ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

М. И. ГЕРАСЬКИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА: ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА И ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА

С А М А Р А 2 0 0 8

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

М. И. ГЕРАСЬКИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА: ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА И ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА

Издание третье, исправленное и дополненное

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия (для студентов заочного обучения)*

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2008

УДК 65.052
ББК У. в 6 я7
Г 371

Рецензенты: проф., д-р техн. наук В. Г. З а с к а н о в
проф., д-р экон. наук А. И. Л а д о ш к и н

Гераськин М.И.

Г 371 **Математическая экономика: теория производства и потребительского выбора:** учеб. пособие / *М.И. Гераськин*. – 3-е изд., испр. и доп. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 124 с.

ISBN 978-5-7883-0560-8

В пособии рассматриваются математические модели представления производственного процесса на основе аппарата производственных функций, математические методы оптимизации издержек производства и формирования производственной программы, оптимальной по критерию прибыльности коммерческой деятельности; анализируются математические модели потребительского выбора. Приведены методические указания и варианты контрольных работ.

Предназначено для студентов заочного обучения по специальности «Менеджмент организаций», а также по другим специальностям, связанным с планированием производственно-финансовых показателей деятельности коммерческих организаций.

УДК 65.052
ББК У. в 6 я7

.

ISBN 978-5-7883-0560-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Процесс материального производства, то есть деятельность коммерческих организаций по созданию материальных продуктов, выполнению материальных работ или оказанию материальных услуг в целях общественного потребления, является основой стабильного функционирования национальной экономики и предпосылкой ее динамического развития. Ключевую роль в организационном обеспечении процесса производства играет выбранная коммерческой организацией стратегия рациональной деятельности, определяющая траекторию развития производственной системы.

Разработка адекватной целям организации стратегии коммерческой деятельности невозможна без формального математического описания производственного процесса, взаимоотношений фирмы со своими поставщиками и покупателями, механизма формирования прибыли – главного критерия эффективного предпринимательства. Математические методы оптимизации являются основой выбора наивыгоднейшего для фирмы сочетания значений показателей финансово-хозяйственного состояния. Поэтому применение этих методов в комбинации с аутентичными математическими моделями функционирования хозяйствующих субъектов позволяет разработать и реализовать оптимальную с точки зрения выбранных критериев программу коммерческой деятельности.

Математическое моделирование процессов материально-технического снабжения, производства и реализации сопряжено с риском принятия в качестве базы оптимизационной процедуры чрезмерно упрощенной схемы финансово-хозяйственного механизма, не обеспечивающей соответствие полученной оптимальной программы особенностям реальных экономических процессов. С другой стороны, использование сложной математической модели, приближающейся к уровню имитационной, может привести к невозможности применения существующих оптимизационных методов, что делает само моделирование бессмысленным. Современная математическая теория производства базируется на моделях, достаточно полно описывающих черты реальной производственной деятельности и допускающих аналитическое решение.

Наряду с этим, рентабельная производственная деятельность немыслима без адекватных реальным предпочтениям покупателей продукции моделей, описывающих рациональный потребительский выбор. Цель моделирования потребительского выбора заключается в формировании таких основополагающих предпосылок планирования развития фирмы, как оценка особенностей рынка сбыта товаров, определение сравнительных характеристик предпочтительности товаров, в целом образующих маркетинговую стратегию.

Глава 1. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§1.1. Производственная функция. Основные понятия

Зачем нужны производственные функции?

Исследование экономических процессов в современном крупномасштабном производстве требует получения большого объема статистической информации для построения математических моделей типа «затраты-выпуск», поскольку такие модели учитывают внутреннюю структуру производства. Между тем, построение матрицы внутрипроизводственных затрат во многих случаях представляет собой крайне сложную задачу. С другой стороны, зачастую гораздо проще получить отчетные данные о поведении и взаимосвязи укрупненных показателей, таких как *стоимость произведенного продукта, объем основных фондов, численность промышленно-производственного персонала* и т.п. Оперируя такими укрупненными показателями и рассматривая коммерческую организацию (фирму) как *«черный ящик»,* то есть изучая связь между объемами затраченных ресурсов и величиной произведенного продукта, можно сделать определенные выводы.

Возникновение теории производственных функций

Впервые функциональная взаимосвязь между объемом производства и объемом израсходованных ресурсов была использована в производственном анализе в 1928 г. в статье американских ученых экономиста Пола Дугласа и математика Чарльза Кобба «Теория производства». В этой статье была предпринята попытка определить эмпирическим путем влияние величин затраченного капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США. Были использованы статистические данные за 1899-1922 гг. и поставлены следующие задачи:

1. Определить вид функций, наиболее точно выражающих количественные соотношения между тремя выбранными характеристиками производства.
2. Найти значения коэффициентов конкретной функции этого вида.

3. Проверить достоверность значений функции, сравнив их с фактическими данными.

Ч. Коббом была предложена функция вида:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

где Q – объем выпускаемой продукции; K – объем основного капитала; L – затраты труда; A, α, β – коэффициенты, удовлетворяющие условиям:

$$A > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Коэффициент A, предназначен для перевода единиц измерения труда и капитала в единицы измерения продукта; коэффициенты α, β отражают вклад труда и капитала в изготовление продукта.

С использованием метода наименьших квадратов были определены значения числовых коэффициентов:

$$\min \sum_{t=1899}^{1922} (\ln Q_t - \ln A - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t)^2.$$

При этом оказалось, что $A=1,01$, $\alpha=0,25$, $\beta=0,75$, то есть функция имеет вид

$$Q = 1,01K^{0,25}L^{0,75}.$$

Сравнение величины $Q(K,L)$ с фактическим значением объема производства показало удовлетворительную достоверность расчетов на основе *производственной функции*.

Определение производственной функции

Производственной функцией (ПФ) производственного процесса называется отображение

$$Q: D \to U,$$

моделирующее выпуск продукции в данном процессе. Область определения функции D представляет собой множество производственных ресурсов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в стоимостном или натуральном выражении. Область значений функции U включает в себя область количественных оценок результатов производства, например, физический объем выпуска по каждому наименованию ассортимента или стоимостные показатели $Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_m)$.

Несмотря на широту введенного определения ПФ, наиболее исследованы функции для случая $m=1$, то есть имеется единственная (агрегированная) количественная оценка результатов производства. В этом случае ПФ представляет собой обычную функцию нескольких переменных.

О п р е д е л е н и е ПФ: зависимость между объемом выпуска продукции Q и количествами затраченных производственных ресурсов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$Q = Q(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Следует учесть, что значение объема выпущенной продукции предполагается максимально возможным при данных затратах производственных ресурсов, то есть непроизводительные («холостые») затраты отсутствуют. Графически п о в е р х н о с т ь   в ы п у с к а, формируемая ПФ, изображена на рис. 1.1.

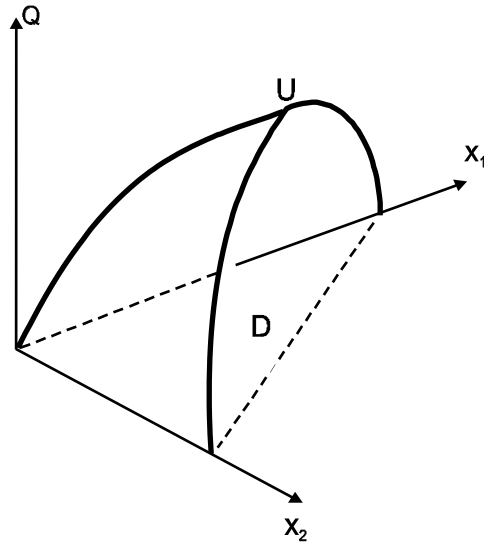

Рис. 1.1. Графическая интерпретация ПФ

Зависимость, моделирующая реальный производственный процесс, имеет следующие свойства:

1. При увеличении объема затрат одного из ресурсов и неизменном объеме затрат других ресурсов выпуск продукции возрастает:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

Это свойство вытекает из гипотезы рационального выбора производителем ресурсов производства – ресурсы, не увеличивающие выпуск продукции, не применяются в процессе производства.

Пример 1.1.1. *Фирма, занимающаяся производством мебели, использует в качестве ресурсов труд рабочих и оборудование. В случае* *приобретения дополнительно деревообрабатывающего станка объем продукции фирмы должен возрасти, если только этот станок не выпускает бракованную продукцию.*

2. При фиксированных объемах затрат всех ресурсов кроме одного последовательное увеличение этого ресурса обеспечивает постоянно снижающееся приращение величины продукта

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

Данное свойство обусловлено необходимостью сбалансированности затрат ресурсов в конкретном технологическом процессе: увеличение затрат одного ресурса без соответствующего роста затрат другого ресурса не обеспечивает технологию фирмы полноценным потоком ресурсов; следовательно дополнительный эффект от увеличения затрат ресурса снижается.

Пример 1.1.2. *В фирме, производящей обувь, работают 5 рабочих и используется 5 станков. В случае приобретения дополнительно одного станка объем продукции фирмы должен возрасти на 100 пар обуви в месяц. Если же вначале на 5 рабочих приходилось 20 станков, то приобретение дополнительно одного станка повысит объем производства только на 40 пар обуви в месяц, поскольку количество рабочих, обслуживающих станки, не изменилось.*

Геометрическая интерпретация этих условий приведена на рис. 1.2, где изображена зависимость величины произведенного продукта от объема затрат одного ресурса при фиксированных значениях затрат других ресурсов; эта зависимость называется к р и в о й в ы п у с к а . Первое условие означает, что касательная к кривой выпуска при всех возможных значениях расхода ресурса имеет положительный наклон, поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \operatorname{tg}\gamma$.

Второе условие, преобразованное к виду

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right] < 0,$$

показывает, что прирост продукта в расчете на дополнительные затраты единицы ресурса снижается при росте затрат ресурса.

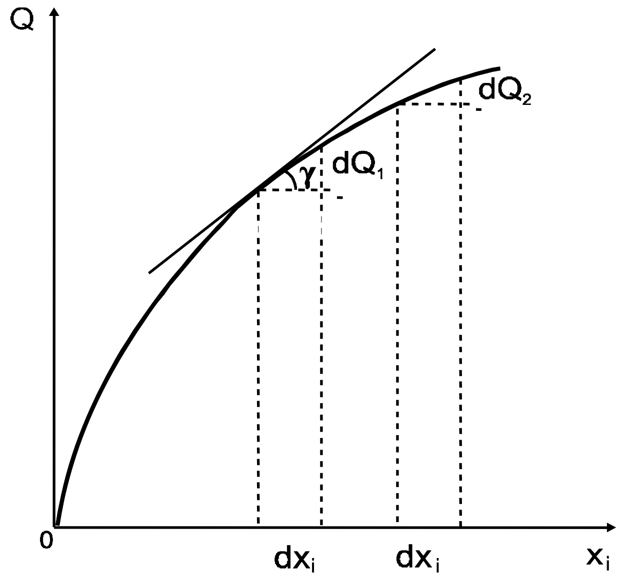

Рис. 1.2. Кривая выпуска

§1.2. Экономико-математические параметры производственной функции

Основные характеристики ПФ рассматриваются на примере функции

$$Q = Q(K, L).$$

Средние величины

Средние продукты характеризуют удельный эффект использования ресурсов в производственном процессе фирмы.

С р е д н я я п р о и з в о д и т е л ь н о с т ь т р у д а – это отношение произведенного продукта к количеству затраченного труда:

$$AQ_L = \frac{Q}{L}.$$

С р е д н я я ф о н д о о т д а ч а – это отношение объема произведенного продукта к стоимости основных фондов:

$$AQ \;= \frac{Q}{K}.$$

Для функции Кобба-Дугласа средняя производительность труда равна:

$$AQ_L = AK^{\alpha} L^{\beta - 1}$$

и в силу условия $\beta < 1$ является убывающей функцией аргумента L. Другими словами, с увеличением трудозатрат средняя производительность труда падает, поскольку величина второго ресурса K остается неизменной, и привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства; фондовооруженость $\frac{K}{L}$ при этом снижается. Аналогично интерпретируется средняя фондоотдача.

Пример 1.2.1. *В фирме, производящей обувь, 5 рабочих работают на 5 станках, и выпускается 1000 пар обуви в месяц. Поэтому средняя производительность труда одного рабочего составит (1000/5)=200 пар/чел. Фондовооруженность при этом равна (5/5)=1 станок/чел. Предположим, что наняты ещё 5 рабочих, в результате чего выпуск продукции увеличился до 1500 пар обуви в месяц. Средняя производительность труда рабочего снизится до (1500/10)=150 пар/чел. Фондовооруженность уменьшится (5/10)=0,5 станок/чел.*

Геометрически среднее значение продукта интерпретируется как угловой коэффициент секущей линии, проведенной из начала координат к точке кривой выпуска, характеризующей определенное значение продукта Q^0, то есть из рис. 1.3 следует, что:

$$AQ_i = \frac{Q^0}{x_i^0} = \operatorname{tg}\mu .$$

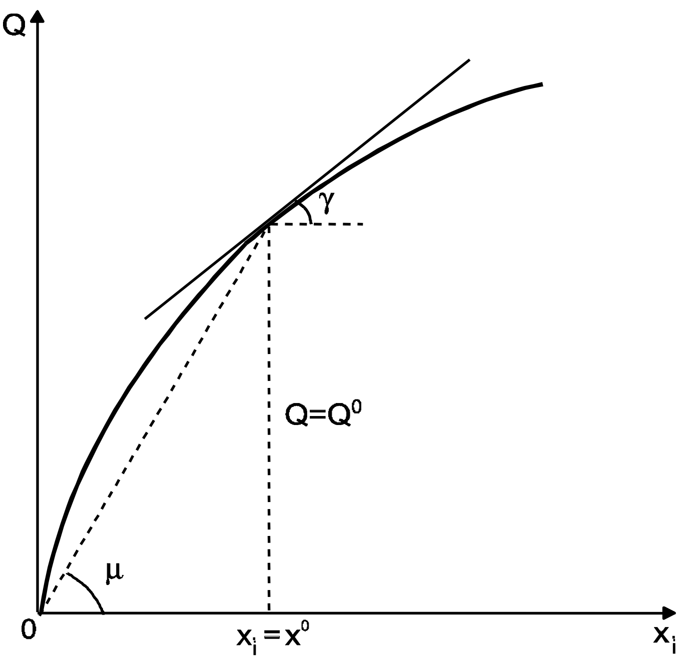

Рис. 1.3. Геометрический смысл средних и предельных величин

Предельные величины

Предельные продукты характеризуют эффект в виде объема продукции, получаемой от увеличения затрат ресурсов.

Предельная производительность труда характеризует величину дополнительного эффекта от каждой затраченной единицы труда при данном сочетании ресурсов (K,L):

$$MQ_L = \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Исходя из определения ПФ при увеличении затрат труда, предельная производительность труда снижается. Геометрически предельный продукт, как показано на рис. 1.3, представляет собой угловой коэффициент касательной к кривой выпуска в данной точке

$$MQ_i = tg\gamma .$$

Для функции Кобба-Дугласа предельная производительность равна:

$$MQ_L = \beta A K^{\alpha} L^{\beta - 1} = \beta \frac{Q}{L},$$

то есть предельная производительность пропорциональна средней и всегда меньше ее, так как $\beta < 1$ (рис. 1.4).

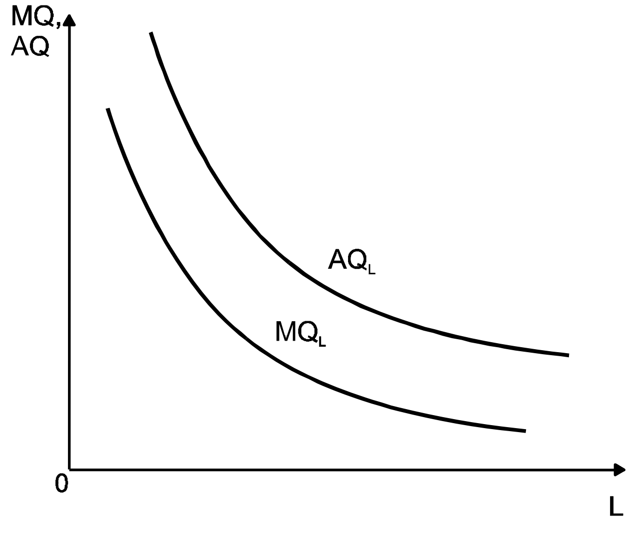

Рис. 1.4. Средний и предельный продукты функции Кобба-Дугласа

Предельная фондоотдача определяется аналогично:

$$MQ_K = \frac{\partial Q}{\partial K}.$$

Пример 1.2.2. *Фирма, рассмотренная в примере 1.2.1, нанимает дополнительного рабочего. Если коэффициент β=0,75, то увеличение продукции (предельная производительность) составит (0,75·200)=150 пар/чел. Если же фирма, имея 10 рабочих, наймет дополнительного рабочего, то увеличение продукции составит (0,75·150)=113 пар/чел.*

Коэффициенты эластичности

Большое значение для анализа ПФ имеют безразмерные коэффициенты, характеризующие процент прироста объема выпуска продукции при увеличении затрат ресурса на 1%, то есть коэффициенты эластичности.

Эластичность продукта по фондам определяется по формуле:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}.$$

Поскольку при неизменном объеме трудозатрат относительному увеличению объема основных фондов на $\frac{\Delta K}{K}$ соответствует относительное увеличение выпуска на $\frac{\Delta Q}{Q}$, то относительное приращение выпуска составит $\frac{\Delta Q / Q}{\Delta K / K}$, а переходя к пределу при $\Delta K \to 0$, получим выражение эластичности.

Эластичность продукта по труду

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}$$

имеет аналогичное значение.

Параметры функции Кобба-Дугласа являются коэффициентами эластичности:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = A\alpha\, K^{\alpha-1}L^{\beta}\,\frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \alpha,$$

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = A\beta\, K^{\alpha}L^{\beta-1}\,\frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \beta.$$

Поэтому для функции Кобба-Дугласа коэффициенты α, β постоянны и не зависят от объема факторов K, L.

Пример 1.2.3. *Фирма, рассмотренная в примере 1.2.1, планирует увеличить штат персонала на 10%. Если эластичность продукта по труду β=0,75, то увеличение продукции в результате составит (0,75·10)=7,5%. Можно сформулировать обратную задачу: на сколько процентов следует увеличить штат фирмы, если прирост объема производства должен составить 7,5%? Очевидно, количество работников должно возрасти на (7,5/0,75)=10%.*

§1.3. Дополнительные свойства производственной функции

Помимо условий, включенных в определение ПФ, на вид функции, как правило, накладываются дополнительные ограничения.

Свойство однородности состоит в том, что при увеличении затрат всех ресурсов в одинаковое количество раз w объем продукции возрастает в кратное w количество раз:

$$Q(wK, wL) = w^r Q(K, L)$$

для любого $w > 1$. Показатель $r > 0$ называют степенью однородности функции Q, он характеризует эффект расширения масштаба производства: если $r > 1$, то увеличение всех ресурсов в w раз приводит к возрастанию объема выпуска более чем в w раз, то есть эффект масштаба положителен; если $r < 1$, то прирост факторов в w раз обеспечивает менее чем w-кратное возрастание объема выпуска, то есть эффект масштаба отрицателен.

Пример 1.3.1. *Фирма, выплавляющая металл, использует в качестве ресурсов труд рабочих и оборудование. В случае увеличения штата фирмы и парка оборудования в 2 раза объем продукции фирмы возрос в 4 раза. Следовательно фирма характеризуется положительным эффектом масштаба с коэффициентом r=2 (так как 2^2=4).*

Наиболее употребительными являются *линейно-однородные* ПФ, для которых

$$r = 1 \text{ и } Q(wK, wL) = wQ(K, L),$$

то есть эффекта расширения масштаба производства не наблюдается.

Свойство необходимости всех ресурсов:

$$Q(0) = 0,$$

то есть при отсутствии хотя бы одного из ресурсов выпуск продукции отсутствует.

Пример 1.3.2. *Фирма, выплавляющая металл, согласно технологии использует в качестве сырья железную руду и топливо. Поскольку оба ресурса необходимы для производства, то производство будет остановлено в случае непоставки хотя бы одного из них.*

Свойство ограниченного роста (вогнутость): при возрастании ресурса от нуля до конечного значения происходит стремительный рост объема выпуска, который затем сходит на нет:

$$\lim_{x\to\infty} Q(x)=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{\partial Q(x)}{\partial x}=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\partial Q(x)}{\partial x}=0 \quad .$$

Условие вогнутости (так называемое условие ненасыщаемости) выражает неэффективность резервирования ресурсов.

Пример 1.3.3. *На целлюлозобумажном комбинате объем производства бумаги зависит от затрат используемой целлюлозы (x_1) и количества станков (x_2) по функции $Q=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, $\alpha=0,5$, $\beta=0,1$. При плановом режиме загрузки в месяц потребность в ресурсах составляет 20 тонн целлюлозы и 10 станков. Поэтому выпуск продукции достигает $20^{0,5}\cdot 10^{0,1}=5,6$ тонны. Предельный продукт второго ресурса $MQ_2=$ $=\partial Q/\partial x_2=\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}=0,1\cdot 20^{0,5}\cdot 10^{-0,9}=0,06$т/станок, то есть прирост продукции от приобретения дополнительного станка составит 0,06 тонны. Если фирма приобретет 100 станков, не обеспечив это расширение станочного парка увеличением поставок целлюлозы, то эффект от последнего приобретенного станка составит $MQ_2=0,1\cdot 20^{0,5}\cdot(10+99)^{-0,9}=0,007$т/станок. Поэтому резервирование ресурса окажется неэффективно.*

Свойство эластичности ресурсов

Линейно-однородные ПФ в соответствии с теоремой Эйлера могут быть представлены в виде:

$$Q=\frac{\partial Q}{\partial K}K+\frac{\partial Q}{\partial L}L. \tag{1.1}$$

Экономически это можно интерпретировать следующим образом: пусть общество состоит из рабочих и капиталистов; капиталист вкладывает капитал в производство до тех пор, пока дополнительный доход $\frac{\partial Q}{\partial K}$ не достигнет установившейся в экономике нормы прибыли, то есть произведение нормы прибыли $\frac{\partial Q}{\partial K}$ на вложенный капитал K представляет собой доход капиталистов. Аналогично, нанимая рабочих, капиталист увеличивает их численность до тех пор, пока дополнительный доход $\frac{\partial Q}{\partial L}$, приносимый очередным рабочим, не достигнет его заработной платы, то есть теория предельной производительности труда утверждает, что $\frac{\partial Q}{\partial L}$ есть заработная плата, поэтому слагаемое $\frac{\partial Q}{\partial L}L$ представляет собой доход рабочих, общая численность которых L. В таком случае Q – суммарный доход членов общества.

