типа $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ при $ad \neq bc$ используется подстановка $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Для некоторых других типов рациональных функций от иррациональных выражений используются подстановки Эйлера, эллиптические подстановки и другие. Читателей, которые проявят интерес к методам сведения таких интегралов к табличным, рекомендуем обратиться, например, к [15].

6.8. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим два типа интегралов от тригонометрических функций:

$$1. \int \sin mx \sin nx\,dx; \quad \int \sin mx \cos nx\,dx; \quad \int \cos mx \cos nx\,dx; \tag{6.6}$$

$$2. \int \sin^m x\ \cos^n x\,dx, \tag{6.7}$$

где $m, n \in N$.

Использование известных из курса тригонометрии соотношений:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\{\cos [(m-n)x] - \cos [(m+n)x]\};$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\{\sin [(m-n)x] + \sin [(m+n)x]\};$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\{\cos [(m-n)x] + \cos [(m+n)x]\}$$

позволяет привести первую группу интегралов к табличным. Продемонстрируем сказанное на примере:

$$J_1 = \int \sin 3x \cos 6x\, dx = \{m = 3, n = 6\} = \frac{1}{2}\int \sin [(3-6)x]\, dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \sin [(3+6)x]\, dx = -\frac{1}{2}\int \sin 3x dx + \frac{1}{2}\int \sin 9x\, dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{18}\cos 9x + C.$$

При преобразованиях интегралов второго типа используется замена четной степени одной из тригонометрических функций (синуса или косинуса) на другую с использованием соотношения $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и равенств $\cos x\, dx = d\sin x$ или $\sin x\, dx = -d\cos x$. Преобразование подынтегральных выражений и значение интеграла зависят от четности степеней m и n.

Пусть $n = 2k+1$, т.е. n — нечетный показатель степени. Тогда

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k d\, \sin x.$$

Для дальнейшего преобразования интеграла достаточно ввести новую переменную $t = \sin x$, которая сведет подынтегральную функцию к степенной.

Если оба показателя степени m и n в группе интегралов (6.7) — четные числа, то для преобразования подынтегрального выражения используем формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x);\ \ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);\ \ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x. \quad (6.8)$$

Понижение степеней тригонометрических функций осуществляется до тех пор, пока показатель степени хотя бы одной из них не станет нечетным. Тогда интегрирование сведется к описанной выше схеме.

Приведем два примера вычисления интегралов:

$$J_2 = \int \sin^6 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^6 x(1 - \sin^2 x) d\, \sin x = \{t = \sin x\} =$$

$$= \int t^6\, dt - \int t^8\, dt = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C;$$

$$J_3 = \int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x)\, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

Как в случае рациональных и иррациональных функций для интегралов, содержащих тригонометрические функции, используются некоторые специальные подстановки, позволяющие свести интегралы к табличным. Среди этих подстановок отметим получившую наибольшее распространение в преобразованиях интегралов типа

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx$$

универсальную тригонометрическую подстановку

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi). \tag{6.9}$$

В этом случае

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2}.$$

Так что

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx = \int \left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) \frac{2\, dt}{1 + t^2}.$$

Отметим, что не всегда удается взять интегралы, т.е. получить первообразную в виде комбинации элементарных функций. Для вычисления таких интегралов используются приближенные численные методы.

6.9. Понятие определенного интеграла

Определенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ называется число, равное приращению ее первообразной на указанном отрезке.

В математических символах данное определение записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \qquad (6.10)$$

Числа a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования.*

Равенство (6.10) называется *формулой Ньютона–Лейбница.*

Постоянная в первообразной $F(x)$ при вычислении определенного интеграла исчезает. Действительно, так как первообразные отличаются друг от друга постоянными слагаемыми, то

$$(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ достаточно определить значение ее первообразной на концах интервала интегрирования $F(b)$ и $F(a)$ и затем найти разность полученных значений.

Примеры.

$$J_1 = \int_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}\left(8^{4/3} - 0^{4/3}\right) = 12;$$

$$J_2 = \int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$$

Подставим в формулу Ньютона–Лейбница вместо верхнего предела b переменную x:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

При изменении переменной x меняется и определенный интеграл. Такой интеграл называется *интегралом с переменным верхним пределом.* В отличие от определенного интеграла, который является числом, интеграл с переменным верхним пределом является функцией переменной x:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Покажем, что $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x).$$

Функция $\Phi(x)$ — это первообразная функции $f(x)$, которая обращается в нуль при $x = a$.

6.10. Свойства определенного интеграла

Перечислим некоторые основные свойства определенного интеграла.

Отметим, что свойства 3 и 4 неопределенных интегралов (§ 6.2) остаются справедливыми для определенных интегралов. Кроме того, определенные интегралы обладают некоторыми специфическими свойствами.

1. Определенный интеграл с равными пределами интегрирования равен нулю. Действительно,

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

2. Если отрезок интегрирования разбит на части, то определенный интеграл по всему отрезку равен сумме определенных интегралов, взятых по частям отрезка:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В справедливости свойства можно убедиться, подставляя значения первообразных в левые и правые части записанного равенства:

$$F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c).$$

Заметим, что точка со значением $x = c$ может лежать за пределами отрезка интегрирования.

3. При перестановке пределов интегрирования знак интегрирования меняется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Покажем, что это так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. (*Теорема о среднем*). Определенный интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования $(b-a)$ на значение подынтегральной функции в некоторой конкретной точке $\xi \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Действительно, применим теорему Лагранжа к первообразной $F(x)$ функции $f(x)$:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi). \tag{6.11}$$

Так как $F'(\xi) = F'(x)\big|_{x=\xi} = f(x)\big|_{x=\xi} = f(\xi)$, то из (6.11) с учетом формулы Ньютона–Лейбница получим

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (b-a)f(\xi).$$

Использование перечисленных свойств позволяет во многом облегчить процедуру вычисления определенного интеграла.

6.11. Методы интегрирования по частям и замены переменной

Подставляя пределы интегрирования в формулу интегрирования неопределенного интеграла по частям

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

получим

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример.

$$J_1 = \int_e^{e^2} \ln x dx = \Big\{ u = \ln x; dv = dx; \Longrightarrow du = \frac{dx}{x}; v = x \Big\} =$$

$$= x\ln x\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx = 2e^2 - e - x\Big|_e^{e^2} = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Метод замены переменной $\big(x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt\big)$ в неопределенном интеграле выражается зависимостью

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C.$$

Если $x \in [a,b]$ и $f(x)$ — непрерывная функция, то $\varphi(t)$ также должна быть непрерывной, но на интервале, определяемом по $[a,b]$ функциональной зависимостью $x = \varphi(t)$.

Пусть

$$a = \varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad b = \varphi(\beta).$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t).$$

Действительно,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Примеры.

$$J_2 = \int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx = \left\{ \begin{array}{ll} t{=}x^2-16; & x = 4 \to t = 0 \\ dt{=}2xdx; & x = 5 \to t = 9 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^9 \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}t^{3/2}\Big|_0^9 = \frac{1}{3}(9^{3/2} - 0^{3/2}) = 9;$$

$$J_3 = \int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left\{ \begin{array}{ccc} t{=}1+3x; & & x=1 \to t=4 \\ & x=\frac{1}{3}(t-1); & \\ dt{=}3dx; & & x=5 \to t=16 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_4^{16} t^{-1/2}(t-1)\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{9}\int_4^{16}(t^{1/2}-t^{-1/2})dt =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}-2t^{1/2}\right)\Bigg|_4^{16} = 3\frac{19}{27};$$

$$J_4 = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{ll} t=\cos x; & x=0 \quad \to t=1 \\ dt=-\sin x dx & x=\pi/2 \to t=0 \end{array} \right\} =$$

$$= -\int_1^0 t^3 dt = \frac{1}{4}t^4\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

6.12. Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются интегралы с неограниченными одним или двумя пределами интегрирования или интегралы, подынтегральная функция которых терпит разрыв второго рода на интервале интегрирования.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в приложениях, в частности в теории вероятностей, несобственные интегралы с одним бесконечным пределом. Пусть бесконечным будет верхний предел. Под интегралами такого типа понимают интегралы, вычисляемые по схеме

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{6.12}$$

Если подынтегральная функция в некоторой точке $c \in [a;b]$ не существует (например, терпит разрыв второго рода), то несобственный интеграл представляется в виде суммы

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{6.13}$$

Если интегралы (6.12) и (6.13) существуют и конечны, то они называются *сходящимися*, в противном случае — *расходящимися*.

Примеры.

$$J_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1;$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\infty} = -\lim_{b\to\infty} \cos b + 1.$$

Интеграл J_1 сходящийся, так как он имеет конечное значение. Что касается J_2, то он на бесконечности не определен, т.е. интеграл расходящийся.

Для несобственных интегралов с бесконечным нижним пределом приведенная схема вычисления сохраняется с той лишь разницей, что к бесконечности следует устремлять нижний предел интегрирования.

Для интегралов с бесконечными нижним и верхним пределами (конечно, знаки бесконечностей различны) непосредственный переход к вычислению пределов может привести к некорректному результату. В частности, широко используемый в теории вероятностей интеграл Эйлера–Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

сходящийся и не равен нулю, хотя его предельные значения при $t \to \pm\infty$ равны нулю и, следовательно, разность пределов при формальном подходе получилась бы тоже равной нулю.

Подобные интегралы во избежание указанной некорректности рекомендуется вычислять, представляя в виде суммы двух интегралов с промежуточным конечным пределом интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

6.13. Геометрический смысл определенного интеграла

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 6.1) и определим *площадь криволинейной трапеции* — фигуры, заключенной между осью x, кривой $y = f(x)$ и прямыми, параллельными оси y: $x = a$ и $x = b$. Для этого разобьем интервал $[a; b]$ на n в общем неравных отрезков $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = \overline{1, n})$ и определим значения

$$y_k = f(x_k)$$

на границах отрезков.

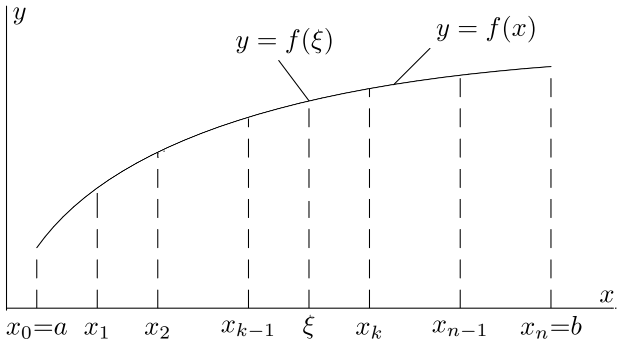


Рис. 6.1. Интегральная сумма

Считая для определенности функцию монотонно возрастающей, найдем минимальное и максимальное значения элементарных площадей для каждого подынтервала (рис. 6.2,а):

$$\Delta S_k^{\min} = f(x_{k-1})\Delta x_k; \quad \Delta S_k^{\max} = f(x_k)\Delta x_k. \tag{6.14}$$

Для убывающей функции $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ в (6.14) следует поменять местами. Если в функции на интервале ее интегрирования интервалы возрастания и убывания чередуются, то общий интервал $[a;b]$ можно разбить на подынтервалы только с возрастанием или только с убыванием функции.

Площадь элементарной криволинейной трапеции ΔS_k будет, очевидно, находиться в промежутке

$$\Delta S_k^{\min} \le \Delta S_k \le \Delta S_k^{\max}.$$

Подставим в последнее неравенство соотношения (6.14) и разделим все его части на Δx_k. Найдем предел полученного выражения при $\Delta x_k \to 0$:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} f(x_{k-1}) \le \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta S_k}{\Delta x_k} \le \lim_{\Delta x_k \to 0} f(x_k). \tag{6.15}$$

Так как при $\Delta x_k \to 0 \quad x_{k-1} \to x_k$, правая и левая части неравенства (6.15) равны $f(x_k)$. Тогда

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta S_k}{\Delta x_k} = f(x_k).$$

Последнее неравенство будет очевидно справедливо для любого $x \in [a; b]$, если функция $f(x)$ непрерывна. Поэтому, производя в нем естественные замены $x_k \to x, \quad \Delta x_k \to \Delta x$ и $\Delta S_k \to \Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$, придем к равенству

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x),$$

которое указывает на то, что функция S (без учета ее ограниченности интервалом $[a; b]$) является первообразной функции $f(x)$.

Полная площадь S криволинейной трапеции будет заключена между двумя величинами, называемыми *интегральными суммами*:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \Delta x_k \leq S \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Delta x_k.$$

Для возрастающей функции левая часть последнего неравенства представляет собой минимальное значение интегральной суммы, правая — максимальное.

Из сказанного следуют очевидные соотношения ($x_0 = a$; $x_n = b$):

$$S = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx. \tag{6.16}$$

Замечание. Если функция $f(x)$ принимает отрицательные значения на некотором отрезке $[a; b]$, то для вычисления площади криволинейной трапеции, образованной функцией на этом отрезке, необходимо перед интегралами (6.16) поставить отрицательный знак:

$$S = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

При вычислении площадей криволинейных трапеций, образованных функциями, изменяющими знаки, необходимо разбить график функции на участки интегрирования с границами, соответствующими точкам обращения в нуль функции, и затем просуммировать соответствующие интегралы, взяв их по модулю.

Примеры.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{x}$, координатной осью x и прямой $x = 4$ (рис. 6.2,б).

Р е ш е н и е.

$$S = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}.$$

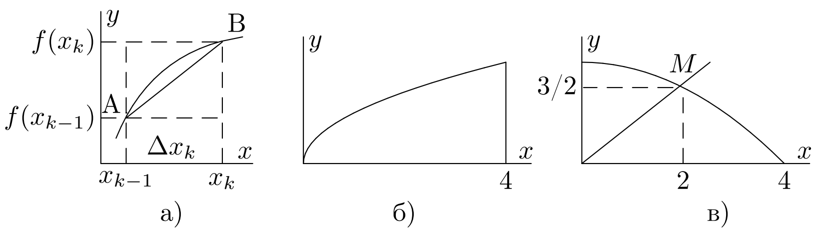


Рис. 6.2. Иллюстрация формулы прямоугольников и примеров 1 и 2

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2 - \frac{x^2}{8}, \quad y = \frac{3}{4}x, \quad y = 0$$

и находящейся в первой координатной четверти (рис. 6.2,в).

Р е ш е н и е. Предварительно найдем точку пересечения кривой с заданной наклонной прямой:

$$\begin{cases} y = 2 - \dfrac{x^2}{8}, \\ y = \dfrac{3}{4}x, \end{cases} \implies x = 2, \quad y = 3/2 \Rightarrow M\left(2; \frac{3}{2}\right).$$

Подстановка значения $y = 0$ (уравнение координатной оси x) в уравнение кривой дает значение $x = 4$ верхнего предела интегрирования.

Таким образом, искомая площадь состоит из двух характерных участков и для ее вычисления следует рассмотреть сумму двух интегралов:

$$S = \int_0^2 \frac{3}{4}x dx + \int_2^4 \left(2 - \frac{1}{8}x^2\right) dx = \frac{3}{8}x^2\Big|_0^2 + \left(2x - \frac{1}{24}x^3\right)\Big|_2^4 = 3\frac{1}{6}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y = x^2 - 4{,}5x + 2$$

и осью x (рис. 6.3,а).
Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения параболы и оси x:

$$x^2 - 4{,}5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}5; \quad x_2 = 4.$$

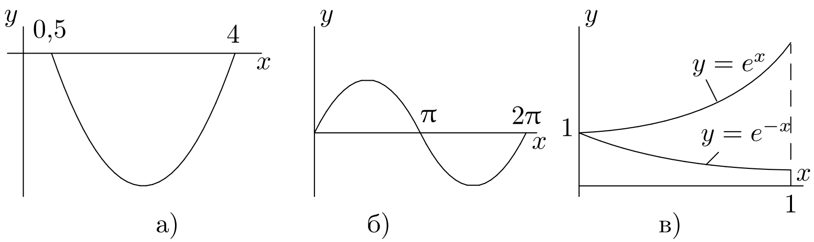


Рис. 6.3. Иллюстрации к примерам 3, 4 и 5

На интервале интегрирования $x \in (0{,}5; 4)$ $\quad y < 0$, поэтому перед интегралом ставим знак минус:

$$S = -\int_{0,5}^{4} (x^2 - 4{,}5x + 2)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4{,}5}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{0,5}^{4} = 7\frac{7}{48}.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ на участке $x \in [0; 2\pi]$ (рис. 6.3,б).
Р е ш е н и е. Кривая меняет знак, поэтому разбиваем ось x на два участка $x \in [0; \pi]$ и $x \in [\pi; 2\pi]$, соответствующих положительному и отрицательному значениям функции. При вычислении площади знак у второго интеграла меняется на отрицательный:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

5. Найти площадь фигуры, заключенной между двумя кривыми: $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ и парой прямых $x = 0$ и $x = 1$ (рис. 6.3,в).
Р е ш е н и е.

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = (e^x + e^{-x})\Big|_0^1 = e - 2 + 1/e.$$

6.14. Приложения определенного интеграла к задачам экономики

Задача 1. Пусть функция $f(t)$ определяет производительность некоторой фирмы в момент времени t (количество продукции в единицу времени). Если производительность не изменяется со временем, то количество продукции ΔQ, выпускаемое фирмой за некоторый промежуток времени Δt, определится произведением

$$\Delta Q = f(t)\Delta t.$$

Пусть производительность труда — величина, изменяющаяся со временем. Требуется определить количество продукции, выпущенной фирмой за заданный период времени $[T_1; T_2]$.

Разобьем период времени на n достаточно малых интервалов $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ $(k = \overline{1, n})$ таких, в течение которых производительность не изменяется и определяется величиной $f(t_k)$.

Ясно, что общее количество продукции Q, выпущенной фирмой за период времени $[T_1; T_2]$, определится суммой

$$Q = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k.$$

С точки зрения интегрального исчисления последнее выражение представляет собой интегральную сумму. Поэтому для подсчета количества выпускаемой продукции без предположения о неизменности $f(t)$ на подынтервалах изменения времени (при стремлении Δt_k к нулю) получим формулу

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} f(t)\,dt. \qquad (6.17)$$

Таким образом, *если $f(t)$ — функция производительности в момент времени t, то выражение* (6.17) *определяет количество продукции, выпущенной за период времени* $[T_1; T_2]$.

Задача 2. Для анализа экономической эффективности работы производственного предприятия Кобб и Дуглас предложили представлять функцию производительности в виде произведения двух функций, одна из которых определяет производственные затраты, вторая — объем производственных фондов.

Если предположить, что затраты труда увеличиваются по линейному закону $at + b$, а затраты капитала — по экспоненциальному e^{kt}, (a, b, k — постоянные), то функция производительности

$$f(t) = (at + b)e^{kt}.$$

Пусть для некоторого предприятия производительность характеризуется функцией Кобба–Дугласа с коэффициентами $a = b = 1$, $k = 2$. Требуется определить объем продукции, произведенной предприятием за 4 года.

Используя формулу (6.17) и конкретизируя $f(x)$, составим математическую модель задачи и вычислим интеграл, применяя метод интегрирования по частям:

$$Q = \int_0^4 (t+1)e^{2t}\,dt = \left\{u{=}t{+}1,\ dv{=}e^{2t}\,dt \Longrightarrow du{=}dt,\ v{=}\frac{1}{2}e^{2t}\right\} =$$

$$= (t+1)\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^4 - \frac{1}{2}\int_0^4 e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}(5e^8 - 1) - \frac{1}{4}e^{2t}\Big|_0^4 = \frac{1}{4}(9e^8 - 1).$$

Задача 3. В планировании народного хозяйства важную роль играет степень неравенства распределения доходов населения. Оценку степени неравенства можно сделать по поведению функции, отражающей зависимость количества доходов от количества населения. Введем две безразмерные величины: x, равную отношению доходов рассматриваемой группы населения к доходам всего населения, и y, равную отношению рассматриваемой группы населения ко всему населению. Обе эти величины будут, очевидно, изменяться в пределах от нуля до единицы.

Если доходы населения распределены равномерно, то функция $y = f(x)$, называемая в экономике кривой Лоренца, будет линейной:

$$y = f_1(x) = x.$$

На рис. 6.4 эта функция изображена прямой OA. Реальное, в общем неравномерное, распределение доходов будет представляться некоторой кривой OBA, описываемой функцией $y = f_2(x)$.

Степень неравенства в распределении доходов всего населения может быть оценена величиной площади, заключенной между изображенной на рисунке кривой OBA и осью x и отнесенной к площади S_0 треугольника OAC (коэффициент Джини).

Вспоминая геометрический смысл определенного интеграла, для вычисления коэффициента Джини запишем выражение

$$K = \frac{1}{S_0}\int_0^1 [f_1(x) - f_2(x)]\,dx.$$

Найдем коэффициент Джини для конкретно заданной функции

$$f_2(x) = 1 - \sqrt{1-x^2},$$

полученной в результате аппроксимации статистических данных реального распределения доходов некоторой группы населения:

$$K = \frac{1}{S_0}\int_0^1 [x - (1 - \sqrt{1-x^2})]\,dx.$$

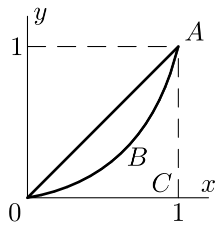


Рис. 6.4. Кривая Лоренца

Вычислим интеграл, воспользовавшись для преобразования его третьего слагаемого методом замены переменной (площадь S_0 треугольника OAC равна, очевидно, $1/2$, а интеграл численно равен площади, заключенной между прямой OA и кривой OBA):

$$K = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} x{=}\sin t;\;\; dx{=}\cos t\,dt; \\ x{=}0 \to t{=}0;\;\; x{=}1 \to t{=}\pi/2 \end{array}\right\} =$$

$$= -1 + 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = -1 + \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= -1 + \pi/2 + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1 \approx 0{,}57.$$

Если коэффициент $K \in [0;1]$, причем для равномерного распределения ресурсов $K = 0$, то полученное распределение доходов с $K = 0{,}57$ следует оценить как в большой степени неравномерное.

Задача 4. Определение начальной суммы P_0 капиталовложений по ее конечной (полученной через время T) величине при годовой процентной ставке $r\% = 100r$ (дисконтирование). Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капиталовложений.

В случае сложных, непрерывно начисляемых процентов для определения величины P_0 в экономике используют зависимость

$$P_0 = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt,$$

где $f(t)$ — функция, описывающая изменяемый во времени доход при постоянном показателе r.

Определим дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке $r\% = 8\%$, если первоначальные капиталовложения составили 10 млн. д.е. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн. д.е.

Исходя из условий задачи запишем выражение для функции капиталовложений $f(t) = 10 + 1 \cdot t$. В этом случае

$$P_0 = \int_0^3 (10+t)e^{-0{,}08t}\,dt.$$

Интегрируя по аналогии с задачей 1, получим $P_0 = 30{,}5$ млн. д.е. Это означает, что ежегодные капиталовложения, равные $10+t$ (в первом году — 10, во втором — 11, в третьем — 12), равносильны разовому первоначальному вложению, равному 30,5 млн. д.е. И в первом, и во втором случаях наращенная сумма будет одинаковой.

Задача 5. Пусть заданы функции предложения $P(S)$ и спроса $P(D)$ (рис. 6.5). Точка $M(Q_0, P_0)$ является точкой рыночного равновесия, когда цена на товар P_0 соответствует равенству товаров, предлагаемых к продаже, и товаров, востребованных потребителем: $P_0(S_0) = P_0(D_0) = P_0(Q_0)$. Координата Q_0 может быть найдена из уравнения $P(S) = P(D)$, решение которого позволяет определить цену P_0, которая устраивает и продавца и покупателя.

Если производитель представил товар на рынок в количестве $S_1 = Q_1 < Q_0$ и продал его в количестве ΔS по цене $P_0 > P_{S1}$, то он получил выручку $P_0\Delta S$, бóльшую, чем планировал $(P_{S1}\Delta S)$, на величину $(P_0 - P_{S1})\Delta S$. Разность в диапазоне изменения количества товаров от 0 до S_0 представляет собой интегральную сумму (на рис. 6.5 площадь криволинейной трапеции AA_1MC), которая равна определенному интегралу $(S+D+Q)$

$$P_S = \int_0^{S_0} \Big(P_0 - P(S)\Big)\,dS \qquad (6.18)$$

и называется излишком производителя.

Посмотрим теперь на ситуацию с точки зрения потребителя, который в случае поставки товаров на рынок в количестве $Q_1 = D_1$ был готов, согласно принципам рыночной экономики, приобрести товар по цене P_{D1}, а приобрел ее по цене $P_0 < P_{D1}$. Покупатель имеет выгоду от покупки ΔD товаров, определяемую величиной $(P_0 - P_{D1})\Delta D$.

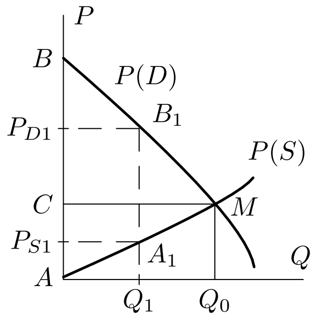


Рис. 6.5. Кривые предложения и спроса

В диапазоне изменения количества товаров от 0 до D_0 покупатель получит выгоду, соответствующую площади криволинейной трапеции BB_1MC (рис. 6.5), определяемую интегралом

$$P_D = \int_0^{D_0} \Big(P(Q) - P_0 \Big)\, dQ \tag{6.19}$$

и называемую излишком потребителя.

Пример. Для функций предложения $P = (S+20)^2/100$ и спроса $P = 300 - (D+20)^2/50$ определить излишки производителя и потребителя.

Р е ш е н и е. Так как спрос и предложение рассматриваются по отношению к одинаковым количествам одного и того же товара ($S = D = Q$), то для определения координат точки рыночного равновесия, где кривые спроса и предложения пересекаются ($P(S) = P(D)$), достаточно приравнять приведенные в условии задачи функции:

$$300 - \frac{(Q+20)^2}{50} = \frac{(Q+20)^2}{100}.$$

Отсюда приходим к равенству

$$Q + 20 = \pm 100,$$

которое дает два корня $Q = 80$ и $Q = -120$. Допустимое решение возможно только с положительным корнем. Поэтому количество товара, соответствует точке равновесия $Q_0 = S_0 = D_0 = 80$, а равновесная цена $P_0 = 100$.

Следуя формуле (6.18), определим излишки производителя:

$$P_S=\int_0^{80}\left(100-\frac{(Q+20)^2}{100}\right)dQ=\left(100Q-\frac{(Q+20)^3}{3\cdot 100}\right)\Big|_0^{80}=4683\frac{1}{3}$$

и по формуле (6.19) излишки потребителя:

$$P_D=\int_0^{80}\left(300-\frac{(Q+20)^2}{50}-100\right)dQ=\left(200Q-\frac{(Q+20)^3}{3\cdot 50}\right)\Big|_0^{80}=9386\frac{2}{3}.$$

6.15. Приближенное вычисление интегралов

Использование понятия интегральной суммы позволяет получить формулы для приближенного вычисления определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить приближенно интеграл от функции $y=f(x)$ на отрезке $x\in[a;b]$ (см. рис. 6.1).

Разобьем $[a;b]$ на n подынтервалов (в общем случае неравных) и в произвольных точках $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$, принадлежащих каждому из n подынтервалов, определим значения функции $y_k=f(\xi_k)$.

Заменяя интеграл интегральной суммой, придем к приближенному равенству

$$S=\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}S_k=S_{\text{пр}},$$

называемому *формулой прямоугольников* приближенного вычисления определенных интегралов.

В случае равенства всех интервалов $\Delta x_k=\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ и $f(\xi_k)=y_k$ формула прямоугольников представляется в виде

$$S_{\text{пр}}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k.$$

Если

$$f(\xi_k)=\min_{[x_{k-1};x_k]}f(x)\quad(k=\overline{1,n}),\quad\text{то}\quad S_{\text{пр}}=S_{\min}.$$

Если

$$f(\xi_k) = \max_{[x_{k-1};x_k]} f(x) \quad (k = \overline{1,n}), \quad \text{то} \quad S_{\text{пр}} = S_{\max}.$$

При этом справедливо неравенство:

$$S_{\min} \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_{\max}.$$

Можно показать, что максимальная ошибка, которая может отличать точное значение интеграла от его приближенного значения, найденного с использованием формулы прямоугольников, не превышает

$$\Delta = \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a;b]} |f'(x)|.$$

Если заменить криволинейные участки графика функции на подынтервалах стягивающими их хордами (прямая AB на рис. 6.2,а), то криволинейные трапеции на участках $[x_{k-1}; x_k]$ заменятся на прямолинейные и их площади определятся по формуле

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)\Delta x_k.$$

Суммарная площадь элементарных трапеций

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x_1 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x_2 + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x_n.$$

При равенстве подынтервалов *формула трапеций* определяет приближенное значение интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{\text{тр}} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right).$$

Наибольшая ошибка отличия точного значения интеграла от значения, полученного по формуле трапеций, не превышает

$$\Delta = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

6.16. Формула Симпсона

Формулы прямоугольников и трапеций не всегда дают достаточную точность расчетов при ограниченном количестве подынтервалов. В случае нелинейности подынтегральной функции бо́льшую точность дает замена участков кривых не прямыми линиями, как в прямоугольниках (горизонтальные прямые) или трапециях (наклонные прямые), а параболами $y = ax^2 + bx + c$.

Для получения формулы численного интегрирования, основанной на замене реальной кривой на квадратную параболу, докажем справедливость соотношения

$$\int_{x_0}^{x_2} (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2), \tag{6.20}$$

в котором y_0 и y_2 — значения функции на концах интервала интегрирования $[x_0; x_2]$, y_1 — на его середине. С целью упрощения доказательства в качестве отрезка $[x_0; x_2]$ рассмотрим отрезок $[-h; h]$, симметричный относительно начала координат. В этом случае $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, $y_0 = ah^2 - bh + c$, $y_1 = c$, $y_2 = ah^2 + bh + c$, и правая часть (6.20) преобразуется к виду

$$\frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h+h}{6}(ah^2 - bh + c + 4c + ah^2 + bh + c) = \frac{2h}{3}(ah^2 + 3c).$$

Вычислим левую часть (6.20), используя формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{2h}{3}(ah^2 + 3c).$$

Совпадение последних двух результатов говорит о справедливости соотношения (6.20).

Перейдем к непосредственному выводу формулы приближенного вычисления определенных интегралов путем параболической аппроксимации подынтегральной функции.

Разобьем $[a; b]$ на $2n$ равных (для простоты и обозримости формулы) подынтервалов. Пусть в граничных точках подынтервалов для координат $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ найдены значения подынтегральной функции $y_0, y_1, \ldots, y_{2n-1}, y_{2n}$.

Заменим кривые, описываемые подынтегральной функцией $y = f(x)$, на каждом подынтервале, содержащем по три точки

$(x_0, x_1, x_2), (x_2, x_3, x_4), \ldots, (x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n})$, параболами, имеющими в перечисленных точках ординаты $(y_0, y_1, y_2), (y_2, y_3, y_4), \ldots, (y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n})$.

Найдем площади соответствующих параболических трапеций, используя формулу (6.20):

$$S_1 = \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$
$$S_2 = \frac{b-a}{6n}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$S_n = \frac{b-a}{6n}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Суммируя записанные площади и приводя в получаемой сумме подобные члены, приходим к *формуле Симпсона* приближенного вычисления определенных интегралов

$$S_{\text{сим}} = \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})].$$

Подчеркнем, что формула Симпсона предполагает разбивку интервала интегрирования на четное число подынтервалов. В ней n — половина общего числа подынтервалов.

Погрешность формулы Симпсона не превышает величины

$$\Delta = \frac{(b-a)^5}{90n^4} \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

6.17. Пример численного определения площади

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ и прямыми: $y = 0$, $x = a = 1$, $x = b = 11$ методами:

а) прямоугольников;

б) трапеций;

в) Симпсона;

г) аналитическим с использованием формулы Ньютона–Лейбница.

Построить график заданной функции с разбиением отрезка $[a; b]$ на $n = 10$ подынтервалов и график функции $s = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ на отрезке

$x \in [a; b]$.

Р е ш е н и е. Составим таблицу разбиения отрезка интегрирования на n=10 равных участков с длинами интервалов $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{11-1}{10} = 1$ (табл. 6.1). Во второй строке таблицы представлены увеличенные в 10 раз значения $y_k = f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$ $(k = \overline{1; 11})$.

Таблица 6.1 Данные для численных методов

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$10y_k$	10	7,07	5,77	5,00	4,47	4,08	3,78	3,54	3,33	3,16	3,02
s_k	0	0,82	1,46	2,00	2,48	2,90	3,30	3,66	4,00	4,32	4,64

а) Используя формулу прямоугольников с высотами, представляющими собой левые значения функции на концах подынтервалов, найдем приближенное значение площади криволинейной трапеции в виде суммы площадей прямоугольников, очерченных на рис. 6.6 сплошными линиями:

$$S^-_{\text{пр}} = \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x = (1+0{,}707+0{,}577+0{,}5+\ldots+0{,}333+0{,}316)\cdot 1 = 5{,}020.$$

Та же формула прямоугольников, но с подстановкой в нее высот, равных правым значениям функции на концах подынтервалов, дает значение интеграла, равного площади ограниченных пунктиром прямоугольников:

$$S^+_{\text{пр}} = \sum_{k=2}^{n+1} y_k \Delta x = (0{,}707+0{,}577+0{,}5+\ldots+0{,}316+0{,}302)\cdot 1 = 4{,}322.$$

б) По формуле трапеций получим

$$S_{\text{тр}} = \left(\frac{y_1 + y_{n+1}}{2} + \sum_{k=2}^{n} y_k \right) \Delta x =$$

$$= \left(\frac{1 + 0{,}302}{2} + 0{,}707 + \ldots + 0{,}316 \right) \cdot 1 = 4{,}671.$$

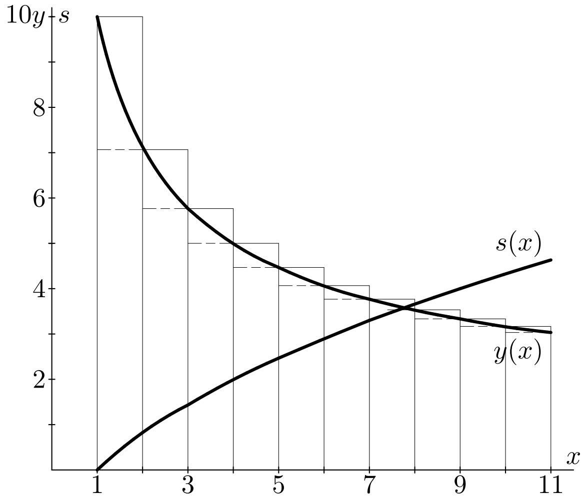


Рис. 6.6. Метод прямоугольников и первообразная s

Следует обратить внимание на очевидное равенство

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}(S^{-}_{\text{пр}} + S^{+}_{\text{пр}}).$$

в) По формуле Симпсона ($n = 5$ — количество спаренных подынтервалов)

$$S_{\text{сим}} = \frac{b-a}{6n}\left[y_1 + y_{2n+1} + 4\sum_{k=1}^{n} y_{2k} + 2\sum_{k=2}^{n} y_{2k-1}\right] =$$

$$= \frac{11-1}{6\cdot 5}[1 + 0{,}302 + 4(0{,}707 + 0{,}5 + 0{,}408 + 0{,}354 + 0{,}316) + $$
$$+2(0{,}577 + 0{,}447 + 0{,}378 + 0{,}333)] = 4{,}637.$$

г) Определим точное значение интеграла, являющегося табличным:

$$S = \int_1^{11} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^{11} = 2(\sqrt{11} - \sqrt{1}) \approx 4{,}633.$$

Найдем относительные ошибки определения площадей различными использованными методами численного интегрирования, сравнивая их с точным значением площади, полученным по формулам Ньютона–Лейбница:

$$\Delta^-_{\text{пр}} = \frac{S^-_{\text{пр}} - S}{S} = \frac{5{,}02 - 4{,}633}{4{,}633} \approx 0{,}08.$$

Аналогично: $\Delta^+_{\text{пр}} \approx 0{,}07 = 7 \cdot 10^{-2}$; $\Delta_{\text{тр}} \approx 8 \cdot 10^{-3}$; $\Delta_{\text{сим}} \approx 9 \cdot 10^{-4}$.

Найдем функцию s, заданную в виде интеграла с переменным верхним пределом от заданной функции. Это по своей сути — первообразная функции y с равным нулю значением при $x = 1$:

$$s = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\,\Big|_1^x = 2(\sqrt{x} - 1).$$

Значения функции $s(x)$ для координат границ интервалов интегрирования приведены в последней строке табл. 6.1.