Для теории производства уравнение (1.1) означает, что объем продукции складывается из частей, произведенных за счет использования каждого ресурса в отдельности.

Разделив обе части формулы (1.1) на Q, имеем:

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = E_K + E_L, \tag{1.2}$$

то есть для линейно-однородной функции коэффициенты эластичности

$$E_i \in [0,1],$$

если хотя бы один из них больше нуля.

Для однородной функции $E_K + E_L = r$, то есть сумма показателей эластичности определяется степенью однородности функции, то есть типом эффекта расширения масштаба производства.

Таким образом, получено важное свойство коэффициентов эластичности ресурсов функции Кобба-Дугласа: сумма коэффициентов эластичности равна показателю эффекта расширения масштаба:

$$\alpha + \beta = r.$$

Пример 1.3.4. *Объем продукции фирмы, рассмотренной в примере 1.3.3, при увеличении обоих ресурсов на 1% возрастет на $r=\alpha+\beta=0,5+0,1=0,6\%$.*

§1.4. Эффекты расширения масштаба производства и замещения ресурсов

Эффект расширения масштаба

Как было показано, эффект расширения масштаба производства характеризует множитель w^r; для однородной функции при $r > 1$ эффект масштаба положителен, при $r < 1$ – отрицателен.

Среднюю числовую характеристику эффекта масштаба можно определить аналогично коэффициентам эластичности объема выпуска по производственным факторам:

$$\frac{\partial Q(wx)}{\partial w}\frac{w}{Q(wx)},$$

а при переходе к пределу получим выражения для к о э ф ф и ц и е н т а э л а с т и ч н о с т и п р о и з в о д с т в а:

$$E_w = \lim_{w \to 1} \frac{\partial Q(wx)}{\partial w}\frac{w}{Q(wx)}. \qquad (1.3)$$

Эластичность производства характеризует прирост продукта в некоторой точке пространства затрат ресурсов (локальный эффект масштаба), так как изменение структуры ресурсов считается бесконечно малым ($w \to 1$).

Дифференцируя выражение

$$Q(wx) = Q(wx_1, wx_2, ..., wx_n)$$

как сложную функцию переменной w, имеем:

$$\frac{\partial Q(wx)}{\partial w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(wx)}{\partial (wx_i)} x_i . \qquad (1.4)$$

Подставив (1.4) в (1.3), получим:

$$E_w = \lim_{w \to 1}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(wx)}{\partial (wx_i)} x_i\right]\frac{w}{Q(x)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{x_i}{Q} = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} .$$

Таким образом, коэффициент эластичности производства равен сумме коэффициентов эластичности объема выпуска по ресурсам производства.

С учетом выражения (1.2) это приводит к следующему выводу: к о э ф ф и ц и е н т э л а с т и ч н о с т и п р о и з в о д с т в а р а в е н п о к а з а т е л ю э ф ф е к т а р а с ш и р е н и я м а с ш т а б а п р о и з в о д с т в а .

Эффект замены ресурсов

Особенность реальных производственных процессов состоит в возможности замещения одного фактора другим; например, существует *абстрактная* возможность заменить единицу производственного оборудования эквивалентным по объему фондоотдачи количеством единиц труда. Однако реальное воплощение этой абстрактной возможности зачастую неосуществимо.

Для случая двухфакторной ПФ числовая характеристика эффекта замены должна показывать, на какую величину dx_2 уменьшится объем затрат второго ресурса, если увеличить объем затрат первого ресурса на dx_1, чтобы при этом объем выпуска Q остался неизменным.

П р е д е л ь н о й   н о р м о й   з а м е н ы $S_{x_1x_2}$ (или *MRTS — Marginal Rate of Substitution*) одного ресурса другим называется величина

$$S_{x_1x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1},$$

показывающая, каков объем высвобождаемого ресурса при увеличении затрат ресурса-заменителя на единицу. Из условия неизменности объема выпуска при замещении факторов следует:

$$Q = \text{const} \Rightarrow dQ = \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2} dx_2 = 0 .$$

Поэтому предельная норма замены равна отношению предельных продуктов факторов:

$$S_{x_1x_2} = \frac{\partial Q / \partial x_1}{\partial Q / \partial x_2} = \frac{MQ_1}{MQ_2}. \qquad (1.5)$$

В данном случае x_2 является заменяемым фактором, x_1 – заменителем. Из выражения (1.5) следует, что объем высвобождаемого x_2 ресурса в расчете на единицу ресурса x_1 тем больше, чем больше предельный продукт фактора-заменителя по сравнению с предельным продуктом заменяемого фактора.

В противоположной ситуации норма замены определяется аналогично:

$$S_{x_1x_2} \cdot S_{x_2x_1} = 1.$$

Для функции Кобба-Дугласа в качестве примера получим выражение предельной замены по формуле (1.5):

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=\beta\frac{Q}{L};\quad \frac{\partial Q}{\partial K}=\alpha\frac{Q}{L}\Rightarrow S_{LK}=\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K}=\frac{\beta\frac{Q}{L}}{\alpha\frac{Q}{K}}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}.$$

Пример 1.4.1. *В фирме, производящей обувь, 5 сотрудников работают на 5 станках и выпускается 1000 пар обуви в месяц. Если коэффициенты эластичности ресурсов равны α=0,25, β=0,75, то норма замены составит (0,75·5)/(0,25·5)=3 чел./станок, то есть при приобретении дополнительно 1 станка фирма может уволить 3 рабочих, сохранив неизменный объем выпуска.*

Возможность замещения ресурсов друг другом характеризует ПФ с точки зрения различных комбинаций затрат ресурсов, обеспечивающих одинаковые объемы выпуска. Количественной характеристикой темпа изменения предельной нормы замены в пространстве ресурсов является эластичность замены ресурсов:

$$\sigma_{x_1x_2}=\frac{\partial\left(x_2/x_1\right)}{\partial S_{x_1x_2}}\cdot\frac{S_{x_1x_2}}{x_2/x_1}. \tag{1.6}$$

Эластичность замены показывает, на сколько процентов должно измениться соотношение ресурсов (при Q=const) при изменении предельной нормы замены на 1%.

Соответственно характеру изменения коэффициента эластичности замены различают два класса ПФ:

- *VES* (*Variable Elasticity of Substitution*) – функция с переменной эластичностью замены;
- *CES* (*Constant Elasticity of Substitution*) – функция с постоянной эластичностью замены.

Наибольшее значение имеет CES-функция, для которой возможны следующие характерные случаи: $\sigma_{x_1x_2}=\infty$, то есть пределы взаимозаменяемости ресурсов отсутствуют; $\sigma_{x_1x_2}=0$, то есть ресурсы взаимодополняют друг друга и используются в строго определенном соотношении.

§1.5. Изолинии производственных функций

Изолинии представляют собой кривые, во всех точках которых соответствующая функция имеет постоянное значение того или иного параметра.

Линия постоянного продукта

Изокванта – это множество точек плоскости ресурсов, удовлетворяющих условию постоянства объема выпуска:

$$Q(x_1, x_2) = \text{const} = Q_C.$$

Уравнение изокванты в явном виде записывается как

$$x_1 = f(x_2, Q_c).$$

Вид изокванты показан на рис. 1.5. Например, для функции Кобба-Дугласа уравнение изокванты в явном виде выглядит следующим образом:

$$L = \sqrt[\beta]{\frac{Q_c}{AK^{\alpha}}} = \sqrt[\beta]{\frac{Q_c}{A}} \cdot \frac{1}{K^{\alpha/\beta}}.$$

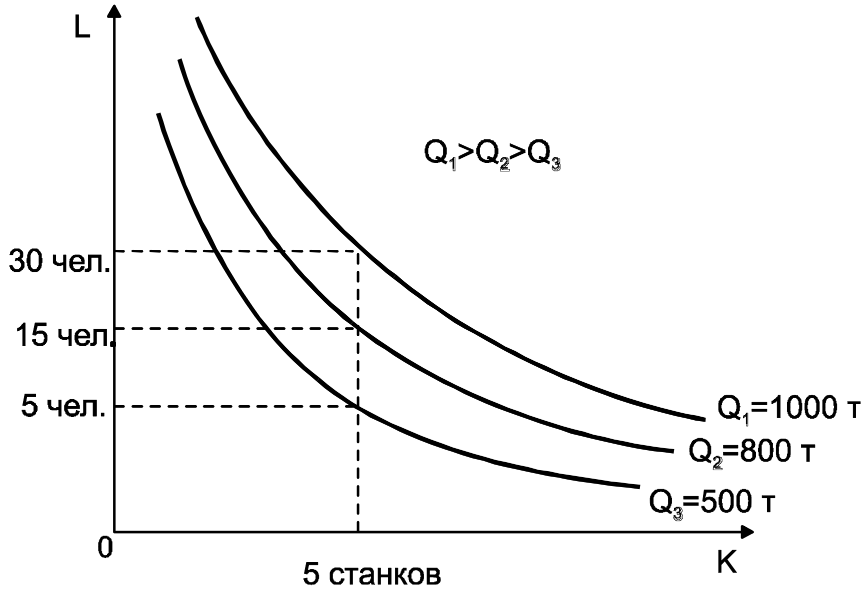

Рис. 1.5. Изокванта

Экономический смысл изокванты заключается в том, что кривая показывает объем трудовых ресурсов, необходимых для получения продукта Q_c в зависимости от располагаемого объема капитала K.

Пример 1.5.1*. Для фирмы, выплавляющей металл, построены изокванты при выплавке 500, 800 и 1000 тонн металла в месяц (рис. 1.5). По рисунку можно определить, что при наличии 5 станков для выплавки 500 т в месяц требуется 5 рабочих, а для выплавки 1000 т – 30 рабочих.*

Свойства изокванты:

1. Если все ресурсы необходимы для производства продукта, то нет такого объема выпуска Q_c, для которого изокванта имеет общие точки с осями координат. Это свойство вытекает из условия необходимости всех ресурсов.

2. Большему значению объема выпуска Q_c соответствует более удаленная от начала координат изокванта, что следует из условия однородности.

3. Изокванты, соответствующие различным значениям Q_c, не пересекаются.

Линия постоянного наклона изокванты

Изоклина – это множество точек плоскости ресурсов, в которых наклон изоквант при различных значениях объема выпуска остается постоянным; поскольку наклон графика функции выражает производная, то изоклина – множество точек, в которых

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = S_{x_1x_2} = \text{const} = S_C.$$

Таким образом, геометрический смысл предельной нормы замены, как показано на рис. 1.6, состоит в том, что $S_{x_1x_2} = \text{tg}\,\varphi$.

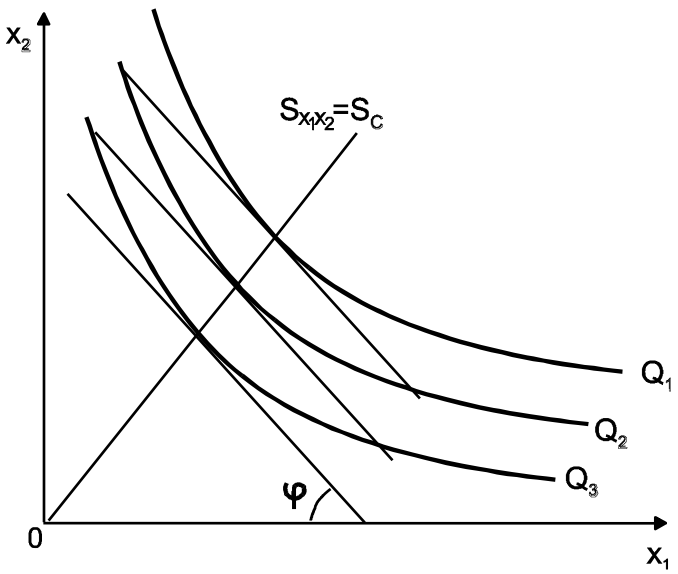

Рис. 1.6. Изоклина

Например, для функции Кобба-Дугласа, как было показано выше, предельная норма замены пропорциональна значению коэффициента фондовооруженности $\frac{K}{L}$:

$$S_{LK} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L},$$

то есть чем большей величиной основного капитала (фондов) в расчете на одного работника располагает предприятие, тем большая часть капитала может быть высвобождена и инвестирована в другие проекты при увеличении персонала на одного работника.

Следовательно, уравнение изоклины функции Кобба-Дугласа определяется следующим угловым коэффициентом:

$$S_{LK} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L} = S_C.$$

§1.6. Виды производственных функций

Рассмотрим основные виды ПФ, нашедших применение в практике экономического анализа производственных процессов, на примере функций двух ресурсов, поскольку они допускают наглядную геометрическую интерпретацию.

1. Линейная функция

$$Q = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Коэффициенты линейной функции представляют собой значения предельных продуктов, так как

$$MQ_i = \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = a_i,\ i = 1,2.$$

Это означает, что прирост объема выпуска в результате единичного увеличения объема затраченного ресурса постоянен и не зависит от исходного объема факторов. Предельная норма замены для линейной ПФ постоянна и равна $S_{x_1 x_2} = \frac{a_1}{a_2}$, а эластичность замещения факторов бесконечна:

$$\sigma_{x_1 x_2} = \infty.$$

Изокванты линейной функции изображены на рис. 1.8,а.

Линейная ПФ применяется обычно при моделировании крупномасштабных систем (крупная отрасль, экономика в целом), в которых выпуск продукции является результатом одновременного использования множества различных технологий. Особое значение имеет предположение о постоянстве предельных производительностей ресурсов и их неограниченной замещаемости.

Пример 1.6.1. *Предприятие за последние 3 года показало следующие хозяйственные результаты:*

Год	Объем металла, тыс. тонн	Количество станков, единиц	Персонал, тыс. чел.
1	13	10	0,8
2	30	20	1,8
3	50	30	2,8

Определить значения коэффициентов ПФ, объяснить их экономический смысл. Спрогнозировать объем металла в 4-й год, если запланировано довести количество прессов до 40 ед., численность работников – до 3,5 тыс. чел.

Построив графики зависимости объема выпуска от затрат ресурсов (рис. 1.7), приходим к выводу, что для данного предприятия характерна линейная функция от ресурсов x_1 (оборудование) и x_2 (персонал):

$$Q = a_1 x_1 + a_2 x_2 .$$

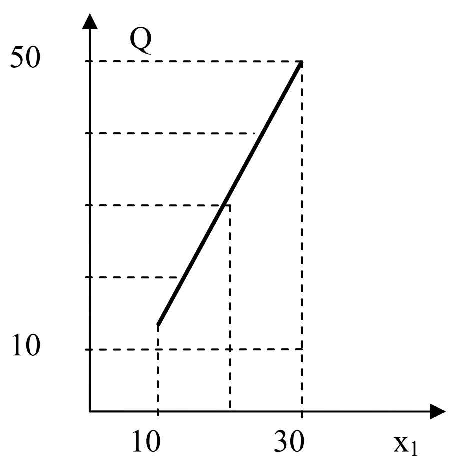

Рис. 1.7. Пояснение к примеру 1.6.1

Составим функцию суммы квадратов отклонений:

$$S = \sum_{t=1}^{3} (Q_t - a_1 x_{1t} - a_2 x_{2t})^2 \ .$$

Найдем производные этой суммы по неизвестным коэффициентам a_1, a_2 *и приравняем их к нулю:*

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2\sum_{t=1}^{3}(Q_t - a_1 x_{1t} - a_2 x_{2t})x_{1t} = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2\sum_{t=1}^{3}(Q_t - a_1 x_{1t} - a_2 x_{2t})x_{2t} = 0.$$

После преобразования получим:

$$a_1\sum_{t=1}^{3} x^2{}_{1t} + a_2\sum_{t=1}^{3} x_{1t}x_{2t} = \sum_{t=1}^{3} Q_t x_{1t},$$

$$a_1\sum_{t=1}^{3} x_{1t}x_{2t} + a_2\sum_{t=1}^{3} x^2{}_{2t} = \sum_{t=1}^{3} Q_t x_{2t}.$$

Найдем из условий задачи суммы в этих уравнениях и подставим в систему:

$$1400a_1 + 128a_2 = 2230,$$

$$128a_1 + 11{,}7a_2 = 204.$$

Решение этой системы уравнений позволяет получить $a_1 = 0{,}028\,тыс.т/станок; a_2 = 17{,}4\,т/чел.$ *Объем металла в 4-й год равен:*

$$Q = 0{,}028x_1 + 17{,}4x_2 = 0{,}028 \cdot 40 + 17{,}4 \cdot 3{,}5 = 62\,тыс.т.$$

2. Функция Кобба-Дугласа

$$Q = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta},\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha,\beta > 0.$$

Коэффициент A представляет собой параметр шкалы ($A > 0$); коэффициенты α,β – суть коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам. Предельный продукт факторов пропорционален их среднему продукту:

$$MQ_{x_1} = \alpha\frac{Q}{x_1},\ MQ_{x_2} = \beta\frac{Q}{x_2}.$$

Предельная норма замены равна

$$S_{x_1x_2} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{x_2}{x_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x_2}{x_1},$$

поэтому эластичность замещения составляет

$$\sigma_{x_1x_2} = \frac{\partial\left(x_2/x_1\right)}{\partial S_{x_1x_2}} \frac{S_{x_1x_2}}{x_2/x_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\frac{1-\alpha}{\alpha} x_2/x_1}{x_2/x_1} = 1,$$

то есть замещение данного фактора другим происходит в пропорции 1:1. В этом заключается недостаток такого рода ПФ: они не всегда верно отражают реальные экономические процессы, так как не всегда один фактор можно заменить эквивалентным количеством другого. Изокванты функции Кобба-Дугласа изображены на рис. 1.8,б.

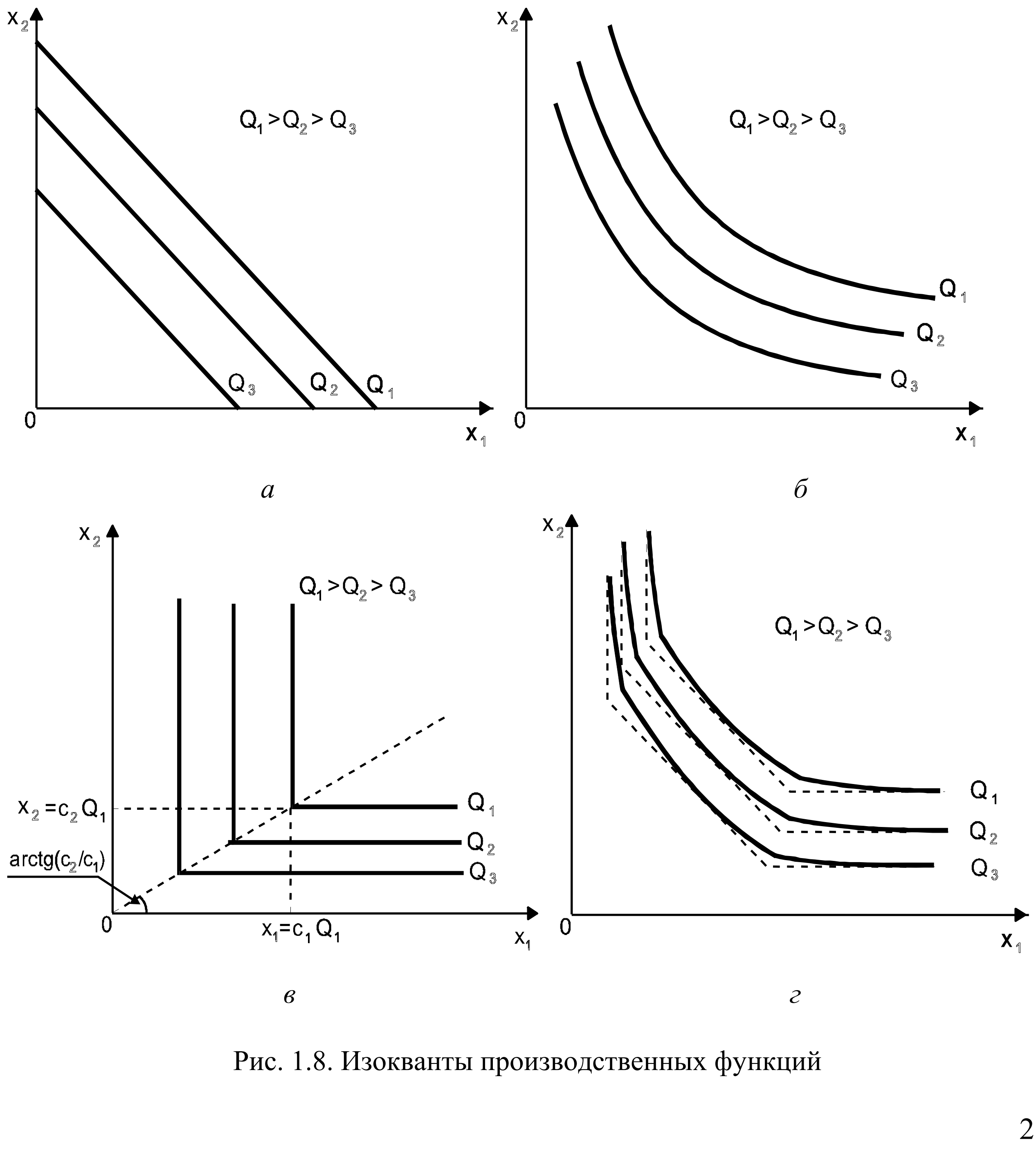

Рис. 1.8. Изокванты производственных функций

Функция Кобба-Дугласа чаще всего используется для описания среднемасштабных хозяйственных субъектов (корпорация, отрасль), характеризующихся устойчивым, стабильным функционированием, когда вовлечение дополнительной единицы ресурса приносит эффект, пропорциональный средней производительности имеющегося ресурса.

3. Функция с фиксированными пропорциями (функция Леонтьева):

$$Q = \min\left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right).$$

Коэффициенты c_i выражают количество i-го ресурса, необходимого для производства единицы продукта. Функция Леонтьева выражает решение задачи линейного программирования, возникающей в модели "затраты-выпуск":

$$c_i Q \le x_i, \quad Q \to \max,$$

поскольку фактор, ограничивающий объем выпуска, определяется условием минимальности. Эластичность замены факторов по любому ресурсу $\sigma = 0$, как видно из геометрической интерпретации функции Леонтьева на рис. 1.8,в.

Предельный продукт является кусочно-постоянной двухуровневой функцией соотношения x_1/x_2 (фондовооруженности):

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\}}{\partial \frac{x_1}{c_1}} \cdot \frac{1}{c_1} = \left\{\begin{array}{l} 1, \text{если } \frac{x_1}{x_2} < \frac{c_1}{c_2} \\ 0, \text{если } \frac{x_1}{x_2} \ge \frac{c_1}{c_2} \end{array}\right\} \frac{1}{c_1}.$$

Функция Леонтьева предназначена для моделирования строго детерминированных технологий, не допускающих отклонения от технологических норм использования ресурсов на единицу продукции; обычно используются для описания мелкомасштабных или полностью автоматизированных производственных объектов.

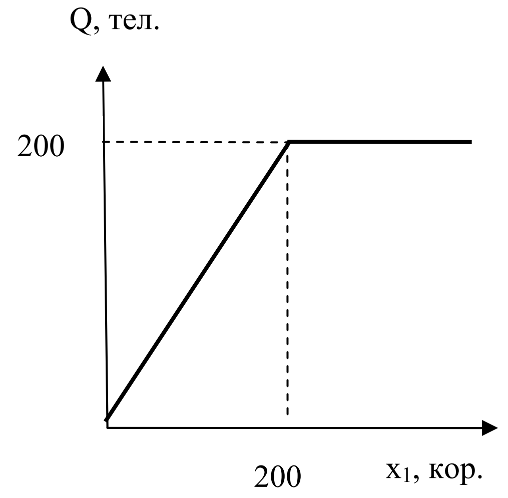

Рис. 1.9. Пояснение к примеру 1.6.2

Пример 1.6.2. *На конвейере сборка телевизоров осуществляется путем соединения корпуса и кинескопа, то есть имеется фиксированная пропорция использования ресурсов* $c_1=c_2=1$ *(1:1). Если на сборку поступило 200 корпусов и 500 кинескопов в месяц, то, по функции Леонтьева, будет собрано 200 телевизоров. Предельный продукт первого ресурса (корпусов) в этом случае равен 1, то есть дополнительно полученный со склада корпус позволит собрать 1 телевизор; предельный продукт второго ресурса (кинескопов) равен нулю, так как кинескопы имеются в избытке. Кривая выпуска показана на рис. 1.9.*

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 1.1
Определение коэффициентов производственной функции

1.1.1. Металлургический завод за последние 3 года характеризовался следующими показателями хозяйственной деятельности:

Год	Объем металла, тыс. тонн	Количество прессов, единиц	Численность работников, тыс. чел.
1	13	10	0,8
2	30	20	1,8
3	50	30	2,8

Построить графики кривых выпуска, на основе которых подобрать вид ПФ. Определить значения коэффициентов ПФ, объяснить их экономический смысл. Спрогнозировать объем металла в 4-й год, если запланировано довести количество прессов до 40 ед., численность работников до 3,5 тыс. чел.

1.1.2. Решить задачу 1.1.1, если агрофирма за последние 3 года имела следующие показатели хозяйственной деятельности:

Год	Объем сбора зерна, тонн	Количество комбайнов, единиц	Численность работников, чел.
1	15	2	12
2	20	5	18
3	22	10	25

Спрогнозировать объем сбора зерна в 4-й год, если запланировано довести количество комбайнов до 20 ед., численность работников до 35 чел.

1.1.3. При сборке печатной платы используется 40 чипов и 90 соединительных проводов. Построить графики кривых выпуска, если на сборку подано: а) 40000 чипов; б) 130000 соединительных проводов. Определить значения коэффициентов ПФ, объяснить их экономический смысл.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 1.2
Определение экономико-математических характеристик производственной функции

1.2.1-1.2.3. Для ПФ в задачах 1.1.1-1.1.3 получить выражения среднего и предельного продуктов, а также коэффициентов эластичности по ресурсам. Изобразить графически зависимости экономико-математических характеристик как функций соответствующего ресурса. В задачах 1.1.1,1.1.2 вычислить значения экономико-математических характеристик по данным 3-го и 4-го года работы, объяснить их экономический смысл, сопоставить эффективность работы в эти годы.

Глава 2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ИЗДЕРЖЕК

§2.1. Издержки коммерческой организации

Определение функции издержек

Издержки коммерческой организации C зависят от количества используемых ресурсов x_i, $i=1,2,...,n$, цен на них p_i, $i=1,2,...,n$ и представляют собой сумму стоимостных оценок затрат всех ресурсов $x_i p_i$, $i=1,2,...,n$, используемых для производства данного вида продукции, при условии, что непроизводительные затраты ресурсов отсутствуют, то есть выбрана технология минимально возможных издержек:

$$\min_x C(x_1, x_2) = \min_x (p_1 x_1 + p_2 x_2),$$

$$A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q, x_i \geq 0, i = 1,2.$$

Функция $C(x, p)$, удовлетворяющая этим условиям, получила название *функции издержек*. Функция издержек (затрат) характеризует минимальную сумму затрат как функцию объёма выпуска и цен ресурсов или, иначе, функция издержек характеризует минимальный уровень затрат на производство фиксированного объема выпуска Q при условии, что фирма (коммерческая организация) использует оптимальные комбинации ресурсов:

$$C(Q) = \sum_i p_i x_i^* ,$$

где символом * обозначены значения затрат ресурсов при наиболее экономичном способе производства.

Множество точек плоскости ресурсов производства при постоянном значении суммы издержек организации C носит название *изокосты* (рис.2.1):

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = C .$$

Уравнение изокосты может быть также записано в явном виде:

$$x_2 = \frac{C}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 .$$

Увеличение суммы издержек приводит к параллельному смещению изокосты по направлению вверх и вправо от начала координат (на рис. 2.1 сумма издержек возросла от значения C до значения C').

Влияние цен ресурсов на положение изокосты сказывается в том, что изменяется угловой коэффициент наклона изокосты, например, при неизменной цене второго ресурса $x_2 = x_2^A$ уменьшение цены первого ресурса обусловливает снижение наклона изокосты относительно оси первого ресурса (на рис. 2.1 цена первого ресурса уменьшается от значения p_1^* до значения p_1^{**}). Это означает, что при неизменном объеме затрат второго ресурса первый ресурс будет расходоваться тем в больших количествах, чем ниже его цена.

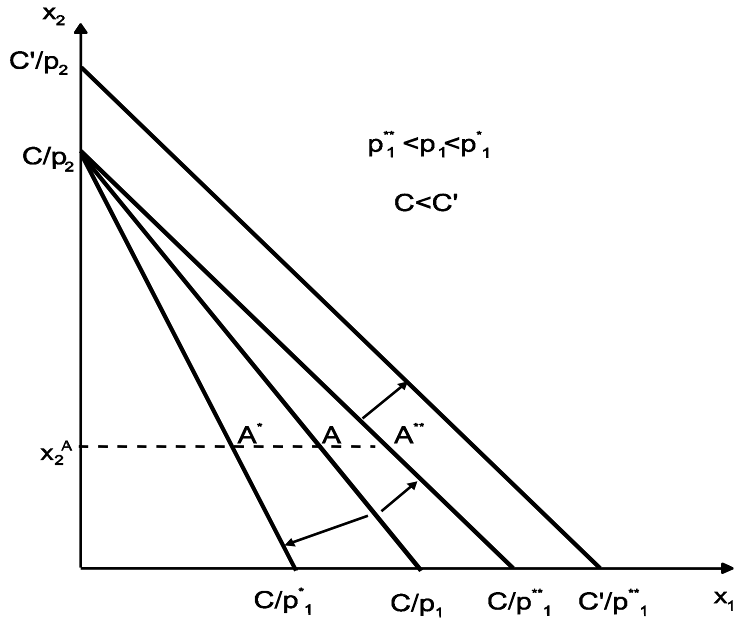

Рис. 2.1. Изокоста

В дальнейшем для упрощения изложения материала предполагается, что для производства продукции используются только два ресурса: $x_1=L$ – трудовые ресурсы и $x_2=K$ – основные производственные фонды.

Пример 2.1.1. *Фирма, занимающаяся производством ткани, использует два ресурса: пряжу по цене 10 руб./кг и рабочую силу (оплата труда работника 2000 руб. в месяц). На рис. 2.2. построены изокосты для ежемесячных издержек 100 тыс. руб., 200 тыс. руб. По рисунку можно определить, что для обеспечения издержек фирмы на уровне 100 тыс. руб. при потреблении 5 тонн пряжи число работников фирмы должно быть 25 чел. Если фирма готова увеличить издержки до 200 тыс. руб., то она может нанять 75 чел.*

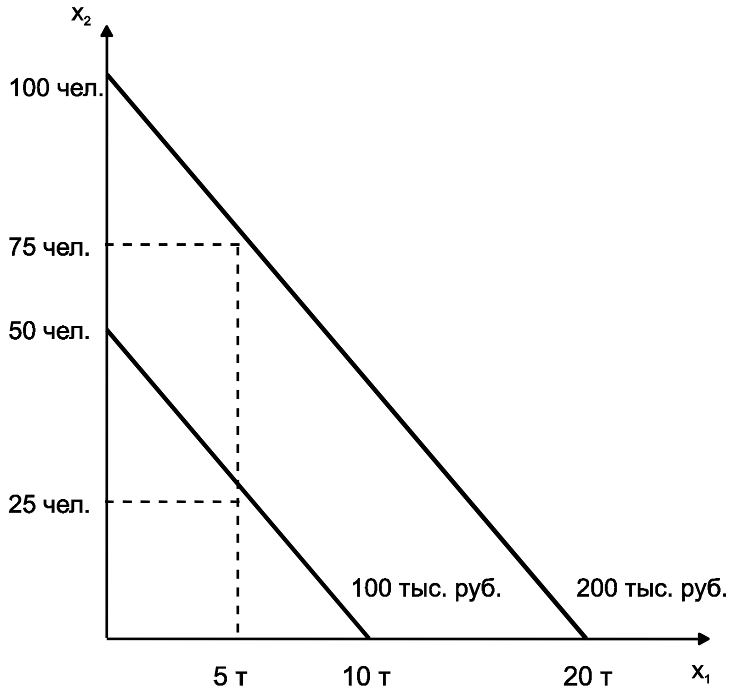

Рис. 2.2. Пояснение к примеру 2.1.1

Классификация издержек

Различают издержки в длительном периоде или долгосрочные издержки C_L (*Long Costs*) и издержки в коротком периоде, или краткосрочные издержки C_S (*Short Costs*). В длительном периоде все ресурсы являются переменными. В коротком периоде часть ресурсов являются постоянными, и их количество не может быть изменено в пределах данного периода.

Для краткосрочного периода издержки можно разделить на два вида: переменные издержки C_V (*Varied Costs*), изменяющиеся при изменении объёма выпуска, и постоянные издержки C_F (*Fixed Costs*), не зависящие от объёма производства. К переменным издержкам относятся затраты на сырьё, материалы, оплату труда производственных работников; к постоянным - затраты на содержание зданий, сооружений, оборудования, административно-управленческие расходы, арендная плата, налоги и т.п.

Таким образом, издержки в коротком периоде могут быть представлены как сумма постоянных и переменных издержек

$$C_S(Q) = C_F + C_V(Q) \qquad (2.1)$$

где $C_S(Q)$ – краткосрочные издержки на выпуск Q единиц продукции; C_F – постоянные издержки за период; $C_V(Q)$ – переменные издержки на производство Q единиц продукции.

Предельные и средние издержки

Для анализа издержек широко применяют такие показатели, как предельные и средние (удельные) издержки.

П р е д е л ь н ы е и з д е р ж к и *MC* характеризуют изменение затрат, обусловленное изменением выпуска продукции на единицу, и определяются как

$$MC(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ} \approx \frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q},$$

где символом “Δ” обозначено конечное изменение показателя.

Этот показатель применим для анализа затрат и в долгосрочном, и в краткосрочном периодах.

Поскольку постоянные издержки не зависят от объема выпуска, то краткосрочные предельные издержки с учетом (2.1) можно представить так:

$$MC_S(Q) = \frac{dC_S(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left[C_F + C_V(Q)\right] = \frac{dC_V(Q)}{dQ}.$$

Отсюда ясно, что краткосрочные предельные затраты характеризуют прирост переменных затрат при единичном приращении объема выпуска.

С р е д н и е и з д е р ж к и *AC* (*Average Costs*) характеризуют затраты, приходящиеся на единицу продукции:

$$AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$

Учитывая (2.1), краткосрочные средние издержки можно представить следующим образом:

$$AC_S(Q) = \frac{C_S(Q)}{Q} = \frac{1}{Q}\left[C_F + C_V(Q)\right] = \frac{C_F}{Q} + \frac{C_V(Q)}{Q} = \frac{C_F}{Q} + c_V,$$

где c_V – удельные переменные издержки (переменные издержки, приходящиеся на единицу продукции).

Отсюда следует, что краткосрочные средние издержки снижаются с увеличением объема продукции, то есть имеет место э к о н о м и я н а р а с ш и р е н и и п р о и з в о д с т в а в к р а т к о с р о ч н о м п е р и о д е.

§2.2. Функция издержек в долгосрочном периоде

Задача определения функции издержек

Функция издержек определяется в результате решения задачи минимизации издержек на производство фиксированного выпуска *Q*. Эту задачу можно записать в виде

$$\min_x C(x_1, x_2) = \min_x (p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

при условии, что $Q = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $x_i \geq 0$, $i = 1,2$.

Геометрическая интерпретация

Эта задача имеет наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 2.3). Если перемещать изокосту по направлению к началу координат до тех пор, пока она продолжает иметь общие точки с изоквантой, соответствующей фиксированному объёму выпуска Q_1, то решением задачи минимизации издержек будет общая точка A_1 изокосты C_1 и изокванты Q_1 с координатами $[x_1^*(Q_1), x_2^*(Q_1)]$. Эта точка касания зависит от объёма выпуска (поэтому записано $[x_1^*(Q_1), x_2^*(Q_1)]$). Если объём выпуска уменьшится до уровня Q_2 $(Q_2 < Q_1)$, то изменится положение точки касания на A_2 с координатами $[x_1^*(Q_2), x_2^*(Q_2)]$. Множество точек A_i, $i=1,2,...,n$, соответствующих различным объемам выпуска Q_i, $i=1,2,...,n$, образуют л и н и ю д о л г о с р о ч н о г о р а з в и т и я ф и р м ы. Точки, находящиеся на этой линии, характеризуют минимальные издержки производства, соответствующие фиксированным объемам выпускаемой продукции.

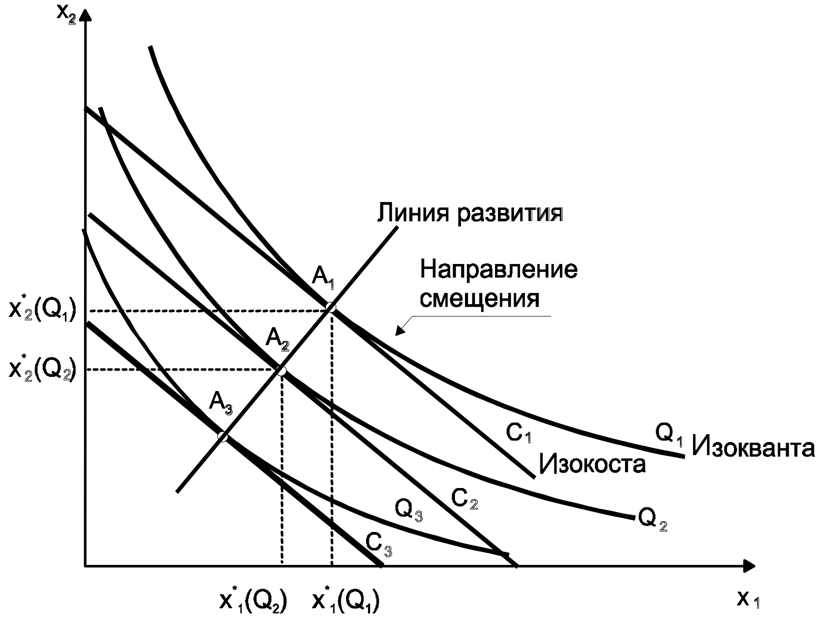

Рис. 2.3. Траектория долговременного развития

Изокванты на этом графике характеризуют технологические ограничения, т.е. каждая *i*-я изокванта отображает все комбинации ресурсов x_1 и x_2, с помощью которых можно обеспечить выпуск Q_i. Изокосты характеризуют экономические ограничения, т.е. каждая *i*-я изокоста отображает все комбинации ресурсов x_1 и x_2, имеющие при неизменных ценах ресурсов один и тот же уровень издержек C_i. Поскольку задача минимизации издержек сводится к нахождению точки, в которой изокванта касается самой низкой изокосты, то это будет означать, что комбинация ресурсов, соответствующая точке касания, обеспечит потребный выпуск при минимальных издержках. Тогда комбинация ресурсов $[x_1^*(Q_1), x_2^*(Q_1)]$, соответствующая точке A_1, обеспечит минимальные издержки на уровне C_1 выпуску Q_1, а комбинация ресурсов $[x_1^*(Q_2), x_2^*(Q_2)]$, соответствующая точке A_2, – на уровне C_2 выпуску Q_2.

Сформулируем условие касания: наклон изокванты должен быть равен наклону изокосты. Поскольку угол наклона изокванты определяется выражением

$$\operatorname{tg}\varphi_{изокванты} = -\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = \frac{MQ_1}{MQ_2},$$

а угол наклона изокосты, исходя из уравнения этой кривой,

$$p_1x_1 + p_2x_2 = \overline{C} \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{\overline{C}}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

равен

$$\operatorname{tg}\varphi_{изокосты} = -\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

то при $\operatorname{tg}\varphi_{изокосты} = \operatorname{tg}\varphi_{изокванты}$ выполняется условие:

$$\frac{MQ_1}{MQ_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{2.2}$$

Таким образом, долгосрочная траектория развития организации образована точками сочетаний ресурсов, отношение предельных продуктов которых при данном виде производственной функции равно отношению цен этих ресурсов.

Функции спроса на ресурсы

Выразим известный фиксированный выпуск Q в точке рыночного равновесия через оптимальные объёмы используемых ресурсов

$$Q = A\left(x_1^*\right)^{\alpha}\left(x_2^*\right)^{\beta}. \tag{2.3}$$

Подставим выражения предельных продуктов MQ_1, MQ_2 (см. пример 1.3.3.) в условие минимальности издержек (2.2), и выразим x_2^*:

$$\frac{A\alpha x_1^{*\alpha-1}x_2^{*\beta}}{A\beta x_1^{*\alpha}x_2^{*\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}x_1^* = hx_1^*, \tag{2.4}$$

где $h = \dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}$. Подставим x_2^* из (2.4) в ПФ (2.3), откуда найдем x_1^* как функцию объема выпуска:

$$Q = Ax_1^{*\alpha}\left(hx_1^*\right)^{\beta} \Rightarrow \quad x_1^*(Q) = \left(Ah^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \left(A\left[\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right]^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \tag{2.5}$$

Выражение $x_2^*(Q^*)$ определим, используя соотношение $x_2^*=hx_1^*$:

$$x_2^*(Q) = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\left(A\left[\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right]^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \tag{2.6}$$

Найденные значения $x_1^*(Q), x_2^*(Q)$ представляют собой ф у н к ц и и с п р о с а н а р е с у р с ы. Они позволяют для известного значения объема выпуска Q определить необходимые количества ресурсов, при которых достигается минимум издержек.

Функция издержек

Подставим значения $x_1^*(Q), x_2^*(Q)$ в выражение функции издержек

$$C(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2,$$

получим зависимость суммы затрат организации от объема выпуска продукции:

$$C(Q) = p_1\left(A\left[\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right]^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + p_2\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\left(A\left[\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right]^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

$$C(Q) = p_1\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left[A\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\beta}\right]^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = DQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \tag{2.7}$$

где $D = p_1\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left[A\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\beta}\right]^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}$.

Выражение (2.7) представляет собой функцию издержек. Необходимо подчеркнуть, что она является функцией выпуска *C(Q),* а не функцией затрачиваемых ресурсов $C(x_1,x_2)$. Полученная функция издержек соответствует длительному периоду, то есть $C(Q) = C_L(Q)$.

В случае отсутствия эффекта расширения масштаба $r=\alpha+\beta=1$ функция издержек представляет собой линейную функцию объема выпуска Q:

$$C(Q) = DQ.$$

Кривая функции издержек выпукла вверх при $r>1$; это означает, что при увеличении объема выпуска продукции происходит относительное уменьшение издержек, то есть наблюдается положительный эффект расширения масштаба производства. В случае $r<1$ кривая функции издержек выпукла вниз, что соответствует относительно более быстрому темпу роста издержек по сравнению с ростом объема производства.

Пример 2.2.1. *Для стекольного завода, приобретающего песок по цене 4 тыс. руб./т и топливо по цене 7 тыс. руб./т, определить характер кривых долгосрочных издержек* $C_L(Q)$ *при различных типах эффекта расширения масштаба: отсутствие эффекта расширения масштаба (r=1)* $\alpha = 0{,}3;\ \beta = 0{,}7$; *возрастающая отдача от расширения масштаба (r=1,2)* $\alpha = 0{,}4;\ \beta = 0{,}8$; *убывающая отдача от расширения масштаба (r=0,8)* $\alpha = 0{,}2;\ \beta = 0{,}6$.

Зависимость долгосрочных издержек от объема выпуска продукции (в тоннах) изображена на рис. 2.4. Функции издержек построены с использованием формулы (2.7), полагая A=1. Очевидно, что при возрастающей отдаче от расширения производства издержки фирмы растут замедленными темпами по сравнению с ростом объема выпуска, а в случае убывающей отдачи – ускоренными темпами. Графики на рис. 2.4 позволяют определить суммы издержек при различных объемах производ-

ства: например, при выпуске 4 тонн стекла в месяц фирма, работающая в экономичном режиме, затратит 45 тыс. руб. (если эффект расширения масштаба отсутствует).