Графики первообразной $s(x)$ и заданной функции $y(x)$ показаны на рис. 6.6.

6.18. Резюме

Обратной математической операцией по отношению к дифференцированию является интегрирование. Первообразной по отношению к функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, для которой выполняется соотношение

$$F'(x) = f(x).$$

Первообразная заданной функции может быть определена только с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому она называется *неопределенным* интегралом.

Так же, как для производной, существует таблица неопределенных интегралов основных элементарных функций. Разработаны методы сведения интегралов к табличным. Среди этих методов выделяются метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Метод замены переменной применим, когда под знаком интеграла можно выделить выражение $f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$. В этом случае введение новой переменной $t = \varphi(x)$ позволяет преобразовать подынтегральное выражение к виду

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt,$$

зачастую представляющему собой табличный интеграл.

Метод интегрирования по частям основан на формуле дифференциала от произведения двух функций $d(uv) = vdu + udv$. Метод позволяет во многих случаях преобразовать исходный интеграл к табличному, благодаря изменению ролей функций в подынтегральном выражении:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Интегралы от рациональных дробей сводятся к табличным путем, во-первых, сведения неправильной дроби к правильной, во-вторых, путем представления правильной дроби в виде суммы простейших дробей, знаменатели которых представляют собой полиномы степени не выше второй.

Интегралы, содержащие произведения различных степеней синусов и косинусов одного аргумента, а также произведения этих функций с разными аргументами, путем использования известных тригонометрических соотношений могут быть сведены к табличным.

Определенный интеграл, в отличие от неопределенного, является конкретной величиной, численно равной площади криволинейной трапеции, заключенной между графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$. Формула Ньютона–Лейбница позволяет найти значение определенного интеграла функции как разность ее первообразных $F(x)$, вычисленных для конечной и начальной точек интервала интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

В случае замены одной из величин a или b в пределах интегрирования на переменную x получается интеграл с переменным верхним или нижним пределом. При стремлении переменного предела к бесконечности или в случае бесконечного разрыва функции $f(x)$ внутри интервала интегрирования интеграл называют несобственным. Такие интегралы встречаются, в частности, при обработке и анализе статистического материала.

Свойства определенного интеграла во многом повторяют свойства неопределенного интеграла, но имеют и свои характерные особенности. Например, неопределенный интеграл от непрерывной функции равен некоторому значению функции $f(\varsigma)$ из интервала ($\varsigma \in [a, b]$), умноженному на его длину $(b-a)$ (теорема о среднем):

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\varsigma)(b-a).$$

Если вместо вполне определенного значения аргумента $x = \varsigma$ выбрать другое значение x из интервала $[a,b]$, то в правой части последнего равенства получится приближенное значение определенного интеграла. На этом свойстве строятся соотношения одного из численных методов вычисления определенного интеграла — метода прямоугольников. В методе прямоугольников значение $f(\varsigma)$, приводящее к точному значению интеграла, заменяется на некоторое другое значение функции внутри интервала. В частном случае это значение функции на одном из концов подынтервалов, на которые можно разбить весь интервал $[a,b]$.

Выбор в качестве $f(\varsigma)$ полусуммы значений функции на концах подынтервала приводит к методу трапеций численного интегрирования. Если же площади криволинейной трапеции внутри подынтервалов вычислять, заменяя кривую $f(x)$ параболой, то это приведет к методу Симпсона.

В экономических задачах определенный интеграл и численные методы его вычисления находят применение при определении суммарных значений величин, закон изменения которых известен.

Подробные сведения о различных приемах интегрирования можно найти в [8, 24], а получить навыки решения задач — в [7, 20].

6.19. Вопросы

1. Что такое первообразная? Обладают ли первообразные одной функции свойством единственности?
2. Дайте определение, в том числе в виде математического выражения, неопределенного интеграла.
3. Что такое подынтегральная функция? подынтегральное выражение?
4. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла. Запишите эти свойства в виде математических выражений.
5. Воспроизведите таблицу основных интегралов. Докажите справедливость записанных выражений с использованием операции дифференцирования.

6. В чем заключается метод замены переменной в определенном интеграле? метод интегрирования по частям?
7. Какие функции в подынтегральном выражении рекомендуется выбирать в качестве u и dv при интегрировании по частям?
8. Что называется рациональной дробью? Как выделить из неправильной рациональной дроби правильную дробь? Как разложить правильную дробь на сумму простейших?
9. Что называется определенным интегралом?
10. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.
11. Перечислите основные свойства определенного интеграла. Сформулируйте теорему о среднем.
12. Каковы характерные особенности применения методов замены переменной и интегрирования по частям к вычислению определенного интеграла?
13. Что такое несобственный интеграл? Что такое сходящиеся и расходящиеся интегралы?
14. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла? экономический смысл?
15. В чем суть применения метода прямоугольников при вычислении определенных интегралов? метода трапеций?
16. Какая аппроксимация подынтегральной функции осуществляется при выводе формулы Симпсона.
17. Могут ли результаты вычисления определенных интегралов по формулам трапеций или прямоугольников быть точнее результатов, полученных по формуле Симпсона?

Вопросы для тестирования

1. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Первообразная	1. $\big(F(x)+C\big)'$;
2. Неопределенный интеграл	2. $f(x)\,dx$;
3. Подынтегральное выражение	3. $\int f(x)\,dx$;
4. Подынтегральная функция	4. $F(x)+C$.

2. Перечислите номера выражений и утверждений, характеризующих основные свойства неопределенного интеграла $\int f(x)dx{=}F(x){+}C$.

1. $F'(x)=f(x)$; 2. $dF(x)=f(x)dx$; 3. $kF(x)=\int kf(x)dx$;
4. $C=0$, если $f(x)=\text{const}$; 5. $f(x)$ — монотонная функция;
6. $d\left(\int f(x)\,dx{+}C\right)=f(x)$; 7. $\int f(x)\,g(x)\,dx=\int f(x)\int g(x)\,dx$;
8. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$; 9. $\int \big(f(x){+}g(x)\big)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$.

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка). В местах отсутствия полного соответствия поставьте 0.

1. $\int dx$	1. C;
2. $\int e^x\,dx$	2. e^x+C;
3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	3. $-\operatorname{ctg}x+C$;
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}$	4. $\arcsin x+C$;
5. $\int a^x\,dx$	5. $\cos x+C$;
6. $\int x^{-1}\,dx$	6. $\operatorname{tg}x+C$;
7. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}$	7. $\ln\lvert x\rvert+C$;
8. $\int\sin x\,dx$	8. $a^x/\ln a+C$;
9. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}$	9. $\operatorname{arctg}x+C$.

4. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка), касающихся корректного выбора функций u и v в методе интегрирования по частям $\big(P(x)$ — полином$\big)$. В местах несоответствия поставьте цифру 5.

1. $\int P(x)\cos mx\,dx,\quad u=?$
2. $\int P(x)e^{ax}\,dx,\quad v'_x=?$
3. $\int P(x)\ln x\,dx,\quad v'_x=?$
4. $\int P(x)\arcsin x\,dx,\quad u=?$

1. $P(x)$;
2. e^{ax};
3. $\ln x$;
4. $\arcsin x$.

5. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка). В местах несоответствия поставьте цифру 5.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+a}$
2. $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+a)^2}$
3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}$
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+a)^2}$

1. $\dfrac{1}{2}\ln|x^2+a^2|+C$;
2. $\ln|x+a|+C$;
3. $-\dfrac{1}{x+a}+C$;
4. $\ln|x+a|+\dfrac{a}{x+a}+C$.

6. Перечислите номера выражений интегралов, для которых в методе интегрирования по частям ($\int udv=uv-\int vdu$) рекомендуется принять $u=P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$.

1. $\int P_n(x)\ln x\,dx$; 2. $\int P_n(x)e^x\,dx$;
3. $\int P_n(x)\sin x\,dx$; 4. $\int P_n(x)\operatorname{arctg} x\,dx$;
5. Среди перечисленных в пунктах 1–4 выражений нет требуемых.

7. Перечислите соотношения, справедливые для интегрирования методами замены переменной и интегрирования по частям.

1. $\int f(ax+b)\,dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$;
2. $\int f(x)\,dx=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$;
3. $\int u\,dv=uv-\int v\,du$;
4. $\int d(uv)=u\int dv+v\int du$;
5. Среди соотношений 1–4 нет требуемых.

8. Перечислите корректные соотношения, связанные с приведением неправильной дроби к правильной и разложением дроби на слагаемые, если P_n — полином n-й степени.

1. $\dfrac{P_m}{P_n}=P_{m-n}+\dfrac{P_{n-1}}{P_n}\quad(m>n)$; 2. $\dfrac{c}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$;
3. $\dfrac{cx}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{Ax}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$; 4. $\dfrac{cx}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$;
5. Среди соотношений 1–4 нет требуемых.

9. Перечислите номера выражений, равных значению определенного интеграла (a, b — пределы интегрирования, $F(x)$ — первообразная).

1. $F(a)-F(b)$; 2. $F(x)\Big|_a^b$; 3. $\lim\limits_{x\to a} F(x)$; 4. $F(a)+F(b)+C$;

5. Приращение $F(x)$ на $[a, b]$.

10. Перечислите правильные значения интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, если $F(x)$ — первообразная подынтегральной функции.

1. < 0 при $a > b$; 2. $F(b) - F(a)$; 3. $\displaystyle -\int_b^a f(x)\,dx$;

4. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$; 5. $f(\zeta)(b-a)$, $\zeta \in [a, b]$.

11. Перечислите номера выражений, относящихся непосредственно к несобственным интегралам.

1. $\displaystyle\int_a^x f(x)dx$; 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$; 3. $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$; 4. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x}$ $(a<0<b)$;

5. Среди выражений 1–4 нет требуемых.

12. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся методов численного интегрирования ($h = (b-a)/n$). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. Прямоугольников $S^-_{\text{пр}}$	1. $\dfrac{h}{6}\big(y_0+y_{2n}+2(y_2+\ldots+y_{2n-2})+$ $+4(y_1+\ldots+y_{2n-1})\big)$;
2. Прямоугольников $S^+_{\text{пр}}$	2. $h\left(\dfrac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$;
3. Трапеций	3. $h(y_1+y_2+\ldots+y_n)$;
4. Симпсона	4. $h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})$.

13. Перечислите пункты, точно или приближенно определяющие значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

1. Площадь между кривой $y = f(x)$ и осью ординат на $[a, b]$;
2. Площадь между кривой $y = f(x)$ и осью абсцисс на $[a, b]$;
3. Площадь между осью абсцисс и прямыми, образованными линейной интерполяцией функции $y = f(x)$ по точкам (x_k, y_k) $x_k \in [a, b]$;
4. $\dfrac{1}{2}\big(f(b) + f(a)\big)(b-a)$.

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕМА 6.1

(§ 6.1–6.4 теории)

Табличные интегралы. Метод замены переменной

Вопросы

1. Что такое первообразная? Обладают ли первообразные одной функции свойством единственности?
2. Дайте определение, в том числе в виде математического выражения, неопределенного интеграла.
3. Что такое подынтегральная функция? подынтегральное выражение?
4. Перечислите четыре основные свойства неопределенного интеграла. Запишите эти свойства в виде математических выражений.
5. Воспроизведите таблицу интегралов от основных элементарных функций.
6. В чем заключается метод замены переменной в неопределенном интеграле? Воспроизведите формулу, соответствующую этому методу.

Задачи

В задачах 1–8 найти первообразные функций, используя свойства неопределенного интеграла.

1. $2x^3$.

Р е ш е н и е. На основании свойства интеграла (постоянную можно выносить за знак интеграла) и формулы интеграла от степенной функции $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ получим

$$\int 2x^3\,dx = \frac{2}{3+1}x^{3+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + C.$$

2. $x^4 - 3x^2 + 2$.

Р е ш е н и е. На основании свойств неопределенных интегралов (постоянную можно выносить за знак интеграла и интеграл от суммы равен сумме интегралов) для степенной функции получим

$$\int (x^4 - 3x^2 + 2)\,dx = \int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + 2\int dx =$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + C_1 - x^3 + C_2 + 2x + C_3 = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x + C,$$

где

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

3. $y = 2\sqrt[4]{x} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. Функция представляет собой сумму степенных функций, умноженных на постоянные множители $\left(\sqrt[4]{x}=x^{1/4};\ \dfrac{1}{x^4}=x^{-4}\right)$. Поэтому $\displaystyle\int \left(2\sqrt[4]{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x}\right)\,dx=2\frac{1}{1/4+1}x^{1/4+1}+\frac{3}{-4+1}x^{-4+1}-\ln|x|+C =$

$$= \frac{8}{5}x^{5/4} - \frac{1}{x^3} - \ln|x| + C.$$

Проверим правильность определения первообразной. Для проверки найдем ее производную:

$$\left(\frac{8}{5}x^{5/4} - \frac{1}{x^3} - \ln|x| + C\right)' =$$

$$= \frac{8}{5}\cdot\frac{5}{4}x^{5/4-1} - (-3)x^{-3-1} - \frac{1}{x} + 0 = 2\sqrt[4]{x} + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x} = f(x)\ (!).$$

4. $J = \displaystyle\int \left(\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\,dx.$

Р е ш е н и е. Как и в предыдущем примере, используем свойства интегралов: $J = \displaystyle\int (x^{3/4} - x^{-2/3})\,dx = \frac{4}{7}x^{7/4} - 3x^{1/3} + C.$

5. 5^{2+x}.

Р е ш е н и е. Воспользуемся свойством показательной функции:

$$\int 5^{2+x}\,dx = 5^2\int 5^x\,dx = \frac{25}{\ln 5}5^x + C.$$

6. $\dfrac{\lg 2}{\cos^2 x}$.

Р е ш е н и е. Функция представляет собой табличный интеграл, умноженный на число $(\lg 2)$. Поэтому $\displaystyle\int \frac{\lg 2}{\cos^2 x}\,dx = \lg 2\,\operatorname{tg} x + C$.

7. $\dfrac{-1}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е. Функция представляет собой табличный интеграл, умноженный на число (-1). Поэтому $\displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arctg} x + C$.

8. $\dfrac{x^3-1}{1-x}$.

Р е ш е н и е. Предварительно разложим числитель на множители и сократим одинаковые множители в числителе и знаменателе:

$$y = \frac{x^3-1}{1-x} = -\frac{(1-x)(x^2+x+1)}{1-x} = -(x^2+x+1).$$

Тогда

$$\int y\,dx = -\int (x^2+x+1)\,dx = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C.$$

В задачах 9–11 вычислить интегралы, сводя их к табличным.

9. $J = \displaystyle\int \frac{3-\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx$.

Р е ш е н и е. Поделим числитель почленно на знаменатель, имея в виду соотношение $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$J = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}.$$

Первый интеграл полученного выражения табличный.

Чтобы свести второй интеграл к табличному, вспомним свойство дифференциала функции: $dy = y'dx$. Множитель при dx — это отрицательная производная от косинуса: $\sin x = -\cos' x$. Поэтому $\sin x\,dx = -d(\cos x)$. Так как $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, для заданного интеграла получим

$$J = 3\operatorname{tg} x + 2\ln|\cos x| + C.$$

10. $J = \int \frac{3^x}{e^x}\,dx.$

Р е ш е н и е. Числитель и знаменатель имеют одинаковые показатели степеней. Поэтому

$$J = \int \left(\frac{3}{e}\right)^x dx = \left(\frac{3}{e}\right)^x \frac{1}{\ln(3/e)} + C = \left(\frac{3}{e}\right)^x \frac{1}{\ln 3 - 1} + C.$$

11. $J = \int \frac{dx}{16 + x^2}\,dx.$

Р е ш е н и е. Разделим числитель и знаменатель подынтегральной функции на 16: $J = \int \frac{\frac{1}{16}dx}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(\frac{x}{4}\right)}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2}.$

Так как $\int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arctg} u + C$, то $J = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C.$

В задачах 12–17 вычислить неопределенные интегралы методом замены переменной.

Метод замены переменной опирается на правило дифференцирования сложной функции $f'_t\big(u(t)\big) = f'_u(u)u'_t(t)$. Его применение сводится к преобразованию подынтегрального выражения:

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \{u = \varphi(t); \quad du = \varphi'(t)\,dt\} = \int f(u)\,du.$$

12. $J = \int \frac{1}{x}\ln x\,dx.$

Р е ш е н и е. Структура подынтегрального выражения $\left(\frac{1}{x} = \ln' x\right)$

подсказывает замену, которую необходимо сделать, чтобы свести интеграл к табличному. Пусть $u = \ln x$. Тогда $du = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}\,dx$. Интеграл приведется к табличному $J = \displaystyle\int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C$. Подставим вместо переменной u ее значение: $J = \dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Дифференцирование полученного выражения позволяет убедиться в его правильности:

$$\left(\frac{1}{2}\ln^2 x + C\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}\ln x.\ (!)$$

13. $J = \displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Р е ш е н и е. Введем новую переменную $u=\sqrt{x}$. Тогда $du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, или $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$.

Подставим полученные соотношения в подынтегральное выражение: $J = 2\int e^u\,du = 2e^u + C=$\{подставим значения u\}$= 2e^{\sqrt{x}} + C$.

14. $J = \displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

Р е ш е н и е. $J = \displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \{u = \sin x, \implies du = \cos x\,dx\} =$

$$= \int\frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C.$$

15. $J = \displaystyle\int x^2\sqrt{x-2}\,dx.$

Р е ш е н и е. Чтобы избавиться от квадратного корня, введем переменную $t^2 = x - 2$. Тогда $x = t^2 + 2$; $x^2 = t^4 + 4t^2 + 4$; $dx = 2t\,dt$.

Подставим полученные соотношения в подынтегральное выражение и преобразуем его:

$$J = \int(t^4 + 4t^2 + 4)\cdot t\cdot 2t\,dt = 2\int(t^6 + 4t^4 + 4t^2)\,dt = \frac{2}{7}t^7 + \frac{8}{5}t^5 + \frac{8}{3}t^3 + C,$$

где $t = \sqrt{x-2}$.

16. $J = \displaystyle\int\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$

Р е ш е н и е. Сделаем замену переменной: $u = \ln x$, $\implies$ $du = \dfrac{dx}{x}$.

Подставляя в исходный интеграл, получим

$$J = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}(\ln x) + C.$$

17. $J = \displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену переменной: $u=1+e^x$, $\Longrightarrow$ $du=e^x\,dx$.

Подставляя в исходный интеграл, получим

$$J = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(1+e^x) + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–10 найти первообразные функций.

1. $3x^5$. **2**. x^3-3x+2. **3**. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^4}$. **4**. $3\sqrt[3]{x}$. **5**. $1-\sin^2\dfrac{x}{2}$.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$. **7**. e^{2-3x}. **8**. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^x}}$. **9**. $\dfrac{1}{\cos^2 3x}$. **10**. $\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

В задачах 11–20 найти интегралы, приводя их к табличным.

11. $\displaystyle\int \sqrt{mx}\,dx$. **12**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$. **13**. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{\sqrt{ax}}\,dx$.

14. $\displaystyle\int \frac{x^4-16}{x}\,dx$. **15**. $\displaystyle\int (2^x+e^x)\,dx$.

16. $\displaystyle\int (2x+3\cos x)\,dx$. **17.** $\displaystyle\int \frac{2-\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx$.

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$. **19**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$. **20**. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

В задачах 21–30 найти интегралы, используя метод замены переменной.

21. $\int \sqrt{3+x}\,dx$. **22**. $\int \frac{dx}{a+bx}$. **23**. $\int x(2x+5)^2\,dx$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$. **25**. $\int \frac{x\,dx}{1+3x^2}$. **26**. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$. **27**. $\int \frac{e^x\,dx}{2+e^x}$.

28. $\int x^2 e^{2x^3+1}\,dx$. **29**. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$. **30**. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$.

ТЕМА 6.2
(§ 6.5–6.8 теории)

Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей

Вопросы

1. В чем заключается метод интегрирования по частям? Воспроизведите соответствующую формулу.
2. Какая формула дифференцирования служит базой для получения формулы дифференцирования по частям?
3. Какие функции в подынтегральном выражении рекомендуется выбирать в качестве u и dv при интегрировании по частям и в каких случаях?
4. Что называется рациональной дробью?
5. Как выделить из неправильной дроби полином и правильную дробь?
6. Как осуществить представление правильной дроби с полиномом произвольной степени в знаменателе в виде суммы правильных дробей со знаменателями, содержащими полиномы степени не выше второй?

Задачи

Метод интегрирования по частям сводится к использованию соотношения

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Когда подынтегральное выражение представляет собой произведение полинома $P(x)$ на $\varphi(x)$, то

$\varphi(x) = u$, $P(x) = v'$, если $\varphi(x)$ — представляет собой логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию;

$\varphi(x) = v'$, $P(x) = u$, если $\varphi(x)$ — показательная или тригонометрическая функция.

В задачах 1–7 найти интегралы, используя метод интегрирования по частям.

1. $J = \int x^2 \ln x \, dx$.

Р е ш е н и е. Следуя методу интегрирования по частям, полагаем $u = \ln x$; $dv = x^2\, dx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \displaystyle\int x^2\, dx = \dfrac{1}{3}x^3$. Заметим, что в первообразной при нахождении v можно положить постоянную интегрирования равной нулю, так как постоянная появится при повторном взятии интеграла. С учетом введенных функций запишем формулу интегрирования по частям и продолжим преобразования:

$$J = uv - \int v\, du = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^2\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C.$$

Проверим правильность полученного выражения, взяв от него производную:

$$J' = \frac{1}{9}\left(3x^2(3\ln x - 1) + x^3\frac{3}{x}\right) = x^2 \ln x.$$

Равенство J' подынтегральной функции исходного интеграла подтверждает правильность результата.

2. $J = \int xe^x dx$.

Р е ш е н и е. Используем рекомендации по выбору u и v':

$$J = \{u = x;\ dv = e^x\, dx;\ \Longrightarrow\ du = dx;\ v = \int e^x\, dx = e^x\} =$$

$$= xe^x - \int e^x\, dx = e^x(x - 1) + C.$$

3. $J = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

Р е ш е н и е.

$$J = \left\{ u = \ln x;\ dv = \frac{dx}{x^2};\ \Longrightarrow\ du = \frac{dx}{x};\ v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \right\} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

4. $J = \int \operatorname{arctg} x\, dx$.

Р е ш е н и е.

$$J = \left\{ u = \operatorname{arctg} x;\ dv = dx;\ \Longrightarrow\ du = \frac{dx}{1+x^2};\ v = \int dx = x \right\} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}.$$

Используем свойства — дифференциал суммы функций равен сумме дифференциалов и дифференциал постоянной величины равен нулю:

$$J = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

5. $J = \int x^2 \cos x\, dx$.

Р е ш е н и е. Обозначим $u = x^2;\ dv = \cos x\, dx;\ \Longrightarrow\ du = 2x\, dx;$ $v = \int \cos x\, dx = \sin x$. Тогда $J = x^2 \sin x - 2 \displaystyle\int x \sin x\, dx$.

Повторно применяем метод интегрирования по частям. Введя обозначения: $u = x;\ dv = \sin x\, dx;\ \Longrightarrow\ du = dx;\ v = -\cos x,$ получим

$$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

6. $J = \int e^x \sin x\, dx$.

Р е ш е н и е. Под интегралом стоят две функции, которые в равной степени могут быть выбраны в качестве u или v. Пусть $u = \sin x;\ dv = e^x\, dx;\ \Longrightarrow\ du = \cos x\, dx;\ v = e^x$. Тогда

$$J = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Повторно применяем метод интегрирования по частям, принимая $u = \cos x$; $dv = e^x\,dx$; $\Longrightarrow$ $du = -\sin x\,dx$; $v = e^x$. Тогда

$$J = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Дальнейшее применение метода интегрирования по частям лишено смысла, так как после преобразования среди слагаемых вновь получен интеграл, с которого начались преобразования.

Интегралы такого типа называются циклическими. Их решение следует из равенства начального интеграла и его последнего преобразованного выражения. Перенося интеграл правой части равенства в его левую (исходную) часть, получим

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x).$$

Отсюда находим интеграл, поделив обе части равенства на 2 и прибавляя к результату опущенную в предыдущих преобразованиях постоянную,

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Дифференцируя обе части равенства, убедимся в его правильности:

$$e^x \sin x = \frac{1}{2}\big(e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)\big). \ (!)$$

7. $J = \int x^2 3^x dx.$

Р е ш е н и е.

$$J = \left\{u = x^2;\ dv = 3^x\,dx;\ \Longrightarrow\ du = 2x\,dx;\ v = \int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{\ln 3}3^x - \frac{2}{\ln 3}\int x3^x\,dx.$$

Однократное применение метода интегрирования по частям не привело второе слагаемое к табличному интегралу. Поэтому применим повторно процедуру интегрирования по частям для нахождения полученного интеграла:

$$\int x3^x\,dx = \left\{u = x;\ dv = 3^x\,dx;\ \Longrightarrow\ du = dx;\ v = \frac{3^x}{\ln 3}\right\} =$$

$$= \frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x\,dx = \frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C_0.$$

Подставим найденное значение второго интеграла в ранее найденное выражение ($C = -2C_0/\ln 3$):

$$J = \frac{3^x}{\ln^3 3}(x^2\ln^2 3 - 2x\ln 3 + 2) + C.$$

Производная от J совпадает с подынтегральной функцией.

В задачах 8–12 найти интегралы от рациональных дробей.

8. $J = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}.$

Р е ш е н и е. Предварительно разложим правильную дробь, которую представляет подынтегральная функция, на сумму простейших:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Знаменатели последних двух выражений равны, поэтому должны быть равны и их числители:

$$A(x-2) + B(x-1) = 1.$$

Записанное равенство справедливо при любых значениях переменной x. В частности, при $x = 1$ второе слагаемое обращается в нуль и $A = -1$. При $x = 2$ из равенства следует $B = 1$.

С учетом найденных значений коэффициентов перепишем интеграл и найдем его:

$$J = -\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{x-2} = -\int\frac{d(x-1)}{x-1} + \int\frac{d(x-2)}{x-2} =$$

$$= -\ln|x-1| + \ln|x-2| + \ln C = \ln\left|C\frac{x-2}{x-1}\right|.$$

9. $J = \displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-3x-4}.$

Р е ш е н и е. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей $\big(x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)\big)$:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x}{(x+1)(x-4)}.$$

Приравняем числители последних двух равенств:

$$A(x-4)+B(x+1)=x.$$

При $x=4$ получаем $B=4/5$. При $x=-1$ $A=1/5$.
Возвратимся к исходному интегралу:

$$J=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-4}=\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{4}{5}\ln|x-4|+C=$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|(x+1)(x-4)^4\right|+C.$$

10. $J=\displaystyle\int\frac{x^3+2x-1}{x-1}dx.$

Р е ш е н и е. Приведем неправильную дробь к правильной, поделив числитель подынтегральной функции на ее знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3-x^2 & x^2+x+3 \\ \cline{1-1}
x^2+2x-1 & \\
x^2-x & \\ \cline{1-1}
3x-1 & \\
3x-3 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}$$

С учетом полученных выражений для частного от деления (x^2+x+3) и остатка (2) перепишем интеграл и приведем его к табличному:

$$J=\int\left(x^2+x+3+\frac{2}{x-1}\right)dx=\int x^2\,dx+\int x\,dx+3\int dx+$$

$$+2\int\frac{d(x-1)}{x-1}=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+2\ln|x-1|+C.$$

11. $J=\displaystyle\int\frac{x^2+6x+3}{x^2+5x+6}\,dx.$

Р е ш е н и е. Приведем неправильную дробь к правильной, поделив числитель подынтегральной функции на ее знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
x^2+6x+3 & x^2+5x+6 \\ \cline{2-2}
x^2+5x+6 & \quad 1 \\ \cline{1-1}
x-3 &
\end{array}$$

С учетом полученных выражений для частного от деления (1) и остатка $(x-3)$ преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{x^2+6x+3}{x^2+5x+6} = 1 + \frac{x-3}{(x+2)(x+3)}.$$

Второе слагаемое представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x-3}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}.$$

Приравниваем числители первого и последнего выражений записанного равенства:

$$A(x+3)+B(x+2) = x-3.$$

При $x=-3$ равенство дает значение $B=6$. При $x=-2$ $A=-5$.

Возвратимся к исходному интегралу:

$$J = \int \left(1 - \frac{5}{x+2} + \frac{6}{x+3}\right) dx = x - 5\ln|x+2| + 6\ln|x+3| + C.$$

12. $J = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}.$

Р е ш е н и е. Знаменатель подынтегральной функции содержит квадратный двучлен (x^2+1), не разлагаемый на множители с действительными корнями. При разложении функции на сумму простейших одно из слагаемых содержит в знаменателе этот двучлен, а в числителе у этого слагаемого должна стоять линейная функция переменной x. Таким образом, разложение подынтегральной функции задаем в виде

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(A+C)x^2+(B-A)x+(C-B)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях x в первом и последнем числителях равенства, приходим к системе уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B-A=0, \\ C-B=1. \end{cases}$$

Решая систему, определяем коэффициенты:

$$A = -\frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{2}, \qquad C = \frac{1}{2}.$$

Возвратимся к исходному интегралу:

$$J = \frac{1}{2}\int\left(-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\right)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{d(x-1)}{x-1}\right).$$

Интегрируя, получим

$$J = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + \ln|x-1|\right) + C.$$

Или

$$J = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

В задачах 13–15 найти интегралы, содержащие тригонометрические функции.

13. $J = \int \cos^2 x\,dx.$

Р е ш е н и е. Используя формулу $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, получим

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int\cos 2x\,d(2x) + \int dx\right) = \frac{1}{4}(\sin 2x + 2x) + C.$$

14. $J = \int \sin^3 x\,dx.$

Р е ш е н и е. Используем соотношения $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ и $\sin x\,dx = -d(\cos x)$:

$$J = -\int(1-\cos^2 x)\,d(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

15. $J = \int \sin^4 x\,dx.$

Р е ш е н и е. Используя формулы тригонометрии, преобразуем интеграл:

$$J = \frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\int dx - \int \cos 2x\, d(2x) + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, d(4x)\right),$$

или

$$J = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int x^4 \ln x\, dx.$ **2.** $\int x^3 e^{-x^2}\, dx.$ **3.** $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx.$ **4.** $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx.$

5. $\int x \cos x\, dx.$ **6.** $\int e^x \cos x\, dx.$ **7.** $\int \frac{1-x}{x(x+1)}\, dx.$

8. $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}.$ **9.** $\int \frac{x^3\, dx}{x^2+3x+2}.$ **10.** $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\, dx.$

ТЕМА 6.3

(§ 6.9–6.12 теории)

Формула Ньютона–Лейбница вычисления определенного интеграла

Вопросы

1. Что называется определенным интегралом? Запишите формулу Ньютона-Лейбница и поясните смысла входящих в нее величин.
2. Как влияет постоянная интегрирования на значение определенного интеграла?
3. Перечислите и сформулируйте в виде математических соотношений основные свойства определенного интеграла.
4. Будут ли свойства неопределенного интеграла справедливы для определенного интеграла?
5. Сформулируйте словесно и в виде математического соотношения теорему о среднем. Поясните на рисунке ее смысл.
6. Что собой представляет интеграл с переменным верхним пределом, число или функцию?

7. Чему равна производная от интеграла с переменным верхним пределом? производная от определенного интеграла?

8. Каковы характерные особенности применения методов замены переменной и интегрирования по частям к вычислению определенного интеграла по сравнению с неопределенным интегралом?

9. Что такое несобственный интеграл? Как организовать процедуру его вычисления?

10. Что представляют собой сходящиеся и расходящиеся интегралы?

11. Как вычисляются интегралы с бесконечными верхним и нижним пределами?

Задачи

В задачах 1–7 вычислить определенные интегралы, используя формулу Ньютона--Лейбница.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{4}\big(2^4 - (-1)^4\big) = \frac{15}{4}.$

2. $\displaystyle\int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{1}^{8} = \frac{3}{2}\big(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{1^2}\big) = \frac{9}{2}.$

3. $\displaystyle\int_{2}^{5} \sqrt{x-1}\,dx = \{d(x-1) = dx\} = \frac{2}{3}\big(\sqrt{(x-1)^3}\big)\Big|_{2}^{5} =$

$$= \frac{2}{3}\big(\sqrt{(5-1)^3} - \sqrt{(2-1)^3}\big) = \frac{14}{3}.$$

4. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_{-\pi/4}^{0} = \operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg}(-\pi/4) = 1.$

5. $\displaystyle\int_{1}^{2} e^{x-2}dx = e^{x-2}\Big|_{1}^{2} = 1 - \frac{1}{e}.$

6. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_{1}^{2} = \big(\ln|2-1| - \ln|1-1|\big) = 0 + \infty = \infty.$

7. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx = \{x^2+3=(x^2-2^2)+7\} = \int_3^4 \left(x+2+\frac{7}{x-2}\right) dx =$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 7\ln|x-2|\right)\Bigg|_3^4 = \left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 7\ln|4-2|\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 7\ln|3-2|\right) = \frac{11}{2} + 7\ln 2.$$

В задачах 8–12 вычислить определенные интегралы, используя метод замены переменной.

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+8}} = \Bigg\{t=\sqrt{x^2+8};\ dt=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+8}};\ x=0 \to t=2\sqrt{2};$

$$x=1 \to t=3\Bigg\} = \int_{2\sqrt{2}}^3 dt = t\Bigg|_{2\sqrt{2}}^3 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

9. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \left\{t^2=x^2+9;\ tdt=xdx;\ x=0 \to t=3;\ x=4 \to t=5\right\} =$

$$= \int_3^5 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Bigg|_3^5 = \frac{1}{3}(5^3-3^3) = 32\frac{2}{3}.$$

10. $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{dx}{x\ln x} = \left\{t=\ln x;\ dt=\frac{dx}{x};\ x=e \to t=1;\ x=e^e \to t=e\right\} =$

$$= \int_1^e \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^e = 1 - 0 = 1.$$

11. $\displaystyle\int_1^0 xe^{-x^2}dx = \left\{x^2=t;\ xdx=\frac{1}{2}dt;\ x=0 \to t=0; x=1 \to t=1\right\} =$

$$= \frac{1}{2}\int_1^0 e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\Bigg|_1^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right).$$

12. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=$

$$=\{x=\sin t;\ \ dx=\cos t\,dt;\ \ x=0 \to t=0;\ \ x=1 \to t=\pi/2\}=$$

$$=\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

В задачах 13–16 вычислить определенные интегралы, используя метод интегрирования по частям.

13. $\int_0^{\pi} x\sin x dx=\{u=x; dv=\sin x\,dx; \to du=dx;\ \ v=\int \sin x\,dx=$

$$=-\cos x\}=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=-(\pi\cdot(-1)-0)+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

14. $\int_0^1 \arccos x\,dx=\{u=\arccos x; dv=dx; \to du=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx; v=x\}=$

$$=x\arccos x\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\{1-x^2=t^2; tdt=-x\,dx;\ \ x=0\Rightarrow t=1;$$

$$x=1\Rightarrow t=0\}=0-\int_1^0 dt=-t\Big|_1^0=1.$$

15. $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx=\left\{u=\ln x; dv=x^{-2}\,dx; \to du=\dfrac{dx}{x}; v=\int x^{-2}\,dx=-\dfrac{1}{x}\right\}=$

$$=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{dx}{x^2}=-\left(\frac{1}{e}-0\right)-\frac{1}{x}\Big|_1^e=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}.$$

16. $\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx.$

Это циклический интеграл по отношению к методу интегрирования по частям. Здесь безразлично, какую из функций выбрать в качестве u: e^x или $\cos x$. Пусть $u = \cos x$, $dv = e^x\,dx$; $\Rightarrow du = -\sin x\,dx$; $v = \int e^x\,dx = e^x$.

Тогда

$$J = e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx.$$

Применим еще раз метод интегрирования по частям, обозначая $u = \sin x; dv = e^x\,dx; \Rightarrow du = \cos x\,dx; v = e^x$.

Тогда получим

$$J = e^{\pi} \cdot (-1) - 1 + e^x \sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx.$$

Переносим интеграл из правой части равенства в его левую часть, после деления полученного выражения на 2 найдем определенный интеграл:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx = -\frac{1}{2}(1 + e^{\pi}).$$

В задачах 17–18 вычислить интегралы с бесконечными пределами.

17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-2}\left(e^{-2x}\right)\Big|_0^{b} =$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{2b}} - \frac{1}{e^{0}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится (равен конечной величине).

18. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^{b} = 2(\lim_{b\to\infty}\sqrt{b} - \sqrt{1}) = \infty.$

Интеграл расходится.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int_1^{2} x^2\,dx.$ **2**. $\displaystyle\int_1^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$ **3**. $\displaystyle\int_1^{2}(3x^2 - 2x + 1)\,dx.$

4. $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$. **5.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx$. **6.** $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

7. $\int_2^0 e^x dx$; **8.** $\int_0^3 2^x\,dx$. **9.** $\int_2^5 \frac{dx}{x}$. **10.** $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$.

11. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$. **12.** $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

13. $\int_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{(4+x^2)^2}$. **14.** $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-2}}$. **15.** $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$.

16. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$; **17.** $\int_0^1 xe^x\,dx$. **18.** $\int_0^{\pi/4} x\sin 4x\,dx$.

19. $\int_1^e x\ln x\,dx$; **20.** $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x}$.

ТЕМА 6.4

(§ 6.13–6.14 теории)

Геометрический и экономический смыслы определенного интеграла

Вопросы

1. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла? экономический смысл?
2. Что такое интегральная сумма и как она связана с определенным интегралом?
3. Как определить максимальное и минимальное значения интегральной суммы? Ответ поясните на графике функции.
4. Как найти площадь криволинейной трапеции при отрицательных значениях функции?
5. Как находятся пределы интегрирования при определении площади криволинейных трапеций под пересекающимися кривыми?
6. Перечислите основные методы численного интегрирования. Что общего и чем отличаются эти методы?

7. При решении какого типа экономических задач возникает необходимость применения определенного интеграла?

Задачи

В задачах 1–6 вычислить площади фигур, ограниченных заданными функциями.

1. $y = x$; $x_0 = 0$; $x_k = 4$; $y = 0$.

Р е ш е н и е. Пределы интегрирования — это пределы изменения переменной x на интервале интегрирования: $x_0 = a = 0$; $x_k = b = 4$. Искомая площадь

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^4 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(4^2 - 0^2) = 8.$$

Это площадь прямоугольного треугольника, равная половине произведения основания треугольника на его высоту (рис. 6.7,а).

2. $y = x^n$; $x_0 = 0$; $x_k = b$; $y = 0$.

Р е ш е н и е.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - 0^{n+1}) = \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

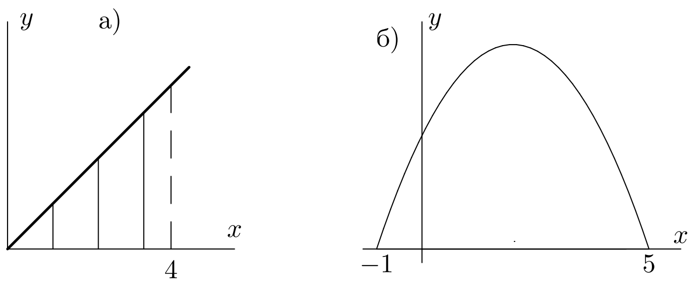


Рис. 6.7. Графическая иллюстрация:
а) – ззадача 1; б) – задача 3

В частности, при $n = 1$ получаем площадь треугольника, один катет которого (основание) равен b, а второй (высота) — единице (при $b = 4$ приходим к предыдущему примеру). При $n = 0$ — результатом интегрирования является площадь прямоугольника с высотой, равной 1, и основанием b.

3. $y = -x^2 + 4x + 5$; $y = 0$.

Р е ш е н и е. Точки пересечения кривой с осью x: $x_1 = a = -1$; $x_2 = b = 5$. Эти точки являются пределами интегрирования при определении площади:

$$S = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right)\Bigg|_{-1}^{5} =$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + 2{\cdot}5^2 + 5{\cdot}5\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 2\cdot(-1)^2 + 5\cdot(-1)\right) = 36.$$

4. $y = x^4$; $y = -x^2 + 2$; $y = 0$.

Р е ш е н и е. Рисунок 6.8,а с изображением графиков заданных функций показывает, что первая часть искомой площади заключена между осью абсцисс и кривой $y = x^4$ от прямой $x = -c$ до прямой $x = c$, где c абсцисса точки пересечения двух кривых. Вторая часть площади лежит под кривой $y = -x^2 + 2$ от прямых $x = \pm c$ до точек пересечения этой кривой с осью x.

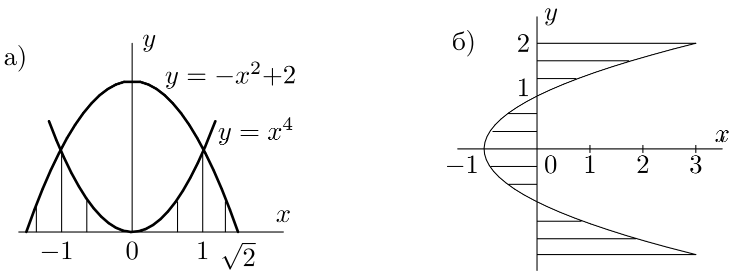


Рис. 6.8. Графическая иллюстрация:
а) – задача 4; б) – задача 5

Найдем абсциссы точек пересечения двух кривых, приравнивая описывающие эти кривые функции:

$$x^4 = -x^2 + 2, \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1.$$

Вторая пара корней является мнимыми числами ($x_{3,4} = \pm\sqrt{-2}$) и не представляет интереса для решения задачи.

Точки пересечения второй кривой с осью x $(y = 0)$ определятся после приравнивания второй функции нулю:

$$-x^2 + 2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Таким образом, пределы интегрирования определяются отрезками оси абсцисс от начала координат до точек ± 1 и от точек ± 1 до точек $\pm\sqrt{2}$ (рис. 6.8,а). В силу симметрии функций относительно оси y можно найти лишь правую часть площади и затем ее удвоить. То есть

$$S = 2\left(\int_0^1 x^4\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} (-x^2+2)\,dx\right) =$$
$$= 2\left(\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x\right)\bigg|_1^{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{15}(10\sqrt{2} - 11).$$

5. $y^2 = x + 1$, $y = \pm 2$ и $x = 0$.

Р е ш е н и е. Так как искомая площадь заключена между осью y $(x = 0)$ и кривой (рис. 6.8,б), то ее удобно вычислить, интегрируя по переменной y.

Кривая симметрична относительно оси x, поэтому найдем одну из ее частей (верхнюю) и удвоим результат.

Из первого заданного равенства выразим функцию x в явном виде:

$$x = y^2 - 1$$

и определим точку пересечения кривой с осью y. Приравняв нулю переменную x, найдем: $y = \pm 1$.

Так как часть площади (для $y \in [-1, 1]$) вычисляется для $x \le 0$, соответствующий ей интеграл умножаем на -1 (берем по абсолютной величине).

Учитывая сказанное, вычислим площадь:

$$S = 2\left(-\int_0^1 (y^2-1)\,dy + \int_1^2 (y^2-1)\,dy\right) =$$
$$= -2\left(\frac{y^3}{3} - y\right)\bigg|_0^1 + 2\left(\frac{y^3}{3} - y\right)\bigg|_1^2 = 4.$$

6. Площадь ограничена параболой $(y-2)^2 = x - 1$, касательной к параболе в точке с ординатой $y_0 = 3$ и осью x (рис. 6.9,а).

Р е ш е н и е. В рассматриваемой задаче удобно определять площадь, осуществляя интегрирование по переменной y, т.е. используя для вычисления площади формулу

$$S = \int_c^d \bigl(f_2(y) - f_1(y)\bigr)\, dy.$$

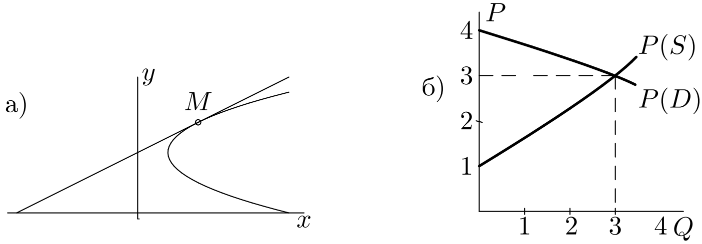


Рис. 6.9. Графическая иллюстрация:
а) – задача 6; б) – задача 7

Запишем уравнение параболы, выразив из нее переменную x:

$$x = y^2 - 4y + 5 = f_2(y).$$

Получим уравнение касательной к параболе, представляя ее в виде прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом $k = x'_y(y_0)$:

$$x - x_0 = k(y - y_0).$$

$$x'_y = 2y - 4; \qquad x'_y(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

Таким образом, точка касания $M(2;3)$ и уравнение касательной:

$$x - 2 = 2(y - 3), \qquad \text{или} \qquad x = 2y - 4 = f_1(y).$$

Найдем искомую площадь:

$$S = \left| \int_0^3 \bigl((y^2 - 4y + 5) - (2y - 4)\bigr)\, dy \right| = \left| \int_0^3 (y^2 - 6y + 9)\, dy \right| =$$

$$= \left| \int_0^3 (y-3)^2\, dy \right| = \frac{1}{3} \left| (y-3)^3 \right|_0^3 = 9.$$

Найти решения задач 7–9 с экономическим содержанием.

7. Заданы функции спроса $P{=}-\dfrac{1}{9}D^2{+}4$ и предложения $P{=}\dfrac{2}{9}S^2{+}1$ (рис. 6.9,б).

Товары продаются по цене, соответствующей точке равновесия. Определить излишки потребителя $P_{_D}$ и производителя P_s.
Р е ш е н и е. Найдем точку рыночного равновесия (точку пересечения кривых спроса и предложения), приравнивая выражения для двух функций ($S = D = Q$):

$$-\frac{1}{9}Q^2 + 4 = \frac{2}{9}Q^2 + 1, \quad \Longrightarrow \quad Q_* = \pm 3.$$

Реальному рынку соответствуют только допустимые (положительные) решения. Поэтому $Q_* = D_* = S_* = 3$. Соответствующая цена рыночного равновесия $P_* = -\dfrac{1}{9}3^2 + 4 = 3$.

Найдем искомые величины:

$$P_{_D} = \int_0^3 \left(-\frac{1}{9}Q^2 + 4\right) dQ - P_*Q_* = \left(-\frac{1}{9}\cdot\frac{Q^3}{3} + 4Q\right)\Bigg|_0^3 - 3\cdot 3 =$$

$$= -\frac{3^3}{27} + 4\cdot 3 - 9 = 2.$$

$$P_s = P_*Q_* - \int_0^3 \left(\frac{2}{9}Q^2{+}1\right) dQ = 9 - \left(\frac{2}{9}\cdot\frac{Q^3}{3}{+}Q\right)\Bigg|_0^3 = 9 - \frac{2}{27}\cdot 3^3 - 3 = 4.$$

8. Для нормальной работы предприятия в его развитие требуется вкладывать средства S, зависящие от времени t, измеряемого в годах: $S = 2000\sqrt[3]{t}$. Из этих средств на восстановление оборудования и заработную плату должны расходоваться средства, определяемые зависимостью $S_{_A} = 100t + 1000$. Остальные средства (J) планируется направить на непосредственное развитие предприятия.

Определить, какая сумма из общих вложений будет израсходована предприятием на его непосредственное развитие за $T = 8$ лет.

Р е ш е н и е. Чистые годовые инвестиции предприятия $J = S - S_{_A} = 2000\sqrt[3]{t} - 100t - 1000$. Общая сумма за 8 лет:

$$P = \int_0^8 (2000\sqrt[3]{t} - 100t - 1000)\,dt = 100\left(20\cdot\frac{3}{4}t^{4/3} - \frac{1}{2}t^2 - 10t\right)\Bigg|_0^8 =$$

$$= 100(240 - 32 - 80) = 12800.$$

9. Определить начальный вклад P_0 в банк, начисляющий непрерывные проценты под $r\% = 10\%$ годовых, который позволит вкладчику получать в банке ежегодно по $\Delta P = 10000$ д.е. в течение $n = 5$ лет.

Р е ш е н и е.

$$P_0 = \int_0^n \Delta P e^{-rt}\, dt = \int_0^5 10000 e^{-t/10}\, dt = -10^5 e^{-t/10}\Big|_0^5 =$$

$$= -10^5 \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right) \approx 4 \cdot 10^4.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–3 найти площади фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y = \sqrt{x},\ y = 2 - x,\ y = 0.$

2. $y = 1/x,\ y = x,\ x = e.$

3. $y = -x^2 - 2x + 3,\ y = x - 1,\ x > 0.$

4. Заданы функции спроса $2D+3P-18=0$ и предложения $S-3P+9=0$. Товар на рынке продается по равновесной цене. Определить излишки потребителя и продавца.

5. Определить начальный вклад в банк, начисляющий непрерывные проценты под 12% годовых, который позволит вкладчику получать ежегодно по 14400 д.е. в течение 4 лет.

Типовые контрольные работы

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ (на 15 мин).

1. Перечислите номера выражений и утверждений, характеризующих свойства неопределенного интеграла $\int f(x)dx = F(x) + C$.

1. $F'(x) = f(x)$. 2. $dF(x) = f(x)dx$. 3. $kF(x) = \int kf(x)dx$.
4. $C = 0$, если $f(x) = \mathrm{const}$. 5. $f(x)$ — монотонная функция.

2. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования вопросов (левая колонка). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. $\int dx$	1. C;
2. $\int e^x\,dx$	2. $e^x + C$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	3. $-\operatorname{ctg} x + C$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	4. $\arcsin x + C$.

3. Перечислите корректные соотношения, связанные с приведением неправильной дроби к правильной и разложению дроби на слагаемые, если P_n — полином n-й степени.

1. $\dfrac{P_m}{P_n} = P_{m-n} + \dfrac{P_{n-1}}{P_n}$ $(m > n)$. 2. $\dfrac{c}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$.

3. $\dfrac{cx}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{Ax}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$. 4. $\dfrac{cx}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$;

5. Среди соотношений 1–4 нет требуемых.

4. Перечислите правильные значения интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, если $F(x)$ — первообразная подынтегральной функции.

1. < 0 при $a > b$. 2. $F(b) - F(a)$. 3. $\displaystyle -\int_b^a f(x)\,dx$.

4. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$. 5. $f(\zeta)(b-a)$, $\zeta \in [a, b]$.

5. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся методов численного интегрирования ($h = (b-a)/n$). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. Прямоугольников $S^-_{\text{пр}}$	1. $\frac{h}{6}\big(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1})\big)$;
2. Прямоугольников $S^+_{\text{пр}}$	2. $h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)$;
3. Трапеций	3. $h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$;
4. Симпсона	4. $h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$.

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ (на 75 мин).

1. $\int (2x^2 - \sqrt[3]{x})\,dx$.

2. $\displaystyle\int x \ln^2 x\,dx$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{1 + x^2}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}$ и $y = x^3$.

Задание на расчетную работу 3

Численные методы интегрирования

Задана функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{k + x}}$, где $k = N/n$; n — порядковый номер студента в учебной группе (или две последние цифры номера студенческого билета), $N = a$ — последняя цифра учебной группы, в которой числится студент. Количество подынтервалов на заданных ниже интервалах при численном решении задач равно 10.

1. Вычислить интеграл $\int_a^{a+10} f(x)\,dx$:

   1.1 используя метод замены переменной (при получении первообразной) и формулу Ньютона-Лейбница (аналитическое решение);

   1.2 методом прямоугольников, определяя площади по левым значениям функции на подынтервалах $S^-_{\text{пр}}$ и по правым — $S^+_{\text{пр}}$;

   1.3 методом трапеций;

   1.4 методом Симпсона ($2n = 10$).

1.5 раскладывая функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = a$ и ограничиваясь тремя членами разложения;

2. Определить функцию $s = \int_a^x f(x)\,dx$.

3. Изобразить графики функций $s(x)$, $f(x)$ и ее первообразной. Пояснить их смысл.

4. Определить относительную погрешность вычислений по сравнению с аналитическим решением.

Глава 7

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения присутствуют во многих математических моделях, описывающих разнообразные непрерывно протекающие процессы и явления, в частности, они находят применение в экономических задачах и в задачах управления общественными процессами. Это раздел математики, который составляет основу курсов: «Математические методы и модели в экономике», «Теория управления экономическими системами» и др.

В данном учебном пособии даны начальные сведения о дифференциальных уравнениях и методах их решения. В частности, рассмотрены дифференциальные уравнения первого порядка (линейные и нелинейные), линейные дифференциальные уравнения n-го порядка и системы линейных дифференциальных уравнений. Описан подход к построению разностных уравнений. Приведены простейшие методы численного интегрирования дифференциальных уравнений и примеры использования дифференциальных уравнений в экономических задачах.

7.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее неизвестную функцию, ее аргументы (одну или несколько независимых переменных) и производные функции различных порядков.

Если неизвестная функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, в противном случае — дифференциальным уравнением *в частных производных*.

Порядок старшей производной функции, входящей в уравнение, определяет *порядок* дифференциального уравнения. Так, обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{7.1}$$

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7.2}$$

называется *разрешенным относительно старшей производной* или уравнением, записанном в *нормальном виде*.

Одним из наиболее распространенных типов дифференциальных уравнений является линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + \varphi_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = f(x). \tag{7.3}$$

Линейность этого уравнения определяется тем, что все производные функции y, как и сама функция, входят в уравнение в первой степени. Коэффициенты уравнения $\varphi_i(x)$ $(i = \overline{0, n-1})$, как и функция $f(x)$ в правой части уравнения, могут быть любыми непрерывными, в частности постоянными, функциями переменной x.

Решением дифференциального уравнения на некотором интервале изменения переменной x называется всякая функция $y(x)$, определенная и непрерывная на этом интервале вместе со всеми своими производными до порядка n включительно и обращающая уравнение в тождество.

Процесс нахождения решения называется *интегрированием* дифференциального уравнения, а график решения — *интегральной кривой.*

Дифференциальное уравнение называется *интегрируемым в квадратурах*, если его решение выражается через элементарные функции и неопределенные интегралы от них.

Пример 1. Найти решение уравнения: $y' - 2x = 0$.
Р е ш е н и е. Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Разрешим его относительно старшей (в данном случае единственной) производной и преобразуем:

$$y' = 2x. \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x, \quad \longrightarrow \quad dy = 2xdx.$$

Интегрируя последнее уравнение (обе его части), получим решение

$$y = \int 2xdx = x^2 + C. \tag{7.4}$$

Таким образом, решением дифференциального уравнения является семейство парабол (интегральных кривых), отличающихся значениями постоянной C. На рис. 7.1 изображены интегральные кривые, соответствующие найденному решению.

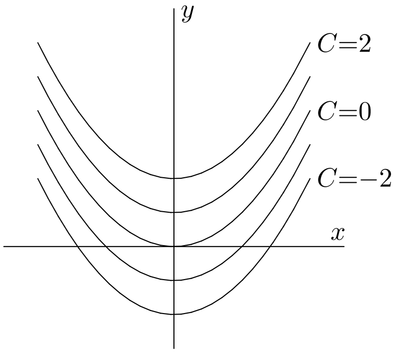


Рис. 7.1. Интегральные кривые

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $y''=x+1$.
Р е ш е н и е. Уравнение разрешено относительно старшей производной. Это позволяет путем интегрирования понизить порядок уравнения.

Так как $y''=\dfrac{dy'}{dx}$, то исходное уравнение представим в виде равенства дифференциалов $dy'=(x+1)dx$. Интегрируя, получим

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1,$$

или

$$dy = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C_1\right) dx.$$

Интегрируя еще раз, придем к решению

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $y^{(4)} = 0$.
Р е ш е н и е. Последовательно интегрируем уравнение 4 раза:

$$y''' = C_1; \quad y'' = C_1 x + C_2; \quad y' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

В всех трех рассмотренных примерах решения дифференциальных уравнений содержат произвольные постоянные. Решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну постоянную, второго порядка — две, ..., четвертого – четыре. Решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит n независимых постоянных.

Функция

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{7.5}$$

зависящая от независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, называется *общим решением дифференциального уравнения* (7.1), если:

1) существуют все производные от y до n-ного порядка включительно;

2) при любых допустимых значениях постоянных она превращает это уравнение в тождество.

Любое решение уравнения (кроме, возможно, отдельных решений, называемых *особыми*) может быть получено из (7.5) путем соответствующего выбора $C_1, \ldots, C_n$.

При конкретных фиксированных значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$ решение (7.5) называется *частным решением дифференциального уравнения.*

Соотношение

$$\Psi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0,$$

которое определяет неявно общее решение дифференциального уравнения, называется *общим интегралом дифференциального уравнения.* При конкретных допустимых значениях постоянных интегрирования общий интеграл уравнения становится *частным интегралом.*

Пример 4. Убедиться в том, что функция

$$y = C_1 e^{C_2 x}, \tag{7.6}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, является решением дифференциального уравнения

$$y''y-(y')^2=0. \tag{7.7}$$

Р е ш е н и е. Найдем последовательно функции, входящие в заданное дифференциальное уравнение:

$$y'=C_1C_2e^{C_2x};\quad (y')^2=C_1^2C_2^2e^{2C_2x};$$

$$y''=C_1C_2^2e^{C_2x};\quad y''y=C_1^2C_2^2e^{2C_2x}.$$

Подставляя найденные функции в дифференциальное уравнение, убеждаемся в том, что оно превращается в тождество.

Для нахождения частного решения дифференциального уравнения ставится начальная или краевая задача. Краевая задача сводится к определению решения дифференциального уравнения на некотором интервале изменения аргумента при известных значениях функции и, возможно, ее производных на концах интервала.

В примере 4 частное решение, представляющее интегральную кривую, которая проходит через две фиксированные точки плоскости $(x_1;y_1)=(0;1)$ и $(x_2;y_2)=(1;e)$, находится после определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 из двух уравнений:

$$1=C_1e^{C_2\cdot 0}\text{ и }e=C_1e^{C_2\cdot 1}\quad\to\quad C_1=C_2=1.$$

Таким образом, одним из частных решений дифференциального уравнения (7.7) является функция

$$y=e^x. \tag{7.8}$$

Использованные *краевые условия* — условия прохождения интегральной кривой через заданные точки — можно записать в виде

$$y(0)=1\quad\text{и}\quad y(1)=e. \tag{7.9}$$

Задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка называется задача отыскания его частного решения при n условиях, заданных для одного фиксированного значения x_0 аргумента:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{7.10}$$

Задача Коши является частным случаем краевой задачи.

Можно доказать, что любую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения можно привести к задаче Коши. Например, для примера 3 начальные условия в точке $x_0 = 0$

$$y(0) = 1 \quad \text{и} \quad y'(0) = 1$$

определяют то же частное решение $y = e^x$, что и краевые условия (7.9).

Рассмотрим еще два примера. Они демонстрируют подходы к построению дифференциальных уравнений по известным интегральным кривым и по данным конкретной экономической ситуации.

Пример 5. Семейство интегральных кривых описывается функцией $y = (C_1 + C_2x)e^x$. Составить дифференциальное уравнение, общим решением которого является заданная функция.

Р е ш е н и е. Дважды продифференцируем функцию y и из полученных выражений исключим постоянные C_1 и C_2:

$$y'=(C_2+C_1+C_2x)e^x=C_2e^x+y; \quad y''=C_2e^x+(C_2+C_1+C_2x)e^x=2C_2e^x+y.$$

Вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 2, придем к искомому уравнению

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Пример 6. Статистические данные для некоторого региона указывают на то, что количество образованных новых предприятий и количество обанкротившихся предприятий за некоторый промежуток времени Δt пропорциональны среднему за этот промежуток количеству действующих предприятий $y(t)$ с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2, соответственно.

Требуется установить зависимость численности действующих предприятий от времени.

Р е ш е н и е. Число образованных за время Δt предприятий $\Delta y_1 = k_1 y \Delta t$; число обанкротившихся — $\Delta y_2 = k_2 y \Delta t$. Прирост действующих предприятий равен разности этих величин:

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t = k y \Delta t,$$

где $k = k_1 - k_2$.

После деления выражения для Δy на Δt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$

$$y' = ky. \tag{7.11}$$

Преобразуем уравнение

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \to \quad \frac{dy}{y} = kdt$$

и, интегрируя его левую и правую части, получим

$$\ln|y| = kt + \ln|C| \quad \to \quad y = Ce^{kt}.$$

Количество предприятий будет возрастать при $k_1 > k_2$ и уменьшаться при противоположном знаке неравенства. Если $k_1 = k_2$, то общее количество предприятий изменяться не будет.

7.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

7.2.1. Теорема существования и единственности

Дифференциальное уравнение первого порядка общего вида представляет собой неявно заданную функцию F независимой переменной x, функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{7.12}$$

Нормальным дифференциальным уравнением первого порядка, или *уравнением, разрешенным относительно производной,* называют дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{7.13}$$

где $f(x, y)$ — заданная функция.

Если функция в правой части уравнения (7.13) не зависит от y и является непрерывной на некотором интервале (a, b) изменения переменной x, тогда решение $y(x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{7.14}$$

представляет собой первообразную функции $f(x)$. В этом случае решение (7.14):

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C \qquad \bigl(x_0 \in (a,b)\bigr), \tag{7.15}$$

где C – произвольная постоянная. Аргумент x в подынтегральном выражении заменен на t чтобы отличать его от верхнего предела интегрирования. Таким образом, дифференциальное уравнение (7.14) имеет бесчисленное множество решений. Чтобы выделить одно частное решение уравнения, достаточно задать значение первообразной в какой-либо точке, например $y(x_0) = y_0$. В этом случае решение уравнения (7.15) единственно:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt. \tag{7.16}$$

Задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (7.12) $\bigl($или (7.13)$\bigr)$ называется задача отыскания его решения, удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.17}$$

Точка $(x_0,\, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Задачу Коши называют также начальной задачей, а соотношение (7.17) — начальным условием.

Если функция $y = y(x)$ является решением уравнения (7.13) на интервале (a, b) изменения переменной x, то график этой функции является интегральной кривой уравнения (7.13).

Задача Коши сводится к следующему. *Найти интегральную кривую дифференциального уравнения* (7.13), *проходящую через заданную точку* (x_0, y_0).

Основополагающее значение при определении решений дифференциальных уравнений имеет следующая теорема.

Теорема (существования и единственности). *Пусть в дифференциальном уравнении первого порядка* (7.13) *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ *непрерывны в некоторой области* Ω *плоскости* (x, y), *и точка* $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Тогда*:

1. Существование. *В некоторой окрестности точки* x_0 $(|x - x_0| < \delta)$ *существует решение задачи Коши* (7.13), (7.17).

2. Е д и н с т в е н н о с т ь. *Если* $y = y_1(x)$ *и* $y = y_2(x)$ — *два решения задачи Коши* (7.13)–(7.17), *то* $y_1(x) \equiv y_2(x)$ *при всех значениях* x, *при которых эти решения определены.*

Теорема имеет ясную геометрическую интерпретацию. *При непрерывности* $f(x, y)$ *и* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ *в области* Ω *через каждую точку* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *проходит интегральная кривая и притом единственная.*

Обратим внимание на два момента.

1. Дифференциальное уравнение (7.13) имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра — значения x. Если величины x фиксировать ($x = x_0$) и выбирать данные Коши вида $y(x_0) = y_0$, то получаемые решения будут различными для различных y_0.

2. Теорема гарантирует существование решения только в ограниченной окрестности точки x_0 $(|x - x_0| < \delta|)$. Это важно, так как в ряде задач при произвольных x решение может не существовать или не быть единственным (как в следующем примере).

Пример. Задано уравнение: $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}$.

Определить, существует ли область D $\big((x, y) \in D\big)$, для точек которой решение дифференциального уравнения неединственно.

Р е ш е н и е. Функция $f(y) = 3\sqrt[3]{y^2}$, стоящая в правой части уравнения, определена и непрерывна на всей числовой оси. Что касается производной $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}\dfrac{dy}{dx}$, то она обращается в бесконечность при $y = 0$, т.е. на оси x нарушается условие 2 теоремы существования и единственности. Единственность решения может не иметь места.

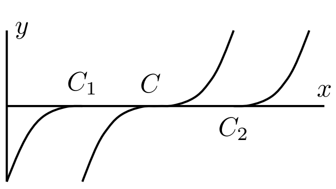


Рис. 7.2. Пример неоднозначного решения ДУ

Непосредственное интегрирование дифференциального уравнения приводит к общему решению

$$y = (x - C)^3. \tag{7.18}$$

Решение очевидно существует при всех действительных значениях переменных x и y.

Кроме того, заданному дифференциальному уравнению удовлетворяет решение $y = 0$ (прямые, совпадающие с осью x). Единственности решения нет — через каждую точку оси x проходят по меньшей мере две интегральные кривые:

(7.18) и $y = 0$.

В действительности через любую точку $(C, 0)$ (C — произвольное число) проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Эти кривые можно составить из трех «кусков»:

1) нижней части параболы (7.18), в уравнении которой C принимает значение $C_1 \leq C$ $\left(y = (x - C_1)^3\right)$;

2) отрезка C_1C_2 прямой $y = 0$ (оси x) для $C \in [C_1, C_2]$;

3) верхней части параболы $y = (x - C_2)^3$.

В силу произвольности чисел C_1 и C_2 таких «трехкусочных» кривых может быть бесчисленное множество.

Если точка (x_0, y_0) не лежит на оси x, то через нее проходит единственная интегральная кривая (7.18).

Приведенный пример поясняет, почему при формулировке теоремы Коши речь шла о существовании и единственности решения уравнения в окрестности начальной точки, где $x = x_0$, а не во всей области определения функции.

Рассмотрим некоторые частные виды дифференциальных уравнений первого порядка.

7.2.2. Автономные уравнения. Качественный анализ

Дифференциальные уравнения первого порядка (7.13), правая часть которых зависит только от переменной y, называются *автономными.*

Наибольшее распространение в прикладных задачах находят автономные дифференциальные уравнения, в которых независимой переменной является время t. Производные от функции по времени принято обозначать точкой над функцией. Поэтому автономное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(y). \tag{7.19}$$

Функция $f(y)$ предполагается непрерывной на некотором интервале G изменения y. Если $f(y) \neq 0$ при $y \in G$, то на этом интервале $\dfrac{dy}{f(y)} = dt$. Если заданы условия Коши: при $t = t_0$ $y(t_0) = y_0$, то частный интеграл автономного уравнения

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = t - t_0. \tag{7.20}$$

Формула (7.20) не дает всех решений дифференциального уравнения (7.19). При ее получении предполагалось, что $f(y) \neq 0$. Но если y_k $(k = \overline{1, n})$ является одним из n корней уравнения

$$f(y) = 0, \tag{7.21}$$

то функции

$$y = y_k \qquad (k = \overline{1, n})$$

так же, как и (7.20), представляют решения автономного дифференциального уравнения.

Графически уравнения $y = y_k$ представляют собой прямые, перпендикулярные оси ординат.

Для автономных уравнений справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функция $y = g(t)$ является решением автономного дифференциального уравнения, то функция $y = g(t + C)$, где C — постоянная, также является решением этого уравнения.*

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при параллельном переносе оси y (неизменном положении оси t) интегральные кривые переходят друг в друга.

Автономное дифференциальное уравнение (7.19) описывает процесс движения точки по прямой Oy, которая в этом случае (зависимости y от времени t) называется *фазовой прямой.* Производная $\dot{y}$ — это скорость движения точки по фазовой прямой. Скорость согласно (7.19) зависит только от координаты y и не зависит от значения t.

Пример. Рассмотрим уравнение (7.19) с конкретным видом его правой части

$$\dot{y} = (b - ay)y. \tag{7.22}$$

Два решения — это постоянные значения y, обращающие в нуль правую часть уравнения (рис. 7.3):

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = \frac{b}{a}. \tag{7.23}$$

Другие решения найдем, разделяя в уравнении переменные при условии, что $f(y) = (b - ay)y$:

$$bdt = \left(\frac{a}{b-ay} + \frac{1}{y}\right) d\,y.$$

После интегрирования обеих частей уравнения получим

$$bt = -\ln|b-ay| + \ln|y| + \ln|c| = \ln\left|\frac{cy}{b-ay}\right|.$$

Выразим отсюда искомую функцию в явном виде:

$$y = \frac{b/a}{1+\frac{c}{a}e^{-bt}}. \tag{7.24}$$

Поведение y зависит от знака и величины произвольной постоянной $\frac{c}{a}$.

При этом выделяются три характерные области изменения постоянной.

При $c/a = c_0 \in (0, \infty)$ функция

$$y = \frac{b/a}{1+c_0 e^{-bt}} \tag{7.25}$$

монотонно возрастает от асимптоты $y = 0$ при $t \to -\infty$ до асимптоты $y = b/a$ при $t \to +\infty$.

Область определения функции y: $t \in (-\infty, \infty)$. Область значений: $y \in (0, b/a)$.

При $c/a = c_1 \in (-1, 0)$ положительная функция

$$y = \frac{b/a}{1+c_1 e^{-bt}} \tag{7.26}$$

монотонно убывает, асимптотически приближаясь к прямой $y = b/a$ при $t \to +\infty$.

Кривая (7.26) имеет вертикальную асимптоту $t = -\frac{1}{b}\ln|c_1|$.

Область определения функции: $t \in \left(\frac{1}{b}\ln|c_1|^{-1}, \infty\right)$. Область значений: $y > b/a$.

При $c/a = c_2 \in (-\infty, -1)$ отрицательная функция

$$y = \frac{b/a}{1+c_2 e^{-bt}} \tag{7.27}$$

монотонно убывает от асимптоты $y = 0$ при $t \to -\infty$.

Кривая (7.27) имеет вертикальную асимптоту $t = \dfrac{1}{b}\ln|c_2|$.

Область определения функции: $t \in \left(-\infty, \dfrac{1}{b}\ln|c_2|\right)$. Область значений: $y < 0$.

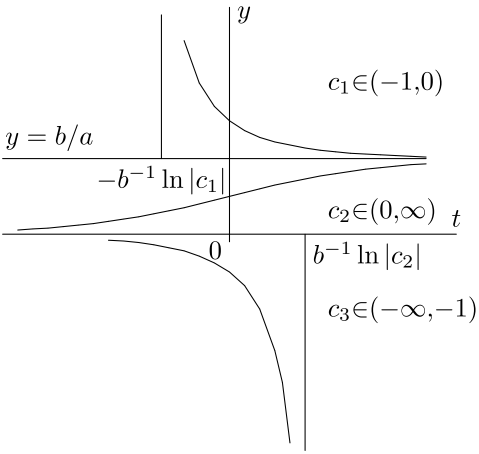


Рис. 7.3. Интегральные кривые

В теореме, сформулированной в начале параграфа, говорилось о том, что решение дифференциального уравнения (7.22) не изменяется при добавлении к переменной t любой постоянной. Поэтому для описания реальных процессов, требующих соблюдения условия $t > 0$, переменную t путем добавления постоянной всегда можно сделать положительной.

Графики функции (7.24), представляющей собой решение дифференциального уравнения (7.22), называются *логистическими кривыми*, а функции — *логистическими функциями*.

Эти функции широко применяются при описании развивающихся во времени экономических процессов. В частности, функция (7.25) описывает изменение объема производства большинства предприятий. На начальном этапе создания предприятия (в период становления) производство обычно развивается медленно, но увеличивающимся темпом. Затем оно переходит в период стабильно ускоренного развития. По мере насыщения рынка темп развития предприятия снижается. В пределе объем производства стремится к величине, диктуемой потребностями рынка.

Анализ поведения решений автономных дифференциальных уравнений можно проводить, не прибегая к решению, а проводя их *качественный анализ*.

Если известны все корни $y_1, \ldots, y_k, \ldots$ уравнения $f(y) = 0$, назы-

ваемые *нулями функции* $f(y)$, то решение уравнения $y = y_k = \mathrm{const}$ — это фиксированная, не изменяющая своего положения во времени, точка на прямой Oy. В связи с этим нули функции $f(y)$ называют *положениями*
равновесия, или *стационарными точками.*

Прямые $y = y_k$ разбивают координатную плоскость на полосы, границы которых параллельны оси абсцисс t.

Считаем функцию $f(y)$ непрерывной. Тогда на интервале изменения функции между ее соседними нулями $y_k < f(y) < y_{k+1}$ производная $\dot{y}$ знакопостоянна. Это означает, что все интегральные кривые, лежащие в одной полосе (между y_k и y_{k+1}), соответствуют либо возрастающим, либо убывающим функциям.

Обратимся к уравнению (7.22).

Для этого уравнения существует 5 интервалов изменения аргумента, на которых скорость изменения y сохраняет знак: $(-\infty; 0)$, $[0]$, $(0; b/a)$, $[b/a]$, $(b/a; +\infty)$.