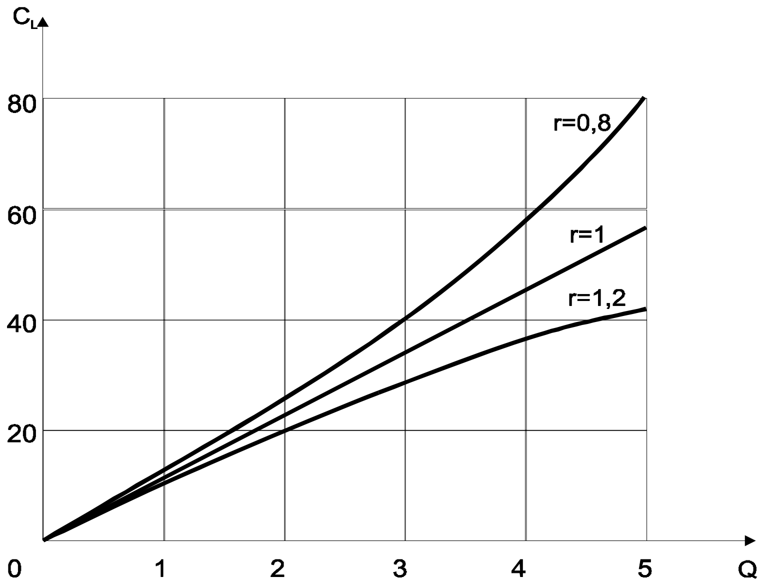

Рис. 2.4. Кривые долгосрочных издержек

§2.3. Долгосрочные издержки и расширение масштаба производства

Эффект масштаба

Из представленных на рис. 2.4 графиков следует, что важнейшим ф а к т о р о м, о п р е д е л я ю щ и м к о н ф и г у р а ц и ю к р и в о й $C_L(Q)$, я в л я е т с я в е л и ч и н а о т д а ч и о т м а с ш т а б а п р о и з в о д с т в а, которая для производственной функции Кобба–Дугласа характеризуется значением показателя $r = \alpha + \beta$. При постоянной отдаче от масштаба производства $r=1$ кривая $C_L(Q)$ имеет вид луча, выходящего из начала координат. Это указывает на то, что долгосрочные издержки с расширением масштаба производства ($w > 1$) увеличиваются в той же пропорции, в какой растет объём выпуска Q.

Расширение масштаба производства связано с кратным увеличением используемых ресурсов. Поэтому

$$(wx_1, wx_2) \Rightarrow \begin{cases} p_1\left(wx_1^*\right) + p_2\left(wx_2^*\right) = w\left(p_1x_1^* + p_2x_2^*\right) = wC_L, \\ Q\left(wx_1^*, wx_2^*\right) = w^1 Q\left(x_1^*, x_2^*\right), \end{cases}$$

то есть как сумма затрат, так и объем выпуска продукции возрастают в w раз.

При возрастающей отдаче $r>1$:

$$\left(wx_1, wx_2\right) \Rightarrow \begin{cases} p_1\left(wx_1^*\right) + p_2\left(wx_2^*\right) = w\left(p_1x_1^* + p_2x_2^*\right) = wC_L, \\ Q\left(wx_1^*, wx_2^*\right) = w^r Q\left(x_1^*, x_2^*\right), \end{cases}$$

но $w^r > w$, то есть рост объема выпуска опережает рост суммы издержек. Поэтому кривая $C_L(Q)$ (рис. 2.4) выпукла вверх. Важно подчеркнуть, что издержки с увеличением объёма выпуска возрастают, но возрастают всё медленнее.

Наконец, на рис. 2.3 представлена кривая $C_L(Q)$ для случая убывающей отдачи от масштаба производства $r<1$. В этом случае $w^r < w$, то есть при неизменных ценах затраты растут в большей степени, чем выпуск. Поэтому кривая $C_L(Q)$ является выпуклой вниз.

Средние и предельные издержки

Долгосрочные средние издержки определяются как

$$AC_L(Q) = \frac{C_L(Q)}{Q} = DQ^{\frac{1}{r}-1}. \tag{2.8}$$

Долгосрочные предельные издержки определяются как

$$MC_L(Q) = \frac{\partial C_L(Q)}{\partial Q} = \frac{1}{r}DQ^{\frac{1}{r}-1} = \frac{1}{r}AC_L(Q). \tag{2.9}$$

Из сравнения расчётных формул $AC_L(Q)$ и $MC_L(Q)$ следует, что конфигурация этих кривых совпадает, но их расположение друг относительно друга, благодаря значению множителя $\frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1}{r}$, изменяется.

При постоянной отдаче $\frac{1}{r} = 1$, значит кривые $AC_L(Q)$, $MC_L(Q)$ совпадают. При возрастающей отдаче $\frac{1}{r} < 1$, значит кривая $MC_L(Q)$ будет располагаться ниже кривой средних затрат $AC_L(Q)$. И, наконец, при убывающей отдаче $\frac{1}{r} > 1$, значит кривая $MC_L(Q)$ пройдёт над кривой средних затрат $AC_L(Q)$.

Пример 2.3.1. *Для фирмы, рассмотренной в примере 2.2.1, построить и проанализировать графики $AC_L(Q)$ и $MC_L(Q)$.*

Значения $AC_L(Q)$ и $MC_L(Q)$ рассчитаны по формулам (2.8), (2.9) и изображены на рис. 2.5, причем кривые средних издержек показаны *сплошной линией, кривые предельных издержек – пунктирной линией. Увеличение объема выпуска при неизменной технологии обусловлено кратным множителю w увеличением используемых ресурсов. В случае постоянной отдачи от расширения масштаба производства (r=1) кривые средних и предельных издержек на рис. 2.5 совпадают. В случае возрастающей отдачи от расширения масштаба производства (r>1) кривые средних и предельных издержек будут убывающими, причем, поскольку предельные издержки отличаются от средних на множитель* $\frac{1}{r} < 1$*, кривые будут сближаться. В случае убывающей отдачи от расширения масштаба производства (r<1) кривые средних и предельных издержек будут возрастающими и расходящимися, так как* $\frac{1}{r} > 1$.

По рис. 2.5 можно определить, что при выпуске 4 тонн стекла в месяц фирма в среднем расходует 9 тыс. руб. на тонну (если эффект расширения масштаба положительный); при этом выпуск дополнительной (5-й) тонны стекла обойдется фирме в сумму 8 тыс. руб.

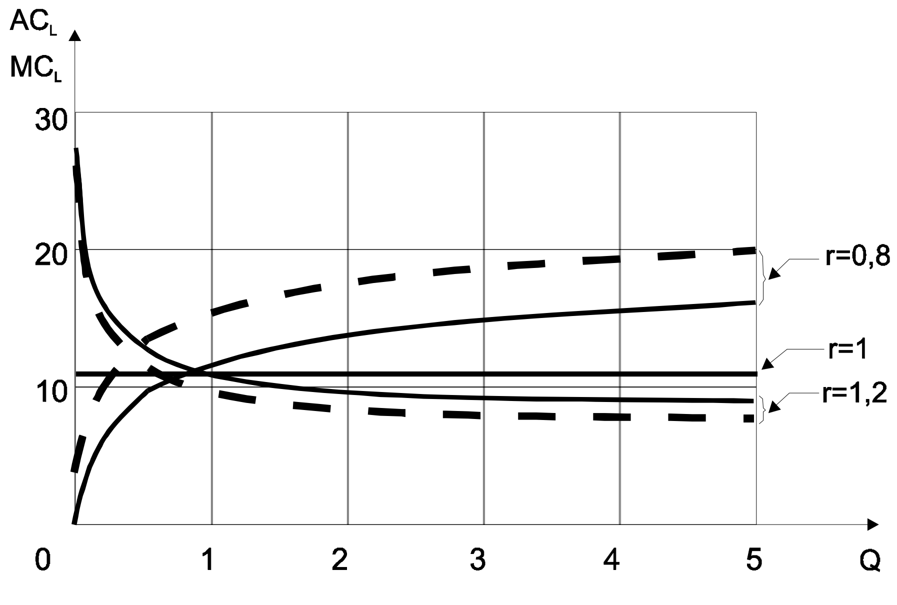

Рис. 2.5. Кривые долгосрочных средних и предельных издержек

Таким образом, положительный эффект расширения масштаба производства заключается в том, что величины средних и предельных издержек снижаются с увеличением объема выпуска, причем уменьшение предельных издержек происходит опережающими темпами.

§2.4. Функция издержек в краткосрочном периоде

Задача определения функции издержек

Как отмечалось выше, в краткосрочном периоде количество некоторых ресурсов не может быть изменено. Будем полагать, что в двухфакторной модели количество второго ресурса неизменно и равно $x_2 = b_2 = \text{const}$. Тогда задача минимизации краткосрочных издержек для фиксированного объема выпуска Q примет следующий вид:

$$\min_{x_1} C(x_1,x_2) = \min_{x_1}(p_1 x_1 + p_2 x_2),$$

$$A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q,\ x_1 \geq 0,\ x_2 = b_2.$$

Геометрическая интерпретация

Эта задача также имеет наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 2.6). Если перемещать изокосты по направлению к началу координат до тех пор, пока изокоста не пересечет изокванту, соответствующую выпуску Q, в точке ее пересечения с *линией постоянного ресурса*, то решением задачи минимизации издержек будет общая точка B с координатами $\left[x_1(Q(b_2)), b_2\right]$ изокосты C_2, фиксированной изокванты Q и линии постоянного ресурса.

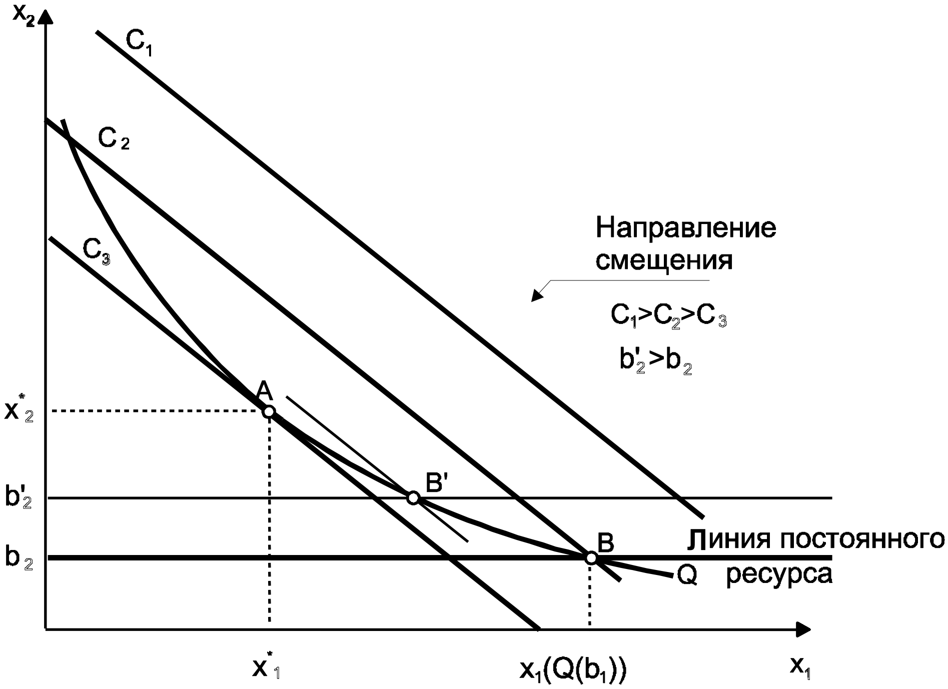

Рис. 2.6. Определение суммы издержек в краткосрочном периоде

Долгосрочные издержки C_3 при том же объеме выпуска Q определяются точкой касания изокосты C_3 и фиксированной изокванты Q в точке A с координатами $\left[x_1^*, x_2^*\right]$, причем величина долгосрочных издержек не превышает суммы краткосрочных издержек, так как изокоста C_3 расположена не выше изокосты C_2. Это означает, что затраты на выпуск одного и того же объема продукции в долгосрочном периоде не больше, чем в краткосрочном. Эти издержки производства могут быть равны друг другу, если $x_1^* = x_1\left(Q\left(b_2\right)\right)$, $x_2^* = b_2$.

Увеличение располагаемого объема постоянного ресурса приводит к сдвигу линии постоянного ресурса вверх. В результате комбинация ресурсов, обеспечивающая объем выпуска Q, будет постепенно приближаться к точке с координатами $\left[x_1^*, x_2^*\right]$, то есть сумма издержек в долгосрочном периоде является пределом суммы издержек в краткосрочном периоде при стремлении запаса фиксированного ресурса к бесконечности (неограниченный располагаемый объем ресурса).

Аналитическое решение

Для определения неизвестной x_1 координаты точки B достаточно решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q, \\ x_2 = b_2. \end{cases}$$

Первое уравнение системы характеризует фиксированную изокванту Q, а второе – линию постоянного ресурса. Очевидно, что искомая координата равна

$$x_1^{\alpha} = \frac{Q}{Ab_2^{\beta}} \Rightarrow x_1(Q) = \left(\frac{Q}{Ab_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{Ab_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Q^{\frac{1}{\alpha}} = gQ^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.10}$$

где $g = \left(\frac{1}{Ab_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Формула (2.10) позволяет рассчитать потребное количество переменного ресурса $x_1(Q)$, обеспечивающее с постоянным ресурсом x_2 выпуск Q. Причем количества ресурсов $x_1(Q)$, $x_2 = b_2$ позволяют фирме осуществить выпуск Q при минимальных издержках. Определим эти издержки:

$$C_S(Q) = p_1 x_1(Q) + p_2 b_2 = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha}} + p_2 b_2 . \qquad (2.11)$$

Первое слагаемое в функции краткосрочных издержек характеризует сумму переменных издержек, а второе слагаемое является вкладом фиксированных (постоянных) краткосрочных издержек.

Пример 2.4.1. *Для стекольного завода, рассмотренного в примере 2.2.1, определить издержки в случае, если поставка топлива ограничена объемом 2 тонны в месяц при отсутствии эффекта расширения масштаба* $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$ *; объем выпуска стекла составляет 4 тонны.*

Поскольку $g = \left(\frac{1}{2^{0,8}}\right)^{\frac{1}{0,3}} = 0{,}16$, *то по формуле (2.11) рассчитаем* $C_S(Q) = 4 \cdot 0{,}16 \cdot 4^{\frac{1}{0,3}} + 7 \cdot 2 = 76$ *тыс. руб. Сравнив с результатом в примере 2.2.1, замечаем, что издержки в краткосрочном периоде, с учетом ограничения на поставку топлива, значительно возросли – на (76-45)=31 тыс. руб.*

§2.5. Функция издержек при переменном эффекте расширения масштаба производства

Характер изменения эффекта масштаба

До сих пор предполагалось, что показатель эффекта масштаба r не является функцией объема выпуска. Однако во многих производственных процессах возрастающая отдача от расширения масштаба производства ($r>1$) сменяется при достижении определенного объема выпуска вначале постоянной отдачей ($r=1$), а затем убывающей ($r<1$). Производственной функции с переменным характером отдачи от расширения масштаба производства соответствует изменяющаяся конфигурация кривых издержек.

Определим аналитическое выражение функции долгосрочных издержек с учетом формулы (2.7):

$$C_L(Q) = D Q^{\frac{1}{r(Q)}}, \qquad (2.12)$$

для случая, когда показатель степени однородности является линейно убывающей функцией объема выпуска от максимального значения $r_{\max}$ при объеме выпуска $Q_{\min}$ до минимального значения $r_{\min}$ при $Q_{\max}$, как показано на рис. 2.7, то есть $r = r(Q)$.

Геометрическая интерпретация

Разобьем диапазон изменения объема выпуска (рис. 2.7) на следующие характерные участки:

$$Q_{\min} < Q < Q_{r=1}, \quad Q = Q_{r=1}, \quad Q_{r=1} < Q < Q_{\max} \ .$$

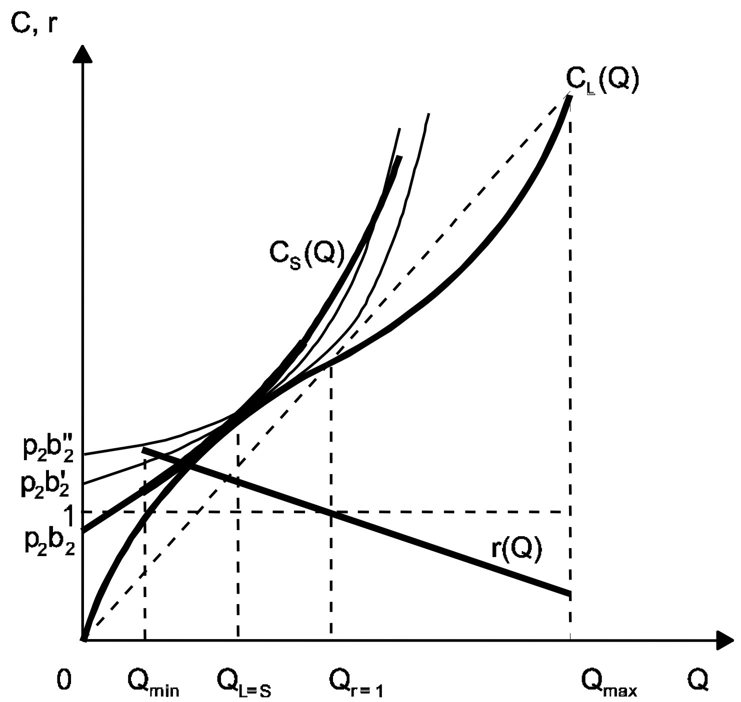

Рис. 2.7. Кривая издержек в долгосрочном и краткосрочном периодах

На первом участке имеет место возрастающая отдача от расширения масштаба производства (*r*>*1*, $\frac{1}{r(Q)} < 1$); поэтому зависимость совокупных затрат $C_L(Q)$ будет отображаться кривой, выпуклой вверх, причем по мере приближения текущего значения Q к $Q_{r=1}$ при постоянной отдаче (*r*=*1*), кривая переходит в прямую линию $C_L(Q) = DQ^1$. На третьем участке, при убывающей отдаче (*r*<*1*, $\frac{1}{r(Q)} > 1$), прямая постепенно переходит в кривую, выпуклую вниз. Таким образом, при $Q_{r=1}$ имеет место перегиб кривой совокупных издержек.

Кривую долгосрочных издержек при переменном эффекте расширения масштаба производства принято называть «S-образной» кривой в связи с ее видом. Эта кривая охватывает весь период существования и развития фирмы, начиная от малого предприятия и заканчивая крупной корпорацией.

Функция издержек в краткосрочном периоде

С учетом формулы (2.11) преобразуем выражение суммы затрат в краткосрочном периоде к следующему виду:

$$C_S(Q) = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha(Q)}} + p_2 b_2 .$$

Кривая $C_s(Q)$ при небольших значения Q будет близка к прямой линии, но по мере возрастания Q она будет переходить в кривую, все более выпуклую вниз, как показано на рис. 2.7. Изменение располагаемого количества постоянного ресурса приводит к смещению кривой функции издержек в краткосрочном периоде. Увеличение объема постоянного ресурса приводит к сдвигу линии постоянного ресурса вверх. В результате каждая последующая кривая краткосрочных затрат будет касаться кривой $C_L(Q)$ при всех больших значениях объема выпуска (на рис. 2.7 значения запаса ресурса $b_2 < b'_2 < b''_2$). Кривая долгосрочных затрат представляет собой огибающую для бесконечно большого числа кривых $C_S(Q)$.

Средние издержки

Графически средние издержки определяются тангенсом угла наклона луча, проведенного из начала координат к кривой совокупных затрат в точке, соответствующей выбранному объёму выпуска.

Определим средние значения долгосрочных издержек, разделив функцию издержек (2.12) на Q. Расчетная формула средних долгосрочных издержек примет следующий вид:

$$AC_L(Q) = \frac{1}{Q} C_L(Q) = D Q^{\frac{1}{r(Q)} - 1} .$$

Расчетная формула средних краткосрочных затрат определяется так:

$$AC_S(Q)=\frac{1}{Q}C_S(Q)=p_1gQ^{\frac{1}{\alpha(Q)}-1}+\frac{p_2b_2}{Q}.$$

В полученном выражении первое слагаемое характеризует средние переменные затраты AC_V, а второе – средние постоянные затраты AC_F.

С учетом проведенного ранее разбиения интервала изменения объема выпуска на характерные участки:

$$Q_{\min}<Q<Q_{r=1},\quad Q=Q_{r=1},\quad Q_{r=1}<Q<Q_{\max}$$

рассмотрим взаимное расположение кривых совокупных и средних издержек, показанных на рис. 2.8.

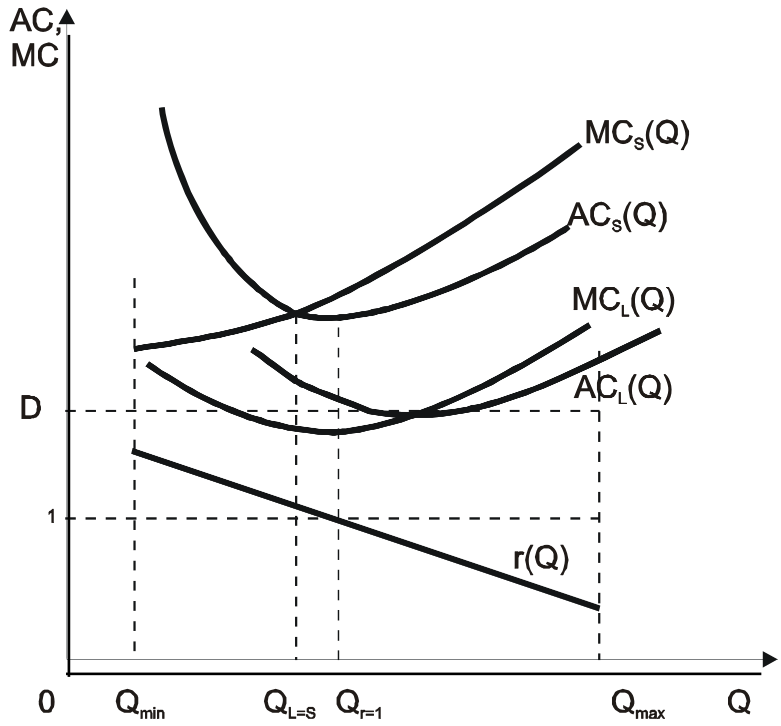

Рис. 2.8. Кривые средних и предельных издержек

Показатель степени $\frac{1}{r(Q)}-1$ характеризует поведение кривой средних долгосрочных затрат: если $r(Q)>1$, то $\frac{1}{r(Q)}-1<0$, поэтому кривая средних долгосрочных издержек является убывающей; если $r(Q)=1$, то $\frac{1}{r(Q)}-1=0$, поэтому функция средних долгосрочных издержек принимает постоянное значение, равное D; если

$r(Q) < 1$, то $\frac{1}{r(Q)} - 1 > 0$, поэтому кривая средних долгосрочных издержек является возрастающей.

Если $r(Q) >> 1$, то кривая средних краткосрочных издержек является убывающей, однако такой случай возможен крайне редко; в остальных случаях кривая средних краткосрочных издержек является возрастающей.

При объеме выпуска $Q = Q_{L=S}$, как следует из рис. 2.7, средние краткосрочные и долгосрочные издержки равны друг другу.

Предельные издержки

Графически предельные издержки определяются тангенсом угла наклона касательной к кривой издержек в точке, соответствующей выбранному объему выпуска. В соответствии с геометрическим смыслом кривые MC_L, MC_S изображены на рис. 2.8.

Кривые совокупных издержек в долгосрочном и краткосрочном периодах, показанные на рис. 2.7, приводят к выводу о том, что на интервале $Q_{\min} < Q < Q_{L=S}$ кривая краткосрочных издержек имеет меньший наклон, чем кривая долгосрочных издержек, поэтому на указанном интервале

$$MC_L(Q) > MC_S(Q).$$

На интервале $Q_{L=S} < Q < Q_{\max}$ кривая краткосрочных издержек имеет больший наклон, чем кривая долгосрочных издержек, поэтому на данном интервале

$$MC_L(Q) < MC_S(Q).$$

Наконец, при $Q = Q_{L=S}$ выполняется условие

$$MC_L(Q) = MC_S(Q).$$

Таким образом, при $Q_{\min} < Q < Q_{L=S}$ более экономичным является краткосрочный период, то есть для организации невыгодно изменять объемы затрат всех ресурсов производства, так как происходит относительная экономия постоянных издержек при расширении масштаба производства. При $Q_{L=S} < Q < Q_{\max}$ изменение объемов затрат всех ресурсов оказывается экономичнее.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 2.1

Функция издержек в долгосрочном периоде

2.1.1. На парфюмерной фабрике для изготовления духов используют наполнитель по цене 50 руб. за кг и ароматизатор по цене 70 руб. за кг. Коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам равны 0,3 и 0,7 соответственно. Определить функции спроса на ресурсы и функцию издержек, если потребление ресурсов не ограничено и технология описывается ПФ Кобба-Дугласа. Построить графики функций спроса на ресурсы и функции издержек.

2.1.2. Решить задачу 2.1.1 графическим методом, построив линию долговременного развития.

2.1.3-2.1.4. Решить задачи 2.1.1-2.1.2, если коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам составляют а) 0,4 и 0,8 соответственно; б) 0,3 и 0,6 соответственно.

2.1.5-2.1.8. В задачах 2.1.1-2.1.4 определить функции предельных и средних издержек. Построить графики.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 2.2

Функция издержек в краткосрочном периоде

2.2.1. Решить задачу 2.1.1, если расход ароматизатора по условиям договора с поставщиком ограничен объемом 500 кг в месяц.

2.2.2. Решить задачу 2.2.1 графическим методом.

2.2.3-2.2.4. Решить задачи 2.2.1-2.2.2, если коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам составляют а) 0,4 и 0,8 соответственно; б) 0,3 и 0,6 соответственно.

2.2.5-2.2.8. В задачах 2.2.1-2.2.4 определить функцию средних издержек. Построить график.

Глава 3. ТЕОРИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КОММЕРЧЕСКОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

§3.1. Проблема рациональной коммерческой деятельности

Функция коммерческой организации

Коммерческая организация (предприятие, фирма) – это самостоятельно хозяйствующий субъект, созданный для производства продукции, выполнения работ или оказания услуг в целях удовлетворения общественной потребности и получения *прибыли*. В процессе коммерческой деятельности организация затрачивает экономические факторы (расходует приобретенные ресурсы) и реализует созданные товары (работы, услуги) другим хозяйствующим субъектам.

Перед организацией стоит задача выбора рационального (наивыгоднейшего) способа осуществления коммерческой деятельности. Условия задачи включают в себя:

- вектор цен на факторы производства

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

которые, как предполагается, определяются рыночным равновесием и не подвержены влиянию рассматриваемой организации;

- номенклатуру ресурсов производства

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и вид производственной функции $Q = Q(x)$;

- уровень цены продукции фирмы p_0, определяемый рыночным равновесием;
- характеристики рынка, конкретизирующие предпосылки формирования цен на продукты и ресурсы:
  - совершенная конкуренция при большом количестве взаимно независимых фирм, производящих стандартизированную продукцию, не оказывая влияния на ее цену;
  - несовершенная конкуренция (монополистическая конкуренция, олигополия, монополия);

- длительность периода:
  - долгосрочный период, в течение которого организация имеет возможность выбрать любой неотрицательный вектор затрат
  $$\vec{x} \geq 0;$$
  - краткосрочный период, в рамках которого возможный выбор вектора затрат ограничен располагаемым запасом ресурсов
  $$\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n),$$
  то есть вектор затрат ограничен
  $$g(\vec{x}) \leq \vec{b}.$$

Задача фирмы Основная задача коммерческой организации состоит в выборе: а) ассортимента и объема выпуска, то есть что производить и в каких количествах; б) производственной функции и суммы издержек, то есть каким технологическим способом и с какими затратами вести производство, чтобы м а к с и м и з и р о в а т ь п р и б ы л ь.

Организация формирует финансовый результат (прибыль или убыток) продаж как разность периодического дохода R (*Revenue*) и издержек производства и реализации C (*Costs*):

$$П = R - C.$$

Доход за период вычисляется как произведение объема выпуска продукции на ее цену:

$$R = p_0 Q = p_0 Q(x).$$

Издержки производства равны общим выплатам за приобретение всех ресурсов, использованных в производственном процессе:

$$C = p_1 x_1 + p_2 x_2.$$

Фундаментальная задача фирмы заключается в выборе вектора ресурсов $\vec{x}$, максимизирующего прибыль организации:

$$\max\left[p_0 Q(x) - p_1 x_1 - p_2 x_2\right].$$

Изопрофита Если зависимость суммы прибыли от объемов затрат факторов производства представлена в виде:

$$П(x_1, x_2) = p_0 Q(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2,$$

то выразив из этого соотношения объем выпуска продукции

$$Q(x_1, x_2) = \frac{\Pi}{p_0} + \frac{p_1}{p_0} x_1 + \frac{p_2}{p_0} x_2,$$

получим зависимость объема выпуска Q от величин затраченных ресурсов при некотором значении прибыли Π, которая называется и з о п р о ф и т о й (изопрофитной поверхностью). Если один из факторов (например, x_2) фиксирован, то изопрофита представляет собой прямую линию с угловым коэффициентом, равным соотношению цен переменного фактора и продукта.

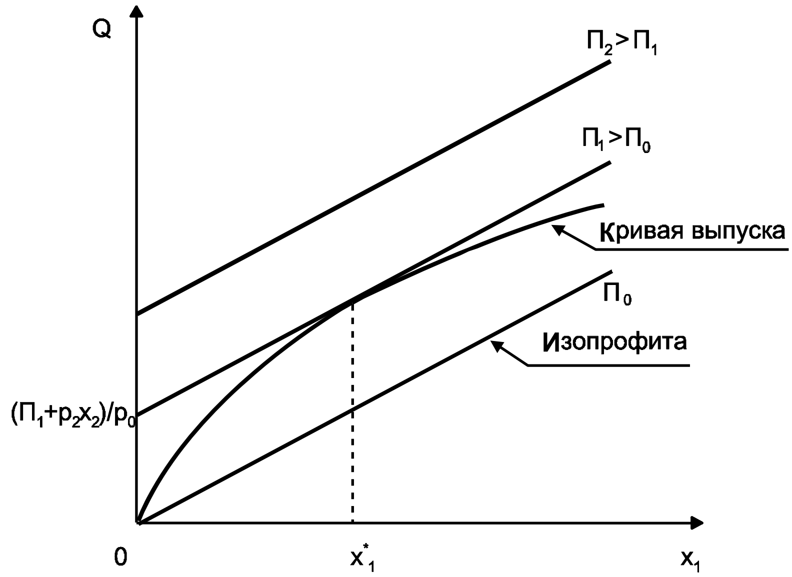

Рис. 3.1. Изопрофита

На рис. 3.1 показан вид изопрофиты при $x_2 = fixed,\ \ x_1 = var$. Поскольку предельный продукт равен угловому коэффициенту касательной к кривой выпуска

$$MQ_1 = \frac{\partial Q(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{p_1}{p_0},$$

то в некоторой точке изопрофита касается кривой выпуска. Абсцисса точки касания x_1^* представляет собой о п т и м а л ь н ы й р а с х о д р е с у р с а x_1, о б е с п е ч и в а ю щ и й м а к с и м а л ь н у ю с у м м у п р и б ы л и при данном виде производственной функции.

§3.2. Рациональная коммерческая деятельность в условиях совершенной конкуренции

Черты совершенной конкуренции

Совершенная конкуренция как одна из моделей рынка имеет следующие особенности:

- наличие множества организаций, реализующих стандартизированные товары (услуги);
- доступ на рынок совершенно свободен, поэтому свободно перемещение ресурсов;
- объем продукции отдельной коммерческой организации несопоставим с объемом реализации данной продукции на рынке в целом по отрасли ($Q_{фирмы} << Q_{отрасли}$), поэтому каждая организация продает продукцию по установившейся в рамках рыночного равновесия цене и не может оказывать на нее влияния.

В этих условиях функция предложения продукции данной организации ($Q_{фирмы}$) на рис. 3.2 является кривой, приближающейся к горизонтальной прямой, то есть цена предложения не зависит от объема предложения организации.

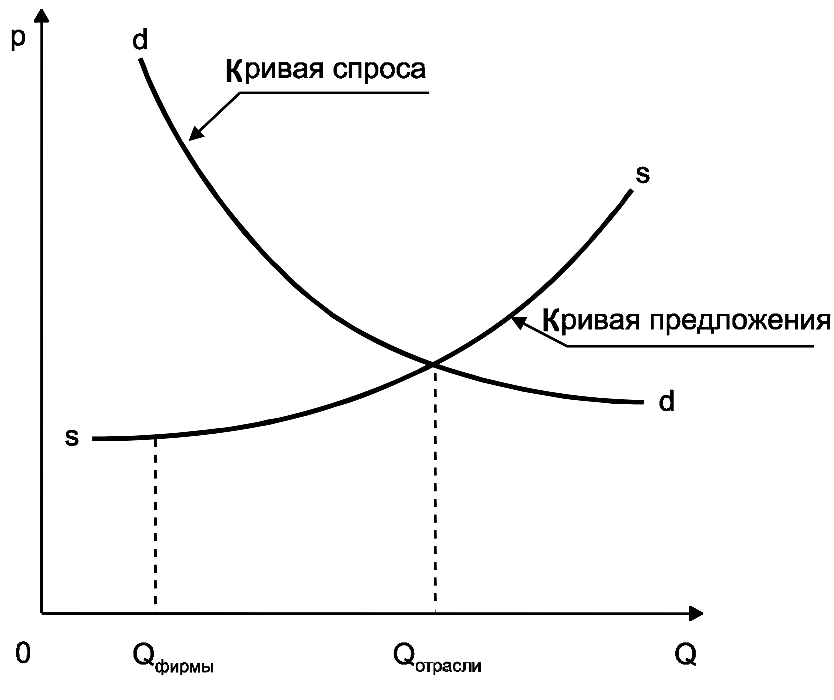

Рис. 3.2. Равновесие при совершенной конкуренции

Таким образом, условия совершенной конкуренции имеют вид:

$$\frac{\partial p_0}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0, \ i = 1,2,...,n .$$

Условия оптимальности в долгосрочном периоде

Рассмотрим деятельность фирмы в долгосрочном периоде, то есть при неограниченных факторах производства. В условиях совершенной конкуренции основная задача коммерческой организации

$$\max\left[p_0 Q - C(Q)\right]$$

может быть решена в соответствии с необходимыми условиями экстремума функции одной переменной:

- условие первого порядка

$$\frac{d\Pi\left(Q^*\right)}{dQ} = 0, \qquad (3.1)$$

- условие второго порядка

$$\frac{d^2\Pi\left(Q^*\right)}{dQ^2} < 0, \qquad (3.2)$$

где Q^* – оптимальное значение объема выпуска продукции.

Из условия первого порядка (3.1) следует, что

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left[p_0 Q - C(Q)\right] = 0,$$

$$p_0 = \frac{dC\left(Q^*\right)}{dQ} = MC\left(Q^*\right).$$

Поскольку цена предложения продукта представляет собой предельный доход MR, то есть прирост дохода организации в расчете на каждую дополнительную единицу продукции

$$p_0 = \frac{d}{dQ}\left(p_0 Q\right) = \frac{dR}{dQ} = MR,$$

то условие первого порядка приводит к необходимости равенства предельного дохода предельным издержкам при оптимальном объеме выпуска:

$$MC\left(Q^*\right) = MR\left(Q^*\right). \qquad (3.3)$$

Условие второго порядка сводится к неравенству вида:

$$\frac{d^2\Pi(Q)}{dQ^2}=\frac{d}{dQ}\left[\frac{d\Pi(Q)}{dQ}\right]=\frac{d}{dQ}\left[p_0-MC(Q)\right]=-\frac{dMC\left(Q^*\right)}{dQ}<0,$$

или

$$\frac{dMC\left(Q^*\right)}{dQ}>0, \qquad (3.4)$$

то есть при оптимальном объеме выпуска продукции предельные издержки должны возрастать.

Геометрическая интерпретация

Условие (3.3) выявляет две стационарные точки функции прибыли $\Pi(Q)$, в которых угол наклона касательной к кривой издержек $C(Q)$ равен углу наклона прямой дохода – это точки с координатами Q' и Q^*, изображенные на рис. 3.3.

Однако точка Q' принадлежит отрезку $[Q', Q^*]$, на котором увеличение дохода превышает увеличение издержек, так как линия предельного дохода (прямая p_0) лежит выше кривой предельных издержек. На отрезке $[Q^*, Q''']$ увеличение издержек превосходит увеличение дохода, поскольку кривая MC расположена выше линии p_0. Условие (3,4) означает, что из точек Q' и Q^* нужно выбрать ту, которая соответствует восходящей ветви кривой MC.

Таким образом, на участке $[Q', Q^*]$ каждая дополнительная единица продукции увеличивает прибыль, а на участке отрезка $[Q^*, Q''']$ дополнительная единица выпуска уменьшает прибыль. Следовательно, для максимизации прибыли организация должна наращивать объем производства до тех пор, пока не будет достигнуто равенство цены продукции и предельных издержек при Q^*, а затем прекратить наращивать объем выпуска.

Кривая средних издержек AC является убывающей при $AC>MC>0$ и возрастающей при $MC>AC>0$; таким образом, кривая средних издержек пересекает кривую предельных издержек в точке минимума средних издержек. Данная зависимость объясняется тем, что выпуск дополнительной единицы продукции, приводящей к приросту издержек на величину MC, меньшую среднего уровня издержек AC, снижает средние издержки; этот участок соответствует положительному эффекту расширения производства. Когда сумма издержек *MC*, обусловленная выпуском дополнительной единицы продукции, превышает установившийся в среднем по производству уровень издержек *AC*, то дальнейшее наращивание объема выпуска повышает величину средних издержек.

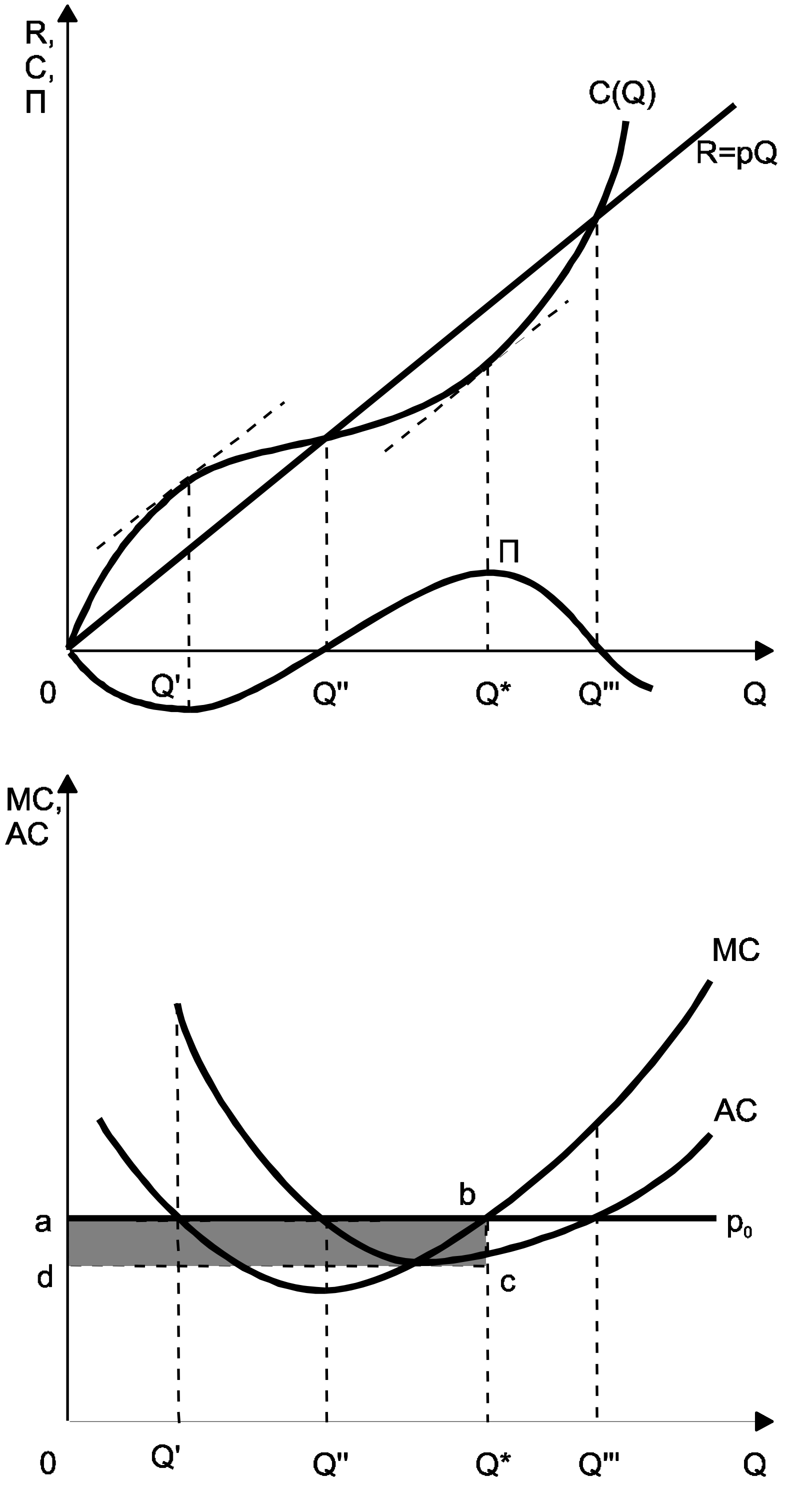

Рис. 3.3. Оптимальный объем выпуска при совершенной конкуренции

График средних издержек на рис. 3.3 пересекает линию p_0 в точках Q'' и Q''', характерных тем, что при таких объемах выпуска совокупные затраты $C(Q)$ равны доходу $R = p_0 Q$, то есть обеспечивается безубыточная деятельность. Отрезок bc характеризует прибыль, приходящуюся на единицу выпуска, так как bQ^* – это доход с единицы продукции, а cQ^* – издержки в расчете на единицу выпуска. Поэтому площадь прямоугольника $abcd$ представляет собой совокупную прибыль организации.

Обобщение условия MR=MC

Условие равенства предельного дохода предельным издержкам

$$MR = MC$$

является ориентиром оптимальности выпуска с точки зрения прибыли *и для других рыночных моделей*, но только при совершенной конкуренции можно заменить предельный доход ценой, то есть условие

$$p_0 = MC$$

является частным случаем условия $MR = MC$.

§3.3. Планирование по конкурентной модели в долгосрочном периоде

Особенности долгосрочного периода

Рассмотренные в предыдущем параграфе необходимые условия оптимальности производственной программы получены без учета ограничений, накладываемых в связи с исчерпаемостью располагаемых объемов ресурсов. Таким образом, сформулированная модель представляет собой схему определения оптимального объема выпуска в д о л г о с р о ч н о м п е р и о д е .

В долгосрочном периоде задача рациональной коммерческой деятельности является задачей безусловной оптимизации.

Оптимальный план

В качестве примера рассмотрим модель долгосрочного планирования

$$\max \Pi = \max\left[p_0 Q(x) - p_1 x_1 - p_2 x_2\right]$$

в случае двухфакторной производственной функции Кобба-Дугласа

$$Q = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}. \tag{3.5}$$

Условия оптимальности первого порядка позволяют определить объемы затрат каждого фактора, обеспечивающие максимальное значение прибыли:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} - p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} - p_2 = 0, \end{cases}$$

откуда следуют необходимые условия оптимальности:

$$\begin{cases} p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} = p_1, \\ p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} = p_2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Дифференцируя выражение производственной функции (3.5) и подставляя производные в (3.6), получим:

$$\begin{cases} p_0 \alpha \dfrac{Q}{x_1^*} = p_1, \\ p_0 \beta \dfrac{Q}{x_2^*} = p_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \alpha Q \dfrac{p_0}{p_1}, \\ x_2^* = \beta Q \dfrac{p_0}{p_2}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Это означает, что затраты ресурсов пропорциональны планируемому объему выпуска Q и обратно пропорциональны ценам, уплачиваемым при приобретении соответствующих ресурсов. Выражения (3.7) представляют собой ф у н к ц и и с п р о с а н а р е с у р с ы при совершенной конкуренции в долгосрочном периоде.

Из уравнений (3.7) вытекает, что

$$x_2^* = \frac{\beta}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} x_1^*,$$

то есть зависимость затрат одного ресурса от объема затрат другого является линейной функцией (см. рис. 3.5).

Оптимальный объем выпуска

Рассмотрим задачу определения объема выпуска продукции Q^*, обеспечивающего максимальное значение прибыли в случае, если производственный процесс описывается функцией Кобба-Дугласа.

Подставим функции спроса (3.7) на факторы производства в функцию Кобба-Дугласа (3.6):

$$Q^* = A\left(\frac{p_0\alpha}{p_1}Q^*\right)^{\alpha}\left(\frac{p_0\beta}{p_2}Q^*\right)^{\beta} = A\left(\frac{p_0\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_0\beta}{p_2}\right)^{\beta}\left(Q^*\right)^{\alpha+\beta},$$

$$\frac{Q^*}{\left(Q^*\right)^{\alpha+\beta}} = \left(Q^*\right)^{1-(\alpha+\beta)} = A\left(\frac{p_0\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_0\beta}{p_2}\right)^{\beta},$$

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}\left(\frac{p_0\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}}\left(\frac{p_0\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}}. \qquad (3.8)$$

Таким образом, в случае положительного эффекта расширения масштаба производства ($\alpha+\beta>1$) показатели степени $\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}<0$, $\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}<0$, следовательно оптимальное значение объема продукции тем больше, чем ниже цена продукта по сравнению с ценами ресурсов. При отрицательном эффекте расширения масштаба, имеющем более широкое распространение на практике, наблюдается обратная ситуация: чем значительнее цена продукта превосходит цены ресурсов, тем более высокого значения достигает оптимальный объем выпуска.