На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(b/a; +\infty)$ производная $\dot{y} < 0$. Функция убывает. На интервале $(0; b/a)$ $\dot{y} > 0$ функция возрастает.

Направления возрастания и убывания функции y, представляющей решение автономного дифференциального уравнения, часто представляют стрелками на оси ординат (рис. 7.4). Такое представление называется *фазовым портретом* уравнения.

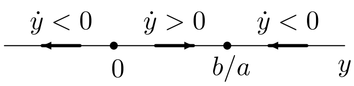


Рис. 7.4. Фазовый портрет дифференциального уравнения

Направления движения точки вблизи положений равновесия определяет тип положения равновесия. Так, из окрестностей точки $y = b/a$ примера при увеличении времени функция приближается к этой точке (стрелки на рисунке направлены к точке). В этом случае положение $y = b/a$ характеризует *устойчивое равновесие.* От точки $y = 0$ функция удаляется со временем. Точка характеризует *неустойчивое равновесие.* Возможен также еще один тип точек — точек *полуустойчивого равновесия.* Направления возрастания (убывания) функции по обе стороны таких точек совпадают. Примером автономного дифференциального уравнения с неизменным знаком производной является пример, рассмотренный в § 7.2.1.

7.2.3. Уравнения с разделяющимися переменными

Это уравнения вида

$$f_1(x)g_2(y)dx = f_2(x)g_1(y)dy. \tag{7.28}$$

Разделив обе части уравнения на произведение функций $f_2(x)g_2(y) \neq 0(!)$, придем к *дифференциальному уравнению с разделенными переменными*:

$$F(x)dx = G(y)dy, \tag{7.29}$$

где

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \qquad G(y) = \frac{g_1(y)}{g_2(y)}.$$

Интегрирование обеих частей уравнения (7.29) позволяет получить его общий интеграл:

$$\int F(x)dx = \int G(y)dy. \tag{7.30}$$

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся *однородные уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7.31}$$

Введение новой функции $u = y/x \quad (y = ux) \ \rightarrow \ \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ позволяет привести уравнение (7.31) к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}.$$

Примеры. Найти решения следующих дифференциальных уравнений.

1. $y' = y^2$.
Р е ш е н и е. Отметим сразу, что уравнение автономное и ему удовлетворяет нулевое решение $y = 0$.

Для определения других решений предположим, что $y \neq 0$. Последовательно получим:

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \ \rightarrow \ dx = \frac{dy}{y^2}, \ \rightarrow \ x = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C.$$

Получен общий интеграл дифференциального уравнения.

Общее решение найдем, выразив отсюда y в явном виде:

$$y = \frac{1}{C - x}.$$

2. $x\sqrt{1-y^2}dx + (1-x^2)ydy = 0.$

Р е ш е н и е. Данное уравнение — типичный представитель дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, так как в его двух слагаемых множители содержат функции, зависящие только от одной переменной. Разделим (не в смысле деления!) эти переменные, поделив уравнение на $(1-x^2)\sqrt{1-y^2}$ $(x, y \neq \pm 1)$.

Возьмем интеграл от обеих частей уравнения:

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int \frac{x\,dx}{x^2-1}.$$

Оба интеграла легко приводятся к табличным:

$$-\int \frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1}.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$-2\sqrt{1-y^2} = \ln|x^2-1| + 2C.$$

Это общий интеграл заданного уравнения. Выражая отсюда переменную y в явном виде, придем к двум решениям

$$y = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C\right)^2}.$$

3. $\quad y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x}.$

Р е ш е н и е. Уравнению удовлетворяет нулевое решение $y = 0$.

Другие решения будем искать в предположении, что $y \neq 0$.

Введем новую переменную $u = y/x$ $(u \neq 0)$. При этом $y' = xu' + u$. Переходя к исходному уравнению, перепишем его в виде

$$x\frac{du}{dx} + u = u^2 + u, \quad \text{или} \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя полученное уравнение, получим его общий интеграл и решение:

$$-\frac{1}{u} = \ln|Cx|, \qquad y = ux = -\frac{x}{\ln|Cx|}.$$

7.2.4. Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(x)y = f(x) \tag{7.32}$$

называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.* Характерной особенностью линейных уравнений является то, что производная от функции $y(x)$ и сама функция входят в уравнение в первой степени. Функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ могут быть нелинейными. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(x)y = 0 \tag{7.33}$$

называется *линейным однородным.*

Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка являются уравнениями с разделяющимися переменными. После разделения переменных

$$\frac{dy}{y} = -\varphi(x)\,dx$$

и интегрирования получим решение (7.33)

$$y = C_1 \exp\left(-\int \varphi(\tilde{x})\,d\tilde{x}\right), \tag{7.34}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Будем искать решение неоднородного уравнения (7.32) в виде, повторяющем решение однородного уравнения (7.34), но в предположении, что C_1 является функцией от x:

$$y = C_1(x) \exp\left(-\int \varphi(\tilde{x})\,d\tilde{x}\right).$$

Подставляя это предполагаемое решение вместе с производной

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dC_1(x)}{dx} - C_1(x)\varphi(x)\right) \exp\left(-\int \varphi(\tilde{x})\,d\tilde{x}\right)$$

в уравнение (7.32), после приведения подобных придем к дифференциальному уравнению относительно переменной $C_1(x)$:

$$\frac{dC_1(x)}{dx} = f(x) \exp\left(\int \varphi(\tilde{x})\,d\tilde{x}\right).$$

После интегрирования найдем

$$C_1(x) = C + \int f(\hat{x}) \exp\left(\int \varphi(\tilde{x})\, d\tilde{x}\right) d\hat{x}.$$

Здесь C – произвольная постоянная.

Подставляя $C_1(x)$ в решение неоднородного уравнения, получим

$$y(x) = \left[C + \int f(\hat{x}) \exp\left(\int \varphi(\tilde{x})\, d\tilde{x}\right) d\hat{x}\right] \exp\left(-\int \varphi(\tilde{x})\, d\tilde{x}\right) d\hat{x}. \quad (7.35)$$

7.2.5. Уравнения с постоянным коэффициентом при y

Рассмотрим *линейное однородное* дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом p при переменной y:

$$\frac{dy}{dx} - py = 0. \quad (7.36)$$

Будем искать частное решение уравнения в виде

$$y = Ce^{kx}. \quad (7.37)$$

Подставляя (7.37) в (7.36), получим

$$C(k - p)e^{kx} = 0.$$

Отсюда, вследствие того, что $Ce^{kx} \neq 0$, придем к линейному алгебраическому уравнению относительно неизвестного коэффициента k, называемому *характеристическим* уравнением:

$$k - p = 0.$$

Из этого уравнения найдем $k = p$.

Поэтому решение дифференциального уравнения (7.36) представляется в виде

$$y = Ce^{px}. \quad (7.38)$$

К такому же решению можно прийти, используя другие подходы.

Во-первых, (7.36) — это уравнение с разделяющимися переменными, которое после разделения переменных приводит к решению (7.38).

Во-вторых, решение (7.38) получится, если в (7.35) подставить вместо переменных функций постоянные: $\varphi(x) = -p, \quad f(x) = 0$.

Рассмотрим *неоднородное* линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянным коэффициентом

$$y' - py = P_m(x)e^{\nu x}. \tag{7.39}$$

Здесь ν — постоянная,

$P_m(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ — многочлен (полином) степени m.

Приведем доказываемую в § 7.5 для уравнения n-го порядка теорему.

Теорема 1. *Решение* $y(x)$ *дифференциального уравнения* (7.39) *является суммой общего решения* $\overset{0}{y}$ (7.38) *однородного уравнения* (7.36) *и частного решения* $\overset{*}{y}$ *неоднородного уравнения* (7.39):

$$y = \overset{0}{y} + \overset{*}{y}\,. \tag{7.40}$$

Теорема распространяется на сумму любого числа частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, … дифференциального уравнения (7.39).

Теорема 2. *Если функции* $y_1(x)$, $y_2(x)$, … *являются частными решениями дифференциального уравнения* (7.39), *то их сумма* $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots$ *также является решением этого уравнения.*

По отношению к структуре частных решений неоднородного дифференциального уравнения существует следующая теорема.

Теорема 3. *Если в уравнении* (7.39) $\nu \neq p$, *то его частным решением является функция*

$$\overset{*}{y} = Q_m(x)e^{\nu x}. \tag{7.41}$$

Если $\nu = p$, *то частным решением уравнения является функция*

$$\overset{*}{y} = xQ_m(x)e^{\nu x}. \tag{7.42}$$

Здесь Q_m — многочлен степени m с коэффициентами, в общем отличными от a_i $(i = \overline{1, m})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать решение уравнения (7.39) в виде

$$y = e^{\nu x} u. \tag{7.43}$$

Подставляя (7.43) в уравнение (7.39), для определения функции u получим уравнение

$$u' + (\nu - p)u = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \quad (a_m \neq 0). \tag{7.44}$$

Если $\nu = p$, то из (7.43) сразу получаем решение для u:

$$u = \int P_m(\tilde{x})\, d\tilde{x} = x\left(a_0 + \frac{1}{2}a_1 x + \ldots + \frac{1}{m+1}a_m x^m\right), \tag{7.45}$$

соответствующее (7.42). Постоянная в последнем интеграле отсутствует, так как произвол в ее выборе учтен при определении $\overset{0}{y}$

Пусть $\nu \neq p$. Будем искать решение для u в виде

$$u = Q_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,$$

где b_i $(i = \overline{1, m})$ — неопределенные постоянные коэффициенты. Подставим предлагаемое решение в уравнение (7.44):

$$(\nu - p)b_0 + b_1 + [(\nu - p)b_1 + 2b_2]x + \ldots + [(\nu - p)b_m]x^m =$$

$$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m.$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях x (при линейно независимых функциях) в обеих частях равенства, получим систему $m + 1$ линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = (\nu - p)b_0 + b_1, \\ a_1 = (\nu - p)b_1 + 2b_2, \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m-1} = (\nu - p)b_{m-1} + mb_m, \\ a_m = (\nu - p)b_m. \end{array}\right.$$

Уравнения позволяют выразить $m+1$ коэффициент b_i через такое же количество коэффициентов a_i.

Так как решение неоднородного уравнения (7.39), согласно Теореме 1, равно сумме решения однородного уравнения и какого-либо решения неоднородного уравнения, то общее решение уравнения (7.39) найдено.

Функция

$$f(x) = P_0(x)e^{\nu_0 x} + P_1(x)e^{\nu_1 x} + P_2(x)e^{\nu_2 x} + \ldots + P_k(x)e^{\nu_k x}, \tag{7.46}$$

где $P_j(x)$ $(j = \overline{1,k})$ — многочлены произвольной степени от x, называется *квазимногочленом*, или *квазиполиномом.*

Теорема 2 позволяет сделать следующее утверждение. *Если правая часть уравнения* (7.39) *представляет собой квазимногочлен* (7.46), *то частным решением дифференциального уравнения будет сумма соответствующих квазимногочлену частных решений.*

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' + 2y = 1 + xe^{\nu x} \tag{7.47}$$

при двух значениях коэффициента: $\nu = 1$ и $\nu = -2$.
Р е ш е н и е. Так как коэффициент $p = -2 = k$, то общее решение неоднородного уравнения $y' + 2y = 0$:

$$\overset{0}{y} = Ce^{-2x}.$$

Определим частные решения заданного неоднородного дифференциального уравнения. Правая часть уравнения представляет собой квазиполином $f(x) = P_0 e^{\nu_0 x} + P_2 e^{\nu_2 x}$, для которого $P_0 = 1$, $\nu_0 = 0$; $P_2 = x$, ν_2 может принимать два значения: 1 и -2.

Если в правой части заданного уравнения стоит только первое слагаемое (постоянная величина)

$$y' + 2y = 1,$$

то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$\overset{*}{y}_1 = b.$$

Подставим это предполагаемое решение в дифференциальное уравнение:

$$b' + 2b = 1, \qquad b = 1/2.$$

Поэтому

$$\overset{*}{y}_1 = 1/2.$$

Рассмотрим функцию правой части уравнения (7.47) при $\nu = 1 \neq p = -2$, удерживая в ней только второе слагаемое:

$$y' + 2y = xe^{x}.$$

Частное решение этого дифференциального уравнения будем искать в виде

$$\overset{*}{y}_{21} = (b_0 + b_1 x)e^{x}.$$

Подставим предполагаемое решение в дифференциальное уравнение:

$$(b_0 + b_1)e^x + 2(b_0 + b_1 x)e^x = xe^x, \quad \rightarrow \quad 3b_0 + b_1 + 3b_1 x = x.$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях x, получим $b_0 = -\dfrac{1}{6}$, $b_1 = \frac{1}{3}$.

Частное решение $\overset{*}{y}_{21} = \dfrac{1}{9}(3x-1)e^x$.

Если $\nu = -2 = p$:

$$y' + 2y = xe^{-2x}.$$

Частное решение этого дифференциального уравнения будем искать, следуя (7.45), в виде

$$\overset{*}{y}_{22} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)e^{-2x}.$$

Подставляя это решение в исходное дифференциальное уравнение, получим $a_1 = 0$; $a_2 = 1/2$. Что касается a_0, то эта постоянная может принимать произвольные значения. Решение $a_0 e^{-2x}$ – линейно зависимая функция от решения $\overset{0}{y} = Ce^{-2x}$ однородного дифференциального уравнения. Следовательно, это решение можно отбросить.

Ссылаясь на утверждения Теорем 1 и 2, запишем выражения для общих решений заданного дифференциального уравнения.

При $\nu = 1$:

$$y(x) = \overset{0}{y} + \overset{*}{y}_1 + \overset{*}{y}_{21} = Ce^{-2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9}(3x-1)e^x.$$

При $\nu = -2$:

$$y(x) = \overset{0}{y} + \overset{*}{y}_1 + \overset{*}{y}_{22} = \left(C_1 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}.$$

7.3. Комплексные числа

Прежде чем переходить к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка, напомним некоторые из рассмотренных в курсе линейной алгебры сведения о комплексных числах.

Отрицательное значение дискриминанта

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

при решении алгебраического квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

приводит к комплексно-сопряженным корням:

$$x^*_{1,2} = \rho = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) = \alpha \pm \beta i,$$

где $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$; $\quad \beta = \dfrac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$.

Величина $i = \sqrt{-1}$, получаемая при решении квадратных уравнений, называется *мнимой единицей*.

Выражение $\rho = \alpha + i\beta$ определяет на плоскости $\alpha\beta$ *комплексную величину* ρ, состоящую из действительной $Re\rho = \alpha$ и мнимой $Im\rho = \beta$ частей. Каждому значению ρ на плоскости $\alpha\beta$ ставится в соответствие точка $M(\alpha, \beta)$ с абсциссой α и ординатой β. При этом говорят, что точка $M(\alpha, \beta)$ изображает комплексное число $\rho = \alpha + i\beta$. Плоскость xy называется *комплексной плоскостью*, ось Ox — *действительной осью*, Oy — *мнимой осью*.

Число $r = [\rho| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, определяющее расстояние точки $M(\alpha, \beta)$ от начала координат, называется *модулем* комплексного числа ρ.

Всякое решение системы уравнений

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{\beta}{r} \tag{7.48}$$

называется *аргументом* комплексного числа $\rho \neq 0$: $\operatorname{Arg}\rho = \varphi + 2\pi n$, $n \in Z$. Главная часть аргумента $\arg\rho \in [0, 2\pi)$.

Из соотношений (7.48) следует *тригонометрическая форма* комплексного числа:

$$\rho = \alpha + i\beta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7.49}$$

Еще одним представлением комплексных чисел является показательная форма:

$$\rho = re^{i\varphi}. \tag{7.50}$$

Это представление комплексного числа вытекает из полученной Эйлером формулы

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{7.51}$$

Пример. Найти решение квадратного уравнения

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Р е ш е н и е. Дискриминант квадратного уравнения

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 13 = -9.$$

Решениями уравнения

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$$

являются комплексно-сопряженные числа с действительной частью $\alpha = 2$ и мнимой $\beta = 3$.

Показательная (7.50) и тригонометрическая (7.49) формы представления комплексных чисел позволяют представлять слагаемые квазиполинома при комплексно-сопряженных коэффициентах в показательно-тригонометрической форме:

$$(A_m + iB_m)x^m e^{(\alpha+i\beta)x} = (A_m + iB_m)x^m e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$

$$x^m e^{\alpha x}(A_m \cos\beta x + B_m \sin\beta x)+$$

$$ix^m e^{\alpha x}(B_m \cos\beta x + A_m \sin\beta x)i.$$

7.4. Однородные уравнения второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами p и q:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{7.52}$$

Следуя подходу подраздела 7.2.5 при отыскании решения (7.37) дифференциального уравнения первого порядка с постоянным коэффициентом, будем искать решение уравнения (7.52) в виде

$$y = e^{kx}.$$

Подставим это предполагаемое решение в дифференциальное уравнение (7.52):

$$(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0.$$

Так как функция $e^{kx} \neq 0$, от последнего уравнения приходим к *характеристическому уравнению*, соответствующему дифференциальному уравнению второго порядка (7.52):

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{7.53}$$

Это уравнение позволяет найти два значения k, при которых функция e^{kx} является решением дифференциального уравнения (7.52).

Значения k зависят от дискриминанта D квадратного уравнения (характеристического уравнения (7.53)):

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Возможны три варианта.

1. При $D > 0$ корни k_1 и k_2 действительные и различные:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

2. При $D = 0$ корни равны:

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}.$$

3. При $D < 0$ корни комплексно-сопряженные:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Рассмотрим решения дифференциальных уравнений, соответствующие каждому из этих случаев.

Случай 1. В показатели экспонент частных решений дифференциального уравнения входят не равные нулю действительные корни характеристического уравнения $k_1 \neq k_2$. Линейная комбинация таких частных решений

$$\overset{0}{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{7.54}$$

является общим решением уравнения (7.52).

Если один из корней характеристического уравнения равен нулю (второй равен k), то решение представляется в виде

$$\overset{0}{y} = C_1 + C_2 e^{kx}. \tag{7.55}$$

Случай 2. При равенстве корней характеристического уравнения ($k_1 = k_2 = k = -p/2$ — действительное число) функция $y_1 = e^{-px/2}$ представляет собой только одно частное решение дифференциального уравнения и не может служить его общим решением.

Покажем, что еще одна функция, а именно $y_2 = xe^{-px/2}$, линейно независимая от y_1, также будет частным решением дифференциального уравнения. Определив первую и вторую производные от y_2:

$$y_2' = \left(1 - \frac{p}{2}x\right) e^{-px/2}; \quad y_2'' = \left(-p + \frac{p^2}{4}x\right) e^{-px/2},$$

подставим их в уравнение (7.52). После преобразования придем к уравнению

$$\left(-\frac{p^2}{4} + q\right) xe^{-px/2} = 0.$$

Уравнение является тождеством, так как дискриминант характеристического уравнения, стоящий в скобках, обращается в нуль для рассматриваемого случая.

Таким образом, общее решение уравнения (7.52) для равных корней характеристического уравнения можно записать в виде

$$\overset{0}{y} = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x). \tag{7.56}$$

Случай 3. Комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения:

$$k_1 = \alpha + \beta i; \qquad k_2 = \alpha - \beta i, \tag{7.57}$$

где

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Покажем, что в этом случае частными решениями уравнения (7.52) будут две линейно независимые функции:

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x; \qquad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x. \tag{7.58}$$

Найдем первую и вторую производные функции y_1:

$y_1' = e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x)$;

$y_1'' = e^{\alpha x}(\alpha^2 \sin \beta x + 2\alpha\beta \cos \beta x - \beta^2 \sin \beta x)$

и подставим их вместе со значением y_1 в уравнение (7.52):

$$e^{\alpha x}[\alpha^2 \sin \beta x + 2\alpha\beta \cos \beta x - \beta^2 \sin \beta x + p\alpha \sin \beta x + p\beta \cos \beta x + q \sin \beta x] =$$

$$= e^{\alpha x}\big[(\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q)\sin\beta x+(2\alpha+p)\beta\cos\beta x\big]=0.$$

Преобразуем слагаемые, стоящие в первой, а затем второй круглых скобках последнего равенства, с учетом обозначений (7.57):

$$(\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q)=\frac{p^2}{4}-q+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{2}+q\equiv 0;$$

$$(2\alpha+p)=-p+p\equiv 0.$$

Решение (7.58) для y_1 обращает уравнение (7.52) в тождество. Аналогично доказываем, что выражение (7.58) для y_2 также удовлетворяет (7.52).

Составляя линейную комбинацию решений (7.58), запишем общее решение уравнения (7.52) в виде

$$\overset{0}{y}= e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x). \tag{7.59}$$

Примеры. Найти решения дифференциальных уравнений.

1. $y''+7y'-8y=0.$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2+7k-8=0$$

и найдем его корни:

$$k_1=1;\qquad k_2=-8.$$

Так как корни уравнения действительные и различные, представляем общее решение заданного уравнения в виде (7.54):

$$\overset{0}{y}= C_1e^{x}+C_2e^{-8x}.$$

2. $y''-9y'=0. \;\to\; k^2-9k=0; \;\to\; k_1=0,\ k_2=9; \;\to$

$$\overset{0}{y}= C_1+C_2e^{9x}.$$

3. $y''-8y'+16y=0. \;\to$
$k^2-8k+16=0; \;\to\; (k-4)^2=0; \;\to\; k_1=k_2=4; \;\to$

$$\overset{0}{y}= e^{4x}(C_1+C_2x).$$

4. $y''-2y'+10y=0. \;\to\; k^2-2k+10=0; \;\to$
$D/4{=}1{-}10{=}-3^2<0; \;\to\; k_1{=}1+3i,\ k_2{=}1-3i; \;\to\; \alpha{=}1,\ \beta{=}3. \;\to$

$$\overset{0}{y}= e^{x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x).$$

7.5. Структура решения линейных уравнений n-го порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)} + \varphi_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = f(x). \qquad (7.60)$$

Теорема существования и единственности, приведенная в подразделе 7.2.1 применительно к нелинейным (в общем случае) дифференциальным уравнениям первого порядка, для линейных уравнений n-го порядка формулируется с меньшими ограничениями.

Теорема 1 (существования и единственности). *Если на некотором интервале $a < x < b$ изменения независимой переменной функции $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ $(i = \overline{0, n-1})$ непрерывны, то на этом интервале существует, причем единственное, решение $y = y(x)$ уравнения* (7.60), *удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.*

Вместо ограничения действия теоремы окрестностью некоторой точки в случае нелинейных уравнений для линейных дифференциальных уравнений речь идет об их решении на всем интервале (a, b).

Левая часть уравнения (7.60) называется *линейным дифференциальным оператором* n-го порядка:

$$L(y) = y^{(n)} + \varphi_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y.$$

Учитывая это обозначение, перепишем уравнение (7.60):

$$L(x) = f(x).$$

Для $L(x)$ справедливы следующие легко проверяемые свойства.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак оператора:

$$L(cy) = cL(y).$$

2. Оператор суммы функций равен сумме операторов от каждой функции:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Дифференциальное уравнение называется *линейным однородным* относительно искомой функции y, если его свободный член $f(x)$ (функция, не зависящая от неизвестной y и ее производных) тождественно равен нулю:

$$L(y) = 0. \qquad (7.61)$$

В противном случае уравнение называется *линейным неоднородным.*

Относительно структуры решения неоднородного уравнения (7.60), как, впрочем, и для уравнения первого порядка, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка* n (7.60) *равно сумме общего решения* $\overset{0}{y}$ *однородного уравнения* (7.61) *и какого-либо частного решения* $\overset{*}{y}$ *неоднородного дифференциального уравнения*:

$$y = \overset{0}{y} + \overset{*}{y}\ . \tag{7.62}$$

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, важной для решения дифференциальных уравнений, воспользуемся вторым свойством линейных операторов:

$$L(y) = L(\overset{0}{y} + \overset{*}{y}) = L(\overset{0}{y}) + L(\overset{*}{y}) = 0 + f(x) = f(x).$$

Таким образом доказано, что сумма решений $\overset{0}{y} + \overset{*}{y}$ есть решение неоднородного уравнения (7.60).

Остается доказать, что всякое решение $y(x)$ неоднородного уравнения есть сумма $\overset{0}{y} + \overset{*}{y}$.

Используя свойства линейных операторов, получим:

$$L(\overset{0}{y}) = L(y - \overset{*}{y}) = L(y) - L(\overset{*}{y}) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отсюда следует (7.62).

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (7.60), имеет вид

$$L(y) = y^{(n)} + \varphi_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = 0. \tag{7.63}$$

В учебниках по дифференциальным уравнениям доказывается (об этом говорилось в § 7.1), что общее решение уравнения (7.60) содержит ровно n произвольных постоянных. Относительно общего решения однородного уравнения (7.63), справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функции* $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *являются линейно независимыми частными решениями однородного дифференциального* *уравнения n-го порядка* (7.63), *то его общим решением* $\overset{0}{y}$ *является линейная комбинация этих функций*:

$$\overset{0}{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{7.64}$$

где C_1, C_2, $\ldots$, C_n — произвольные постоянные.

Совокупность всех n частных линейно независимых решений y_1, $\ldots$, y_n, входящих в (7.64), называется *фундаментальной системой решений* дифференциального уравнения n-ного порядка.

Сформулированная теорема позволяет сделать заключение: для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения достаточно найти n любых частных линейно независимых решений и составить их линейную комбинацию, числовыми множителями в которой являются произвольные постоянные.

Подчеркнем, что упомянутые частные решения однородного дифференциального уравнения обязательно должны быть линейно независимыми. Факт линейной независимости частных решений дифференциальных уравнений позволяет установить следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы совокупность решений* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ *линейного однородного дифференциального уравнения* (7.63) *была линейно независимой на некотором промежутке* $[a, b]$ *изменения* x, *необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского*:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{7.65}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке этого промежутка.

Теорема 5. *Если определитель Вронского для линейного дифференциального уравнения отличен от нуля в одной точке промежутка* $[a, b]$ *изменения* x, *то он будет отличен от нуля во всех точках этого промежутка.*

Если хотя бы одно частное решение может быть представлено в виде линейной комбинации других частных решений, то в определителе Вронского один из столбцов будет являться линейной комбинацией других столбцов. Из курса линейной алгебры известно, что такие определители равны нулю.

В частности, для уравнения n-го порядка n частных решений не могут составить фундаментальную систему решения, если какие-либо два из них отличаются только постоянным множителем ($y_2 = \lambda y_1$). Чтобы убедиться в линейной зависимости таких решений, найдем определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель равен нулю в силу пропорциональности его столбцов.

7.6. Метод вариации произвольных постоянных

В общем случае для получения решений линейных дифференциальных уравнениях n-го порядка (7.60) применяется предложенный Лагранжем метод вариации произвольных постоянных.

Пусть фундаментальная система решений уравнения (7.63)

$$y^{(n)} + \varphi_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = 0 \tag{7.66}$$

известна. Она представляет собой совокупность n линейно независимых функций:

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x).$$

Тогда общее решение уравнения (7.66) можно представить в виде линейной комбинации:

$$\overset{o}{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x). \tag{7.67}$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + \varphi_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = f(x) \tag{7.68}$$

будем искать в таком же виде, что и (7.67), но в предположении, что коэффициенты C_i $(i = \overline{1,n})$ зависят от x:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x). \tag{7.69}$$

Найдем производную функции (7.69):

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) + \tag{7.70}$$

$$+C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x)$$

и решения (7.67) однородного уравнения:

$$\overset{0}{y}{}' = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) + \ldots + C_ny_n'(x). \tag{7.71}$$

При любых произвольных, но фиксированных значениях $C_i(x) = C_i$ решение (7.69) становится общим решением $\overset{0}{y}$ однородного уравнения. В этом случае производные (7.70) и (7.71) должны совпадать. Но это возможно при выполнении равенства:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0. \tag{7.72}$$

Продолжая подобные преобразования до $(n-1)$-й производной включительно, придем к требованию, чтобы производные $C_i'(x)$ удовлетворяли системе алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} C_1'(x)y_1 & + & C_2'(x)y_2 & + & \ldots & + & C_n'(x)y_n & = & 0, \\ C_1'(x)y_1' & + & C_2'(x)y_2' & + & \ldots & + & C_n'(x)y_n' & = & 0, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} & + & C_2'(x)y_2^{(n-2)} & + & \ldots & + & C_n'(x)y_n^{(n-2)} & = & 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)} & + & \ldots & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)} & = & f(x). \end{array}\right. \tag{7.73}$$

Последнее уравнение получается при подстановке (7.69) непосредственно в дифференциальное уравнение (7.68) с учетом использования предыдущих преобразований.

Определитель Вронского системы уравнений (7.73) отличен от нуля, так как совокупность частных решений y_i $(i = \overline{1, n})$ представляет собой фундаментальную, следовательно, линейно независимую систему функций.

Отсюда следует, что ранг матрицы коэффициентов системы уравнений (производных различных степеней от y) равен рангу расширенной матрицы.

Теорема Кронекера–Капелли (курс линейной алгебры) говорит о том, что в этом случае существует единственное решение системы (7.73) для определения производных C_i'.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \tag{7.74}$$

Нетрудно проверить, что функции

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \cos x, \quad y_3 = \sin x \tag{7.75}$$

удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (7.74). Если эти функции линейно независимы, то они образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения.

Для установления факта линейной независимости функций (7.75) найдем производные этих функций до второго порядка включительно (на единицу меньше порядка заданного дифференциального уравнения):

$$y_1' = 0, \quad y_2' = -\sin x, \quad y_3' = \cos x;$$
$$y_1'' = 0, \quad y_2'' = -\cos x, \quad y_3'' = -\sin x$$

и подставим полученные выражения в систему (7.73):

$$\begin{cases} C_1'(x) & + & C_2'(x)\cos x & + & C_3'(x)\sin x & = & 0, \\ 0 & - & C_2'(x)\sin x & + & C_3'(x)\cos x & = & 0, \\ 0 & - & C_2'(x)\cos x & - & C_3'(x)\sin x & = & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$$

отличен от нуля на всей числовой оси. Следовательно, частные решения (7.75) линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений.

Найдем $C_i'(x)$ $(i = \overline{1,3})$ из системы уравнений. Складывая третье уравнение с первым, определяем $C_1'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Умножим второе уравнение на $\sin x$, третье — на $\cos x$ и сложим. Из полученного уравнения с одним неизвестным найдем $C_2'(x) = -\operatorname{tg} x$.

Из второго или третьего уравнения получим $C_3'(x) = -\operatorname{tg}^2 x = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Проинтегрируем полученные выражения:

$$C_1(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C_1;$$

$$C_2(x) = -\int \operatorname{tg} x dx = \ln|\cos x| + C_2;$$

$$C_3(x) = -\int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = x - \operatorname{tg} x + C_3.$$

Для получения общего решения исходного уравнения воспользуемся формулой (7.69):

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x) =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + C_1 + (\ln|\cos x| + C_2)\cos x + (x - \operatorname{tg} x + C_3)\sin x.$$

Пример 2. Найти решение уравнения: $y' + 2y = 8x^2$.
Р е ш е н и е. Общее решение однородного уравнения, соответствующее заданному дифференциальному уравнению,

$$\overset{0}{y} = Ce^{-2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать, используя метод вариации произвольной постоянной Лагранжа:

$$\overset{*}{y} = C(x)e^{-2x}.$$

Найдем производную от $\overset{*}{y}$ и подставим ее вместе с $\overset{*}{y}$ в заданное уравнение:

$$C'(x)e^{-px} - pC(x)e^{-px} + pC(x)e^{-px} = 8x^2.$$

Выразим отсюда

$$C'(x) = 8x^2e^{px}.$$

Варьируемая «постоянная» интегрирования определится путем двукратного использования операции интегрирования по частям:

$$C(x) = 8\int x^2e^{2x}dx = \left\{ \begin{array}{lll} u = x^2, & \to & du = 2xdx, \\ dv = e^{2x}dx, & \to & v = e^{2x}/2 \end{array} \right\} =$$

$$= 4x^2e^{2x} - 8\int xe^{2x}dx = \left\{ \begin{array}{lll} u = x, & \to & du = dx, \\ dv = e^{2x}dx, & \to & v = e^{2x}/2 \end{array} \right\} =$$

$$= 4x^2e^{2x} - 4xe^{2x} + 4\int e^{2x}dx = C + 2(2x^2 - 2x + 1)e^{2x}.$$

Подставим результат интегрирования в решение:

$$y = Ce^{-2x} + 4x^2 - 4x + 2.$$

Полученное решение состоит из суммы общего решения однородного уравнения $\overset{0}{y} = Ce^{-2x}$ и частного решения неоднородного:

$$\overset{*}{y} = 4x^2 - 4x + 2.$$

7.7. Однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами p_i $(i = \overline{0, n-1})$

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1y' + p_0y = 0. \qquad (7.76)$$

Для отыскания решения уравнения достаточно найти n его частных линейно независимых решений (фундаментальную систему) и составить их линейную комбинацию.

Будем искать решение (7.76) в виде

$$y = e^{kx}, \qquad (7.77)$$

где k — некоторая пока неизвестная постоянная.

Найдем n первых производных (7.77):

$$y' = ke^{kx}, \qquad y'' = k^2e^{kx}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = k^ne^{kx},$$

и подставим полученные выражения в (7.76). Вынося за скобки общий множитель, получим

$$(k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1k + p_0)e^{kx} = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то дифференциальное уравнение будет удовлетворено, если множитель в скобках обратится в нуль:

$$k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0 = 0. \tag{7.78}$$

Это уравнение, называемое *характеристическим*, позволяет найти n значений $k_1, k_2, \ldots, k_n$ коэффициента k (корней характеристического уравнения), при которых функция (7.77) будет решением дифференциального уравнения (7.76).

Общее решение однородного дифференциального уравнения n-го порядка имеет вид линейной комбинации n его частных решений (C_i — произвольные постоянные):

$$\overset{0}{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \tag{7.79}$$

Если среди n действительных корней характеристического уравнения имеются равные (например, $k_i = k_{i+1}$), то два частных решения однородного уравнения становятся равными $e^{k_i x} = e^{k_{i+1} x}$ и, следовательно, линейно зависимыми. В этом случае в число функций, образующих фундаментальную систему решений, следует добавить функцию $xe^{k_i x}$. Доказательство необходимости введения такой функции рассмотрено в § 7.4 (случай 2). Там же получены выражения для частных решений в случае, когда пара корней характеристического уравнения комплексно-сопряженные (случай 3).

7.8. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = f(x). \tag{7.80}$$

Как и для уравнения с коэффициентами, зависящими от x, общее решение уравнения (7.80) может быть найдено методом Лагранжа вариации постоянных (§ 7.6). Однако при некоторых видах функции $f(x)$ можно определить частное решение неоднородного уравнения $\overset{*}{y}$, не прибегая к вариации произвольных постоянных.

Если правая часть дифференциального уравнения имеет специальный вид
$$f(x) = e^{\alpha x}\big(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\big),$$
где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — полиномы степеней m и n, то частные решения неоднородного уравнения можно найти *методом неопределенных коэффициентов.*

Различают два характерных случая.

1. Число $\gamma = \alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения. В этом случае частное решение неоднородного уравнения ищут в виде
$$\overset{*}{y} = e^{\alpha x}\big(\tilde{P}_m(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)\sin\beta x\big), \tag{7.81}$$
где $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{P}_k(x)$ — полиномы с коэффициентами, в общем, отличными от коэффициентов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$. Коэффициенты этих полиномов определяются после подстановки (7.81) в неоднородное дифференциальное уравнение (7.80) и приравнивания коэффициентов при одинаковых функциях.

2. Если γ является корнем кратности r характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде
$$\overset{*}{y} = x^r e^{\alpha x}\big(\tilde{P}_m(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)\sin\beta x\big). \tag{7.82}$$

Последний случай называется *резонансным.*

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение примера 2 § 7.6
$$y' + 2y = 8x^2.$$

В правой части уравнения стоит полином второй степени $P_2(x) = f(x) = 8x^2$. Следовательно, частное решение заданного неоднородного уравнения следует искать в виде полинома второй степени:
$$\overset{*}{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Определив производную
$$\overset{*}{y}\,' = 2Ax + B,$$
подставим ее и $\overset{*}{y}$ в заданное уравнение:
$$2Ax + B + 2(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2.$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях x в правой и левой частях полученного равенства, придем к трем алгебраическим уравнениям для определения коэффициентов полинома:

$$\begin{cases} 2A = 8, \\ 2A + 2B = 0, \\ B + 2C = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 4, \\ B = -4, \\ C = 2. \end{cases}$$

Таким образом, $\overset{*}{y} = 4x^2 - 4x + 2$.