Пример 3.3.1. *Для мукомольного завода, приобретающего зерно по цене 200 руб. за тонну и энергию по цене 300 руб. за киловатт-час, и реализующего муку по цене 10 тыс. руб. за тонну, определить оптимальный объем выпуска при различных типах эффекта расширения масштаба: а) возрастающая отдача от расширения масштаба* $\alpha=0{,}8; \beta=0{,}6$ *; б) убывающая отдача от расширения масштаба* $\alpha=0{,}2; \beta=0{,}6$ *; в) отсутствие эффекта расширения масштаба* $\alpha=0{,}3; \beta=0{,}7$ *.*

Рассчитаем оптимальный объем продукции по формуле (3.8) (в тоннах), полагая A=1.

а) $Q^* = \left(\frac{10 \cdot 0{,}8}{0{,}2}\right)^{\frac{0{,}8}{1-(0{,}8+0{,}6)}} \left(\frac{10 \cdot 0{,}6}{0{,}3}\right)^{\frac{0{,}6}{1-(0{,}8+0{,}6)}} = 0{,}00002$ *тонн, то есть при возрастающей отдаче от расширения производства (рис. 3.3) по формуле (3.8) определяется объем продукции Q', при котором достигается наименьшая прибыль фирмы (зона убытка); дальнейшее расширение производства в этом случае приведет к увеличению прибыли – в данной ситуации расчета оптимального объема производства не требуется, так как фирме выгодно бесконечно расширять производство;*

б) $Q^* = \left(\frac{10 \cdot 0{,}2}{0{,}2}\right)^{\frac{0{,}2}{1-(0{,}2+0{,}6)}} \left(\frac{10 \cdot 0{,}6}{0{,}3}\right)^{\frac{0{,}6}{1-(0{,}2+0{,}6)}} = 80000$ *тонн; при убывающей отдаче от расширения производства (см. рис. 3.3) увеличение объема выпуска свыше 80 тыс. тонн в год невыгодно фирме, так как прибыль будет снижаться;*

в) при $\alpha+\beta=1$ применения формулы (3.8) не требуется; достаточно рассчитать предельные издержки, которые в этом случае постоянны и равны средним издержкам (формула (2.8)):

$$AC_L = D = p_1\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left[A\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\beta}\right]^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} = 0{,}2\left(1+\frac{0{,}7}{0{,}3}\right)\left[1\left(\frac{0{,}7 \cdot 0{,}2}{0{,}3 \cdot 0{,}3}\right)^{0{,}7}\right]^{-1} = 0{,}18 \text{тыс. руб.};$$

поскольку цена продукции 10 тыс. руб. превышает среднюю себестоимость продукции (180 руб. за тонну), то в этом случае фирме выгодно неограниченно наращивать производство; если бы средние издержки были выше цены продукции, то производство необходимо было бы прекратить. Подробнее данная методика анализа будет рассмотрена в §3.5.

Кривая предложения фирмы

Полученное выражение наивыгоднейшего объема выпуска продукции как функции цены продукции и цен ресурсов носит название функции предложения фирмы с производственной функцией Кобба-Дугласа:

$$Q^* = Q^*(p_0, p_1, p_2).$$

Эту функцию можно использовать для построения кривой предложения, показывающей зависимость цены предложения от объема предложения фирмы:

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} p_0^{\frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}} \Rightarrow \left(Q^*\right)^{\frac{1-r}{r}} = Zp_0,$$

где $Z = A^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ – постоянная величина, не зависящая от цены продукта; $r = \alpha + \beta$ – степень однородности производственной функции. Поэтому

$$p_0 = \frac{1}{Z}\left(Q^*\right)^{\frac{1-r}{r}}.$$

На рис. 3.4 изображены кривые предложения для случаев: а) постоянной отдачи от расширения масштаба производства *(r=1)*, $\frac{1-r}{r} = 0$; б) возрастающей отдачи $\left(r > 1,\ \frac{1-r}{r} < 0\right)$; в) убывающей отдачи $\left(r < 1,\ \frac{1-r}{r} > 0\right)$.

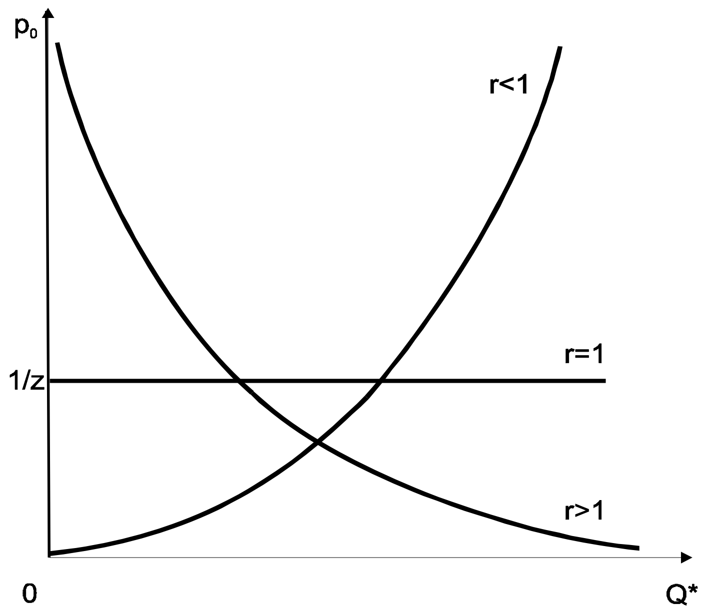

Рис. 3.4. Кривые предложения фирмы

Таким образом, в случае возрастающей отдачи от расширения производства, когда издержки фирмы растут замедленными темпами по сравнению с ростом производства, то есть средняя себестоимость продукции снижается, фирма имеет возможность продавать больший объем продукции по пониженной цене, продолжая получать максимальную прибыль. Эта ситуация позволяет фирме следовать стратегии освоения («захвата») рынка сбыта.

Постоянная отдача от расширения производства выражается в том, что средняя себестоимость продукции не изменяется, что дает возможность фирме сохранять цену продукции неизменной. Такая ситуация характерна для стратегии стабильного развития фирмы, функционирующей в режиме плановой загрузки.

Убывающая отдача от расширения производства, связанная с ростом средней себестоимости продукции, обусловливает необходимость повышения цены при увеличении предложения продукции с целью сохранения максимальной прибыли. Это приводит к падению конкурентоспособности продукции и сужает рынок сбыта.

§3.4. Планирование по конкурентной модели в краткосрочном периоде

Особенности краткосрочного периода

В рамках краткосрочного периода ограничение на ресурсы приводит к ограничению на объем выпуска $Q \le \overline{Q}$, и соответствующему ограничению величины прибыли, которая может в данном случае не достигать оптимального значения; в этом случае

$$\overline{Q} \le Q^*,$$

и значение $\overline{Q}$, определяемое ограничением $g(\vec{x}) \le \vec{b}$ (как правило, при обращении нестрогого неравенства в равенство), следует рассматривать как оптимальный объем выпуска в краткосрочном периоде.

Таким образом, если в долгосрочном периоде задача рациональной коммерческой деятельности формулировалась как задача безусловной оптимизации, то при краткосрочном планировании возникает задача на определение условного экстремума.

Оптимальный план

При краткосрочном планировании предположим, что первый ресурс ограничен величиной запаса b_1, а второй имеется в неограниченном количестве.

В этом случае формируется функция Лагранжа, которая в случае двух факторов и одного ограничения имеет вид:

$$L = p_0 Q(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) + \lambda(b_1 - x_1),$$

и необходимые условия оптимальности записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} - p_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} - p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b_1 - x_1 = 0, \quad \dfrac{\partial L}{\partial b_1} = \lambda = 0. \end{cases}$$

С учетом вида производственной функции Кобба-Дугласа из необходимых условий оптимальности следует:

$$\begin{cases} p_0 \alpha \dfrac{Q}{x_1} - p_1 - \lambda = 0, & (3.9) \\ p_0 \beta \dfrac{Q}{x_2} - p_2 = 0, & (3.10) \\ (b_1 - x_1)\lambda = 0. & (3.11) \end{cases}$$

Выражения (3.9)-(3.11) являются объединением условий

$$b_1 - x_1 = 0 \quad и \quad \lambda = 0,$$

поскольку они не могут выполняться совместно:

- если $b_1 - x_1 > 0$, то есть $x_1 < b_1$, то множитель Лагранжа λ показывает величину прироста дохода, который можно получить с единицы неиспользованного резерва ресурса x_1; следовательно $\lambda = 0$;
- если $b_1 - x_1 = 0$, то есть ресурс x_1 использован в полном объеме, то значение λ может быть любым $\lambda \neq 0$;
- если $b_1 - x_1 < 0$, то есть $x_1 > b_1$, то множитель Лагранжа λ представляет собой сумму снижения дохода с единицы превышения запаса ресурса, а так как превышение считается невозможным, то $\lambda = 0$.

Таким образом, при краткосрочном планировании возможны два случая:

- Изменение объема выпуска до некоторой величины, ограниченной условием $x_1 < b_1$, то есть из уравнения (3.9) при $\lambda = 0$ и $x_1=b_1$,:

$$0 < Q < \widetilde{Q} = \frac{p_1}{p_0}\frac{x_1}{\alpha} = \frac{p_1}{p_0}\frac{b_1}{\alpha};$$

в этом случае оптимальные значения факторов рассчитываются так же, как в долгосрочном периоде (так как $\lambda = 0$):

$$x_1^* = \alpha Q\frac{p_0}{p_1}, \quad x_2^* = \beta Q\frac{p_0}{p_2}.$$

- Более значительное изменение объема выпуска, соответствующее полному исчерпанию ограниченного ресурса; в этом случае оптимальные значения равны:

$$\begin{cases} x_1^* = b_1 & (из(3)), \\ x_2^* = \beta Q\dfrac{p_0}{p_2} & (из(2)). \end{cases} \tag{3.12}$$

Характерно, что при увеличении значения фиксированного ресурса ($b_1 < b_1'$) изменяется объем выпуска, соответствующий границе между долгосрочным и краткосрочным планами. Геометрическая интерпретация решения приведена на рис. 3.5.

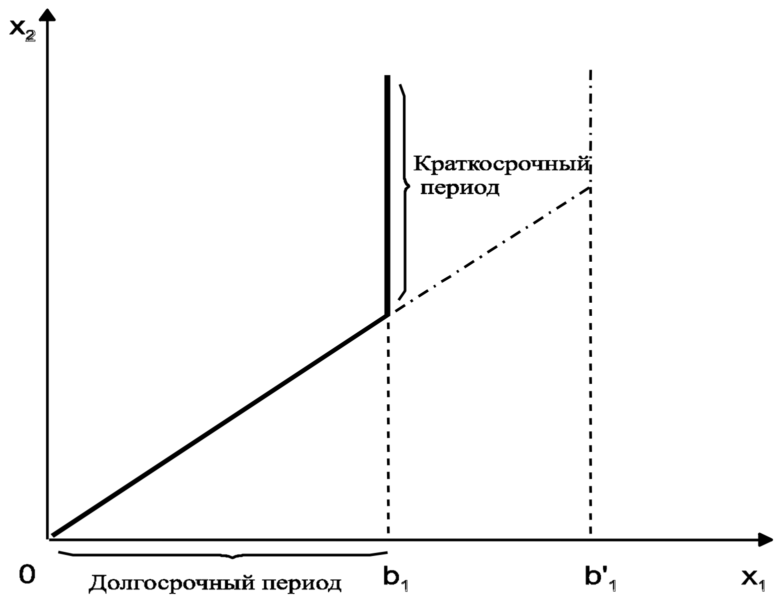

Рис. 3.5. Долгосрочный и краткосрочный планы

Объем затрат второго ресурса для оптимального плана определяется из соотношения (3.12) с учетом вида производственной функции:

$$x_2^* = \beta A\left(x_1^*\right)^{\alpha}\left(x_2^*\right)^{\beta}\frac{p_0}{p_2}, \quad \Rightarrow \quad \left(x_2^*\right)^{1-\beta} = \beta A b_1^{\alpha}\frac{p_0}{p_2},$$

$$x_2^* = \left(\beta A b_1^{\alpha}\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{3.13}$$

Поскольку показатель степени $\frac{1}{1-\beta} > 1$, то величина затрат второго (переменного) ресурса возрастает нелинейно при увеличении соотношения цен $\frac{p_0}{p_2}$, то есть ч е м д е ш е в л е и з м е н я е м ы й р е с у р с, т е м в б о л ь ш е м о б ъ е м е о н б у д е т р а с х о д о в а т ь с я для обеспечения оптимального значения объема выпуска. Кроме того, большему значению b_1 ограниченного ресурса соответствуют более значительные затраты переменного ресурса (при $b_1' > b_1$ на рис. 3.5).

Оптимальный объем выпуска

Оптимальный объем выпущенной продукции определяется из выражения производственной функции Кобба-Дугласа с учетом соотношения (3.12):

$$Q^* = A b_1^{\alpha}\left(\beta Q^*\frac{p_0}{p_2}\right)^{\beta},$$

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-\beta}} b_1^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\left(\beta\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \tag{3.14}$$

Поскольку в реальных производственных процессах, как было показано в работах Д. Кобба и П. Дугласа, значения показателей эластичности равны α=0,25, β=0,75, то из выражения (3.14) следуют выводы:

- оптимальный объем продукции возрастает пропорционально увеличению запаса фиксированного ресурса, так как $\frac{\alpha}{1-\beta} \approx 1$;
- оптимальный объем выпуска возрастает ускоренными темпами с увеличением соотношения цен продукта и переменного ресурса, так как $\frac{\beta}{1-\beta} > 1$;

- значение оптимального объема выпуска не зависит от цены фиксированного ресурса.

Пример 3.4.1. *Решить пример 3.3.1, если поставки зерна ограничены объемом 400 тонн в год.*

$$а)\ Q^* = 40^{\frac{0,8}{1-0,6}}\left(0,6\,\frac{10}{0,3}\right)^{\frac{0,6}{1-0,6}} = 5825\ тыс.\ тонн;$$

$$б)\ Q^* = 400^{\frac{0,2}{1-0,6}}\left(0,6\,\frac{10}{0,3}\right)^{\frac{0,2}{1-0,6}} = 89\ тонн;$$

$$в)\ Q^* = 400^{\frac{0,3}{1-0,7}}\left(0,7\,\frac{10}{0,3}\right)^{\frac{0,3}{1-0,7}} = 9333\ тонн;$$

Во всех случаях оптимальный объем выпуска снизился.

§3.5. Анализ безубыточности

Методика планирования на основе исследованной в предыдущих параграфах задачи коммерческой организации нашла применение при анализе безубыточности производственной программы организации.

Безубыточность – это такое финансово-хозяйственное состояние, при котором доход фирмы равен издержкам. Объем производства, при котором достигается состояние безубыточности, называется критическим.

При этом делаются следующие предположения:

- Рассматривается модель совершенной конкуренции, следовательно значение предельного дохода постоянно и равно цене продукта, поэтому линия дохода – прямая.
- Отдача от расширения масштаба производства предполагается постоянной; поэтому график функции издержек представляет собой прямую линию.
- Рассматривается краткосрочный период планирования, вследствие чего функция издержек представляется в виде суммы постоянных и переменных издержек.

С учетом сделанных предположений используются следующие подходы к проблеме оценки рентабельности плана производства:

1. Сопоставление валового дохода *R(Q)* с валовыми издержками *C(Q)* и отделение зоны прибыли от зоны убытка (рис. 3.6). Выражение для критического объема производства получим из условия равенства доходов и расходов:

$$p_0 Q = C_F + c_v Q,$$

$$Q_{кр.} = \frac{C_F}{p_0 - c_v},$$

где c_v – удельные (средние) переменные издержки.

Значение объема выпуска $Q_{кр}$, при котором достигается безубыточность в условиях покрытия переменных издержек ценой реализации, называется к р и т и ч е с к и м з н а ч е н и е м .

2. Сопоставление среднего дохода $AR(Q)=p_0$ и средних издержек *AC(Q)*, определяющее те же зоны прибыли и убытка (рис. 3.7).

3. Сопоставление предельного дохода *MR(Q)* и предельных издержек *MC(Q)*, выявляющее возможность дальнейшей деятельности организации. Поскольку для модели совершенной конкуренции

$$MR = \frac{\partial R}{\partial Q} = p_0,$$

а в условиях краткосрочного периода предельные издержки равны средним переменным издержкам

$$MC = \frac{\partial C}{\partial Q} = AC_v = c_v,$$

то в этом случае необходимо сравнить значение цены продукта и величину удельных переменных издержек; так, на рис. 3.7 в случае $p_0 = p_0'$ деятельность организации безубыточна при

$$Q \geq Q_{кр},$$

а при

$$0 \leq Q < Q_{кр}$$

возможно дальнейшее функционирование организации, поскольку

$$p_0' > c_v;$$

однако в случае $p_0 = p_0''$ безубыточная работа невозможна и организация должна быть ликвидирована, так как

$$p_0'' < c_v.$$

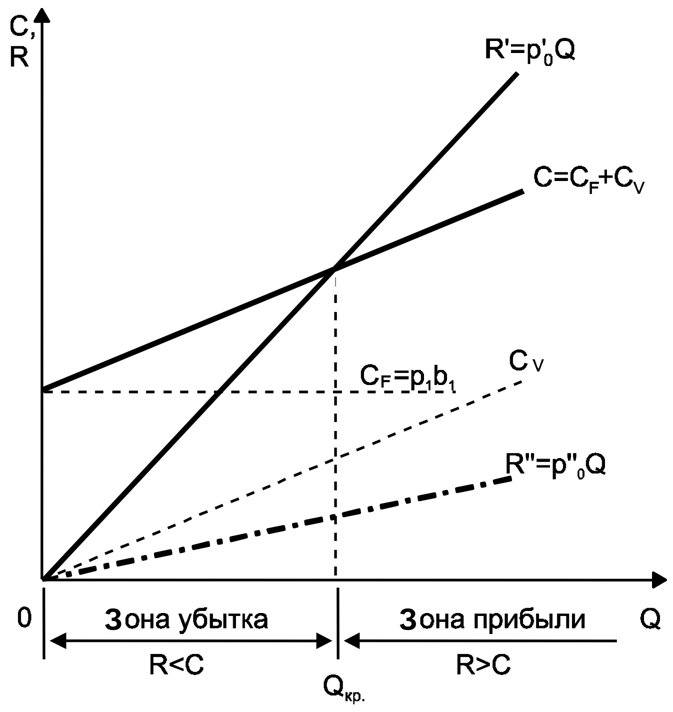

Рис. 3.6. Анализ "валовой доход - валовые издержки"

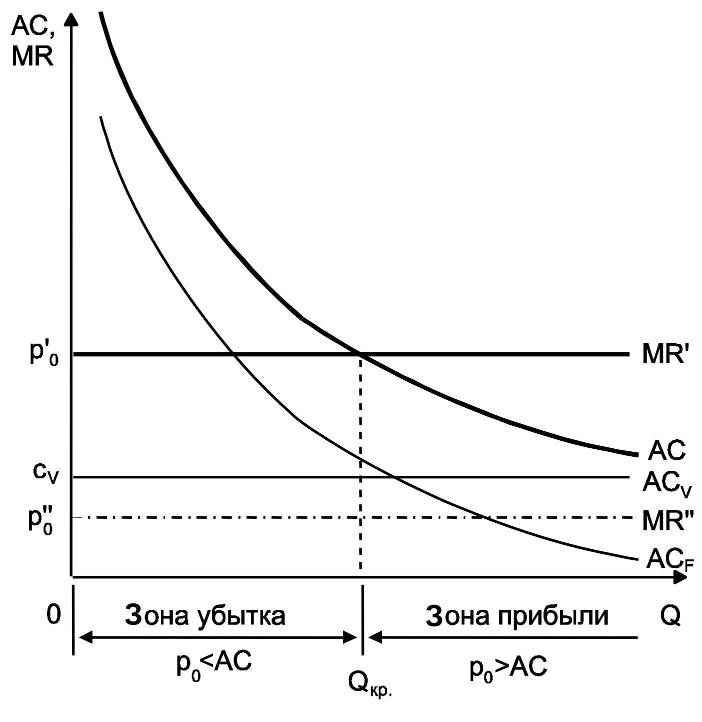

Рис. 3.7. Анализ "предельный доход - средние издержки"

Такой же вывод следует из рис. 3.6, так как сумма выручки при любом объеме выпуска меньше суммы переменных затрат в случае $p_0 = p_0''$:

$$R''(Q) < C_V ,$$

а при $p_0 = p_0'$ выполняется условие

$$R'(Q) \geq C_V .$$

Пример 3.5.1. *Объем продукции мебельного комбината за месяц составляет 100 стульев, цена продукции 5 руб. Переменные издержки равны 2 руб. на единицу продукции, сумма косвенных (постоянных) расходов равна 110 руб. Оценить программу производства с точки зрения безубыточности.*

Критический объем продукции определяется из условия равенства валового дохода и валовых издержек; он равен $Q_{кр.} = \dfrac{C_F}{p_0 - c_v} = \dfrac{110}{5-2} \cong 37$ *стульев. Поэтому текущая производственная программа безубыточна.*

§3.6. Рациональная коммерческая деятельность в условиях монополии и монопсонии

Черты монополии и монопсонии

Многие производители, специализирующиеся на выпуске слабо стандартизированных товаров или осваивающие уникальные, не имеющие аналогов, виды продукции, сталкиваются с условиями м о н о п о л и и (или монополистической конкуренции). Монополия (μωνω – один, πωλι – продавать), в отличие от совершенной конкуренции, х а р а к т е р и з у е т с я   з а в и с и м о с т ь ю   ц е н ы   т о в а р а   о т   о б ъ е м а   р ы н к а, то есть кривая спроса на монополизированный продукт имеет вид:

$$p_0 = p_0(Q).$$

Следовательно, спрос на монополизированный продукт не является бесконечно эластичным; напротив, кривая спроса в этом случае убывающая.