Решение совпало с решением этого уравнения, полученным в примере 2 § 7.6 методом вариации постоянных.

Отметим, что в случае равенства двух действительных корней характеристического уравнения степень полинома $\overset{*}{y}$ должна быть на единицу выше степени m полинома $P_m(x)$; для трех равных корней — на две единицы и т.д.

Таким образом, *частное решение неоднородного дифференциального уравнения, правая часть которого является полиномом m-й степени*

$$f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 = P_m(x),$$

представляет собой полином степени не меньше m $(n \geq m)$:

$$\overset{*}{y} = P_n(x) = A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0.$$

Наряду с упомянутыми методами получения частных решений неоднородных уравнений нашли применение приближенные методы. В частности, если известны k точек на отрезке изменения x, через которые проходит функция, то $f(x)$ можно заменить аппроксимирующим многочленом степени k или кусочно-непрерывными степенными функциями степеней, меньших k.

Если требуется найти решение дифференциального уравнения в ограниченной окрестности некоторой точки, то функцию можно разложить, например, в ряд Тейлора в окрестности этой точки, ограничив число слагаемых ряда согласно требуемой точности.

7.9. Уравнения, допускающие понижение порядка

Ограничимся рассмотрением трех видов дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида
$$y'' = f(x). \tag{7.83}$$

Решение этого уравнения может быть получено непосредственным интегрированием. Действительно, имея в виду, что $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, после разделения переменных в (7.83) и интегрирования получим уравнение первого порядка
$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Это уравнение можно также проинтегрировать:
$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

Отметим, что использованная последовательность при получении решения уравнения (7.83) легко обобщается на интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка
$$y^{(n)} = f(x).$$

В результате n-кратного интегрирования получим решение
$$y = \int \left(\int \ldots \left(\int f(x)dx \right) \ldots dx \right) dx+$$
$$+\frac{C_1}{n!}x^n + \frac{C_2}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

2. Уравнение вида
$$y'' = f(x, y'). \tag{7.84}$$

Введение новой переменной $u(x) = y'$ понижает порядок уравнения до первого: $u' = f(x, u)$. Проинтегрировав это уравнение, найдем его решение: $u = g(x, C_1)$. Повторным интегрированием находим
$$y = \int g(x, C_1)dx + C_2.$$

3. Уравнение вида
$$y'' = f(y, y'). \tag{7.85}$$

Прежде всего для таких уравнений необходимо проверить возможность существования решений $y = \text{const}$ ($y = 0$ в частном случае).

Для понижения порядка уравнения введем функцию $u(y) = y'$. В отличие от случая 2, функция u зависит от y, а не от x.

Имея в виду правило дифференцирования сложной функции

$$y'' = \frac{d}{dx}[u(y)] = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u,$$

преобразуем (7.85) в дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $u(y)$:

$$\frac{du}{dy}u = f(y, u).$$

Пусть решением этого уравнения является функция $u = g(y, C_1)$, или

$$\frac{dy}{dx} = g(y, C_1).$$

Разделим переменные (при $g(y, C_1) \neq 0$) и проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{g(y, C_1)} = x + C_2.$$

Полученная формула приводит к общему интегралу исходного уравнения.

Пример 1. Найти решение уравнения: $y'' + x(y')^2 = 0$.
Р е ш е н и е. Это уравнение не содержит в явном виде переменную y, т.е. относится к типу (7.84).

Отметим, что заданному уравнению удовлетворяют любые решения $y = \text{const}$.

Пусть $u = y'$, тогда исходное уравнение сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du}{dx} = -xu^2.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\frac{du}{u^2} = -xdx, \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{C_1}{2},$$

или

$$y' = \frac{2}{x^2 + C_1}.$$

Интегрируя, получим общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = \int \frac{2}{x^2 + C_1} dx + C_2 =$$

$$= C_2 + \begin{cases} \left(1/\sqrt{-C_1} \ln \left|(x - \sqrt{-C_1})/(x + \sqrt{-C_1}\right|\right) & \text{при} \quad C_1 < 0, \\ -2/x & \text{при} \quad C_1 = 0, \\ 2/\sqrt{C_1} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{C_1}) & \text{при} \quad C_1 > 0. \end{cases}$$

Пример 2. Найти решение уравнения $y'' - (y')^2 = 0$.

Р е ш е н и е. Это уравнение не содержит в явном виде переменные x и y.

Пусть $u = y'$. Тогда исходное уравнение сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du}{dx} = u^2.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$-\frac{1}{u} = x - C_1, \quad \longrightarrow \quad u = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C_1 - x}.$$

После повторного разделения переменных и интегрирования найдем

$$y = -\ln|C_1 - x| + \ln|C_2| = \ln\left|\frac{C_2}{C_1 - x}\right|.$$

7.10. Системы линейных дифференциальных уравнений

В линейном дифференциальном уравнении n-го порядка

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{7.86}$$

выполним замену переменных по формулам:

$$\begin{cases} y = u_0, \\ y' = u_1, \\ u_1' = u_2, \\ \ldots \quad \ldots \\ u_{n-2}' = u_{(n-1)}, \\ u_{n-1}' = u_n = y^{(n)} = f\left(x, u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\right). \end{cases} \tag{7.87}$$

Полученные равенства соответствуют линейному дифференциальному уравнению (7.86) порядка n и представляют собой систему n дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных:

$$u_i' = f_i\,(x, u_0, u_1, u_2, \ldots, u_i) \qquad (i = \overline{0, n{-}1}). \tag{7.88}$$

Эта система называется *нормальной системой дифференциальных уравнений.*

Переход от системы (7.87) к уравнению (7.86) очевиден. Достаточно в последнее уравнение системы вместо всех u_i подставить i-е производные переменной y: $u_i = y^{(i)}$ $(i = \overline{1, n{-}1})$.

Ограничимся рассмотрением *системы линейных дифференциальных уравнений* с произвольными коэффициентами $\varphi_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$. Перепишем ее в развернутом виде (u_i заменим на y_i):

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \varphi_{11}(x)y_1 + \varphi_{12}(x)y_2 + \ldots + \varphi_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x), \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = \varphi_{21}(x)y_1 + \varphi_{22}(x)y_2 + \ldots + \varphi_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \varphi_{n1}(x)y_1 + \varphi_{n2}(x)y_2 + \ldots + \varphi_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x). \end{cases} \tag{7.89}$$

Предварительно сформулируем теорему существования и единственности решения для системы линейных дифференциальных уравнений.

Теорема (существования и единственности). *Если функции* $\varphi_{ij}(x)$ *и* $\varphi_i(x)$ *в системе уравнений* (7.89) *непрерывны на некотором интервале* (a, b) $\big($*в том числе* $(-\infty, +\infty)\big)$, *то для каждой совокупности значений* x_0, $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_2(x_0) = y_{20}$, $\ldots$, $y_n(x_0) = y_{n0}$, *где* $x_0 \in (a, b)$, *существует, причем единственная, интегральная кривая* $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$, *проходящая через точку* $(x_0,\ y_{10},\ y_{20},\ \ldots,\ y_{n0})$ *такая, что* $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_2(x_0) = y_{20}$, $\ldots$, $y_n(x_0) = y_{n0}$. *Эта кривая определена* ***на всем*** *интервале* (a, b).

Коэффициенты $\varphi_{ij}(x)$ и функции $\varphi_i(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$ в частном случае могут быть постоянными величинами. В этом случае существование и единственность решения системы уравнений гарантируется Теоремой при $x \in \Re$. В дальнейшем рассмотрим именно этот случай — систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\varphi_{ij}(x) = a_{ij} = \text{const}$ и ограничимся рассмотрением однородной системы уравнений, т.е. будем считать $\varphi_i(x) = 0$.

Вводя обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

перепишем (7.89) в матричном виде:

$$\frac{d}{dx}Y = AY. \tag{7.90}$$

Предположим, что коэффициенты a_{ij} системы (7.89) (матрицы A) постоянны. В этом случае к ее решению можно применить методы линейной алгебры.

Однородным уравнениям (7.89) и (7.90) удовлетворяет *нулевое частное решение*

$$Y_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})^T = \Theta = (0, 0, \ldots, 0)^T.$$

Это решение тривиальное и не представляет интереса. Другие *частные решения* будем искать в виде

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = Ce^{kx}, \tag{7.91}$$

где

$$C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T \ -$$

вектор постоянных интегрирования, одновременно не равных нулю.

Подставим (7.91) и производную

$$\frac{d}{dx}Y = kCe^{kx}$$

в матричное уравнение (7.90). После сокращение обеих частей полученного уравнения на e^{kx} придем к соотношению (I — единичная матрица)

$$AC = kC, \quad \rightarrow \quad (A - kI)C = \Theta. \tag{7.92}$$

Матричное линейное однородное уравнение (7.92) имеет ненулевые решения в том случае, когда определитель матрицы коэффициентов при ненулевом векторе $C \quad (C \neq \Theta)$ — собственном векторе матрицы — равен нулю:

$$|A - kI| = 0. \tag{7.93}$$

Равенство (7.93) представляет собой *характеристическое уравнение* — алгебраическое уравнение n-го порядка относительно k — собственного значения матрицы A.

Если среди n корней k_i $(i = \overline{1, n})$ этого уравнения нет кратных, то каждому из них соответствует собственный вектор $C_{(i)}$.

Однородному уравнению (7.92) будут удовлетворять частные решения $Y_i = C_{(i)} e^{k_i x}$. Общее решение однородного уравнения представляется в виде линейной комбинации всех частных решений:

$$\overset{0}{Y} = C_{(1)} e^{k_1 x} + C_{(2)} e^{k_2 x} + \ldots + C_{(n)} e^{\kappa_n x}. \tag{7.94}$$

Это решение, как следовало ожидать, совпадает по виду с общим решением однородного уравнения порядка n (7.79). Однако в нем $\overset{0}{Y}$, $C_{(1)}, \ldots, C_{(n)}$ — векторы.

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 7y_1 + 6y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + 2y_2. \end{cases} \tag{7.95}$$

Р е ш е н и е. Матрица коэффициентов правых частей системы уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

позволяет составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-k & 6 \\ -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad k^2 - 9k + 20 = 0.$$

Полученному квадратному уравнению удовлетворяют два корня: $k_1 = 4$ и $k_2 = 5$.

Координаты векторов собственных направлений $C_{(i)} = \left(c_1^{(i)} c_2^{(i)}\right)^T$ $(i = \overline{1, 2})$ матрицы A определим из системы уравнений

$$\begin{cases} (7 - k_i)c_1^{(i)} + 6c_2^{(i)} = 0, \\ -c_1^{(i)} + (2 - k_i)c_2^{(i)} = 0. \end{cases}$$

Корни этих линейно зависимых уравнений определяют с точностью до неопределенных множителей C_i.

При $i = 1,\ k_1 = 4,\ C_i = C_1$:

$$C_{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При $i = 2,\ k_2 = 5,\ C_i = C_2$:

$$C_{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим линейную комбинацию частных решений:

$$\overset{0}{Y} = C_{(1)} e^{k_1 x} + C_{(2)} e^{k_2 x},$$

или

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}.$$

Таким образом, общее решение заданной линейной системы уравнений представляется совокупностью двух однотипных функций, отличающихся только постоянными интегрирования:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2C_1 e^{4x} - 3C_2 e^{5x}, \\ y_2 &= C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}. \end{aligned}$$

Решение определяет одно (любое из этих двух) выражение.

Перейдем от заданной системы двух уравнений (7.95) к одному дифференциальному уравнению второго порядка с одной переменной. Для этого продифференцируем второе уравнение системы и в полученное выражение подставим значение $\dfrac{dy_1}{dx}$ из первого уравнения:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{dy_1}{dx} + 2\frac{dy_2}{dx} = 2\frac{dy_2}{dx} - 7y_1 - 6y_2.$$

Подставим вместо y_1 выражение $y_1 = -\dfrac{dy_2}{dx} + 2y_2$, полученное из второго уравнения заданной системы:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = 2\frac{dy_2}{dx} + 7\frac{dy_2}{dx} - 20y_2.$$

После перенесения всех слагаемых в левую часть приходим к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} - 9\frac{dy_2}{dx} + 20y_2 = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 - 9k + 20 = 0$$

совпадает с характеристическим уравнением заданной линейной системы дифференциальных уравнений и имеет два различных действительных корня $k_1 = 4$ и $k_2 = 5$. Поэтому общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$y_2 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}.$$

Решение совпадает с полученным выше решением исходной системы дифференциальных уравнений для y_2.

7.11. Разностные уравнения

В экономических задачах часто приходится иметь дело не с непрерывно изменяющимися функциями, а с величинами, изменяющимися скачкообразно за конечные промежутки времени. В этом случае удобно рассматривать не производные от функции (предельные величины), а приращения функций, т.е. конечные разности между двумя ее значениями.

Пусть для двух достаточно близких значений x_i и x_{i+1} независимой переменной x известны зависящие от них значения y_i и y_{i+1} переменной y.

Конечной разностью первого порядка называется величина

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Разность двух первых разностей образует *конечную разность второго порядка* и обозначается

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Для вычисления конечной разности третьего порядка

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

требуются значения функции в четырех точках: x_{i+3}, x_{i+2}, x_{i+1} и x_i. Вычисления конечных разностей удобно осуществлять, занося их значения таблицу, подобную 7.1.

Таблица 7.1 Конечные разности

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Конечные разности позволяют заменить производные различных порядков их приближенными выражениями. Так, если приращения независимой переменной не изменяются при переходе от одной точки к другой ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$), то в точке с координатой $x = x_i$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \approx \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=x_i} = \frac{1}{h}\left(y_{i+1} - y_i\right);$$

$$\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=x_i} \approx \left.\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{1}{h^2}\left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\right); \quad \ldots$$

Конечные разности позволяют перейти от дифференциального уравнения (7.1) n-го порядка к *разностным уравнениям*

$$F\left(x_i, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n}\right) = 0. \tag{7.96}$$

В (7.96) $i = \overline{0, m}$, m — количество интервалов, на которые разбивается область изменения переменной x.

Разностные уравнения называются *линейными*, если переменные y_i входят в них в первой степени:

$$A_0 y_i + A_1 y_{i+1} + \ldots + A_n y_{i+n} = f(x_i) \quad (i = \overline{1, m}). \tag{7.97}$$

Если в разностном уравнении коэффициенты A_j $(j = \overline{1, n})$ являются константами, то его решения во многом аналогичны соответствующим решениям линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Продемонстрируем сказанное на примере разностного уравнения второго порядка:

$$y_{i+2} + py_{i+1} + qy_i = f(x_i) \quad (i = \overline{1, m}). \tag{7.98}$$

Общее решение y_i этого уравнения равно сумме общего решения $\overset{0}{y}_i$ однородного уравнения (при $f(x_i) = 0$) и какого-либо частного решения $\overset{*}{y}_i$ неоднородного уравнения.

Для нахождения общего решения однородного уравнения составляем характеристическое уравнение, в точности повторяющее (7.53):

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{7.99}$$

Уравнение имеет два корня k_1 и k_2.

Как и при решении дифференциального уравнения, возможны три случая:

1) если корни действительные и различные, то

$$\overset{0}{y}_i = C_1 k_1^i + C_2 k_2^i; \tag{7.100}$$

2) если корни действительные и равные $(k_1 = k_2 = k)$, то

$$\overset{0}{y}_i = (C_1 + iC_2)k^i;$$

3) если корни комплексно-сопряженные $k_{1,2} = r(\cos\alpha \pm \boldsymbol{i}\sin\alpha)$, то

$$\overset{0}{y}_i = r^i(C_1 \cos i\alpha + C_2 \sin i\alpha).$$

Следует обратить внимание на отличие приведенных решений от частных решений однородных дифференциальных уравнений: в частные решения разностных уравнений входят не функции e^{kx}, а сами решения k характеристического уравнения в степени i.

Частное решение неоднородного разностного уравнения зависит, как и в случае дифференциального уравнения, от вида функции $f(x)$ и корней характеристического уравнения.

Пример. Найти решение разностного уравнения

$$y_{i+2} - 9y_{i+1} + 20y_i = 30 \cdot 2^i \tag{7.101}$$

при условии, что интервал изменения независимой переменной x разбит на пять подынтервалов ($i = \overline{0, 5}$) и известны значения функции y на концах интервала (краевые условия):

$$y(0) = 0, \qquad y(5) = 1343. \tag{7.102}$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим однородное уравнение, построенное на основе заданного разностного:

$$y_{i+2} - 9y_{i+1} + 20y_i = 0. \tag{7.103}$$

Для определения решения этого уравнения составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 9k + 20 = 0.$$

Корни уравнения $k_1 = 4$ и $k_2 = 5$ — действительные и различные. Поэтому решение однородного уравнения (7.103) представим в виде (7.100):

$$\overset{0}{y}_i = C_1 k_1^i + C_2 k_2^i = 4^i C_1 + 5^i C_2. \tag{7.104}$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде функции, определяемой правой частью уравнения (7.101):

$$\overset{*}{y}_i = A \cdot 2^i.$$

Множитель A найдем, подставив частное решение в исходное разностное уравнение. Слагаемые левой части уравнения:

$$y_{i+2} = A \cdot 2^{i+2} = 4A \cdot 2^i; \quad y_{i+1} = A \cdot 2^{i+1} = 2A \cdot 2^i.$$

Поэтому из (7.101) получим

$$A \cdot 2^i (4 - 9 \cdot 2 + 20) = 30 \cdot 2^i, \quad \rightarrow \quad 6A = 30, \quad \rightarrow \quad A = 5.$$

Таким образом,

$$\overset{*}{y}_i = 5 \cdot 2^i.$$

Общее решение разностного уравнения складывается из общего решения однородного уравнения (7.104) и частного решения неоднородного уравнения. Поэтому

$$y_i = 4^i C_1 + 5^i C_2 + 5 \cdot 2^i. \tag{7.105}$$

Решение разностного уравнения записано с точностью до постоянных C_1 и C_2. Для их определения используем краевые условия (7.102). Из них следует:

при $i = 0$ $y_0 = y(0) = 0$:

$$0 = 4^0 C_1 + 5^0 C_2 + 5 \cdot 2^0, \quad \to \quad C_1 + C_2 + 5 = 0;$$

при $i = 5$ $y_5 = y(5) = 1343$:

$$1343 = 4^5 C_1 + 5^5 C_2 + 5 \cdot 2^5, \quad \to \quad 1024 C_1 + 3125 C_2 - 1183 = 0.$$

Из этой системы найдем

$$C_1 = -8, \qquad C_2 = 3.$$

Таким образом, решение разностного уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям,

$$y_i = -8 \cdot 4^i + 3 \cdot 5^i + 5 \cdot 2^i. \tag{7.106}$$

В табл. 7.2 приведены значения функции y_i для шести значений номеров i граничных точек подынтервалов изменения переменной x.

Таблица 7.2 Результаты решения примера

i	0	1	2	3	4	5
y_i	0	−7	−33	−97	−93	1343

7.12. Численные методы

К настоящему времени разработано большое количество достаточно эффективных методов численного решения дифференциальных уравнений. Остановимся на двух из них — методах, основанных на замене операций дифференцирования конечными приращениями функций и аргументов.

Простейшим из методов численного интегрирования дифференциальных уравнений является метод Эйлера. Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть задано дифференциальное уравнение в виде

$$y' = f(x, y).$$

Требуется найти решение уравнения на интервале $x \in [a; b]$ при заданном начальном условии $y(a) = y(x_0) = y_0$ (рис. 7.5,а).

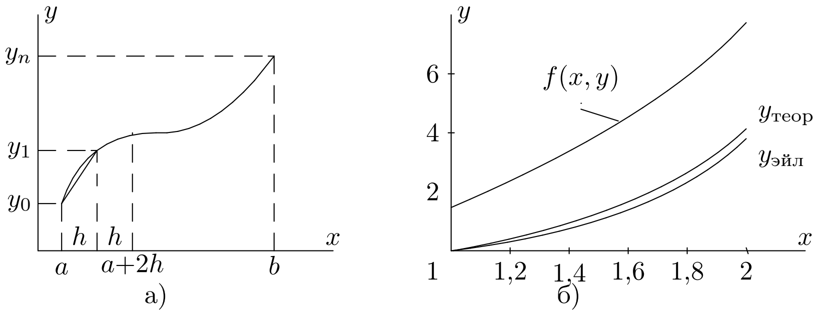


Рис. 7.5. Иллюстрация: а) метода Эйлера, б) примера

Разобьем интервал $[a; b]$ на n равных (для простоты) подынтервалов с шагом $h = (b - a)/n$.

На участке $[a; a+h)$ дифференциальное уравнение можно заменить приближенным равенством

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{h} \approx f(x_0, y_0).$$

Здесь $x_0 = a, \quad y_0 = y(a)$ — параметры начального условия. Если x_0 и y_0 известны, то значение функции $f(x_0, y_0)$ может быть подсчитано. Тогда из приведенного приближенного равенства следует

$$y_1 \approx y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Это приближенное значение искомой переменной в точке с координатой $x_1 = a + h$.

Определяя далее $f(x_1, y_1)$, из приближенного равенства

$$\frac{y_2 - y_1}{h} \approx f(x_1, y_1)$$

находим

$$y_2 \approx y_1 + hf(x_1, y_1).$$

И так далее. Для вычисления значения функции в $(k+1)$-й точке имеем рекуррентную формулу

$$y_{k+1} \approx y_k + hf(x_k, y_k).$$

Метод Эйлера выгодно отличается от других методов численного интегрирования дифференциальных уравнений своей простотой, но имеет небольшую точность. Поэтому на практике большее распространение получил другой метод решения дифференциальных уравнений — *метод Рунге–Кутта,* который имеет несколько разновидностей.

В методе Рунге–Кутта *третьего порядка* вычисление искомой переменной на $(k+1)$-м шаге интегрирования осуществляется с использованием формулы

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(p_1 + 4p_2 + p_3),$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= hf(x_k,\ y_k), \\ p_2 &= hf\left(x_k + \frac{1}{2}h,\ y_k + \frac{1}{2}p_1\right), \\ p_3 &= hf(x_k + h,\ y_k - p_1 + 2p_2). \end{aligned}$$

Пример. Решить численно методами Эйлера и Рунге–Кутта дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{2x}{x^2+1}y + x\sqrt{x^2+1}$$

на отрезке $x \in [1, 2]$ с шагом $h = 0{,}2$, если $y(1) = 0$.

Результаты вычислений, выполненных с использованием вышеприведенных формул, сведены в таблицу и показаны на двух нижних графиках рис. 7.5,б. График, соответствующий решению по методу Рунге–Кутта, практически сливается с графиком теоретической кривой и поэтому не выделен на рисунке. В правом столбце таблицы приведены результаты аналитического решения уравнения, которое имеет вид

$$y = (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2})(x^2+1).$$

x	$f(x,y)$	$y_{\text{эйл}}$	y_{p-k}	$y_{\text{теор}}$
1,0	1,4142	0	0	0
1,2	2,2294	0,2828	0,368	0,3608
1,4	3,2655	0,7286	0,910	0,9065
1,6	4,5312	1,3817	1,60	1,6824
1,8	6,0281	2,2879	2,64	2,7345
2,0	7,7595	3,8388	4,00	4,1093

7.13. Дифференциальные уравнения в экономике

Дифференциальные уравнения широко используются в задачах экономики. Проиллюстрируем это на примерах.

Спрос и предложение на рынке

Спрос D (demand) и предложение S (supply) на рынке описываются зависимостями количества товара q от его цены p:

$q_d(p)$ — функция спроса;

$q_s(p)$ — функция предложения.

Характерные кривые спроса и предложения показаны на рис. 7.6.

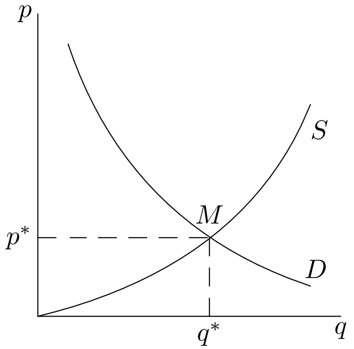


Рис. 7.6. Кривые спроса (D) и предложения (S)

Анализ статистических данных позволяет установить зависимости спроса и предложения от различных факторов. В частности, такие функции могут описываться линейными зависимостями спроса и предложения от цены и ее производной по времени p', называемой в экономике *тенденцией изменения цены*:

$$q_d{=}a_dp'+b_dp+c_d; \quad q_s{=}a_sp'+b_sp+c_s.$$

В точке M рыночного равновесия $q_d = q_s$. Приравняем выписанные соотношения:

$$a_d\frac{dp}{dt} + b_dp + c_d = a_s\frac{dp}{dt} + b_sp + c_s.$$

Приведем подобные и разделим переменные в полученном выражении:

$$\frac{dp}{p(b_s - b_d) + c_s - c_d} = \frac{dt}{a_d - a_s}.$$

Общее решение этого уравнения (с точностью до постоянной интегрирования C_1)

$$p = -\frac{C_1}{b_d - b_s} e^{-bt} + c, \tag{7.107}$$

где $b = \dfrac{b_d - b_s}{a_d - a_s}$, $c = c_d - c_s$.

Постоянная C_1 может быть определена из начального условия. Пусть в начале отсчета времени ($t = 0$) на рынке установилось равновесие спроса и предложения ($p = p^*$):

$$p(0) = p^*.$$

Из полученного общего решения дифференциального уравнения найдем:

$$p^* = -\frac{C_1}{b_d - b_s} + c.$$

Выражая отсюда C_1 и подставляя в общее решение (7.107), получим:

$$p = ae^{-bt} + c,$$

где $a = p^* - c_d + c_s$.

Напомним, что решение дифференциального уравнения получено в предположении существования линейной зависимости между спросом на рынке, ценой и тенденцией ее изменения. Коэффициенты a, b и c в решении выражаются через коэффициенты указанной функциональной зависимости.

Эффективность рекламы

Торговой фирмой в момент времени t реализуется некоторая продукция. Из общего числа N потенциально возможных покупателей о продукции известно лишь y покупателям. Для ускорения сбыта продукции предприятие организует рекламную кампанию.

Требуется составить математическую модель задачи определения эффективности рекламы.

Р е ш е н и е. Под эффективностью рекламы будем понимать зависимость количества y привлеченных рекламой покупателей от времени t, прошедшего с момента ее размещения ($t = 0$). Полагаем, что к моменту размещения рекламы информацией о товаре владеют N/r человек:

$$y(0) = \frac{N}{r} \quad (r \geq 1). \tag{7.108}$$

Если учесть, что информация о товаре передается не только через рекламу, но и путем передачи информации от людей, владеющих ею (y), к людям, не владеющим информацией ($N - y$), то скорость распространения информации после рекламы пропорциональна произведению количеств этих двух групп людей:

$$\frac{dy}{dt} = ky(N - y), \tag{7.109}$$

где k — коэффициент, который может быть определен в результате сбора и обработки статистических данных.

Соотношения (7.108) и (7.109) представляют собой дифференциальную модель эффективности рекламы. С точки зрения дифференциальных уравнений — это автономное дифференциальное уравнение с начальным условием.

Уравнение рассматривалось в подразделе 7.2.2. График его решения был назван логистической кривой. На рис. 7.7 показано решение при $y \in (0, N)$. Другие значения N для рассматриваемой задачи нереальны.

Разделим в (7.109) переменные:

$$\frac{dy}{y(N - y)} = k\,dt, \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{N}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{N - y}\right) dy = k\,dt.$$

Проинтегрируем последнее уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{1}{N} \ln \frac{y}{N - y} = kt + C.$$

Отсюда получим

$$\frac{y}{N - y} = e^{N(kt+C)}.$$

Выражая из полученного решения переменную y в явном виде, придем к зависимости

$$y = \frac{N}{1 + Ae^{-kNt}}, \tag{7.110}$$

где $A = e^{-NC}$.

Начальное условие (7.108) позволяет найти значение постоянной интегрирования: $A = r - 1$.

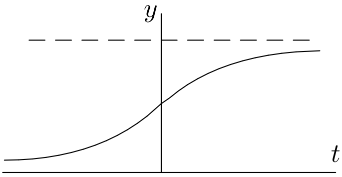


Рис. 7.7. Логистическая кривая

Акселератор

Модель, называемая *акселератором*, связывает между собой линейной зависимостью некоторую функцию V и производную по времени t от другой функции Y:

$$V = A\frac{dY}{dt}. \tag{7.111}$$

Здесь A — коэффициент акселерации.

Например, размер инвестиций I в развитие предприятия можно связать линейной зависимостью со скоростью изменения валового продукта Y предприятия $\frac{dY}{dt}$:

$$I = A\frac{dY}{dt}.$$

Коэффициент акселерации A при этом равен приросту потребностей в инвестициях при увеличении валового продукта на единицу.

Уравнение (7.111) предполагает непрерывность изменения функции Y по времени, что в экономике зачастую не происходит. В этом случае вместо дифференциального уравнения используют его разностное представление. Вместо производной рассматривают величину, равную среднему приращению функции (ΔY) за промежуток времени Δt.

Если рассматривают промежуток времени Δt (например, год) и два фиксированных момента времени $t_{i-1} = t - \Delta t$ и $t_i = t$, то акселерационная модель инвестиций представляется в виде

$$I_i = A(Y_i - Y_{i-1}),$$

где $I_i = I\Delta t$ — инвестиции за рассматриваемый промежуток времени Δt.

Модель делового цикла Самуэльсона–Хикса

Рассмотрим одно из приложений разностных уравнений к задачам экономики — динамическую модель делового цикла Самуэльсона–Хикса. В этой модели рассматривается принцип акселерации, который предполагает, что зависящая от времени t величина инвестирования I пропорциональна приросту национального дохода D на временном интервале, предшествующем рассматриваемому моменту времени. Для i-го момента времени

$$I_i = A\Delta D_{i-1}, \tag{7.112}$$

где $A > 0$ — фактор (коэффициент) акселерации (может быть постоянной величиной); $\Delta D_{i-1} = D_{i-1} - D_{i-2}$ — приращение национального дохода за период времени от t_{i-2} до t_{i-1}.

Предположим, что потребление C_i в момент времени t_i зависит от национального дохода на предыдущем этапе развития t_{i-1} и определяется линейной зависимостью (a и b — постоянные)

$$C_i = aD_{i-1} + b. \tag{7.113}$$

Сформулируем условие баланса:

$$D_i = I_i + C_i. \tag{7.114}$$

Подставляя в последнее равенство соотношения (7.112) и (7.113), придем к разностному уравнению

$$D_i - (a + A)D_{i-1} + AD_{i-2} = b. \tag{7.115}$$

Получено линейное разностное уравнение второго прядка с постоянными коэффициентами (A и a), известное как *уравнение Хикса.*

В качестве частного решения неоднородного уравнения Хикса можно использовать равновесное решение

$$\overset{*}{D} = D_i = D_{i-1} = D_{i-2}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (7.115)

$$\overset{*}{D} - (a + A)\overset{*}{D} + A\overset{*}{D} = b,$$

найдем частное решение неоднородного уравнения:

$$\overset{*}{D} = \frac{b}{1 - a}. \tag{7.116}$$

Пример. Получить решение уравнения Хикса при $a = \dfrac{7}{16}$, $A = \dfrac{1}{16}$ и $b = 9$.

Р е ш е н и е. Уравнение (7.115) примет вид

$$D_i - \frac{1}{2}D_{i-1} + \frac{1}{16}D_{i-2} = 9.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16} = 0$$

имеет два одинаковых корня: $k_1 = k_2 = 1/4$. Это соответствует второму случаю определения общего решения однородных разностных уравнений (§ 7.11). Поэтому

$$\overset{o}{D}_i = \left(\frac{1}{4}\right)^i (C_1 + iC_2).$$

Частное решение неоднородного уравнения (7.115)

$$\overset{*}{D} = \frac{b}{1-a} = \frac{9}{1-7/16} = 16.$$

Общее решение уравнения Хикса

$$D_i = \overset{o}{D}_i + \overset{*}{D} = \left(\frac{1}{4}\right)^i (C_1 + iC_2) + 16.$$

С ростом i переменная часть решения уменьшается и национальный доход стремится к равновесному состоянию:

$$\lim_{i\to\infty} D_i = 16 = \overset{*}{D}.$$

Модель освоения производственных мощностей

Эта математическая модель, относящаяся к типу *инерционных*, устанавливает зависимость между зависящим от времени t воздействием на систему $V(t)$, реакцией на это воздействие $Y(t)$ и скоростью изменения реакции $\dfrac{dY}{dt}$.

Если отмеченная зависимость линейная, то для нее можно представить *инерционную модель* в виде

$$\frac{dY}{dt} = k\big(V(t) - Y(t)\big). \tag{7.117}$$

Типичной инерционной моделью является *модель освоения производственных мощностей.*

Пусть V — производственная мощность некоторого предприятия (считаем ее не зависящей от времени), $Y(t)$ — фактическое производство, обеспеченное этой мощностью $\big($величины V и $Y(t)$ измеряются в одних, например, денежных единицах, причем справедливо неравенство $V \geq Y(t)\big)$.

Предположим, что относительный прирост производства $\dfrac{\Delta Y}{\Delta t}$ пропорционален недоиспользованной мощности $(V - Y(t))$. Тогда

$$\frac{\Delta Y}{\Delta t} = k\big(V - Y(t)\big),$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Переходя к пределу и обозначая $T = 1/k$ (смысл T будет установлен ниже), придем к линейному дифференциальному уравнению

$$T\frac{dY}{dt} + Y = V. \tag{7.118}$$

Решение дифференциального уравнения будем искать в виде суммы решения $\overset{o}{Y}$ однородного уравнения, соответствующего (7.118), и частного решения $\overset{*}{Y}$ неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения

$$T\frac{dY}{dt} + Y = 0$$

имеет вид

$$Y = Ce^{\lambda t}.$$

Величина λ определится из характеристического уравнения:

$$T\lambda + 1 = 0 \quad\longrightarrow\quad \lambda = -\frac{1}{T}.$$

После этого можно записать общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$\overset{0}{Y} = Ce^{-t/T}.$$

Поскольку $V = \text{const}$, то частное решение неоднородного уравнения (7.118)

$$\overset{*}{Y} = V.$$

Общее решение дифференциального уравнения (7.118) складывается из двух найденных решений:

$$Y(t) = V + Ce^{-t/T}.$$

Если в момент времени $t = 0$ объем производства предприятия

$$Y(0) = Y_0,$$

то записанное условие можно использовать для определения постоянной C:

$$Y_0 = V + Ce^0 = V + C, \quad \to \quad C = Y_0 - V.$$

Окончательное решение сформулированной задачи Коши:

$$Y(t) = V - (V - Y_0)e^{-t/T}. \tag{7.119}$$

График функции инерционной модели производственных мощностей, описываемой решением (7.119), при $V = 400$ для $Y_0 = 100$ и $Y_0 = 0$ представлен на рис. 7.8.

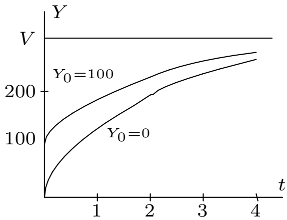


Рис. 7.8. Графики модели

График имеет горизонтальную асимптоту

$$Y(t) = V = \text{ const},$$

так как

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(V - (V - Y_0)e^{-t/T}\right) = V.$$

При $Y_0 = 0$ уравнение (7.119) примет вид

$$Y(t) = V(1 - e^{-t/T}).$$

В частности, к моменту времени $t = T$

$$Y(T) = V(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63V.$$

Таким образом, T — промежуток времени, за который предприятие достигает производства, составляющего $5/8 \approx 0{,}63$ его производственной мощности V.

7.14. Резюме

Большое разнообразие видов дифференциальных уравнений и методов их решения выделило эти уравнения в отдельный, достаточно емкий раздел математики.

С некоторыми подходами к отысканию решений дифференциальных уравнений можно ознакомиться, рассматривая обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Так, общее решение дифференциального уравнения n-го порядка (a_i — постоянные коэффициенты)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

представляется в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения (при условии, что $f(x) = 0$)

$$\overset{0}{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

В общем решении однородного дифференциального уравнения коэффициенты в степенях частных решений являются корнями характеристического уравнения

$$k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0.$$

Это уравнение имеет ровно n корней, и решение линейного дифференциального уравнения содержит ровно n произвольных постоянных.

Характер частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\overset{*}{y} = \varphi(x)$$

определяется далеко не тривиально. Даже для правой части, представляемой в виде полиномов, экспонент и тригонометрических функций, вид частных решений зависит от того, есть ли одинаковые корни в характеристическом уравнении, совпадают ли некоторые из корней с параметрами правой части уравнения, имеются ли среди корней комплексно-сопряженные.

Универсальным методом определения общего решения неоднородного дифференциального уравнения является предложенный Лагранжем метод неопределенных коэффициентов.

Нахождение решений дифференциального уравнения первого порядка, как правило, не вызывает затруднений и зачастую сводится к операции взятия неопределенного интеграла.

Сложность в нахождении аналитических решений дифференциальных уравнений и их широкое распространение в математическом моделировании реальных процессов побудили математиков к разработке численных методов интегрирования.

Изложенные в главе схемы решения задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка методами Эйлера и Рунге–Кутта далеко не исчерпывают существующие численные методы, среди которых наибольшее распространение получили так называемые «сеточные методы». В сеточных методах операции дифференцирования заменяются на конечные разности.

В экономике дифференциальные уравнения находят все возрастающее применение. Без использования дифференциальных уравнений или их разностного аналога нельзя обойтись при построении и анализе моделей развития экономики в целом и отдельных ее элементов.

Сведения о дифференциальных уравнениях и методах их решений можно найти в [2, 4, 18, 21].

7.15. Вопросы

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение? уравнение в частных производных?
2. Что определяет порядок дифференциального уравнения?
3. Что называется решением дифференциального уравнения?
4. Что такое интегральная кривая? семейство интегральных кривых?
5. Как определить количество независимых постоянных интегрирования в решении дифференциального уравнения?
6. Что такое общее и частное решения дифференциального уравнения?
7. Что представляют собой начальные (краевые) условия? Для чего они необходимы при нахождении решений дифференциальных уравнений?
8. Что собой представляет задача Коши?
9. Что такое неполное дифференциальное уравнение первого порядка?

10. Чем отличаются дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными?
11. Как установить факт линейной независимости (зависимости) системы функций с использованием определителя Вронского?
12. Каким образом определяют частное и общее решения однородного дифференциального уравнения второго порядка? n-го порядка?
13. В чем смысл метода вариации произвольных постоянных?
14. Что такое характеристическое уравнение для дифференциального уравнения?
15. Как зависит общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка от значения дискриминанта характеристического уравнения? Запишите частные решения для каждого значения дискриминанта.
16. Что такое частное решение неоднородного дифференциального уравнения? Как выглядит в общем случае частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с полиномом в правой его части?
17. Как перейти от дифференциального уравнения n-го порядка к системе уравнений первого порядка и обратно?
18. Что собой представляют разностные уравнения? Как перейти от дифференциальных уравнений к разностным?
19. В чем суть метода Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений? Пояснения сопроводите графическим построением.
20. В чем суть метода Рунге–Кутта решения дифференциального уравнения? В чем состоят его достоинства и недостатки по сравнению с методом Эйлера?

Вопросы для тестирования

1. Перечислите номера правильных утверждений, касающихся дифференциальных уравнений.

1. Задача Коши — это задача определения начальных условий;
2. Количество постоянных интегрирования в решении дифференциального уравнения равно порядку старшей производной основной переменной;
3. Число краевых условий для определения постоянных интегрирования должно быть равно количеству независимых переменных;

4. Совокупность линейно независимых функций, удовлетворяющих однородному дифференциальному уравнению, образует фундаментальную систему решений;
5. Среди пунктов 1–4 нет правильных.

2. Перечислите выражения, являющиеся линейными дифференциальными уравнениями для произвольного вида функций $f(\cdots)$.

1. $y'_{x_k} = f(x_1, \ldots, x_n, y)$; 2. $f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$;
3. $y = f(x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_n)$; 4. $y\,dx = x\,dy$.
5. Среди выражений 1–4 нет требуемых.

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся решения дифференциального уравнения $y' = F'(x) = f(x)$. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Общее решение	1. $F(x)$;
2. Частное решение	2. $F(x) + C$;
3. Задача Коши	3. $F(x) + C, \quad f(x_0) = A$;
4. Приближенное решение	4. $F(x)\Big\|_a^b$.

4. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся типов дифференциальных уравнений. В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. Неполное	1. $y' + p(x)y = f(x)$;
2. С разделяющимися переменными	2. $y' = p(x)y$;
3. Линейное однородное	3. $y' = f(x)$;
4. Линейное неоднородное	4. $f_1(x)f_2(y)dx{=}g_1(x)g_2(y)dy$.

5. Перечислите свойства определителя Вронского W.

1. Элементы k-й строки являются производными порядка $(k-1)$ от элементов фундаментальной системы решений дифференциального уравнения;
2. Если $W = 0$, то имеется бесчисленное множество линейно независимых решений дифференциального уравнения;
3. Если частные решения однородного дифференциального уравнения образуют фундаментальную систему, то $W \neq 0$;
4. W является определителем матрицы неопределенных коэффициентов в решении однородных дифференциальных уравнений;
5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

6. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся численных и аналитических методов решения дифференциальных уравнений. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Трапеций	1. $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$;
2. Прямоугольников	2. $\dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)$;
3. Эйлера	3. $\dfrac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)$;
4. Рунге–Кутта	4. $y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0$.

7. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся общего решения дифференциального уравнения $y'' + py' + q = 0$ $\left(k_1,\ k_2 —\right.$ корни характеристического уравнения; $\alpha = -p/2,\ \ \beta = \pm\left.\left(\dfrac{p^2}{4} - q\right)\right)$. В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. $k_1 = k_2 = \alpha$	1. $C_1 + C_2 e^{\alpha x}$;
2. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta$	2. $e^{\alpha x}(C_1 + C_2 x)$;
3. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	3. $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$;
4. $k_1 = \alpha \neq 0,\ k_2 = 0$	4. $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

8. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся частных решений дифференциальных уравнений: $y'' + py' + qy = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $(Q_n = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n,\ \ k_1,\ k_2$ — корни характеристического уравнения). В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. $k_1 \neq k_2$	1. Q_n;
2. $k_1 = k_2 \neq 0$	2. xQ_n;
3. $k_1 \neq 0,\ k_2 = 0$	3. $x^2 Q_n$;
4. $k_1 = k_2 = 0$	4. A_0.

9. В чем заключается «приближенность» метода Эйлера решения дифференциального уравнения?

1. В замене приращения функции на дифференциал;
2. В замене предела отношения приращения функции к приращению аргумента на сами отношения;

3. В замене функции правой части дифференциального уравнения на кусочно-линейную функцию;
4. В замене функции правой части дифференциального уравнения на многочлен;
5. Среди пунктов 1–4 нет правильных.

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕМА 7.1
(§ 7.1–7.2 теории)

Дифференциальные уравнения первого порядка

Вопросы

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение? уравнение в частных производных?
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения? частным решением?
3. Что собой представляет задача Коши? краевая задача?
4. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
5. Что такое интегральная кривая? семейство кривых?
6. Что такое неполное дифференциальное уравнение первого порядка? В чем отличие и сходство переменных x и y в неполном дифференциальном уравнении?
7. Какие дифференциальные уравнения называются автономными? В чем состоит их качественный анализ?
8. Чем отличаются дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными?
9. Какие дифференциальные уравнения называют линейными?
10. В чем состоит метод вариации произвольных постоянных по отношению к линейным дифференциальным уравнениям первого порядка?

Задачи

(Если заданы начальные условия, то наряду с общим решением требуется получить соответствующее частное решение дифференциального уравнения.)

1. Убедиться в том, что функция $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + e^x$ является решением дифференциального уравнения $y'' - y' - 2y = -2e^x$. Найти частное решение дифференциального уравнения при начальных условиях: $y(0) = 0$; $y'(0) = 5$.

Р е ш е н и е. Найдем первую и вторую производные от предполагаемого решения:

$$y' = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x} + e^x, \qquad y'' = C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x} + e^x,$$

и подставим их вместе с выражением для заданной функции в исходное дифференциальное уравнение:

$$(C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x} + e^x) - (-C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x} + e^x) -$$

$$-2(C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + e^x) = -2e^x.$$

После раскрытия скобок убеждаемся в том, что записанное равенство тождественно удовлетворяется.

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned} y(0) = 0&: \qquad C_1e^{-0} + C_2e^{2\cdot 0} + e^0 = 0, \quad \Longrightarrow \quad C_1 + C_2 + 1 = 0;\\ y'(0) = 5&: \quad -C_1e^{-0} + 2C_2e^{2\cdot 0} + e^0 = 5, \quad \Longrightarrow \quad -C_1 + 2C_2 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Решая систему двух уравнений, получим $C_1{=}{-2}$; $C_2 = 1$.

Подставляя значения постоянных интегрирования в общее решение, запишем искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$y = -2e^{-x} + e^{2x} + e^x.$$

2. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

Р е ш е н и е. Для составления дифференциального уравнения необходимо в заданном уравнении избавиться от постоянной C, привлекая для этой цели производные. Продифференцируем уравнение окружности по x: $2(x-C)+2yy'=0$. Выразим из полученного уравнения величину $(x-C)=-yy'$ и подставим в уравнение окружности:

$$y^2(y')^2+y^2=1.$$

Это и есть искомое уравнение.

В задачах 3–6 найти решения неполных дифференциальных уравнений.

3. $y'x=1$.

Р е ш е н и е. Имея в виду $y'=\dfrac{dy}{dx}$, умножим заданное уравнение на $\dfrac{dx}{x}$. В результате придем к уравнению $dy=\dfrac{dx}{x}$.

Решение этого уравнения находится путем одновременного интегрирования обеих его частей:

$$\int dy=\int\frac{dx}{x}\quad\Longrightarrow\quad y=\ln|x|+C.$$

Это общее решение дифференциального уравнения. Для определения любого его частного решения достаточно придать постоянной C конкретное значение, например, $C=0$.

4. $y'=\operatorname{tg}x,\ \ y(0)=5$.

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения на dx и проинтегрируем, проведя предварительно очевидные преобразования:

$$y=\int\operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

Это общее решение дифференциального уравнения, описывающее семейство интегральных кривых.

Для записи частного решения из семейства интегральных кривых выделим ту, которая проходит через точку $(0;\,5)$:

$$5=-\ln|\cos 0|+C,\quad\Longrightarrow\quad C=5.$$

Частное решение дифференциального уравнения, описывающее интегральную кривую, проходящую через точку $(0,\,5)$, запишется в виде

$$y=-\ln|\cos x|+5.$$

5. Найти решение и провести качественный анализ дифференциального уравнения: $y' = y^2 - 1$.

Р е ш е н и е. Это неполное дифференциальное уравнение, функция правой части которого не зависит от аргумента. Следовательно, это уравнение автономное. Нулевые значения функции $f(y) = y^2 - 1$ имеют место при $y = y_1 = -1$ и $y = y_2 = 1$. При $y < -1$ производная $y' > 0$, при $-1 < y < 1$ $y' < 0$, при $y > 1$ $y' > 0$.

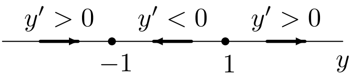


Рис. 7.9. Фазовый портрет

Так как при переходе через точку со значением $y_1 = -1$ производная y' изменяет знак с «+» на «−», то функция y имеет в этой точке максимум. Интегральная кривая приближается к этой точке, находясь справа и слева от нее. Это положение устойчивого равновесия.

При переходе через точку $y_2 = 1$ производная y' изменяет знак с «−» на «+». Функция y имеет в этой точке минимум. Интегральная кривая удаляется с обеих сторон от точки. Это положение неустойчивого равновесия.

На рис. 7.9 изображен фазовый портрет дифференциального уравнения задачи.

Для получения общего решения умножим уравнение на $\dfrac{dx}{y^2 - 1}$:

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = dx.$$

Левую часть уравнения разложим на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = dx.$$

Интегрируя, получим

$$x = \frac{1}{2} \ln \left| C \frac{y-1}{y+1} \right|.$$

Из полученного решения можно выразить переменную y в явном виде:

$$y = \frac{C + e^{2x}}{C - e^{2x}}.$$

Следует иметь в виду, что выразить в явном виде зависимую переменную при интегрировании дифференциального уравнения удается далеко не всегда.

6. $y' = y\,\mathrm{tg}(\ln y)$.

Р е ш е н и е. Разделим уравнение на его правую часть и умножим на dx. Интегрируя обе части полученного уравнения, получим

$$x = \int \frac{\cos(\ln y)}{\sin(\ln y)} d(\ln y) = \int \frac{d[\sin(\ln y)]}{\sin(\ln y)} = \ln|\sin(\ln y)| + C.$$

Если проделанные промежуточные преобразования не очевидны, то для взятия начального интеграла можно применить метод замены переменной:

$$x = \int \frac{\cos(\ln y)}{y\sin(\ln y)}\,dy = \left\{t = \sin(\ln y); dt = \cos(\ln y)\frac{dy}{y}\right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

При замене t на обозначенную этой буквой функцию последнее выражение совпадает с ранее полученным.

В задачах 7–9 найти решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Это уравнения вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx = f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy,$$

которые после деления их обеих частей на $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$ приводятся к уравнениям с разделенными переменными:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy.$$

Заметим, что неполные дифференциальные уравнения являются частным видом уравнений с разделяющимися переменными. Приемы, использованные выше для разделения переменных, в нижеследующих задачах будут использоваться.

7. $y'x = y$.

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения на $\dfrac{dx}{xy}$: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя, получим $\ln|y| = \ln|x| + \ln|D| = \ln|xD|$. Потенциируя, найдем $y = \pm Dx$. Вводя новое обозначение для постоянной $C = \pm D$, запишем решение в виде

$$y = Cx.$$

8. $x(1+2y)dx + (1+x^2)dy = 0, \quad y(2) = 0.$

Р е ш е н и е. Разделим переменные: $\dfrac{xdx}{1+x^2} = -\dfrac{dy}{1+2y}$ и проинтегрируем:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = -\int \frac{dy}{1+2y} \implies \{t = 1+x^2;\ dt = 2xdx;\ u = 1+2y;\ du = 2dy\} \implies$$

$$\implies \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{du}{u} \implies t = \frac{C}{u} \implies 1+x^2 = \frac{C}{(1+2y)}.$$

Найдем C, используя начальное условие: $1+2^2 = \dfrac{C}{(1+2\cdot 0)}, \implies C = 5.$

Подставляя это значение постоянной в найденное решение и выражая из него в явном виде переменную y, получим

$$1+x^2 = \frac{5}{(1+2y)}, \quad \text{или} \quad y = \frac{4-x^2}{2(1+x^2)}.$$

9. $x^2y' - y^2 = 0, \quad y(1) = 0{,}5.$

Р е ш е н и е. Умножив уравнение на $\dfrac{dx}{x^2y^2}$, придем к уравнению с разделенными переменными $\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dx}{x^2}.$

Общее решение уравнения $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} + C.$

Подставим в общее решение начальное условие:

$$2 = 1 + C, \quad \implies \quad C = 1.$$

В итоге частное решение представим в виде

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + 1, \quad \implies \quad y = \frac{x}{1+x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Убедиться в том, что функция $y = Cx^3 + x^2$ является общим решением дифференциального уравнения $xy' - 3y + x^2 = 0$. Записать частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y(1) = 2$.

В задачах 2–4 составить дифференциальные уравнения семейств интегральных кривых.

2. $y = Cx + x^2$. **3.** $y = Ce^{2x}$. **4.** $\ln\dfrac{x}{y} = Cy + 1$.

В задачах 5–9 найти решения дифференциальных уравнений первого порядка, используя подходящий метод. При указании краевых условий, найти соответствующие частные решения.

5. $y' = 4x^3$. **6.** $yy' = x$. **7.** $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 0$.
8. $xy' + y = 0$. **9.** $y' = 2\sqrt{y}\ln x,\ \ y(e) = 1$.

10. Найти общее решение, провести качественный анализ дифференциального уравнения $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Найти частное решение уравнения при $y(0) = -1$.

ТЕМА 7.2
(§ 7.4–7.8 теории)

Характеристические уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.

Вопросы

1. Что собой представляют линейные дифференциальные уравнения?
2. Запишите в общем виде неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка.
3. Запишите в общем виде однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее неоднородному дифференциальному уравнению.
4. Какие функции называются линейно независимыми? линейно зависимыми? Приведите примеры.
5. Каким образом определяюся частное и общее решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка?
6. Что такое характеристическое уравнение?
7. Как зависит общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка от значения дискриминанта характеристического уравнения? Запишите решения для каждого значения дискриминанта.

8. Что такое частное решение неоднородного дифференциального уравнения?
9. Как строится общее решение линейного дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных?
10. Как выглядит в общем случае частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с полиномом в правой его части?

Задачи

1. Записать в общем виде решение линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = fx. \tag{7.120}$$

Р е ш е н и е. Для интегрирования линейного дифференциального уравнения сначала необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения. Это дифференциальное уравнение имеет n линейно независимых частных решений вида $y_i = e^{k_i x}$ $(i = \overline{1, n})$. Коэффициенты k_i являются корнями характеристического уравнения

$$k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0. \tag{7.121}$$

Решение однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией его частных решений. Если корни характеристического уравнения действительные и различные, то

$$\overset{0}{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \tag{7.122}$$

Если среди корней имеется пара равных, например $k_i = k_{i+1}$, то решение принимает вид

$$\overset{0}{y} = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + (C_i + xC_{i+1})e^{k_i x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \tag{7.123}$$

Если пара корней характеристического уравнения комплексно-сопряженные, например $k_j = \alpha_j + \beta_j i$, $k_{j+1} = \alpha_j - \beta_j i$, то

$$\overset{0}{y} = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + (C_j \cos\beta_j + C_{j+1}\sin\beta_j)e^{\alpha_j x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \tag{7.124}$$

Общее решение неоднородного уравнения можно искать методом Лагранжа вариации произвольных постоянных, заменяя в общем решении однородного дифференциального уравнения постоянные интегрирования на соответствующие функции от x: $C_i \quad \to \quad C_i(x)$. Например, для случая действительных неравных корней характеристического уравнения

$$y(x) = C_1(x)e^{k_1 x} + C_2(x)e^{k_2 x} + \ldots + C_n(x)e^{k_n x}.$$

Переменные $C_i(x)$ можно определить из системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} C_1'(x)y_1 & +C_2'(x)y_2 & +\ldots+C_n'(x)y_n & = & 0, \\ C_1'(x)y_1' & +C_2'(x)y_2' & +\ldots+C_n'(x)y_n' & = & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} & +C_2'(x)y_2^{(n-2)} & +\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)} & = & 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} & +C_2'(x)y_2^{(n-1)} & +\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)} & = & f(x). \end{array} \right. \qquad (7.125)$$

Еще один подход к определению общего решения $y(x)$ неоднородного дифференциального уравнения заключается в определении какого-либо частного решения $\overset{*}{y}(x)$ неоднородного уравнения и суммирования этого решения с общим решением однородного дифференциального уравнения:

$$y(x) = \overset{0}{y}(x) + \overset{*}{y}(x). \qquad (7.126)$$

Характер решения $\overset{*}{y}(x)$ зависит от вида функции, стоящей в правой части дифференциального уравнения. Если, например, функция представляет собой полином m-й степени

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = P_m(b_i),$$

а корни характеристического уравнения действительные и различные, то решение $\overset{*}{y}(x)$ следует искать в виде полинома той же степени, что и $P_m(b_i)$, т.е.

$$\overset{*}{y}(x) = B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m = P_m(B_i). \qquad (7.127)$$

Коэффициенты B_i выражаются через коэффициенты b_i в результате подстановки $\overset{*}{y}(x)$ в исходное дифференциальное уравнение и последующего приравнивания множителей при одинаковых степенях переменной x.

В задачах 2–4 найти решения дифференциальных уравнений первого порядка.

2. $y' - 2y = 3x + 1.$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $k - 2 = 0$ дает единственный корень $k = 2$, что позволяет записать решение однородного дифференциального уравнения , соответствующего заданному, в виде

$$\overset{0}{y} = Ce^{2x}.$$

Используя метод Лагранжа вариации произвольных постоянных, будем искать общее решение неоднородного дифференциального уравнения, полагая, что в этом решении вместо C стоит зависящая от x функция $C(x)$:

$$y(x) = C(x)e^{2x}. \tag{7.128}$$

Подставим это решение в заданное дифференциальное уравнение:

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = 3x + 1,$$

или

$$C'(x)e^{2x} = 3x + 1.$$

Это уравнение соответствует системе уравнений (7.125) для случая дифференциального уравнения первого порядка. Найдем его решение непосредственным интегрированием:

$$C(x) = \int (3x+1)e^{-2x}dx = \left\{ \begin{array}{lcl} u = 3x + 1 & \rightarrow & du = 3dx \\ dv = e^{-2x}dx & \rightarrow & v = -e^{-2x}/2 \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x+1)e^{-2x} + \frac{3}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{4}(6x+5)e^{-2x} + C_1.$$

Подставляя полученное значение функции $C(x)$ в (7.128), получим общее решение заданного дифференциального уравнения $(C_1 = C)$

$$y(x) = -\frac{1}{4}(6x+5) + Ce^{2x}. \tag{7.129}$$

Найдем общее решение исходного дифференциального уравнения, используя его представление в виде суммы общего решения однородного и частного решения неоднородного дифференциального уравнения (7.126). Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде полинома первой степени (7.127):

$$\overset{*}{y}(x) = B_0 + B_1 x.$$

Подставим это решение в исходное дифференциальное уравнение:

$$B_1 - 2(B_0 + B_1 x) = 3x + 1.$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях x, найдем $B_1{=}{-}3/2$, $B_0 = -5/4$.

Таким образом,

$$\overset{*}{y}(x) = -\frac{1}{4}(6x + 5).$$

Сумма этого решения с общим решением однородного уравнения составляет общее решение (7.129) исходного уравнения.

3. $y' - y = e^{2x}, \quad y(1) = e^2.$

Р е ш е н и е. Общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\overset{0}{y}(x) = Ce^x$$

используем для отыскания общего решения неоднородного уравнения методом Лагранжа:

$$y(x) = C(x)e^x.$$

Обращаясь к системе (7.125), получим дифференциальное уравнение для определения переменной $C(x)$:

$$C'(x)e^x = e^{2x}, \quad \to \quad C'(x) = e^x.$$

После интегрирования получим

$$C(x) = e^x + C.$$

Общее решение дифференциального уравнения

$$y(x) = (e^x + C)e^x.$$

Для определения постоянной C обратимся к начальному условию: $e^2 = e^1(e^1 + C) \quad \Longrightarrow \quad C = 0.$

Частное решение, соответствующее заданному начальному условию,

$$y = e^{2x}.$$

4. $y' + y\sin x = \sin x.$

Р е ш е н и е. Это линейное уравнение с переменными коэффициентами. Поэтому использовать характеристическое уравнение для отыскания частного решения однородного дифференциального уравнения

$$y' + y\sin x = 0 \tag{7.130}$$

нельзя.

Разделим в (7.130) переменные и найдем его решение:

$$\frac{dy}{y} = -\sin x\,dx, \quad \to \quad y = Ce^{\cos x}.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y(x) = C(x)e^{\cos x}. \tag{7.131}$$

Ссылаясь на систему уравнений (7.125), запишем дифференциальное уравнение для определения переменной $C(x)$:

$$C'(x)e^{\cos x} = \sin x, \quad \to \quad C'(x) = e^{-\cos x}\sin x.$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$C(x) = \int e^{-\cos x}\sin x\,dx = \int e^{-\cos x}d(-\cos x) = e^{-\cos x} + C.$$

Подставляя полученное выражение в (7.131), запишем общее решение заданного дифференциального уравнения

$$y = 1 + Ce^{\cos x}.$$

5. Определить, будут ли линейно независимыми функции $y_1 = \operatorname{tg} x$ и $y_2 = \operatorname{ctg} x$.

Р е ш е н и е. Для того чтобы две функции y_1 и y_2 были линейно независимыми, необходимо, чтобы их линейная комбинация: $C_1y_1 + C_2y_2$ равнялась нулю только при условии, что оба коэффициента C_1 и C_2 равны нулю. Пусть $C_2 \neq 0$. Обозначим $\lambda = -C_1/C_2 = \text{const}$. Из равенства нулю линейной комбинации функций получим

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg}^2 x = \lambda.$$

Равенство

$$\operatorname{tg}^2 x = \lambda$$

не может быть выполнено при произвольных x. Предположение о линейной зависимости рассматриваемых функций привело к противоречию. Следовательно, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — линейно независимые функции.

Другой путь установления линейной независимости функций основан на использовании определителя Вронского

$$W = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & \operatorname{ctg} x \\ \sin^{-2} x & -\cos^{-2} x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^3 x\cos^3 x}.$$

При установлении линейной независимости заданных функций значения $x = k\pi$ и $x = k\pi/2$ $(k \in Z)$ следует исключить из рассмотрения. В этом случае числитель полученного для W выражения (как, впрочем, и знаменатель) никогда в нуль не обращается. Поэтому $W \neq 0$, что указывает на линейную независимость функций.

В задачах 6–13 найти решения дифференциальных уравнений второго порядка. (Если указаны краевые условия, то наряду с общим решением получить соответствующее частное решение).

6. $y'' = 2;$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 1.$

Р е ш е н и е. Общее решение уравнения (оно не содержит переменную y и ее производную y'), может быть получено непосредственным интегрированием:

$$y' = \int (y')' dx = \int 2dx = 2x + C_1.$$

$$y = \int y' dx = \int (2x + C_1) dx = x^2 + C_1 x + C_2.$$

Используя начальные условия, найдем конкретные (частные) значения постоянных интегрирования:

$$y'(1) = 1: \quad 1 = 2 \cdot 1 + C_1, \implies C_1 = -1.$$

$$y(1) = 1: \quad 1 = 1^2 + (-1) \cdot 1 + C_2, \implies C_2 = 1.$$

Подставляя значения постоянных интегрирования в общее решение дифференциального уравнения, найдем его частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y = x^2 - x + 1.$$

График этой функции представляет собой параболу, проходящую через точку (1; 1).

7. $y'' + 2y' = 0.$

Р е ш е н и е. Это уравнение характерно тем, что в нем отсутствует слагаемое, содержащее функцию y. Решение таких уравнений может быть найдено, как и в предыдущей задаче, без привлечения характеристического уравнения. Действительно, так как уравнение можно представить в виде $(y' + 2y)' = 0$, то

$$y' + 2y = C.$$

Дальнейшие операции сводятся к отысканию решения неполного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{C-2y}=dx, \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln|C-2y|=x+\frac{1}{2}\ln D,$$

$$y=-\frac{1}{2D}e^{-2x}+\frac{C}{2}=C_1+C_2e^{-2x}.$$

К такому же результату придем, привлекая характеристическое уравнение

$$k^2+2k=0, \quad \Longrightarrow \quad k_1=0; \quad k_2=-2.$$

Линейно независимые частные решения этого уравнения: $y_1=e^0=1$; $y_2=e^{-2x}$, а общее решение однородного уравнения является линейной комбинацией этих двух решений:

$$y=C_1+C_2e^{-2x},$$

что совпадает с ранее полученным решением.

8. $y''+y'-2y=0$.

Р е ш е н и е. Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для нахождения его общего решения запишем характеристическое уравнение:

$$k^2+k-2=0.$$

Квадратное алгебраическое уравнение имеет два неравных вещественных корня: $k_1=1$ и $k_2=-2$. Этим корням соответствуют два частных линейно независимых решения: $y_1=e^x$ и $y_2=e^{-2x}$ $(y_1/y_2=e^{3x}\neq \text{const})$. Поэтому общее решение искомого однородного дифференциального уравнения представляется в виде линейной комбинации двух его частных решений:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

9. $y''-6y'+9y=0$.

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2-6k+9=0, \quad \Longrightarrow \quad k_1=k_2=k=3.$$

Так как корни характеристического уравнения вещественные и равные, двумя частными решениями дифференциального уравнения будут: $y_1=e^{3x}$ и $y_2=xe^{3x}$. Эти решения линейно независимы, так как $\left(\dfrac{y_2}{y_1}=x\neq \text{ const}\right)$. Поэтому общее решение искомого однородного дифференциального уравнения представляется в виде линейной комбинации двух его частных решений:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

10. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 4k + 13 = 0, \quad \Longrightarrow \quad k_1 = 2 + 3i; \quad k_2 = 2 - 3i.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные. Поэтому частные решения дифференциального уравнения: $y_1 = e^{2x}\cos 3x$ и $y_2 = e^{2x}\sin 3x$. Решения линейно независимы, так как $\left(\dfrac{y_2}{y_1} = \operatorname{tg} 3x \neq \text{ const}\right)$. Поэтому общее решение искомого однородного дифференциального уравнения представляется в виде линейной комбинации двух его частных решений:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

11. $y'' - 6y' + 9y = 9x + 3.$

Р е ш е н и е. Общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующее искомому неоднородному уравнению (см. задачу 4):

$$\overset{0}{y} = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

Правая часть уравнения представляет собой полином первой степени. Так как ни один из корней характеристического уравнения не равен нулю, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$\overset{*}{y} = Ax + B.$$

Определив $\overset{*}{y}{}' = A$ и $\overset{*}{y}{}'' = 0$, подставим их и принятое выражение для $\overset{*}{y}$ в исходное дифференциальное уравнение:

$$0 - 6A + 9(Ax + B) = 9x + 3, \quad \Longrightarrow \quad 9Ax + 3(3B - 2A) = 9x + 3.$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях x в правой и левой частях записанного равенства, получим систему двух уравнений:

при x: $\quad 9A = 9, \quad \Longrightarrow \quad A = 1.$

при x^0: $\quad 3(3B - 2A) = 3, \quad \Longrightarrow \quad 3B - 2 \cdot 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad B = 1.$

При найденных значениях коэффициентов

$$\overset{*}{y} = x + 1.$$

Общее решение неоднородного уравнения находим как сумму общего решения однородного уравнения и его частного решения:

$$y = \overset{0}{y} + \overset{*}{y} = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + x + 1.$$

12. $y'' - 6y' = 12x - 8.$

Р е ш е н и е. Общее решение однородного уравнения, соответствующего заданному, представляется в виде (один корень характеристического уравнения нулевой)

$$\overset{0}{y} = C_1 + C_2 e^{6x}.$$

Так как один из корней характеристического уравнения нулевой, частное решение неоднородного уравнения записываем в виде полинома первой степени (по виду функции, стоящей в правой части уравнения), умноженного на x:

$$\overset{*}{y} = x\,(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Определив первую и вторую производные от частного решения: $\overset{*}{y}\,' = 2Ax + B$, $\overset{*}{y}\,'' = 2A$, подставим их в левую часть исходного уравнения:

$$-12Ax + (2A - 6B) = 12x - 8; \quad \Longrightarrow \quad A = -1;\ B = 1.$$

При таких значениях постоянных

$$\overset{*}{y} = -x^2 + x.$$

Общее решение заданного неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{6x} - x^2 + x.$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения, не прибегая к определению частного решения неоднородного уравнения, т.е. с помощью метода Лагранжа вариации постоянных.

Будем искать решение дифференциального уравнения в виде

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{6x}. \tag{7.132}$$

Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ воспользуемся системой (7.125):

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{6x} = 0; \\ 6C_2'(x)e^{6x} = 12x - 8. \end{cases}$$

Из системы определим производные:

$$C_1'(x) = -2x + \frac{4}{3}, \qquad C_2' = \left(2x - \frac{4}{3}\right)e^{-6x}.$$

Из первого равенства после интегрирования найдем

$$C_1(x) = -x^2 + \frac{4}{3}x + D_1.$$

Из второго равенства получим

$$C_2(x) = \frac{2}{9}e^{-6x} + 2\int xe^{-6x}dx = \left\{ \begin{array}{lll} u = x & \to & du = dx \\ dv = e^{-6x}dx & \to & v = -e^{-6x}/6 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{9}e^{-6x} - \frac{1}{3}xe^{-6x} - \frac{1}{18}e^{-6x} + D_2 = \frac{1}{6}(1-2x)e^{-6x} + D_2.$$

Подставим полученные значения переменных $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в решение (7.132):

$$y(x) = C_1 + C_2e^{6x} - x^2 + x.$$

Здесь $C_1 = D_1 + 1/6$, $C_2 = D_2$.

Решение совпадает с полученным ранее путем суммирования двух решений.

13. $y'' + y' = 6\cos x$.

Р е ш е н и е. Общее решение однородного уравнения, соответствующего заданному, при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения $k_1 = 0$, $k_2 = -1$ представляется в виде

$$\overset{0}{y} = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения, не прибегая к определению частного решения неоднородного уравнения, т.е. с помощью метода Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Будем искать решение дифференциального уравнения в виде

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}. \tag{7.133}$$

Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ воспользуемся системой (7.125):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-x} = 0; \\ -C_2'(x)e^{-x} = 6\cos x. \end{array} \right.$$

Из системы определим производные:

$$C_1'(x) = 6\cos x, \qquad C_2' = -6e^{x}\cos x.$$

Из первого равенства после интегрирования найдем

$$C_1(x) = 6\sin x + D_1.$$

Из второго равенства получим

$$C_2(x) = -6\int e^x \cos x dx.$$

Методом интегрирования по частям найдем

$$\int e^x \cos x\, dx = \left\{ \begin{array}{lll} u = \cos x & \to & du = -\sin x\, dx \\ dv = e^x\, dx & \to & v = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x = \left\{ \begin{array}{lll} u = \sin x & \to & du = \cos x\, dx \\ dv = e^x\, dx & \to & v = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx. \quad \to$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^x + D_2.$$

$$C_2(x) = -3(\cos x + \sin x)e^x - 6D_2.$$

Полагая $D_1 = C_1,\ \ -6D_2 = C_2$, получим

$$y = 3(\cos x + \sin x) + C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, что функции Ax^m и Bx^n линейно независимы при $m \neq n$ и линейно зависимы при $m = n$.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

2. $y'' - 3y' - 4y = 0$;

3. $y'' - 8y' + 25y = 0$;

4. $y'' + 5y' + 4y = 1{,}5 - 4x^2$;

5. $y'' - 4y = 4x$;

6. $y'' + 3y' - 4y = 12e^{2x}$;

7. $y'' + y' - 2y = 6e^x$;

8. $y'' + 2y' = 4 - 2e^{-2x}$;

9. $y'' + 4y' - 5y = 26\sin x$;

10. $y'' + y = 2 - 4\cos x$.

Типовые контрольные работы

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ (на 15 мин)

1. Перечислите выражения, являющиеся линейными дифференциальными уравнениями для произвольного вида функций $f(\cdots)$.

1. $y'_{x_k} = f(x_1, \ldots, x_n, y)$.
2. $f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.
3. $y = f(x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_n)$.
4. $y\,dx = x\,dy$.
5. Среди выражений 1–4 нет требуемых.

2. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся типов дифференциальных уравнений. В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. Неполное	1. $y' + p(x)y = f(x)$;
2. С разделяющимися переменными	2. $y' = p(x)y$;
3. Линейное однородное	3. $y' = f(x)$;
4. Линейное неоднородное	4. $f_1(x)f_2(y)dx = g_1(x)g_2(y)dy$.

3. Перечислите номера соотношений, используемых при нахождении решения дифференциального уравнения: $y' + p(x)y = f(x)$.

1. $y = uv$; 2. $y = u + v$; 3. $v' + p(x)v = 0$; 4. $du = \dfrac{f(x)}{v(x)}dx$;

5. Среди соотношений 1–4 нет требуемых.

4. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся численных и аналитических методов решения дифференциальных уравнений. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Трапеций	1. $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$;
2. Прямоугольников	2. $\dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)$;
3. Эйлера	3. $\dfrac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$;
4. Рунге–Кутта	4. $y' = f(x, y),\quad y(a) = y_0$.

5. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся частных решений дифференциального уравнения: $y'' + py' + qy = ae^{kx}$. В местах отсутствия полного соответствия поставьте цифру 5.

1. $k_1 \neq k$, $k_2 \neq k$, $k_2 \neq k_1$	1. Ae^{kx};
2. $k_1 = k_2 = k$	2. Axe^{kx};
3. $k_1 \neq k$, $k_2 = k$	3. Ax^2e^{kx};
4. $k_1 = k_2 = k$	4. A.

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ (на 75 мин)

Найти решения дифференциальных уравнений

1. $y' = 2y^2$.

2. $(2x + 1)\,dy + y^2\,dx = 0$, если $y(4) = 1$.

3. $xy' + y = \ln x + 1$.

4. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

5. $y'' - 5y' + 4y = e^x$.