Вместе с тем, в условиях монополии производитель обладает в о з м о ж н о с т ь ю   в л и я т ь   н а   ц е н у реализуемого товара путем варьирования объема предложения, учитывая, что

$$\frac{\partial p_0}{\partial Q} < 0 ,$$

то есть для увеличения объема продаж необходимо снижать цену и, наоборот, для увеличения цены необходимо уменьшить объем предложения.

Зачастую организация, занимающаяся производством специфического вида продукции, является *преобладающим* покупателем собственных поставщиков, которые, в свою очередь, *вынуждены* производить сырье, материалы, полуфабрикаты и комплектующие изделия в строгом соответствии с требованиями, предъявляемыми заказчиком. В этом случае продукция поставщиков также становится *нестандартизированной* и может быть реализована в пределах узкоспециализированного рынка. Ситуация, при которой существует тесная взаимосвязь между поставщиком и покупателем, является обратной стороной монополии и носит название монопсонии.

В условиях монопсонии (μωνω – один, πσωνι – покупать) покупатель имеет возможность оказывать влияние на цену приобретаемых у поставщиков ресурсов путем варьирования объема закупок, то есть существует зависимость вида:

$$p_i = p_i(x_i), \quad i = 1,...,n.$$

Эта функция характеризует сумму затрат покупателя – монопсониста на приобретение ресурсов x_i.

В общем случае покупатель может приобрести большее количество ресурса, предложив более высокую плату за него, то есть

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} > 0, \quad i = 1,...,n.$$

Задача коммерческой организации

Поскольку валовой доход организации определяется как

$$R(Q) = p_0(Q)Q,$$

а сумма издержек равна

$$C(Q) = p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2)x_2,$$

то в условиях несовершенной конкуренции (комбинации монополии и монопсонии) задача рациональной коммерческой деятельности имеет вид:

$$\max_{Q,x_1,x_2} \Pi = \max_{Q,x_1,x_2} \left[p_0(Q)Q - p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2)x_2 \right]$$

при условии

$$Q = Q(x_1, x_2).$$

Предельный доход в этом случае, в отличие от совершенной конкуренции, не равен постоянной цене товара, которая определяется выражением $p(Q) = p_0 + \overline{p}Q$, а также зависит от объема выпуска:

$$MR(Q) = \frac{\partial R(Q)}{\partial Q} = p_0 + 2\overline{p}Q, \tag{3.15}$$

где производная $\overline{p} = \dfrac{\partial p_0}{\partial Q} < 0$ показывает, на сколько рублей снижается цена продукции от своего начального значения p_0 при увеличении объема предложения фирмы на единицу.

Предельные издержки также зависят от объемов потребляемых ресурсов:

$$MC_i(Q) = p_i(x_i) + \overline{p}_i x_i = p_i + 2\overline{p}_i x_i, \quad i = 1,2.$$

где $\overline{p}_i = \dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} > 0$ – рост цены ресурса при увеличении его закупок на единицу.

§3.7. Оптимальный план производства в условиях несовершенной конкуренции

Аналитическое решение

Решение задачи коммерческой организации может быть получено методом множителей Лагранжа:

$$L(Q, x_1, x_2, \lambda) = p_0 Q - p_1 x_1 - p_2 x_2 + \lambda\left(Q(x_1, x_2) - Q\right).$$

Необходимые условия экстремума определяются приравниванием нулю всех частных производных функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q} = p_0 - \dfrac{\partial p_0}{\partial Q} Q - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = -p_i - \dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} x_i + \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = Q(x_1, x_2) - Q = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = p_0 + \dfrac{\partial p_0}{\partial Q} Q^*, \\ \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x_i} = p_i + \dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} x_i^*, \quad i = 1,2, \\ Q^* = Q(x_1^*, x_2^*). \end{cases}$$

Первое условие показывает, что при оптимальных значениях $\left(Q^*, x_i^*\right)$ множитель Лагранжа равен предельному доходу:

$$\lambda = MR\left(Q^*\right).$$

Вторая группа условий показывает, что произведение предельного дохода и предельного продукта каждого фактора равно предельным издержкам этого фактора:

$$MR\left(Q^*\right) \cdot MQ_i\left(x_i^*\right) = MC_i\left(x_1^*\right), \quad i = 1,2. \tag{3.16}$$

В последнем условии представлена просто производственная функция:

$$Q^* = Q\left(x_1^*, x_2^*\right) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}. \tag{3.17}$$

Условия (3.16),(3.17) являются исходными уравнениями определения объема выпуска и комбинации затрат ресурсов, максимизирующих прибыль. Кроме того, следует учитывать, что ранее полученное условие равенства предельного дохода предельным издержкам сохраняет силу и при монополии – монопсонии:

$$\frac{\partial \Pi(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial R(Q)}{\partial Q} - \frac{\partial C(Q)}{\partial Q} = 0,$$

$$MR\left(Q^*\right) = MC\left(Q^*\right). \tag{3.18}$$

Используем выражение (3.18) для получения формулы оптимального объема производства в рамках монополии (ситуация монопсонии не учитывается, то есть предельные издержки зависят только от объема выпуска по формуле (2.9)). Рассмотрим два частных случая:

а) отрицательный эффект расширения масштаба при r=0,5; подставим в (3.18) выражение предельного дохода (3.15) и предельных издержек (2.9):

$$p_0 + 2\bar{p}Q = \frac{1}{r} DQ^{\frac{1}{r}-1} \Rightarrow \quad p_0 + 2\bar{p}Q = \frac{1}{0,5} DQ^{\frac{1}{0,5}-1} \Rightarrow \quad Q^* = \frac{p_0}{2D - 2\bar{p}}; \tag{3.19}$$

б) отсутствие эффекта расширения масштаба при r=1; аналогично предыдущему случаю

$$p_0 + 2\overline{p}Q = \frac{1}{1}DQ^{\frac{1}{1}-1} \Rightarrow \quad Q^* = \frac{D - p_0}{2\overline{p}}. \tag{3.20}$$

Функции спроса на ресурсы можно получить из условий (3.16), (3.17), выражения предельных продуктов MQ_i получены в примере 1.3.3:

$$MQ_1 = \alpha Q/x_1\ ,$$

$$MQ_2 = \beta Q/x_2;$$

выражения предельных издержек получим, продифференцировав $C=p_1x_1+p_2x_2$:

$$MC_1 = p_1,$$

$$MC_2 = p_2.$$

Подставим эти выражения в (3.16):

$$(p_0+2\,\overline{p}\,Q^*)\alpha Q^*/x_1^{\ *} = p_1,$$

$$(p_0+2\,\overline{p}\,Q^*)\beta Q^*/x_2^{\ *}= p_2.$$

Откуда можно выразить

$$x_1^*(Q^*) = \frac{\alpha\left(p_0 + 2\overline{p}Q^*\right)Q^*}{p_1},$$

$$x_2^*(Q^*) = \frac{\beta\left(p_0 + 2\overline{p}Q^*\right)Q^*}{p_2}. \tag{3.21}$$

Таким образом, определив оптимальный объем производства по формулам (3.19), (3.20), следует затем рассчитать спрос на ресурсы по формулам (3.21).

Геометрическая интерпретация

На рис. 3.8 изображены кривые валового дохода R, совокупных издержек C, прибыли $П$, а также зависимостей предельных и средних значений издержек и дохода. Отличие от вида соответствующих кривых в случае совершенной конкуренции состоит в том, что кривая дохода R имеет уменьшающийся темп роста при увеличении объема производства и, соответственно, кривая предельного дохода MR является убывающей. Таким образом интерпретируется ситуация монополии. Ситуация монопсонии не приводит к характерным геометрическим отличиям, поскольку вид кривой предельных издержек в общем случае непосредственно не зависит от объема выпуска.

Поскольку при совершенной конкуренции оптимальное значение прибыли достигается при неизменной цене продукции $p_0 = MR$ даже при минимальном объеме выпуска, то в условиях монополии оптимальная величина прибыли всегда не превышает суммы прибыли при совершенной конкуренции:

$$\Pi^*_{мон} \le \Pi^*_{сов.кон}.$$

Максимум прибыли в условиях монополии достигается при объеме выпуска, не превышающем оптимальный выпуск в условиях совершенной конкуренции, то есть

$$Q^*_{мон} \le Q^*_{сов.кон}.$$

Пример 3.7.1. *Если мукомольный завод (пример 3.3.1), приобретающий зерно по цене 200 руб. за тонну и энергию по цене 300 руб. за киловатт-час, является монополистом, то цена его продукции снижается с ростом продаж p_0=10000-2Q (руб. за тонну). Определить оптимальный объем выпуска: а) при убывающей отдаче от расширения масштаба (r=0,5), $\alpha = 0{,}2; \beta = 0{,}3$; б) при отсутствии эффекта расширения масштаба (r=1) $\alpha = 0{,}3; \beta = 0{,}7$.*

а) рассчитаем параметр D (см. пример 3.3.1):

$$D = p_1\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left[A\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\beta}\right]^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} = 0{,}2\left(1+\frac{0{,}3}{0{,}2}\right)\left[1\left(\frac{0{,}3\cdot 0{,}2}{0{,}2\cdot 0{,}3}\right)^{0{,}3}\right]^{-\frac{1}{0{,}5}} = 0{,}3\,тыс.руб.;$$

оптимальный объем продукции равен (3.19):

$$Q^* = \frac{10}{2\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}002} = 16{,}56 \text{ тонны;}$$

б) параметр D для данного случая:

$$D = 0{,}2\left(1+\frac{0{,}7}{0{,}3}\right)\left[1\left(\frac{0{,}7\cdot 0{,}2}{0{,}3\cdot 0{,}3}\right)^{0{,}7}\right]^{-1} = 0{,}49 \text{ тыс. руб.;}$$

оптимальный объем продукции (3.20):

$$Q^* = \frac{0{,}49 - 10}{-2\cdot 0{,}002} = 2376 \text{ тонн.}$$

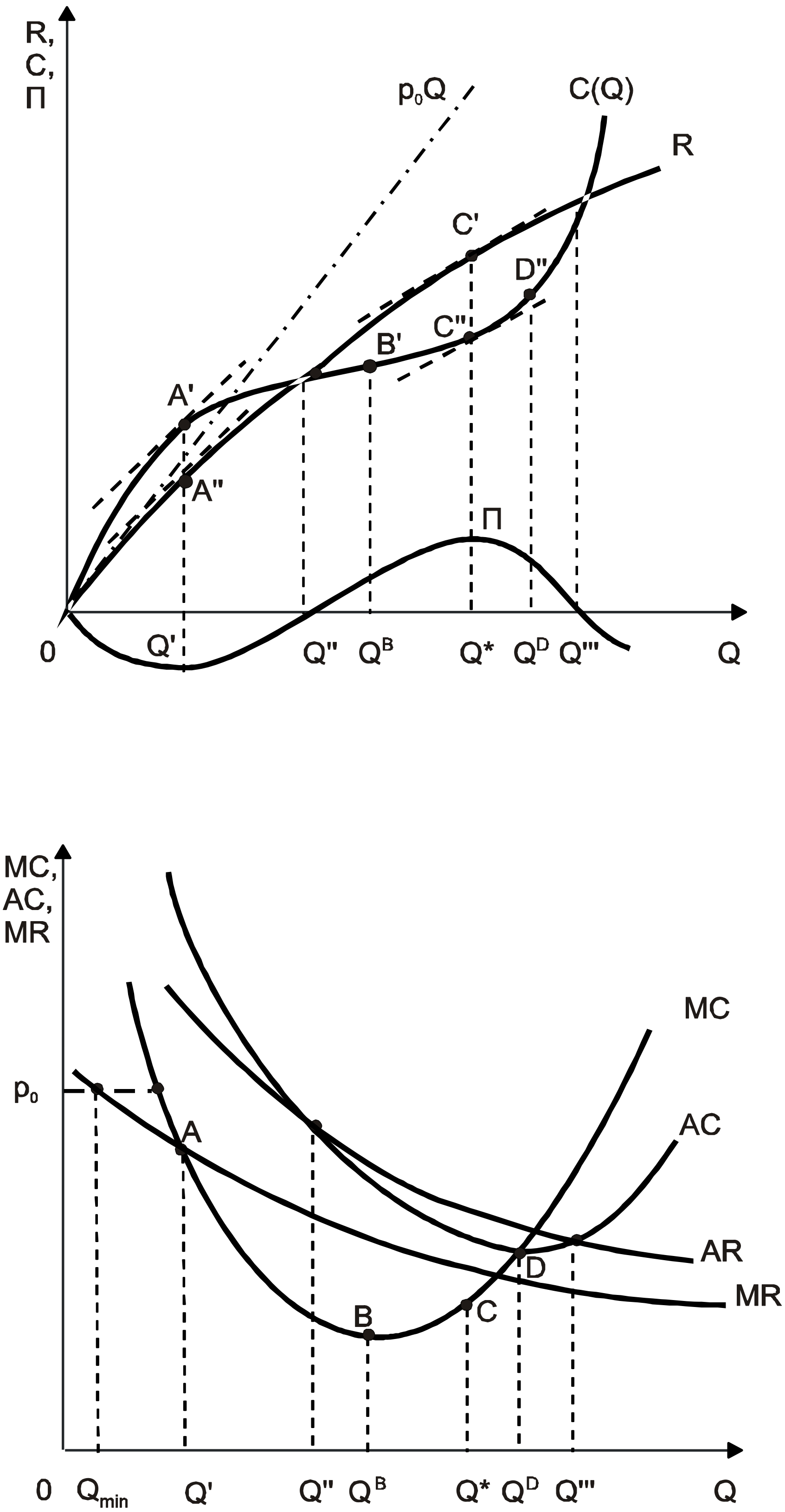

Рис. 3.8. Оптимальный выпуск в условиях монополии

§3.8. Рациональная коммерческая деятельность в условиях олигополии и олигопсонии

Черты олигополии и олигопсонии

Структура рынка, на котором действует ограниченное количество промышленных организаций, называется *конкуренцией среди немногих*. Рынок, на котором однородную продукцию предлагают несколько продавцов, называется *олигополией*. Рынок, на котором продукция определенного вида приобретается несколькими покупателями, называется *олигопсонией*.

Главная особенность конкуренции среди немногих заключается в том, что *все конкурирующие фирмы могут влиять на цены* предлагаемой продукции (в случае олигополии) или приобретаемых ресурсов (в случае олигопсонии). Поэтому прибыль каждой коммерческой организации зависит от политики других конкурирующих фирм.

Оптимальная политика каждой коммерческой организации выбирается не только исходя из уровня прямого влияния этой фирмы на состояние рынков ресурсов и продукта, но и с учетом косвенного влияния – через взаимодействие других конкурентов.

Политика организации, действующей в условиях олигополистической конкуренции, имеет много общего с *игрой*: в обоих случаях прибыль или выигрыш для каждого агента (фирмы или игрока) зависит от действий (расходования ресурсов и выпуска продукции или стратегий) других агентов.

Задача коммерческой организации

Наиболее характерным вариантом олигополистической конкуренции является ситуация, в которой *два конкурента (дуполия)* производят продукцию в соответствии со следующими производственными функциями:

$$Q_1 = f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}),$$

$$Q_2 = f_2(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}),$$

где Q_1 – объем выпуска первой фирмы; Q_2 – объем выпуска второй фирмы; x_{1i} – объем i-го ресурса, затраченный первой фирмой; x_{2i} – объем i-го ресурса, израсходованный второй фирмой.

Цена продукции определяется совокупным объемом выпуска:

$$p_0 = p_0(Q_1, Q_2),$$

то есть одновременное повышение объемов производства приводит к снижению результирующей цены:

$$\frac{\partial p_0}{\partial Q_1} < 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial Q_2} < 0.$$

Цены факторов производства определяются объемами закупок соответствующего фактора обеими фирмами:

$$p_i = p_i(x_{1i}; x_{2i}), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

то есть если обе фирмы увеличивают объемы приобретения ресурсов, то цены на них возрастают:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_{1i}} > 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_{2i}} > 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Основная задача одной из конкурирующих коммерческих организаций заключается в максимизации прибыли путем варьирования объемов выпущенной продукции и израсходованных ресурсов:

$$\max_{Q_1, x_{1i}} \Pi_1 = p_0(Q_1, Q_2)Q_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i(x_{1i}, x_{2i})x_{1i}$$

при условии

$$Q_1 = f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}).$$

В данном случае рассматривается формулировка задачи первой из фирм, действующих в условиях олигополистической конкуренции.

Аналитическое решение

Функция Лагранжа для сформулированной задачи определения условного экстремума записывается в виде:

$$L(Q, x, \lambda) = p_0(Q_1, Q_2)Q_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i(x_{1i}, x_{2i})x_{1i} - \lambda\left[f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}) - Q_1\right].$$

Условия оптимальности функции Лагранжа первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_1} = p_0(Q_1, Q_2) + Q_1 \dfrac{\partial p_0}{\partial Q_1} + Q_1 \dfrac{\partial p_0}{\partial Q_2}\dfrac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_{1i}} = -p_i(x_{1i}, x_{2i}) - x_{1i}\dfrac{\partial p_i}{\partial x_{1i}} - x_{1i}\dfrac{\partial p_i}{\partial x_{2i}}\dfrac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1i}} - \lambda \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1i}} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}) - Q_1 = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Выразив множитель Лагранжа из первого уравнения системы (3.22) и подставив его выражение вместо λ во второе уравнение системы (3.22), можно получить:

$$\begin{cases} \left[p_0 + Q_1 \left(\dfrac{\partial p_0}{\partial Q_1} + \dfrac{\partial p_0}{\partial Q_2} \dfrac{\partial Q_2}{\partial Q_1} \right) \right] \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{1i}} = p_i + x_{1i} \dfrac{\partial p_i}{\partial x_{1i}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial x_{2i}} \dfrac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1i}}, \quad i = 1,2,...,n, \\ Q_1 = f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}). \end{cases}$$

Полученные необходимые условия оптимальности содержат компоненты $\dfrac{\partial Q_2}{\partial Q_1}$ и $\dfrac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1i}}$, которые получили название предположительных вариаций, поскольку они отражают предположения первой фирмы относительно возможной реакции конкурента на выбранную ею политику. Выражение $\dfrac{\partial Q_2}{\partial Q_1}$ представляет собой изменение объема выпуска продукции второго конкурента при единичном увеличении объема выпуска первого конкурента. Производные $\dfrac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1i}}$ характеризуют изменения затрат ресурса i-го вида второй фирмы при единичном увеличении израсходованного первой фирмой объема данного ресурса.

§3.9. Дуполия Курно

Черты дуполии

Рассмотрим простейший случай олигополии, в условиях которой действуют два производителя однородного товара (дуполия), производственный процесс которых характеризуется постоянным уровнем предельных издержек, а реализация происходит по линейной модели спроса.

В этом случае функции издержек производителей имеют вид:

$$C_1 = cQ_1 + d, \quad C_2 = cQ_2 + d, \quad c > 0, \quad d > 0,$$

где d – сумма постоянных издержек, c – величина предельных издержек.

Функция предложения товара аддитивна:

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

а функция спроса может быть представлена в виде:

$$p_0 = a - b(Q_1 + Q_2), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Функция прибыли одного из дуполистов записывается следующим образом:

$$\Pi_1 = [a - b(Q_1 + Q_2)]Q_1 - cQ_1 - d, \qquad (3.23)$$

поэтому можно записать условие первого порядка максимизации прибыли:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial Q_1} = [a - b(Q_1 + Q_2)] - bQ_1 - b\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}Q_1 - c = 0.$$

Гипотеза Курно

Анализ дуполии Курно[1] основан на предпосылке о том, что предположительные вариации равны нулю, то есть каждый из дуполистов считает, что изменения объема выпуска его продукции не повлияют на объем выпуска продукции конкурента. Равновесие Курно для обеих фирм определяется условиями:

$$\left.\frac{\partial \Pi_1}{\partial Q_1}\right|_{\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Pi_2}{\partial Q_2}\right|_{\frac{\partial Q_1}{\partial Q_2}=0} = 0$$

или

$$\begin{cases} a - b(Q_1 + Q_2) - bQ_1 - c = 0, \\ a - b(Q_1 + Q_2) - bQ_2 - c = 0, \end{cases} \qquad (3.24)$$

откуда

$$Q_1 = Q_2 = \frac{a - c}{3b}.$$

Соответственно равновесная рыночная цена составит:

$$p_0 = \frac{a + 2c}{3},$$

а совокупный объем предложения равен:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{2(a - c)}{3b}.$$

---

[1] Курно Антуан Огюстен (1801-1877) – французский математик, экономист, автор труда "Исследования математических принципов теории богатства"

Обобщение на случай более двух фирм

Если олигополистическая конкуренция имеет место между F фирмами, то обобщение полученных результатов приводит к выражениям:

$$Q_j = \frac{a-c}{(F+1)b}, \ j = 1,2,...,F,$$

$$p_0 = \frac{a+Fc}{F+1}, \quad Q = \frac{F}{F+1}\frac{a-c}{b}.$$

В условиях неограниченного увеличения числа фирм равновесие Курно стремится к равновесию, характерному для совершенной конкуренции, то есть:

- индивидуальные объемы производства $Q_j \to 0$, так как отдельная фирма производит пренебрежимо малое количество продукции;
- цена продукции $p_0 \to c$, поскольку отдельная фирма не оказывает влияния на равновесную цену, равную предельным издержкам.

Геометрическая интерпретация

Уравнения (3.24) могут быть преобразованы к виду:

$$Q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_2}{2}, \tag{3.25}$$

$$Q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_1}{2}. \tag{3.26}$$

Выражения (3.25) и (3.26) называются кривыми реакции дуполистов на поведение друг друга; графически они изображены на рис. 3.9.

Равновесие достигается на основе взаимодействия реакций дуполистов: например, если в начальный момент времени первая фирма является *монополистом*, производя Q'_1 продукции, то появление второй фирмы с объемом выпуска Q'_2 заставит первую снизить объем предложения до Q''_1 и т.д.

Поскольку сам процесс достижения равновесия опровергает гипотезу Курно о фиксировании объема выпуска конкурента, то модель Курно не является аутентичной.