Глава 8

Ряды

8.1. Числовые ряды

Составленное из бесконечной последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots$ выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (8.1)$$

называется *бесконечным рядом*, а a_n — *n-м членом ряда.*

Конечный или бесконечный предел (8.1)

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \qquad (8.2)$$

называется *суммой ряда.*

Если предел (8.2) конечен, то ряд называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся.*

Сумма первых n членов ряда (8.1)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (8.3)$$

называется *частичной суммой ряда*, или *n-й частичной суммой.*

Сумма

$$R_n = S - S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+i} + \ldots \qquad (8.4)$$

называется *остатком ряда*, или *n-й остаточной суммой ряда.*

Для сходящегося ряда

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = S - S = 0.$$

То есть при достаточно больших n, во-первых, остаточная сумма сходящегося ряда стремится к нулю; во-вторых, справедливо соотношение

$$S_n \approx S.$$

Пример 1. Геометрическая прогрессия

$$b,\ bq,\ \ldots, bq^n,\ \ldots$$

образует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^n = bq + bq^2 + \ldots + bq^n + \ldots, \tag{8.5}$$

который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| > 1$. При $|q| = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 2. Владелец ваучера некоторой фирмы имеет от него неизменяемую со временем прибыль b д.е. ежегодно. Известно, что планируемая на все предстоящие годы инфляция составляет величину $p = p\%/100$. Так что через год по отношению к рассматриваемому моменту времени фактическая величина прибыли станет равной $b/(1 + p)$, через 2 года — $b/(1 + p)^2$ и т.д. Через n лет ваучер (если его стоимость не будет изменяться) принесет прибыль $b/(1+p)^n$. Стоимость ваучера изменяется как члены геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/(1 + p) < 1$. Они образуют ряд с монотонно убывающими членами. Сумма этого ряда (суммарная прибыль владельца ваучера) за неограниченно большой период времени:

$$S = b\frac{(q^n - 1}{q - 1} = b\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Числовые ряды делятся на *знакопостоянные* (все члены ряда имеют одинаковые знаки) и *знакопеременные*. Ряд примера 1 знакопостоянный при $q > 0$, а при $q < 0$ — знакопеременный.

8.2. Сходимость рядов. Признаки сравнения

Перечислим без доказательства основные признаки сходящихся рядов. Если сходится ряд (8.1), то:

1) сходится и любой остаток (8.4) этого ряда;
2) остаток ряда (8.4) стремится к нулю при неограниченном росте n $\left(\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0\right)$;
3) общий член ряда неограниченно убывает $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$.

Если первые два признака являются необходимыми и достаточными, то последний признак является необходимым, но не достаточным. Убедимся в этом на примере.

Пример 1. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{8.6}$$

называемого *гармоническим рядом*,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Однако ряд расходится. Чтобы в этом убедиться, используем очевидное неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Разобьем гармонический ряд на суммы первых двух членов и остальных членов, сгруппированных по 2, 4, 8, ..., 2^k:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^k+2^k}\right) + \ldots$$

Каждое из слагаемых в скобках больше $1/2$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} k = \infty.$$

Ряд расходится.

Отметим, что линейные операции над сходящимися рядами (умножение ряда на число и суммирование) не изменяют их сходимости. В частности:

1) если все члены сходящегося ряда умножить на любое число $\lambda = \text{const}$, то полученный при этом ряд будет сходиться;

2) если сходятся ряды $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то ряд $A + \lambda B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + \lambda b_n)$ также будет сходиться.

Легко убедиться в том, что линейные операции над рядами обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$A + B = B + A; \quad A + (B + C) = (A + B) + C; \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Для знакопостоянных числовых рядов кроме перечисленных признаков сходимости существуют и другие. Приведем некоторые из них в виде теорем.

Рассмотрим два ряда:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{и} \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{8.7}$$

Теорема 1 (первый признак сравнения). *Если, хотя бы начиная с некоторого номера (скажем, $n > N$), для всех оставшихся членов двух рядов выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда B следует сходимость ряда A; из расходимости ряда A следует расходимость ряда B.*

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

Р е ш е н и е. Сравним заданный ряд с рядом

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

запишем n-ю частичную сумму членов ряда B:

$$B_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

После раскрытия скобок все слагаемые, кроме первого и последнего, уничтожатся. Поэтому

$$B_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

При неограниченном росте числа n

$$B = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Ряд B сходится.

Сравним члены рядов A и B. Так как

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)},$$

то из сходимости ряда B следует сходимость ряда A.

Теорема 2 (второй признак сравнения). *Если, хотя бы начиная с некоторого номера (скажем, $n > N$), для членов рядов A и B существует предел $d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, то из сходимости ряда B при $d < \infty$ следует сходимость ряда A, а из расходимости ряда B при $d > 0$ вытекает расходимость ряда A.*

Обратное утверждение также верно. Таким образом, при $0 < d < \infty$ или оба ряда сходятся, или оба расходятся. Для примера 2, согласно теореме,

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Так как $d < \infty$, то из сходимости ряда B следует сходимость ряда A.

Для установления факта сходимости или расходимости ряда его стараются сравнить с известным («стандартным») рядом. В качестве «стандартных» для установления факта сходимости зачастую используют геометрическую прогрессию со знаменателем $q < 1$, факта расходимости — гармонический ряд или геометрическую прогрессию со знаменателем $q > 1$. Сравнение с геометрической прогрессией лежит в основе *признака Даламбера* сходимости числовых рядов.

8.3. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов

Теорема 1 (признак Даламбера). *Если, начиная с некоторого номера n ряда A, существует такое число $q < 1$, что выполняется неравенство $d_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$, то ряд сходится; при $d_n > 1$ — расходится.*

Если $d_n = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

В отличие от знаменателя q, являющегося постоянной величиной для геометрической прогрессии, величина d_n для произвольного ряда может изменяться при переходе от одного члена ряда к другому. В литературе d_n называют *вариантой* признака Даламбера.

Применение признака Даламбера требует некоторого пояснения. Из соотношения между членами геометрической прогрессии

$$a_{n+1} = qa_n = q^2 a_{n-1} = \ldots = q^n a_1$$

следует

$$q = \sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{8.8}$$

Факт сходимости геометрической прогрессии при $q < 1$ перекликается с признаком Даламбера. Чтобы в этом убедиться, достаточно в последней зависимости заменить q на d_n.

Для ряда A Примера 2 предыдушего раздела имеем

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+2)^2} : \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} < 1.$$

Признак Даламбера указывает на то, что ряд сходится.

Пример 1. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} = 1 + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots$$

Р е ш е н и е. По признаку Даламбера

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n n!}{n! n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Подстановка различных значений n в последнее выражение:

$$d_1 = 2, \quad d_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad d_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ \ldots$$

говорит о том, что с ростом номера n варианта d_n увеличивается, оставаясь больше единицы.

При рассмотрении пределов было показано, что последовательность d_n стремится ко второму замечательному пределу

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Ряд расходится.

Если для исследуемого ряда $d_n = 1$, то, как сказано при формулировке Теоремы 1, сделать однозначное заключение о сходимости ряда нельзя.

Например, для гармонического ряда (8.6)

$$d_n = \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1}.$$

При неограниченном росте n

$$d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Авторство еще одного признака сходимости числовых рядов принадлежит Коши.

Теорема 2 (признак Коши). *Если, начиная с некоторого номера n ряда A с положительными членами, выполняется неравенство*

$$d_n = \sqrt[n]{a_n} < 1, \tag{8.9}$$

то ряд сходится; при $d_n \geq 1$ *— расходится.*

Справедливость теоремы следует из сравнения ряда A с рядом, представляющим собой геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n.$$

Если $q < 1$ (ряд геометрической прогрессии сходится) и, начиная с некоторого члена, выполняется неравенство $a_n < q^n$, то по первому признаку сравнения и ряд A будет сходящимся.

Из последнего неравенства следует $\sqrt[n]{a_n} < q$, и при $q < 1$ следует справедливость признака сходимости Коши:

$$d_n = \sqrt[n]{a_n} < 1. \tag{8.10}$$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{a}\right)^n$, где $a > 0$.

Р е ш е н и е. Используем признак Коши

$$d_n = \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^n} = \frac{|x|}{a}.$$

Показатель $d_n < 1$ при всех $|x| < a$. Только при выполнении этого условия ряд будет сходиться.

8.4. Знакопеременные ряды

Наряду со знакопостоянными рядами на практике зачастую находят применение ряды, знаки перед членами которых могут изменяться случайным образом. Например, ряды, отражающие движение денежных средств в банках. Поступления взносов и выплаты могут как угодно чередоваться. Путем комбинации расположения членов такого ряда, в том числе объединения или разделения членов ряда с одинаковыми знаками, можно выделить *знакочередующиеся ряды* — ряды, знаки перед членами которых меняются в зависимости от четности их порядковых номеров ($a_n > 0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n. \tag{8.11}$$

О сходимости таких рядов можно судить по *признаку Лейбница.*

Теорема (признак Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю при неограниченном росте номера n, то:*

1) *ряд сходится;*

2) *остаток ряда не превосходит по абсолютной величине своего*(!) *первого члена* ($|R_n| \leq a_n$).

Если наряду с рядом (8.11) сходится ряд $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$, то ряд (8.11) называется *абсолютно сходящимся.* Если ряд (8.11) сходится, а ряд A расходится, то (8.11) называется *условно сходящимся рядом.*

Пример. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Сколько членов ряда следует удержать, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

Р е ш е н и е. Ряд знакочередующийся и для выяснения вопроса о его сходимости следует применить признак Лейбница.

Первое условие признака Лейбница выполняется, так как ряд монотонно убывает по абсолютной величине: $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$.

Второе условие также выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Отметим, что ряд не является абсолютно сходящимся. Сумма его членов, взятых по абсолютной величине, представляет собой гармонический ряд, который, как показано в § 8.2, расходится.

Для оценки точности вычисления воспользуемся утверждением пункта 2 теоремы ($|R_n| \leq a_n$). Приравняем остаток ряда заданной точности: $|R_n| = 0{,}01$. Тогда

$$\frac{1}{100} \leq \frac{1}{n}, \quad \to \quad n \geq 100.$$

Замечание. В начале раздела говорилось о том, что из знакопеременных рядов можно путем соответствующего расположения их элементов выделить знакочередующиеся ряды. Следует, однако, иметь в виду, что при перестановке слагаемых в таких рядах их сумма может измениться.

Приведем сформулированную Риманом теорему.

Теорема Римана. *Если знакочередующийся ряд сходится условно, то в результате перестановки его членов можно получить ряд, имеющий любую сумму, в частности, расходящийся ряд.*

В качестве примера из экономики можно привести ситуацию, которая может возникнуть в банке. Внезапная активность клиентов банка по получению своих взносов может обанкротить банк несмотря на то, что в длительной перспективе кредиты банка, выданные другим его клиентам, должны выправить ситуацию.

8.5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость

Ряд, членами которого являются некоторые функции переменной x: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, $\ldots$:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (8.12)$$

называется *функциональным рядом.*

Множество Ω всех значений x, при которых функциональный ряд (8.12) сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Если функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

конечна при всех $x \in L$, $L \subseteq \Omega$, то говорят, что ряд (8.12) *сходится на множестве L к функции $S(x)$.*

Функциональный ряд называется *равномерно сходящимся* к функции $S(x)$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для $n \geq N$ и всех $x \in L$ выполняется неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

где

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \ -$$

частичная сумма ряда.

Если на множестве L функциональный рад сходится к некоторой функции $S(x)$, то на этом множестве сходимость может быть и неравномерной. Однако на некотором подмножестве множества L сходимость может оказаться равномерной.

Существует обоснованный Вейерштрассом признак равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема (признак Вейерштрасса). *Если члены $f_n(x)$ функционального ряда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ на множестве L удовлетворяют неравенствам*

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где a_n — члены сходящегося знакопостоянного числового ряда $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функциональный ряд сходится равномерно на множестве L.

Говорят, что ряд A, упомянутый в теореме, является *мажорантным* для ряда $f(x)$, или что ряд $f(x)$ *мажорируется* с рядом A.

Пример. Ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}} = \frac{\cos x}{1^{\alpha}} + \frac{\cos 2x}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^{\alpha}} + \ldots$$

при $\alpha > 1$ сходится равномерно на множестве $\Re$ действительных чисел, так как для всех n справедливо неравенство

$$\left| \frac{\cos nx}{n^{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится.

При $\alpha \leq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится и не является мажорантным по отношению к ряду $f(x)$.

8.6. Функциональные свойства функциональных рядов

К функциональным свойствам функциональных рядов относятся непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость и т.п.

Сформулируем в виде теорем условия, при которых функциональный ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{8.13}$$

обладает некоторыми свойствами.

Начнем с непрерывности.

Теорема (о непрерывности). *Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определены на некотором промежутке $[a, b]$ изменения x и непрерывны в некоторой точке x_0 этого промежутка. Если ряд $f(x)$ сходится* ***равномерно*** *на промежутке $[a, b]$, то сумма ряда также будет непрерывна в точке $x = x_0$.*

Еще одно свойство функциональных рядов связано с пределами.

Теорема (о почленном переходе к пределу). *Пусть каждая из функций $f_n(x)$ $(n{=}1, 2, \ldots)$ определена на промежутке $[a, b]$ и имеет конечный предел при стремлении x к $x_0 \in [a, b]$:*

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n.$$

Если ряд (8.13) сходится ***равномерно*** *на $[a, b]$, то:*

1) *сходится ряд A, составленный из пределов:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A;$$

2) *сумма $f(x)$ функционального ряда имеет при $x \to x_0$ тот же предел, что и ряд A:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Теорема (о почленном интегрировании рядов). *Если каждая из функций $f_n(x)$ $(n{=}1{,}2{,}\ldots)$ непрерывна в промежутке $[a{,}b]$ и составленный из них ряд (8.13) сходится на этом промежутке* ***равномерно****, то интеграл от суммы $f(x)$ ряда представляется суммой* *интегралов от членов ряда*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{8.14}$$

Справедливость последних двух теорем доказывают с использованием свойств пределов и интегралов.

Теорема (о почленном диффереренцировании). *Пусть все функции* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *определены на промежутке* $[a, b]$ *и имеют на этом промежутке непрерывные производные* $f_n'(x)$. *Если на* $[a, b]$ *сходится ряд* (8.13) *и на этом промежутке* ***равномерно*** *сходится ряд, составленный из производных, то справедливо соотношение*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \tag{8.15}$$

Чтобы доказать справедливость теоремы, достаточно проинтегрировать последнее равенство и воспользоваться предыдущей теоремой.

8.7. Степенные ряды

Частным случаем функционального ряда является степенной ряд. *Степенным рядом* называется ряд, представляющий собой бесконечный многочлен:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{8.16}$$

Числа a_n называются *коэффициентами ряда*; x — переменная. Так что ряд (8.16) является функцией одной переменной.

Множество значений x, при которых ряд сходится, называется *областью сходимости степенного ряда.*

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 (Абеля).

1. *Если степенной ряд сходится при некотором* $x = x_0 \neq 0$, *то он сходится и при всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x| \leq |x_0|$.

2. *Если ряд расходится при некотором* $x = x_1$, *то он расходится и при всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x| \geq |x_1|$.

Существуют граничные точки $|x| = R$, которые отделяют область сходимости ряда от области, где ряд расходится. Величина $R > 0$ называется *радиусом сходимости*, а $(-R; R)$ — *интервалом сходимости* степенного ряда.

Для степенных рядов возможны три случая:

1) сходится в единственной точке $x = 0$ (в точке $x = 0$ любой степенной ряд сходится);

2) сходится при всех $x \in \Re$;

3) сходится при всех $x \in (-R; R)$ и расходится при $x \notin [-R; R]$.

Вопрос о сходимости ряда на границах интервала сходимости $|x| = R$ решается после дополнительных исследований.

Радиус сходимости можно найти, в частности, опираясь на принцип Даламбера.

Теорема 2. *Если существует отличный от нуля предел абсолютной величины отношения соседствующих элементов ряда* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *то радиус сходимости степенного ряда*

$$R = \frac{1}{d} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{8.17}$$

Действительно, ряд (8.16) сходится при условии

$$d = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{R} < 1,$$

которое выполняется, если $|x| < R$.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Р е ш е н и е. Найдем радиус сходимости по формуле (8.17):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Интервал сходимости ряда: $(-R; R) = (-1; 1)$.

Исследуем сходимость ряда на границах интервала. При $x = -1$ получаем монотонно убывающий по абсолютной величине знакочередующийся ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},$$

который по признаку Лейбница сходится.

При $x = 1$ получаем

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, который расходится.

Таким образом, область сходимости ряда $x \in [-1; 1)$.

8.8. Ряды Фурье

Рассмотренное в §4.3 разложение в ряд Тейлора функции $f(x)$ является одним из примеров функционального ряда.

Приведем пример еще одного часто используемого в приложениях ряда.

Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{8.18}$$

где a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — некоторые числа, называется *тригонометрическим рядом.*

Свойства тригонометрических рядов вытекают из свойств тригонометрических функций и функциональных рядов.

1. Сумма ряда (8.18) является периодической функцией с периодом 2π.

2. Если числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то тригонометрические ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ сходятся равномерно на всей числовой оси.

3. Если тригонометрический ряд (8.18) сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$, то его коэффициенты можно определить по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8.19}$$

По отношению к периодической функции $f(x)$ с периодом 2π тригонометрический ряд (8.18), коэффициенты которого определяются по формулам (8.19), называется *рядом Фурье* (Fourier Jean Baptiste Joseph 1768–1830, французский математик и физик).

Перечислим основные свойства рядов Фурье.

1. Если функция $f(x)$ четная, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx; \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для нечетной функции $f(x)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots); \quad a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. Если в точке $x{=}x_0$ функция $f(x)$ дифференцируема или по меньшей мере имеет конечные односторонние пределы (не обязательно равные):

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 0^-}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},$$

то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится и его сумма равна $f(x_0)$.

Если в точке $x{=}x_0$ функция недифференцируема или не существует хотя бы один из односторонних пределов, то сумма ряда Фурье может отличаться от $f(x_0)$.

3. Если функция $f(x)$ имеет период $T = 2l$, то ее ряд Фурье представляется суммой

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{8.20}$$

где:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8.21}$$

4. Если функция $f(x)$ задана на конечном интервале $(-l, l)$, то для ее разложения в ряд Фурье необходимо построить новую функцию $\varphi(x) = \varphi(x + 2l)$ с периодом $T = 2l$ такую, которая при $x \in (-l, l)$ равна заданной функции: $\varphi(x) = f(x)$.

Если функцию $\varphi(x)$ можно разложить в ряд Фурье, то он будет рядом Фурье для функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$.

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = f(x + 2l)$, которая на отрезке $[-l; l]$ определяется равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -l \le x < 0; \\ x & \text{при} \quad 0 \le x < l. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как функция $f(x)$ четная $\big(f(-x) = f(x)\big)$, то на основании свойства 1 рядов Фурье по формулам (8.21) получим:

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = \frac{2}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = l;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Интегрируем по частям, полагая

$$u = x,\ dv = \cos\frac{\pi n x}{l}dx; \quad du = dx,\ v = \frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l}:$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l - \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right] = 0 + \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l.$$

В результате получим

$$a_n = \frac{2l}{(n\pi)^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\dfrac{4l}{(\pi n)^2}, & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ 0, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Подставляя полученные значения коэффициентов в (8.18), запишем формулу разложения заданной функции в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l} + \ldots\right].$$

Ряды Фурье позволяют выделить периодические (сезонные) колебания, свойственные многим экономическим процессам.

Для анализа периодических колебаний функции времени $f(t)$ эту функцию раскладывают в ряд Фурье и по поведению ее членов судят о наличии в ней циклов. Циклы определяются числом n. При $n = 1$ получаются колебания функции определенного периода. При увеличении n частота колебаний увеличивается.

В реальных экономических задачах, как правило, известна не сама функция, а лишь набор ее значений $f(t_1)$, $f(t_2)$ и т.д. В этом случае коэффициенты ряда Фурье вычисляют приближенно с применением большого количества разработанных для этого случая методов.

8.9. Приложение рядов

Ряды широко используются в различных приложениях. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Приближенное вычисление различных постоянных (как правило, иррациональных) величин. Для этого следует:

1) предварительно разложить соответствующую функцию в функциональный ряд (степенной, тригонометрический);

2) вычислить n-ю частичную сумму ряда;

3) оценить точность вычисления.

Пример 1. Вычислить $e^{-0,5}$ с точностью $\Delta = 0{,}01$.
Р е ш е н и е. Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Тейлора (§4.3):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x). \tag{8.22}$$

Для $x = -1/2$

$$e^{-0,5} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} - \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \ldots$$

Записанный ряд знакочередующийся. Согласно теореме Лейбница остаточная сумма ряда не превышает ее первого члена. Если в вычислении ограничиться первыми тремя члеными ряда, то ошибка вычисления не превысит четвертого члена ряда, т.е.

$$\Delta_3 < \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{1}{48} \approx 0{,}0208 > \Delta.$$

При удержании четырех членов ряда ошибка не превысит пятого члена ряда:

$$\Delta_4 < \frac{1}{2^4 \cdot 4!} = \frac{1}{48} \approx 0{,}0026 < \Delta = 0{,}01.$$

Поэтому с заданной точностью

$$e^{-0{,}5} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = 0{,}604.$$

2. Приближенное вычисление определенного интеграла. Для этого подынтегральная функция предварительно раскладывается в ряд.

Если осуществлено разложение

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

для которого известен радиус сходимости R, то при $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n} x^n + \ldots$$

Пример 2. Несводимый к табличному интеграл вероятностей

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

может быть вычислен с любой точностью, если разложить экспоненциальную функцию в ряд Тейлора. Ряд сходится при $x \in (-\infty, \infty)$.

Используем упомянутое разложение для преобразования подынтегральной функции

$$e^{-t^2/2} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n}}{2^n n!} + \ldots$$

После почленного интегрирования разложения и подстановки пределов интегрирования получим

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 2^n n!} + \ldots\right).$$

3. Интегрирование дифференциальных уравнений.

Пусть требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$.

Решение можно искать в виде разложения неизвестной функции $y(x)$ в ряд Тейлора, сходящегося в окрестности точки $x = x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \tag{8.23}$$

Здесь: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, $y''(x_0) = \left.\dfrac{df(x,y)}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\ldots$, $y^{(n)}(x_0) = \left.\dfrac{d^n f(x,y)}{dx^n}\right|_{x=x_0}$.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x^2}{y}$ при условии $y(1) = 1$.

Р е ш е н и е будем искать в виде разложения искомой функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0 = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{y''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x - 1)^n + \ldots$$

Для определения коэффициентов ряда найдем несколько первых производных искомой функции:

$$y'(1) = \frac{1^2}{y(1)} = 1;$$

$$y'' = (y')' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}y', \qquad y''(1) = \frac{2\cdot 1}{1} - \frac{1^2}{1^2}\cdot 1 = 1.$$

Аналогично вычислим: $y'''(1) = -1$, $y^{(4)}(1) = -2$, $\ldots$

Используя найденные значения производных, составим частичную сумму ряда, включающую в себя пять первых членов, например, при $x = 2$:

$$y_4(2) = 1 + \frac{1}{1}(2-1) + \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{-1}{6}(2-1)^3 + \frac{-2}{24}(2-1)^4 = 2{,}250.$$

Сравним полученное приближенное значение функции с ее значением, найденным из аналитического решения:

$$y = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{4x^3 - 1}; \qquad y(2) = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{4 \cdot 2^3 - 1} \approx 2{,}273.$$

Относительная ошибка вычисления

$$\Delta = \frac{|2{,}273 - 2{,}250|}{2{,}273} < 0{,}01.$$

8.10. Резюме

Важное значение в исследовании и прогнозировании экономических процессов играют числовые и функциональные ряды. Числовой ряд представляет собой сумму изменяемых по некоторому закону чисел. Функциональный ряд — это бесконечная сумма изменяемых по определенному закону функций.

Основной характеристикой ряда является его сходимость — конечность значения бесконечной суммы членов ряда. Существует достаточно большое число критериев определения сходимости рядов. Среди признаков, по которым можно установить факт сходимости числового ряда, наибольшее распространение нашли признаки сравнения и признак Даламбера.

В признаках сравнения для установления сходимости привлекаются другие ряды с известной сходимостью. Признак Даламбера устанавливает сходимость путем сравнения значений двух соседних членов исследуемого ряда.

Особое место среди числовых рядов занимают знакочередующиеся ряды, сходимость которых можно исследовать, привлекая для этого признак Лейбница.

Наибольшее распространение среди функциональных рядов получили степенные ряды и тригонометрические ряды Фурье.

Сходимость степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

зависит от значения переменной x. Интервал изменения переменной $x \in (-R; R)$ определяет область сходимости ряда. Величина R называется радиусом сходимости ряда. Это максимальное по модулю значение переменной, при котором ряд сходится.

Определение области сходимости функциональных рядов представляет собой важную задачу математического анализа.

Согласно теореме Вейерштрасса функциональный ряд сходится, если сходится числовой ряд, членами которого являются максимальные по модулю значения членов функционального ряда.

Важное значение имеет разложение функций в степенные ряды и в ряды Фурье. Представленные в виде рядов функции порой проще интегрировать, использовать при решении дифференциальных уравнений и в других задачах, где использование самих функций не приводит к положительному результату.

В литературе излагаются методы разложения в ряды функций нескольких переменных, матричных функций и других математических объектов. Для углубленного изучения материала главы следует обратиться к [20, 21, 24].

8.11. Вопросы

1. Что такое числовой ряд?

2. Перечислите основные свойства знакопостоянных рядов.

3. Какие ряды исльзуются в качестве «стандартных» при определении сходимости рядов методом сравнения?

4. Что представляет собой признак Даламбера сходимости рядов? Сравнение с каким рядом используется в признаке Даламбера?

5. В чем суть признака Лейбница? Для сходимости каких рядов он используется?

6. Что такое функциональный ряд? Что понимается под областью сходимости функционального ряда?

7. Что такое равномерная сходимость ряда? Сформулируйте теорему Вейерштрасса о равномерной сходимости рядов.
8. Какие ряды называются мажорантными?
9. Перечислите основные свойства функциональных рядов.
10. Какие ряды называются степенны́ми? Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенны́х рядов.
11. Что такое радиус сходимости степенно́го ряда? Как он определяется?
12. Что собой представляет ряд Тейлора?
13. Как можно использовать разложение функций в ряд для приближенного вычисления иррациональных величин? при интегрировании функций? при решении дифференциальных уравнений?
14. Что собой представляет ряд Фурье?
15. Как определяются коэффициенты разложения функций в ряд Фурье для произвольных функций? для четных и нечетных функций? для периодических функций?
16. Опишите особенности применения рядов в задачах: определения приближенных значения функций, вычисления определенных интегралов, решения дифференциальных уравнений.

Вопросы для тестирования

1. Перечислите номера правильных утверждений, касающихся необходимого и достаточного условия сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(d_n = a_{n+1}/a_n)$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = C$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 1$; 4. $a_{n+1} < a_n$;

5. Среди ответов пунктов 1–4 нет правильных.

2. Перечислите номера правильных утверждений. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если ($c = \text{const}$):

1. $a_n = \dfrac{c}{n}$; 2. $a_n = \dfrac{c}{\sqrt{n}}$; 3. $a_n = q^n \quad (q \geq 1)$; 4. $a_n \geq a_{n+1}$;

5. Среди выражений 1–4 нет требуемых.

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования соответствующих им вопросов (левая колонка), касающихся признаков сходимости числовых рядов $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Первый признак сравнения	1. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < (>)1$;
2. Второй признак сравнения	2. $a_n \leq (\geq) b_n$;
3. Признак Коши	3. $\sqrt[n]{a_n} < (>)1$;
4. Признак Даламбера	4. $\dfrac{a_n}{b_n} = c \ (\neq 0, \ \neq \infty)$.

4. Перечислите номера правильных утверждений, содержащихся в теореме Лейбница о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; 2. $|S - S_n| < \varepsilon$; 3. $R_n \leq a_n$; 4. $a_{n+1} < a_n$;

5. Среди ответов пунктов 1–4 нет правильных.

5. Перечислите номера правильных утверждений, касающихся теоремы Вейерштрасса об условиях равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — сходящийся числовой ряд, } a_n > 0\right)$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; 2. $|S - S_n| < \varepsilon$ при $n > N$;

3. $|f_n| < a_n$; 4. $|f_{n+1}| < |f_n|$;

5. Среди ответов пунктов 1–4 нет правильных.

6. Перечислите номера правильных утверждений, касающихся определения и свойств радиуса сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

(R_n — n-я частичная сумма ряда).

1. Если при $|x| < |x_0|$ ряд сходится, а при $|x| > |x_0|$ расходится, то $R = |x_0|$;
2. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$; 3. $R = \lim\limits_{n\to\infty} |R_n|$; 4. $x \in [-R; R]$;
5. Среди ответов пунктов 1–4 нет правильных.

7. Перечислите номера правильных выражений для n-го члена разложения дифференцируемой функции $y = f(x)$ в ряд Тейлора ($x_0 \neq 0$).

1. $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$; 2. $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - x_0)^n$;
3. $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$, $c = \theta x$; 4. $\dfrac{d^{(n)}(x_0)}{n!}$;
5. Среди ответов пунктов 1–4 нет правильных.

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕМА 8.1

(§ 8.1–8.4 теории)

Числовые ряды

Вопросы

1. Что такое числовой ряд? знакопостоянный ряд? Перечислите основные свойства знакопостоянных рядов.
2. Какие ряды используются в качестве «стандартных» при определении сходимости рядов методом сравнения?
3. Что представляет собой признак Даламбера сходимости рядов? Сравнение с каким рядом используется в признаке Даламбера?
4. В чем суть признака Коши? признака Лейбница? Для каких рядов используются эти признаки сходимости?

Задачи

В задачах 1–4 исследовать ряды на сходимость, используя необходимый и достаточный признаки.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots$

Р е ш е н и е. Найдем предел n-го члена ряда при неограниченном росте n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

Так как рассмотренный предел не равен нулю, то не выполняется необходимое условие сходимости. Ряд расходится.

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots$

Р е ш е н и е. Необходимое условие сходимости выполняется, так как при неограниченном росте числа членов его n-й член стремится к нулю.

Для проверки достаточности сгруппируем одинаковые слагаемые:

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \ldots$$

Каждое из слагаемых бесконечного ряда (суммы слагаемых в скобках) равно единице. Бесконечная сумма единиц равна бесконечности. Ряд расходится.

3. $S = \frac{1}{1{\cdot}2{\cdot}3} + \frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$

Р е ш е н и е. Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Подставим полученное представление в умноженный на два исходный ряд:

$$2S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{1+1} + \frac{1}{1+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2+1} + \frac{1}{2+2}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Раскрывая круглые скобки и приводя подобные, получим

$$2S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

Найдем предел найденной частичной суммы:

$$\lim_{n\to\infty} 2S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Конечное значение суммы ($S = 1/4$) говорит о сходимости ряда.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Р е ш е н и е. Ряд расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ не существует.

В задачах 5–6 исследовать ряды на сходимость, используя признаки сравнения.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n+1} = 1 + \frac{3}{2^2+1} + \frac{3}{2^3+1} + \ldots + \frac{3}{2^n+1} + \ldots$

Р е ш е н и е. В заданном ряде можно вынести за знак суммы множитель 3, общий для всех членов ряда. По свойству рядов этот ряд будет сходиться, если сходится ряд $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

Необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+1} = 0.$$

Для проверки достаточного условия сходимости сравним заданный ряд со сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},$$

представляющим собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы: $q = 1/2 < 1$.

Между n-ми членами рядов имеет место неравенство

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n},$$

позволяющее на основании первого признака сравнения (§ 8.2) сделать заключение о том, что заданный ряд сходится.

К такому же результату придем, используя другие признаки сходимости. Так, по второму признаку сравнения двух рядов имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}:\frac{1}{2^n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

Отличный от нуля и бесконечности предел отношения n-ных членов двух рядов говорит о том, что характер их сходимости идентичен. Оба ряда сходятся.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Р е ш е н и е. Необходимое условие сходимости ряда выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0.$$

Для проверки достаточного условия сравним ряд с гармоническим рядом. Между n-ными членами рядов имеет место неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд расходится, то расходится и заданный ряд.

В задачах 7–9 исследовать ряды на сходимость, используя признак Даламбера.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\ldots$.

Р е ш е н и е. Согласно признаку Даламбера найдем предел отношения двух последующих членов ряда:

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0.$$

Так как $d<1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)$.

Р е ш е н и е. Согласно признаку Даламбера найдем предел отношения двух последующих членов ряда:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}{\left(-\sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right)} = \left(\frac{-\infty + \infty}{-\infty + \infty}\right).$$

Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на сопряженное числителю выражение $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)$ и сопряженное знаменателю выражение $\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right)$:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{(-n+1+n)\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right)}{(-n+1+n)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Равенство единице предела отношения последующего члена прогрессии к предыдущему говорит о невозможности сделать заключение о сходимости ряда по признаку Даламбера.

Рассмотрим n-ную частичную сумму заданного ряда:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right) = (0+1) + (-1+\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \ldots$$
$$+(-\sqrt{n-2} + \sqrt{n-1}) + (-\sqrt{n-1} + \sqrt{n}) = \sqrt{n}.$$

Каждая пара соседствующих слагаемых уничтожилась.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty,$$

то ряд расходится.

9. При каких значениях α сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, называемый *обобщенным гармоническим рядом*?

Р е ш е н и е. Ряд расходится при $\alpha \le 1$. Это следует из сравнения n-ных членов заданного и гармонического рядов:

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \ge \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad \alpha \le 1.$$

Для определения характера сходимости ряда при $\alpha > 1$ используем признак Даламбера, согласно которому должно выполняться условие:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} : \frac{1}{n^{\alpha}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} < 1 \text{ при } \alpha > 1.$$

Таким образом, обобщенный гармонический ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

В задачах 10–12 исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \ldots$

Р е ш е н и е. Члены ряда монотонно возрастают по абсолютной величине, стремясь на бесконечности к единице. Это противоречит одному из условий теоремы Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов. Ряд расходится.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}.$

Р е ш е н и е. Члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине. По признаку Лейбница ряд сходится. Это условно сходящийся ряд при $\alpha \leq 1$ и абсолютно сходящийся ряд при $\alpha > 1$ (пример 9).

12. $\displaystyle\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2-1} + \frac{3}{3^2-1} - \frac{4}{4^2-1} + \ldots$

Р е ш е н и е. Запишем этот ряд в виде

$$S = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2-1}.$$

Разделим числитель и знаменатель n-ного члена ряда на n. После этого сравним по абсолютной величине два соседних члена ряда. Приходим к неравенству

$$\frac{1}{n-1/n} > \frac{1}{n+1-1/(n-1)},$$

справедливому для всех $n \geq 3$. Неравенство говорит о том, что ряд представляет собой монотонно убывающую последовательность чисел. Первое условие признака Лейбница выполнено.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1/n} = 0,$$

то второе условие признака Лейбница также выполнено.

Следовательно, ряд сходится и его сумма не превышает первого члена суммы: $S < 2/3$.

Исследуем на сходимость ряд, представляющий собой сумму абсолютных величин исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}. \tag{8.24}$$

Сравним n-ные члены этого и гармонического рядов. Так как

$$\frac{1}{n-1/n} > \frac{1}{n}$$

и гармонический ряд расходится, то по первому признаку сравнения заключаем, что ряд (8.24) расходится.

Отсюда следует, что исходный ряд сходится условно.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–3 исследовать на сходимость ряды, используя признаки сравнения:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. **2.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

В задачах 4–10 исследовать на сходимость ряды, используя признаки Даламбера или Лейбница:

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$. **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ $(c = \mathrm{const})$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2n+5}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{c}{n}$ $(c = \mathrm{const})$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

ТЕМА 8.2

(§ 8.5–8.7 теории)

Функциональные ряды

Вопросы

1. Что такое функциональный ряд?
2. Что понимать под областью сходимости функционального ряда?
3. Что такое равномерная сходимость ряда? Сформулируйте теорему Вейерштрасса о равномерной сходимости рядов.

4. Какие ряды называются мажорантными?
5. Перечислите основные свойства функциональных рядов.
6. Какие ряды называются степенными? Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов.
7. Что такое радиус сходимости степенного ряда? Как он определяется?

Задачи

1. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{4-x}{7x+2}\right)^n$ исследовать на сходимость в точках $x=0$ и $x=1$.

Р е ш е н и е. При $x=0$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{2n-1}$.

Используем признак Даламбера

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 2 > 1.$$

Ряд расходится.

При $x=1$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n(2n-1)}$.

Используем признак Даламбера

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3} < 1.$$

Ряд сходится.

В задачах 2 и 3 исследовать ряды на сходимость.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x}{n}$.

Р е ш е н и е. Пусть $x = x_0 = const$. Сравним числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x_0}{n}$ с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

По второму признаку сравнения

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_0/n)}{1/n} = x_0 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_0/n)}{x_0/n} = x_0.$$

При $|x_0| < 1$ ряд сходится, при $|x_0| \geq 1$ — расходится (при $x_0 = 1$ исходный ряд сравним с гармоническим рядом, который, как известно, расходится).

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$.

Р е ш е н и е. Исследуем поведение ряда для трех характерных значений переменной x, используя признак Лейбница.

При $|x| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 + x^{2n}} = 1 > 0$.

Ряд расходится.

При $|x| = 1$ получаем бесконечную сумму одинаковых величин

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty.$$

Ряд расходится.

При $|x| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^{2n}} = 0$ и $\dfrac{1}{x^{2n}} > \dfrac{1}{x^{2(n+1)}}$. Члены ряда монотонно убывают. Кроме того, при фиксированных x, превышающих по абсолютной величине единицу, последний ряд представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/x^2 < 1$.

Все признаки говорят о сходимости ряда.

Итак, область сходимости ряда $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

4. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{x^{2n} + n}$ сходится равномерно при всех $x \in \Re$.

Р е ш е н и е. При любых фиксированных значениях x ряд монотонно убывающий и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^{2n} + n} = 0$.

По признаку Лейбница ряд сходится. Остаток ряда

$$|R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2} + n + 1} < \frac{1}{n + 1}.$$

Потребуем, чтобы остаток ряда был меньше некоторой достаточно малой положительной величины ε:

$$\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon, \qquad \Longrightarrow \qquad n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

При n, удовлетворяющих последнему неравенству, приходим к неравенству $|R_n(x)| < \varepsilon$, которое указывает на то, что исходный ряд сходится равномерно при всех $x \in \Re$.

5. Можно ли к функциональному ряду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^n nx$$

применить теорему о почленном дифференцировании рядов?

Р е ш е н и е. Теорему о дифференцировании можно применить если дифференцируемы члены ряда и если ряд сходится равномерно. Первое условие выполняется.

Так как $\left|\frac{1}{n^2} \sin^n nx\right| \leq \frac{1}{n^2}$ при любых x и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то согласно признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно.

Теорему о почленном дифференцировании ряда можно использовать:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n \cdot n \sin^{n-1} nx \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{n-1} nx \cos nx.$$

Ряд, полученный в результате дифференцирования исходного сходящегося ряда, оказался расходящимся.

6. Найти сумму ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ при $|x| < 1$.

Р е ш е н и е. Замечаем, что $nx^{n-1} = (x^n)'$.

Если функциональный ряд $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ можно дифференцировать, то сумма исходного ряда будет равна производной от $f(x)$.

При $|x| < 1$ для любого фиксированного x последний ряд представляет собой сумму сходящейся геометрической прогрессии с $q = x$.

Сумма этого ряда

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Сумма исходного ряда

$$S(x) = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

В задачах 7–11 исследовать сходимость степенных рядов.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

Р е ш е н и е. Найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{1} = 1.$$

При $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots = \infty;$$

при $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots = \begin{cases} -1 & \text{при } n \quad \text{нечетном,} \\ 1 & \text{при } n \quad \text{четном.} \end{cases}$$

В обоих случаях ряды расходятся. Поэтому $x \in (-1; 1)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$.

Р е ш е н и е. Числовые коэффициенты ряда: $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. Найдем радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Ряд сходится, если $-1 < x - 2 < 1$ или $1 < x < 3$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно, так как сумма абсолютных величин ряда представляет собой обобщенный гармонический ряд с показателем степени, большим единицы.

При $x = 3$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится. Этот ряд, как и предыдущий, представляет собой обобщенный гармонический ряд с показателем степени, большим единицы.

Таким образом, область сходимости ряда $1 \le x \le 3$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x-c)^n n!$

Р е ш е н и е. Числовые коэффициенты двух соседних членов ряда: $a_n = n!$ $a_{n+1} = (n+1)!$.

Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится только при $x - c = 0$, т.е. в точке $x = c$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Р е ш е н и е. Числовые коэффициенты двух соседних членов ряда: $a_n = 1/n!$ $a_{n+1} = 1/(n+1)!$.

Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Ряд сходится при любых $x \in \Re$.

Из свойства сходящихся рядов следует полезная формула, справедливая при любых x:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n!} = 0.$$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{5n}}{2n-1}$.

Р е ш е н и е. Для упрощения записи введем новую переменную $u = x^5$.

Представленный в виде функции от новой переменной ряд имеет вид $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n u^n}{2n-1}$.

Числовые коэффициенты соседних членов ряда: $a_n{=}2^n/(2n{-}1)$ и $a_{n+1} = 2^{n+1}/(2n+1)$.

Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(2n+1)}{2^{n+1}(2n-1)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Ряд сходится, если $|u| < 1/2$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $u = 1/2$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Этот ряд расходится, так как его члены больше соответствующих членов гармонического ряда $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

При $u = -1/2$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, который по признаку Лейбница сходится (n-й член стремится к нулю и последовательность чисел монотонно убывающая). Ряд, составленный из абсолютных членов ряда, расходится. Такой вывод можно сделать, сравнивая ряд с расходящимся гармоническим рядом. Следовательно, знакочередующийся ряд условно сходится.

Область сходимости ряда с переменной: u $-1/2 \le u < 1/2$. Для переменной x: $-1/\sqrt[5]{2} \le x < 1/\sqrt[5]{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–3 найти области сходимости рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)x}$; **2**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. **3**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$.

4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, используя свойство почленного дифференцирования.

В задачах 5–10 исследовать сходимость рядов:

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}$; **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$; **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$; **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$.

ТЕМА 8.3

(§ 8.8–8.9 теории)

Разложение функций в ряды

Вопросы

1. Что собой представляет ряд Тейлора?
2. Как можно использовать разложение функций в ряд для приближенного вычисления иррациональных величин? при интегрировании функций? при решении дифференциальных уравнений?
3. Что собой представляет ряд Фурье? Как определяются коэффициенты разложения функций в ряд Фурье?

Задачи

В задачах 1–3 разложить функции в ряд Тейлора.

1. $y = \ln(1+x)$ в окрестности точки $x = 0$.

Решение. Найдем все производные y:

$$y' = \frac{1}{1+x},\ y'' = -\frac{1}{(1+x)^2},\ y''' = \frac{2}{(1+x)^3},\ y^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4},\ \ldots,$$

$$y^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ldots$$

В точке $x = 0$:

$$y'(0) = 1,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 2!, \ldots, y^{(n)} = (-1)^{(n-1)}(n-1)!, \ldots$$

Подставим найденные значения в формулу ряда Тейлора (§4.3):

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \ldots$$

$$+(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{n!}x^n+\ldots,$$

или

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (8.25)$$

Определим радиус сходимости полученного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Таким образом, при $-1<x<1$ ряд сходится.

Определим сходимость ряда на концах интервала.

При $x=-1$ получаем знакопостоянный ряд с отрицательными слагаемыми:

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right).$$

В скобках стоит гармонический ряд, который расходится. Следовательно, значение $x=-1$ не входит в область сходимости ряда.

При $x=1$ получим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

который, как показано в §8.4, сходится.

Полученные результаты приводят к заключению, что область сходимости ряда $-1<x\le 1$.

Оценим ошибку вычисления функции $\ln(x+1)$ в случае ограничения ряда (8.25) n членами. Для этого воспользуемся формулой [2]:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \theta\in[0,1].$$

Максимальная ошибка будет иметь место при $\theta\approx 1$.

Примем $\theta=1$. С учетом того, что

$$f^{(n+1)}=\ln^{(n+1)}(x+1)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

найдем:

$$R_n(x)=\frac{\ln^{(n+1)}(x+1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};$$

$$|R_n|=\frac{n!}{(x+1)^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}.$$

Например, при вычислении $\ln 2$ $(x=1)$ $|R_n| = \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$.

Ошибка при ограничения пятью членами ряда

$$|R_5| = \frac{1}{2^{5+1}\cdot(5+1)} = \frac{1}{384} \approx 0{,}0026.$$

Сумма первых пяти членов ряда примерно равна 0,7. Таким образом, относительная ошибка вычислений не превышает величины

$$\delta = \frac{0{,}0026}{0{,}7} \approx 0{,}00372 = 0{,}372\%.$$

2. $y = (1+x)^m$ в окрестности точки $x=0$.
Решение. Найдем все производные y:

$$y' = m(1+x)^{m-1};\ y'' = m(m-1)(1+x)^{m-2};\ \ldots$$

$$y^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

При $x=0$ $y^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

Подставим полученные значения производных в ряд Тейлора:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots \tag{8.26}$$

Найдем область сходимости полученного степенного ряда. Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)\cdot(n-1)!n}{(n-1)!\cdot m(m-1)\cdots(m-n+2)(m-n+1)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(m-n+1)}\right| = 1.$$

Таким образом, сходимость ряда (8.26) обеспечена по меньшей мере для интервала $x\in(-1;1)$. Что касается сходимости ряда на границах интервала, т.е. при $x=-1$ и $x=+1$, то она может быть установлена с использованием подходящего признака сходимости. При этом могут возникнуть различные ситуации в зависимости от величины m. Для различных m ряд, начиная с некоторого номера n, может быть знакопостоянным или знакочередующимся.

Анализ приводит к следующим областям сходимости:

если $m \geq 0$, то $x \in [-1; 1]$,

если $-1 < m < 0$, то $x \in (-1; 1]$,

если $m \leq -1$, то $x \in (-1; 1)$.

3. Разложить функцию $y = 1/x$ в ряд по степеням $x - 2$.
Р е ш е н и е. Найдем производные до n-го порядка от заданной функции:

$$y' = -\frac{1}{x^2},\ y'' = \frac{2!}{x^3},\ \ldots,\ y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

В точке $x = 2$:

$$y'(2) = -\frac{1}{2^2},\ y''(2) = \frac{2!}{2^3},\ \ldots,\ y^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Подставим полученные выражения в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1!}{2^2 1!}(x-2) + \frac{2!}{2^3 2!}(x-2)^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2^n (n-1)!}(x-2)^{n-1} + \ldots$$

Или

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}(x-2)^{n-1} + \ldots$$

Определим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2.$$

Интервал сходимости

$$x - 2 \in (-2; 2), \quad \text{или} \quad x \in (0; 4).$$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.
При $x = 0$ приходим к числовому ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots,$$

сумма которого равна бесконечности. Ряд расходится.
При $x = 4$ получаем числовой знакочередующийся ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2} + \ldots = \begin{cases} -1/2 & \text{при } n \text{ четном;} \\ 1/2 & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Сумма ряда не является конечной. Ряд расходится.

Таким образом, ряд сходится при $0 < x < 4$.

4. Найти приближенно $\sqrt[3]{1{,}9}$, воспользовавшись разложением функции $\sqrt[3]{1+x}$ в ряд Тейлора.

Р е ш е н и е. Так как аргумент функции $x = 0{,}9 < 1$, то ряд в разложении (8.26) будет сходиться при любых значениях m. Поэтому можно воспользоваться разложением

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}x^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \ldots$$

При ограничении двумя членами ряда для $x = 0{,}9$ получим $\sqrt[3]{1{,}9} \approx 1{,}3$. Так как в результате разложения получается знакочередующийся, монотонно убывающий ряд, то ошибка вычисления не превышает абсолютной величины первого члена остаточной суммы, т.е. $\Delta < (0{,}9)^2/9 = 0{,}09$. Реально отличие величины 1,3 от точного значения корня меньше 5%.

Для многих практических задач при вычислении степеней можно использовать приближенную формулу

$$\sqrt[m]{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{m}x.$$

5. Вычислить интеграл $J = \int_{0{,}5}^{1} \ln(1+x)\,dx$, разложив предварительно подынтегральную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0{,}5$ и ограничиваясь четырьмя членами разложения. Оценить ошибку вычисления.

Р е ш е н и е. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора натурального логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

справедливым для $x \in (-1; 1]$. Пределы интегрирования в заданном интеграле входят в область сходимости ряда. Поэтому записанное разложение может быть использовано при вычислении интеграла (удерживаем в разложении 5 членов ряда, чтобы дать оценку точности вычислений):

$$J = \int_{0{,}5}^{1}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} + \ldots \right]_{0,5}^{1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{20}\left(1 - \frac{1}{32}\right) + \frac{1}{30}\left(1 - \frac{1}{64}\right) - \ldots = 0{,}134 + 0{,}033 - \ldots$$

Первое слагаемое записанной суммы — это значение интеграла, найденное по сумме первых четырех членов ряда; второе слагаемое — значение интеграла от пятого члена разложения. Так как ряд знакочередующийся, то, ссылаясь на теорему Лейбница, заключаем, что ошибка в вычислении интеграла $J = 0{,}134$ не превышает величины 0,033, т.е. менее 10%.

6. Найти решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y}{\sqrt{(3+x)^3}}$ при условии $y(1) = e^{-1}$.

Р е ш е н и е найдем, используя разложение искомой функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \ldots$$

Для определения коэффициентов ряда найдем для начала вторую производную функции y как производную от y' (задана исходным уравнением):

$$y'' = \left(\frac{y}{\sqrt{(3+x)^3}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{(3+x)^5}} \left((3+x)y' - \frac{3}{2}y \right).$$

В точке $x = 1$: $y''(1) = \dfrac{1}{32}\left(4y'(1) - \dfrac{3}{2} \cdot y(1)\right)$.

Имея в виду начальное условие $y(1) = e^{-1}$, из исходного дифференциального уравнения найдем значения двух первых производных функции y в точке $x = 1$:

$$y'(1) = \frac{y(1)}{\sqrt{(3+1)^3}} = \frac{1}{8e}; \quad y''(1) = \frac{1}{32}\left(\frac{4}{8e} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{64e}.$$

Используя значения производных, составим частичную сумму разложения функции y в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$:

$$y(x) = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{128}(x-1)^2\right) + \ldots$$

Определим значения $y(x)$, например, в точке $x = 2$ с точностью до найденных коэффициентов ряда Тейлора:

$$y(2) = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{8}(2-1) + \frac{1}{128}(2-1)^2\right) + \ldots \approx 0{,}4048.$$

Точное решение исходного дифференциального уравнения

$$y = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{3+x}}\right).$$

При $x = 2$ точное решение $y(2) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}4140.$

Сравним полученное приближенное значение функции с ее значением, найденным из аналитического решения. Относительная ошибка определения $y(2)$:

$$\Delta = \frac{|0{,}4140 - 0{,}4026|}{0{,}4140} \approx 0{,}0019,$$

Ошибка не превышает 0,19%.

Если в разложении ограничиться только первым слагаемым (самой функцией), то решение решение $1/e \approx 0{,}368$ на 10% отличается от точного.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодим 2π) функцию $f(x + 2\pi n) = f(x)$, заданную на интервале $(-\pi; \pi)$ формулой $f(x) = \pi + x$.

Р е ш е н и е. Графиком функции является пилообразная кусочно-линейная функция с периодом 2π, проходящая на интервале $(-\pi, \pi)$ через точки $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 2\pi)$.

Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x + \frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

Так как заданная периодическая функция при вычитании периода 2π ведет себя как нечетная функция:

$$f(-x)=\pi-x=\pi-x-2\pi=-(\pi+x)=-f(x),$$

то коэффициент $a_n=0$ при $n=1,2,\ldots$ К такому результату можно прийти путем вычисления a_n по формулам Фурье.

Найдем коэффициент b_n.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}\sin nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx.$$

Вычислим каждый из интегралов:

$$J_1=\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{n}(\cos n\pi-1)=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ четном;}\\ 2/n & \text{при } n \text{ нечетном.}\end{cases}$$

$$J_2=\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\{u=x;\ dv=\sin nx\,dx;\longrightarrow du=dx,$$

$$v=-\frac{1}{n}\cos nx\}=-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{n}(\cos n\pi-1)=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при} \quad n \quad \text{четном;}\\ 2\pi/n & \text{при} \quad n \quad \text{нечетном.}\end{cases}$$

Подставим полученные значения интегралов в формулу для b_n:

$$b_n=\begin{cases}0 & \text{при} \quad n \quad \text{четном;}\\ 8/n & \text{при} \quad n \quad \text{нечетном.}\end{cases}$$

С учетом найденных коэффициентов запишем искомое разложение:

$$f(x)=\pi+8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx=$$

$$=\pi+8\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–4 разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$. Оценить ошибку вычисления функции в точке $x = 1/2$ по сумме первых четырех членов ряда.

1. $\dfrac{1}{1+x}$. **2.** $(1+x)^{-1/2}$. **3.** $\sin^2 x$.

4. $\operatorname{arctg} x$ (воспользоваться формулой $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ и разложением задачи 1, где x заменить на x^2).

5. Периодическую функцию $f(x) = f(x+2n)$, заданную на отрезке $[-1; 1]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad -1 < x \le 0, \\ -1 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье.

Найти значения первых четырех членов полученного ряда при $x = \pi/4$. Оценить ошибку.

Задание на расчетную работу 4

Решение дифференциальных уравнений

Задана функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{k+x}}$, где $k = N/n$; n — порядковый номер студента в учебной группе (или две последние цифры номера студенческого билета), $N = a$ — последняя цифра учебной группы, в которой числится студент. Количество подынтервалов на заданных ниже интервалах при численном решении задач равно 10.

1. При условии $y(a) = 1$ получить решение дифференциального уравнения $y' = y^{-1} f(x)$ на интервале $[a; a+10]$:

   1.1 аналитическим методом разделения переменных;

   1.2 методом вариации произвольных постоянных (Лагранжа);

   1.3 заменяя функцию $f(x)$ многочленом второй степени, проходящим через три точки: $(a, f(a))$, $(a+5, f(a+5))$ и $(a+10, f(a+10))$;

1.4 методом Эйлера;

1.5 методом Рунге-Кутта;

1.6 с использованием разложения функции y в ряд Тейлора в окрестности точки $x = a$.

2. Представить полученные результаты в виде таблиц и графиков.

3. Определить относительную погрешность решений, найденных численными методами, по сравнению с аналитическим решением в точке $x = a + 10$.

Библиографический список

1. *Бронштейн И.Н.*, *Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1980.

2. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2003.

3. *Горлач Б.А.* Линейная алгебра. — Самара, 2008.

4. *Горлач Б.А.* Математика. — М.: ЮНИТИ, 2006.

5. *Данко П.Е.*, *Попов А.Г.*, *Кожевникова Т.Я.* Высшая математика упражнениях и задачах. — М.: Высшая школа, 1997.

6. *Жевняк Р.М.*, *Карпук А.А.* Высшая математика. — Минск: Вышейшая школа, 1988.

7. *Зайцев М.Г.*, *Зайцева Н.В.* Методические материалы по курсу «Высшая математика» для факультетов менеджмента и экономики. — М.: Братья Кирич, 1997.

8. *Карасев А.И.*, *Аксютина З.М.*, *Савельева Т.И.* Курс высшей математики для экономических вузов. — М.: Высшая школа, 1982.

9. *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов. — М.: ИНФРА-М, 1997.

10. *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей. — М.: ИНФРА-М, 1998.

11. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ, том 1 и 2. — М.: Высшая школа, 1970.

12. Сборник задач по высшей математике для вузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1981.

13. *Солодовников А.С.*, *Бабайцев В.А.*, *Браилов А.В.*, *Шандра И.Г.* Математика в экономике. — М.: Финансы и экономика, 2001.

14. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. — М.: Высшая школа, 1997.

15. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. Т. 1.

ОТВЕТЫ

Ответы к вопросам для тестирования

Глава 1. Введение в анализ
1. $\overline{3,2,1,1}$; **2.** 2,4; **3.** $\overline{3,2,1,4}$; **4.** 2,3,4; **5.** 1,2;
6. 1,3,4; **7.** $\overline{4,5,1,3}$; **8.** 3; **9.** $\overline{3,2,1,5}$; **10.** $\overline{3,2,5,4}$.

Глава 2. Пределы и последовательности
1. $\overline{2,1,4,3}$; **2.** $\overline{2,1,4,3}$; **3.** 2,3,4; **4.** 1,2;
5. 1,3,4; **6.** 2,3,4; **7.** 5; **8.** 2,3,4; **9.** $\overline{2,1,3,4}$.

Глава 3. Дифференцирование
1. 1, 3; **2.** 5; **3.** 5;
4. $\overline{3,1,4,2}$; **5.** $\overline{2,5,3,3}$.

Глава 4. Исследование функций
1. $\overline{4,3,1,2}$; **2.** 3, 4; **3.** $\overline{4,3,1,2}$; **4.** $\overline{2,1,4,3}$;
5. $\overline{2,3,4,5}$; **6.** $\overline{3,1,5,2}$; **7.** $\overline{5,3,2,4}$;
8. 1, 3; **9.** $\overline{1,3,4,5}$; **10.** 1,2, 3, 4; **11.** 4.

Глава 5. ФНП
1. $1,3,4,5$; **2**. 1, 4; **3**. 2, 3; **4**. $\overline{2,5,4,3}$ **5**. 1, 3, 5;
6. 1, 2, 3; **7**. 1, 3; **8**. $\overline{4,2,1,3}$; **9**. 3.

Глава 6 Интегрирование
1. $\overline{4,3,2,1}$; **2**. 1, 2, 3, 8, 9; **3**. $\overline{0,2,4,3,8,7,6,0,9}$;
4. $\overline{1,2,1,4}$; **5**. $\overline{2,4,5,3}$; **6**. 2,3; **7**. 1,2,3; **8**. 1,2,4;
9. 2,5; **10**. 2,3,5; **11**. 2,3,4; **12**. $\overline{4,3,2,1}$; **13**. 2,3,4.

Глава 7 Дифференциальные уравнения
1. 2,4; **2.** 4; **3.** $\overline{2,1,3,5}$; **4.** $\overline{3,4,2,1}$; **5.** 1,3;
6. $\overline{2,3,1,5}$; **7.** $\overline{2,5,4,1}$; **8.** $\overline{1,5,2,3}$; **9.** 2.

Глава 8 Ряды
1. 2. **2**. 1,2,3. **3**. $\overline{2,4,3,1}$.
4. 1,3,4. **5**. 2,3. **6**. 1,2. **7**. 5.

Ответы к упражнениям

Тема 1.1. Множества

1. $\{2;6\}$ $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

2. $S_k \cap S_т = \pi R^2/6$, $S_k \cup S_т = (\sqrt{3} + 5\pi/6)R^2$.
3. $A \cap O = (-3; 0]$; $A \cap B = (-1; 0)$; $A \cup B = (-3; 4]$; $C \cap O = \emptyset$; $C \cup P = C = [1; 4]$; $C \cap P = \emptyset$; $A \cup B \cup C = (-3; 4]$; $A \cap B \cap C = \emptyset$; $A \cup B \cap C = [1; 4)$.
4. $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0; 1\}$, $\{0; 2\}$, $\{1; 2\}$, $\{0; 1; 2\}$.
5. $\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$. **6.** $(2{,}5;\ 3) \cup (3; +\infty)$.
7. $(-\infty; 1)$, **8.** $(-3;\ -2] \cup [1;\ 2)$. **9.** $[-2; 2]$. **10.** $\left[0;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

Тема 1.2. Функции. Интерполирование

1. $x \in \Re$, $y \in (-\infty; 0]$, четн. **2** $x \in \Re$, $y \in (-\infty; 1]$.
3. $x \in \Re$, $y \in (-\infty; 1{,}125]$. **4.** $x, y \neq 0$, нечетн.
5 $x \neq 1$, $y \neq -2$. **6.** $x \neq 1$, $y \neq 4$. **7.** $x > 0$. **8.** $x < 0$.
9. $x \in \Re$, $y \in [-1; 1]$, нечетн., $T = \pi$.
10. $x \in \Re$,$y \in [\approx -2{,}21; \approx 2{,}21]$, $T = \pi$.
11. а) $y = x^2 - 9$; б) $y = x^2 - 2x + 1$; в) $y = x^2$; г) $y = (x^2 - 2x - 8)/2$; $y = x^2/2$. **12.** $\Delta y = 0{,}9$, $\delta y = 0{,}72$.

Тема 2.1. Последовательности

1. $0,\ \dfrac{3}{5},\ -\dfrac{8}{10},\ \dfrac{15}{17}, -\dfrac{24}{26},\ \ldots$ **2.** $0,\ -\dfrac{2}{3},\ 0,\ \dfrac{4}{5},\ 0,\ \ldots$ **3.** $n!$ 4. $\dfrac{2n-1}{n+2}$.

5. $\dfrac{n^2}{2n+1}(-1)^n$. **6.** $2/9$. **7.** 0. **8.** ∞. **9.** -6. **10.** 15.

Тема 2.2. Пределы

1. -1. **2.** 2. **3:** а). 4; б). $-\infty$; в). 0. **4.** -2. **5.** $-\infty$.
6. $3/5$. **7.** $1/6$. **8.** $\sqrt{2}/2$. **9.** 1. **10.** $-7/4$.

Тема 2.3. Разрывы функций. Замечательные пределы

1. Ликвидируемый разрыв. **2.** Разрыв первого рода, $\Delta y = 1$.
3 и **4.** ∞. **5.** Да. **6.** $3/2$. **7.** $1/2$. **8.** $\sqrt{e^3}$. **9.** e^{15}.
10. Функции эквивалентны.

Тема 2.4. Математика финансов

1. а) 0,669; б) 0,673; а) 0,675. **2.** 19,56%.
3. а) 200; б) 201,4.

Тема 3.1. Производные

6. $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **7.** $12x\dfrac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^4}$. **8.** $\dfrac{-4}{3(1-4x^2)}$.

9. 1. **10.** $x^2(6\ln^2 x - 8\ln x - 1)$. **11.** $\dfrac{-e}{2\sqrt[4]{(1-e/4)^3}}$. **12.** $2\operatorname{ctg} 2x$.

13. $\dfrac{2(\sin^2 x + 1)}{\sin^3 x}$. **14.** 1. **15.** $y = 2,\ \ x + 2y - 4 = 0$.

Тема 3.2. Дифференциал. Производные n-го порядка

1. $\Delta y = -0{,}669;\ \ dy = 0{,}3$. **2.** $\Delta y \approx 2/30;\ \ dy = 0{,}0667$.

3. 2,305. **4.** $1{,}03e$. **5.** $1 + \dfrac{0{,}2}{e}$.

6. $(-1)^n(n-2)!\, x^{-(n-1)},\ \ n > 1$. **7.** $(-1)^n\, 3(n-1)!\, x^{-n},\ \ n > 2$.

8. $(-1)^n\, \dfrac{3}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-5)x^{-(2n-3)/2},\ \ n > 1$.

9. $(-1)^{n+1} \dfrac{1}{3^n} \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-4)x^{-(3n-1)/3},\ \ n > 1$.

10. $(-1)^n\, 3^n\, e^{-3n},\ \ n \in N$.

Тема 3.3. Эластичность. Задачи экономики

1. $-2x;\ \ |x|>1/2$. **2.** $3x;\ \ |x|>1/3$. **3.** $|n| > 1$.

4. $\dfrac{3x}{2+3x};\ \ x < -\dfrac{1}{3},\ \ x \neq -2/3$.

5. $3x - 2;\ \ x > 1$ или $x < \dfrac{1}{3}$. **6.** 1,5; $\breve{E}_{y1} = 1{,}55$; $\breve{E}_{y2} = 1{,}6$.

7. $E_{\min} = -2;\ \ E_{\max} = 1;\ \ |E_{\min}| = 0;\ \ |E_{\max}| = 2$.

8. $C;\ \ C > 1$. **9.** 25. **10.** $P_t = 205;\ \ \Pi_t = 195$.

Тема 4.1. Правило Лопиталя. Формула Тейлора

1. 2. **2.** -4. **3.** $4/15$. **4.** 3. **5.** 0. **6.** ∞.

7. 1. **8.** 0. **9.** $1/2$. **10.** 1.

Тема 4.2. Исследование функций

1. Возрастает $(-\infty; -7/3) \cup (1; +\infty)$; убывает $(-7/3; 1)$;

$$y_{\max} = y\left(-\frac{7}{3}\right) = 18\frac{14}{27}.$$

2. Возрастает $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; убывает $(-1; 0) \cup (0; 1)$.
$y_{\max} = y(-1) = -2;\ \ y_{\min} = y(1) = 2;\ y_{\min} = 0$.

3. Возрастает $(e^{-1}; +\infty)$; убывает $(0; e^{-1})$; $y_{\min} = y(e^{-1}) = -e^{-1}$.

4. $y_{\min} = y(-3) = 0;\ \ y_{\max} = y(0) = 9$.

5. $y_{\min} \to y(1) = 0;\ \ y_{\max} = y(e) = 1/e$.

6 и **7.** Вогнута $x < 1/2$; выпукла $x > 1/2$.

8. Вогнута $x < 2$; выпукла $x > 2$. **9.** $y = -1;\ \ x = \pm 1$.

10. $y = 3x$.

Тема 5.1. Линии уровня. Частные производные

1. Точки с координатами $x = 0$ и $x = 1$ — в $\Re$;
прямые $x = 0$ и $x = 1$, параллельные оси y — в $\Re_2$.
2. Линии уровня: $y = x^2 - u_i \quad (i = \overline{1,3})$.
3. $6y(x^2-y)$. **4.** $\dfrac{6y^2}{(x-2y^3)^2}$. **5.** $2x(1+x^2)^{y-1}[1+y\ln(1+x^2)]$.
6. $\dfrac{1}{y}\ln^{x-1} y[1 + x\ln(\ln y)]$. **7.** $2e$. **8.** $2b$. **9**. 0.
10. $\alpha\beta ab\gamma(\gamma-1)x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(ax^{\alpha}+by^{\beta})^{(g-2)}$.

Тема 5.2. Производная по направлению. Градиент

1. 1; 1; (1; 1); $\sqrt{2}$; $\alpha = \beta = \pi/4$. **2.** $10\sqrt{2}$; $6\sqrt{3}+4$;
3. $4(x+y; x+y/2)$; $4\sqrt{2x^2+3xy+5y^2/4}$;
4. $4\sqrt{13}$. Расхождение объясняется разными направлениями.

Тема 5.3. Экстремумы ФНП

1. $u_{\min}{=}u(3;-1){=}-28$. **2.** $u_{\max}{=}u(0;-1/2){=}-7$; $u_{\min}{=}u(0;2){=}-32$.

3. $\Pi_{\max} = \Pi(10;15) = 1075$.

Тема 6.1. Табличные интегралы. Метод замены переменной

1. $\dfrac{1}{2}x^6 + C$. **2.** $\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$. **3.** $\ln|x| - x^{-3} + C$.
4. $\dfrac{9}{4}x^{4/3} + C$. **5.** $\dfrac{1}{2}(x+\sin x) + C$. **6.** $\dfrac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C$.
7. $-\dfrac{1}{3}e^{2-3x} + C$. **8.** $-\dfrac{3}{\ln 5}\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^x}} + C$. **9.** $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$.
10. $\dfrac{1}{2}x^2 - x + C$. **11.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{mx} + C$. **12.** $\dfrac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}} + C$.
13. $2\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{a}} + C$. **14.**. $\dfrac{1}{4}x^4 - 16\ln|x| + C$. **15.**. $\dfrac{1}{\ln 2}2^x + e^x + C$.

16. $x^2 + 3\sin x + C$. **17.** $-2\operatorname{ctg} x - 2\ln|\sin x| + C$.
18. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C$. **19.** $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{3}} + C$. **20.** $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.
21. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3} + C$. **22.** $\dfrac{1}{b}\ln|a+bx| + C$.
23. $\dfrac{1}{16}t^4 - \dfrac{5}{12}t^3 + C$, $(t = 2x+5)$.
24. $-\dfrac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C$. **25.** $\dfrac{1}{6}\ln(3x^2+1) + C$.

26. $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4 + C$. **27.** $\ln(2+e^x)+C$.

28. $\dfrac{1}{6}e^{2x^3+1}+C$. **29.** $-2\sqrt{1-\ln x}+C$. **30.** $\operatorname{arctg}\sin x + C$.

Тема 6.2. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей

1. $\dfrac{1}{25}x^5(5\ln x - 1)+C$. **2.** $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}(1+x^2)+C$.

3. $-\dfrac{1}{4x^2}(1+2\ln x)+C$. **4.** $\dfrac{1}{2}(x^2-1)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| - \dfrac{x^2}{2}+C$.

5. $x\sin x + \cos x + C$. **6.** $\dfrac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$.

7. $\ln\dfrac{|x|}{(x+1)^2}+C$. **8.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|+C$.

9. $\dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 8\ln|x+2| - \ln|x+1| + C$.

10. $x + 3\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+C$.

Тема 6.3. Формула Ньютона-Лейбница

1. $7/3$. **2.** 4,5. **3.** 5. **4.** 11,25. **5** и **6.** 1. **7.** $1-e^2$. **8.** $\dfrac{7}{\ln 2}$.

9. $\ln\dfrac{5}{2}$. **10.** $\dfrac{1}{2}\ln 3$. **11.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **12.** $\pi/6$. **13.** 0. **14.** 8.3. **15.** $8/3$.

16. $1/2$. **17.** 1. **18.** $\dfrac{\pi}{16}$. **19.** $\dfrac{1}{4}(e^2+1)$. **20.** ∞.

Тема 6.4. Геометрический и экономический смыслы определенного интеграла

1. $7/6$. **2.** $3/2$. **3.** $2\dfrac{1}{6}$. **4.** 3; 1,5. **5.** 48000.

Тема 7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. $y = x^2(x+1)$. **2.** $y' - \dfrac{y}{x} - x = 0$.

3. $y' - 2y = 0$. **4.** $y'\dfrac{x}{y}\ln\dfrac{x}{y} = 1$. **5.** $y = x^4 + C$. **6.** $y^2 = x^2 + C$.

7. $y = \dfrac{C}{\cos x}$. **8.** $y = \dfrac{C}{x}$. **9.** $y = \big(x(\ln|x|-1)+1\big)^2$. **10.** $y = -\cos x$.

Тема 7.2. Характеристические уравнения. Метод вариации постоянных

2. $C_1e^{4x}+C_2e^{-x}$. **3.** $e^{4x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$.
4. $C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}-x^2+2{,}5x-2,25$. **5.** $C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-x$.
6. $C_1e^{-4x}+C_2e^{x}+2e^{2x}$. **7.** $C_1e^{-2x}+e^{x}(C_2+2x)$.
8. $C_1+e^{-2x}(C_2+x)+2x$. **9.** $C_1e^{-5x}+C_2e^{x}-3\sin x-2\cos x$.
10. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2-2x\sin x$.

Тема 8.1. Числовые ряды

1. $\dfrac{n}{n^3+1}<\dfrac{1}{n^2}$, ряд сходится.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}=\dfrac{1}{n\sqrt{1-1/n}}>\dfrac{1}{n}$, ряд расходится.
3. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=\dfrac{1}{n^{1/n}}$. При $n\geq 2$ $1/n<1$, ряд расходится.
4. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n^5}=\lim\limits_{n=\infty}^{\infty}\dfrac{(n+1)^4}{n^5}=0$, ряд сходится.
5. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n}=\dfrac{1}{2}<1$, ряд сходится.
6. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{c^n}=\lim\limits_{n=\infty}^{\infty}\dfrac{c}{n+1}=0$, ряд сходится.
7. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^{n+1}}{2n+7}\cdot\dfrac{2n+5}{10^n}=10>1$, ряд расходится.

8. Сходится условно. **9.** Расходится.
10. Сходится условно.

Тема 8.2. Функциональные ряды

1. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-nx}}{e^{-(n-1)x}}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$. Ряд сходится если $x>0$.

2. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+1/n)^x}<1$ при $x>1$,

3. Ряд сходится при $\alpha>1$, $x\in\Re$.

4. $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)'=x^{n-1}$; $q=x<1$. $S=\dfrac{x}{1-x}$.

5. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^{n-1}}=2$. Ряд сходится при $-2<x<2$.

6. $x\in(-1;1)$. **7.** $x\in\Re$. **8.** $x\in[-1;1]$.

9. $x \in \Re$. **10.** $x \in [0, 1]$.

Тема 8.3. Разложение функций в ряды

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$, $S_4 = \frac{5}{8}$, $R_5 \leq \frac{1}{16}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)x^n =$

$1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \frac{105}{384}x^4 - \ldots;$

При $x = \frac{1}{2}$: $S_4 = \frac{103}{128}$, $R_5 \leq \frac{35}{4096}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!x^{2n}}$, $R_5 \leq \frac{1}{10!\cdot 2}$.

4. $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}$,

$\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$, $S_4 \approx 0{,}4806$, $R_5 \leq \frac{1}{4608}$.

5. $-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\pi x]$, $S_4 \approx -0{,}633$, $R_5 \leq 0{,}1$.