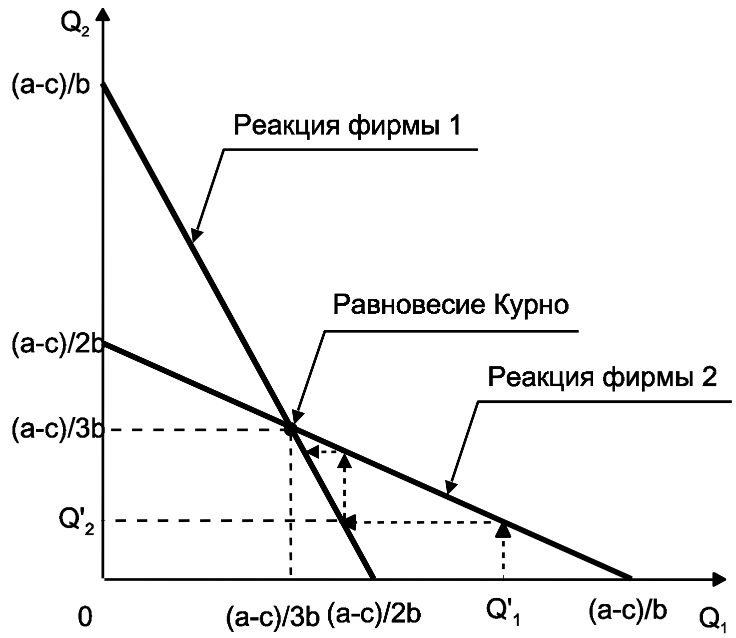

Рис. 3.9. Равновесие Курно

Кроме того, сумма прибыли одного дуполиста Курно равна сумме прибыли другого дуполиста (формула (3.23)):

$$\Pi_1^K = [a - b(Q_1 + Q_2)]Q_1 - cQ_1 - d = \left[a - b\frac{2(a-c)}{3b}\right]Q_1 - cQ_1 - d,$$

$$\Pi_2^K = [a - b(Q_1 + Q_2)]Q_2 - cQ_2 - d = \left[a - b\frac{2(a-c)}{3b}\right]Q_2 - cQ_2 - d,$$

$$\Pi_1 = \Pi_2.$$

Таким образом, сумма прибыли каждого из дуполистов Курно составит:

$$\Pi_i^K = \left[a - b\frac{2(a-c)}{3b}\right]\frac{a-c}{3b} - c\frac{a-c}{3b} - d = \frac{(a-c)^2}{9b} - d, \quad i = 1,2. \quad (3.27)$$

§3.10. Дуполия Стэкельберга

Гипотеза Стэкельберга

Рассматривается дуполия Стэкельберга[1], в случае которой одна или обе фирмы предполагают, что конкурент выберет стратегию дуполиста Курно. Например, первая организация предполагает, что конкурент будет “играть” в соответствии с кривой реакции Курно:

[1] Генрих фон Стэкельберг (1886-1964) – немецкий математик, экономист, опубликовавший работы по теории игр; в 1934 предложил модель организации рынков.

$$Q_2 = \frac{a - c - bQ_1}{2b}.$$

В этом случае предположительная вариация равна:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left[\frac{a - c - bQ_1}{2b}\right] = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, необходимое условие оптимальности имеет вид:

$$\frac{\partial n_1}{\partial Q_1} = a - b(Q_1 + Q_2) - bQ_1 - c + \frac{1}{2}bQ_1 = 0,$$

а кривая реакции первой фирмы определяется выражением

$$Q_1 = \frac{a - c - bQ_2}{\frac{3}{2}b}.$$

В условиях предположения Стэкельберга финансовые результаты обеих фирм зависят от стратегии второй фирмы: если она выбирает вариант реакции Курно (как предполагает первая фирма), то решением проблемы является равновесие Стэкельберга, определяемое пересечением кривых реакций:

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{a - c - bQ_2}{\frac{3}{2}b}, \\ Q_2 = \dfrac{a - c - bQ_1}{2b}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{a - c - bQ_2}{\frac{3}{2}b}, \\ Q_2 = \dfrac{a - c}{4b}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{a - c}{2b}, \\ Q_2 = \dfrac{a - c}{4b}. \end{cases}$$

Общий объем выпуска продукции равен:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{3}{4}\frac{a - c}{b}.$$

Сумма прибыли первой фирмы составит:

$$\Pi_1^C = [a - b(Q_1 + Q_2)]Q_1 - cQ_1 - d = \left[a - b\frac{3}{4}\frac{a - c}{b}\right]\frac{a - c}{2b} - c\frac{a - c}{2b} - d = \frac{(a - c)^2}{8b} - d. \quad (3.28)$$

Таким образом, первая организация производит вдвое больше продукции, чем вторая, следовательно получает большую прибыль:

$$\Pi_2^C = [a - b(Q_1 + Q_2)]Q_2 - cQ_2 - d = \left[a - b\frac{3}{4}\frac{a-c}{b}\right]\frac{a-c}{4b} - c\frac{a-c}{4b} - d = \frac{(a-c)^2}{16b} - d . \quad (3.29)$$

В соответствии с кривыми реакции Стэкельберга, изображенными на рис. 3.10, равновесие Стэкельберга определяется их точкой пересечения.

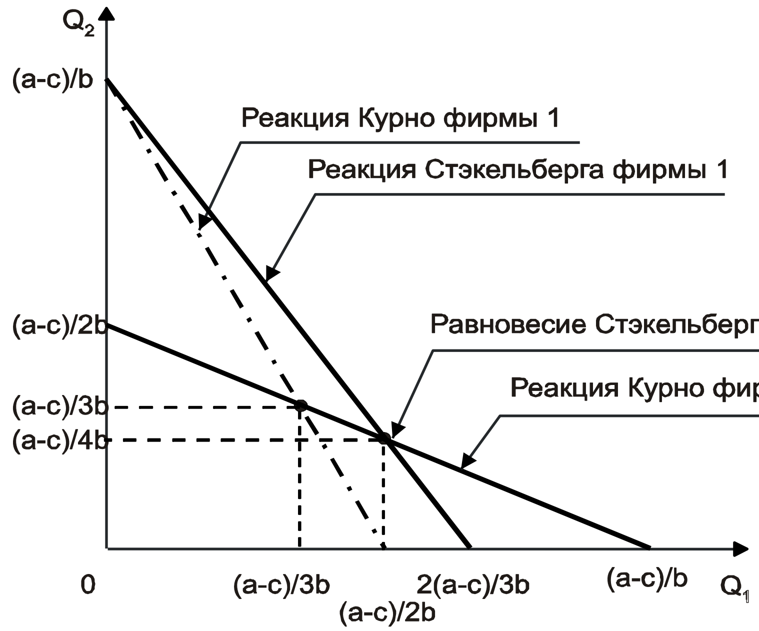

Рис. 3.10. Равновесие Стэкельберга

Таким образом, установившееся равновесие приводит к неравному перераспределению сегментов рынка между дуполистами, причем общая ёмкость рынка увеличивается по сравнению с равновесием Курно:

$$Q_C = Q_1 + Q_2 = \frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{4b} = \frac{3(a-c)}{4b} > \frac{2(a-c)}{3b} = Q_K ,$$

где Q_C, Q_K – ёмкости рынка (совокупный объемы выпуска дуполистов) в условиях равновесия Стэкельберга и Курно соответственно.

Это происходит потому, что первая фирма, уверенная в строго определенной реакции второй фирмы

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = -\frac{1}{2},$$

может увеличить выпуск своей продукции по сравнению с выпуском в условиях равновесия Курно на

$$Q_1^C - Q_1^K = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{3b} = \frac{a-c}{6b},$$

в то время как снижение объема выпуска второй фирмы составит:

$$Q_2^C - Q_2^K = \frac{a-c}{4b} - \frac{a-c}{3b} = -\frac{a-c}{12b},$$

то есть в соответствии с реакцией второй фирмы снижение сегмента ее рынка по сравнению с приростом сегмента рынка первой фирмы происходит в пропорции:

$$\frac{Q_2^C - Q_2^K}{Q_1^C - Q_1^K} = \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = -\frac{1}{2}.$$

Неравновесие Стэкельберга

Другой возможной ситуацией дуополии является случай, когда вторая фирма не пользуется кривой реакции Курно, а действует также согласно кривой реакции Стэкельберга, то есть каждая фирма неправильно предполагает, что другая использует политику Курно. Равновесие определяется пересечением кривых реакций Стэкельберга:

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{a-c-bQ_2}{\frac{3}{2}b}, \\[2ex] Q_2 = \dfrac{a-c-bQ_1}{\frac{3}{2}b}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{a-c}{\frac{5}{2}b}, \\[2ex] Q_2 = \dfrac{a-c}{\frac{5}{2}b}. \end{cases}$$

Совокупный объем выпуска обеих фирм составит:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{4(a-c)}{5b}.$$

При этом суммы прибыли дуополистов равны:

$$\Pi_1^{CH} = \Pi_2^{CH} = \left[a - bQ^{CH}\right] Q_i^{CH} - cQ_i^{CH} - d =$$

$$= \left[a - b\frac{4(a-c)}{5b}\right]\frac{2(a-c)}{5b} - c\frac{2(a-c)}{5b} - d =$$

$$= \frac{2(a-c)^2}{25b} - d. \qquad (3.30)$$

В условиях неравновесия Стэкельберга обе фирмы производят больше продукции, чем при равновесии Курно:

$$Q_i^{CH} - Q_i^K = \frac{a-c}{\frac{5}{2}b} - \frac{a-c}{3b} = \frac{a-c}{15b},$$

однако получают меньшие суммы прибыли:

$$\Pi_i^{CH} - \Pi_i^K = \frac{2(a-c)^2}{25b} - d - \frac{(a-c)^2}{9b} + d = -\frac{7(a-c)^2}{225b} = (a-c)^2\left[\frac{1}{6b} - \frac{22}{225}\right].$$

Использованы следующие обозначения: Q_i^{CH}, Q_i^K – объемы выпуска i-й фирмы в условиях неравновесия Стэкельберга и равновесия Курно; Q^{CH}, Q^K – соответствующие совокупные объемы выпуска.

“Неравновесие Стэкельберга” является единственной точкой равновесия с точки зрения теории игр, поскольку в этом случае обе фирмы делают неправильные предположения о стратегии конкурента и снижение прибыли является платой за ошибку.

§3.11. Кооперативная дуополия

Максимизация совокупной прибыли

Дуполисты могут вступить в соглашение о совместной деятельности на рынке с целью получения максимальной совокупной прибыли так называемого простого товарищества. В этом случае условия выбора оптимальных значений объемов выпуска дуполистов имеют вид:

$$\max_{Q_1,Q_2} \Pi = \max_{Q_1,Q_2} \{[a - b(Q_1+Q_2)](Q_1+Q_2) - c(Q_1+Q_2) - 2d\}.$$

Оптимальная программа выпуска фирм должна удовлетворять условию:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial(Q_1+Q_2)} = a - b(Q_1+Q_2) - b(Q_1+Q_2) - c = 0,$$

так что

$$Q_1 + Q_2 = \frac{a-c}{2b}.$$

При равных производственных возможностях каждая фирма производит продукцию в объеме:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{a-c}{4b}. \qquad (3.31)$$

Сумму совокупной прибыли дуполистов определим, подставив объемы продукции (3.31) в формулу прибыли дуполии (3.23):

$$П^{\Sigma} = \frac{(a-c)^2}{4b} - d. \qquad (3.32)$$

Геометрическая интерпретация

На рис. 3.11 показаны кривые реакции Курно для первой M_1N_1 и второй M_2N_2 фирм, берущие начало из монопольных точек фирм M_1 и M_2, то есть значений объемов выпуска этих фирм, полученных при условии, что вторая фирма отсутствует. Например, для первой фирмы:

$$\max П_1 = \max\left[(a - bQ_1)Q_1 - cQ_1 - d\right],$$

$$\frac{\partial П_1}{\partial Q_1} = a - 2bQ_1 - c = 0 \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{a-c}{2b}.$$

Точки M_1, M_2 также являются точками максимально возможной прибыли каждого дуполиста, то есть центрами семейств изопрофит (кривых равной прибыли): каждая изопрофита, расположенная на большем расстоянии от точки M_i, соответствует меньшей прибыли i-й фирмы.

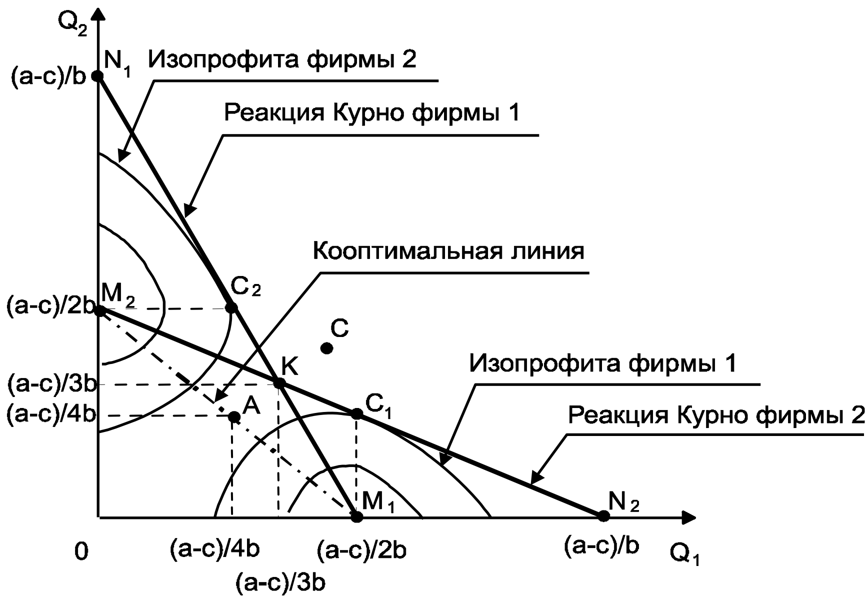

Рис. 3.11. Типы дуполии

Точки касания изопрофиты одной фирмы и кривой реакции Курно другой фирмы являются точками равновесия Стэкельберга.

Неравновесие Стэкельберга (точка C на рис. 3.11) располагается выше и правее равновесия Курно (точка K на рис. 3.11), поскольку поведение обеих фирм в условиях неверных предположений о стратегии конкурентов (гипотеза Стэкельберга) близко к монополистическому образу действий.

Кооптимальная линия M_1M_2 имеет полученное выше уравнение

$$Q_1 + Q_2 = \frac{a-c}{2b}$$

и представляет собой множество точек касания изопрофит двух фирм.

Таким образом, в пределах кооптимальной линии ни одна из фирм не может увеличить свою прибыль, не уменьшив прибыль конкурента. Иначе говоря, сочетания объемов выпуска фирм на этой прямой являются равноэффективными точками для кооперативной дуполии, а сама линия определяет множество Парето для дуполистов, стремящихся наращивать индивидуальную прибыль.

Пример 3.11.1. *Рассмотрим две организации-дуполиста, у которых постоянные издержки отсутствуют, а удельные переменные издержки равны 1010 рублей на единицу выпуска; функция издержек имеет вид:*

$$C_i = 1010Q_i.$$

Предположим, что максимальная цена, которую готов заплатить покупатель, составляет 1022 рубля, а при появлении на рынке каждой дополнительной единицы выпуска цена понижается на 0,5 рубля, то есть функция спроса:

$$p_0 = a - b(Q_1 + Q_2) = 1022 - 0{,}5(Q_1 + Q_2).$$

В этом случае $d = 0$, $\quad \dfrac{(a-c)^2}{b} = \dfrac{(1022-1010)^2}{0{,}5} = 288$.

1) В условиях равновесия Курно суммы прибыли каждой из фирм по формуле (3.27) равны:

$$П_1^К = П_2^К = \frac{(a-c)^2}{9b} - d = \frac{288}{9} = 32 \ \text{руб.},$$

значит совокупная прибыль дуполии Курно составит (32+32)=64 руб.

2) При равновесии Стэкельберга первая фирма получит прибыль (формула (3.28))

$$П_1^C = \frac{(a-c)^2}{8b} - d = \frac{288}{8} = 36 \ \text{руб.},$$

а вторая фирма (формула (3.29)):

$$П_2^C = \frac{(a-c)^2}{8b} - d - \frac{(a-c)^2}{16b} = \frac{288}{8} - \frac{288}{16} = 18 \ \text{руб.}$$

Поэтому сумма прибыли дуполистов при этом равна (36+18)=54 руб.

3) В условиях неравновесия Стэкельберга суммы прибыли обеих фирм одинаковы (формула (3.30)):

$$П_1^{CH} = П_2^{CH} = \frac{2(a-c)^2}{25b} - d = \frac{2 \cdot 288}{25} = 23{,}04 \ \text{руб.},$$

то есть совокупная прибыль дуполии равна (2·23,04)=46,08 руб.

4) При кооперативной дуполии совокупная прибыль (формула (3.32)) составит

$$П^{\Sigma} = \frac{288}{4} = 72 \,\text{руб.},$$

то есть наибольшая из всех рассмотренных вариантов.

Таким образом, потери прибыли являются платой за конкурирующий характер стратегий дуполистов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 3.1

Оптимизация прибыли в условиях совершенной конкуренции

3.1.1. Фирма по производству линолеума использует пластмассу по цене 5 руб. за кг и краситель по цене 8 руб. за кг и продает товар по цене 100 руб. за кв. м. Коэффициенты ПФ равны: $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$, A=1. Определить функции спроса на ресурсы, оптимальный объем выпуска и максимальное значение прибыли в долгосрочном периоде.

3.1.2. Решить задачу 3.1.1 для случаев:

а) возрастающей отдачи от расширения масштаба $\alpha = 0{,}8; \beta = 0{,}6$;

б) убывающей отдачи от расширения масштаба $\alpha = 0{,}2; \beta = 0{,}6$;

в) отсутствия эффекта расширения масштаба $\alpha = 0{,}3; \beta = 0{,}7$.

3.1.3-3.1.4. Решить задачи 3.1.1-3.1.2 графически.

3.1.5-3.1.8. Решить задачи 3.1.1-3.1.4 в условиях краткосрочного периода, если объем затрат первого ресурса зафиксирован – закупки пластмассы ограничены объемом 10 кг в день.

3.1.9. Провести анализ безубыточности производственной программы в краткосрочном периоде, если цена линолеума в задаче 3.1.1 равна 100 руб. за кв.м., фиксированные издержки равны 2 млн. руб., удельные переменные издержки составляют 80 руб. за кв.м.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 3.2

Оптимизация прибыли при несовершенной конкуренции

3.2.1. Фирма-монополист сотовой связи оплачивает эфир (1-й ресурс) по цене 300 руб. в час и труд операторов – 2-й ресурс (фонд оплаты труда одного сотрудника 0,06 руб.). Цена определяется выражением: p_0=1000-0,1Q (руб. за час связи). Определить оптимальный объем выпуска в случае A=1 и а) при убывающей отдаче от расширения масштаба $\alpha = 0{,}1; \beta = 0{,}4$; б) при отсутствии эффекта расширения масштаба $\alpha = 0{,}4; \beta = 0{,}6$. Найти оптимальный с точки зрения прибыли объём выпуска. Определить спрос на ресурсы и найти максимальную прибыль. Построить графики дохода, издержек, прибыли.

3.2.2. Решить задачу 3.2.1 для случаев:

а) $\alpha = 0{,}3; \beta = 0{,}2$;

б) $\alpha = 0{,}5; \beta = 0{,}5$.

3.2.3. Две фирмы сотовой связи работают в условиях дуполии Курно; функции издержек (за год) описываются выражением $C_i = cQ_i + d$, $i=1,2$, $c=2$ руб. (за минуту), $d=2$ тыс. руб.; функции спроса имеют вид $p_0 = a - b(Q_1 + Q_1)$, $a=100$ руб. (за минуту), $b=0{,}05$ руб. с минуты. Построить кривые реакции фирм, определить равновесный объём выпуска и сумму прибыли каждой фирмы при этом объёме.

3.2.4. Решить задачу 3.2.3, если первая фирма считает, что конкурент реагирует в соответствии с гипотезой Курно.

3.2.5. Решить задачу 3.2.3, если обе фирмы ошибочно предполагают, что конкурент реагирует в соответствии с гипотезой Курно.

3.2.6. Решить задачу 3.2.3 в условиях кооперативной дуполии.

Глава 4. ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА

§1.1. Функция полезности

Определение функции

Функция полезности представляет собой зависимость между количественно выраженной удовлетворенностью потребителя использованными благами (товарами) и объемами потребления этих благ:

$$U = U(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где U – полезность набора благ; $x_1, x_2, ..., x_n$ – объемы потребления благ.

Поскольку полезность является субъективным понятием, то для функции полезности первоначально не определены: а) «точка отсчета», то есть нулевой уровень полезности; б) «шкала», то есть единица измерения удовлетворенности. Следовательно, любая возрастающая функция от U также может выражать полезность блага, например:

$$\tilde{U}(x) = aU(x) + b,\ a,b > 0\ \Leftrightarrow U(x),$$

то есть линейная функция от функции полезности также есть функция полезности.

Экономико-математические характеристики

Зависимость полезности от объема потребления блага x_i при фиксированных объемах потребления других благ (рис. 4.1) называется кривой полезности $U(x_i)$.

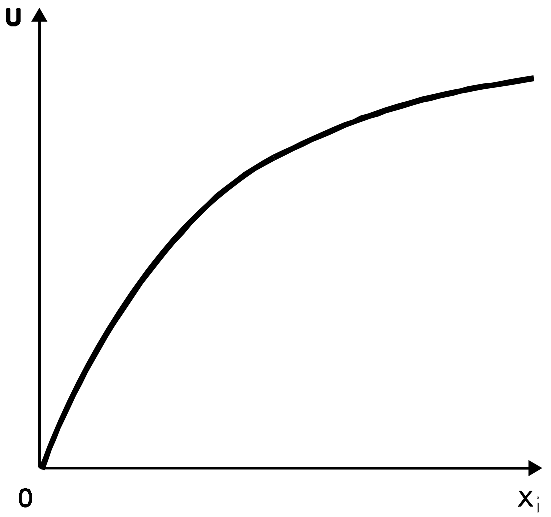

Рис. 4.1. Кривая полезности

Вид зависимости значения $U(x_i)$ от объема потребления *i*-го блага при постоянных объемах потребления других благ характеризует п р е д е л ь н а я п о л е з н о с т ь *i*-го блага:

$$MU_i = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, i = 1,2\,. \tag{4.1}$$

Предельная полезность представляет собой прирост полезности набора благ (x_1, x_2) при увеличении объема потребления *i*-го блага на единицу.

И з о л и н и и функции полезности (кривые постоянной полезности), впервые примененные английским экономистом Фрэнсисом Эджуортом в 1881 г., получили название к р и в ы х б е з р а з л и ч и я . Основное условие, которому отвечают кривые безразличия (рис. 4.2) – неизменность величины полезности во всех точках кривой:

$$U(x_1, x_2) = \text{const}\,. \tag{4.2}$$

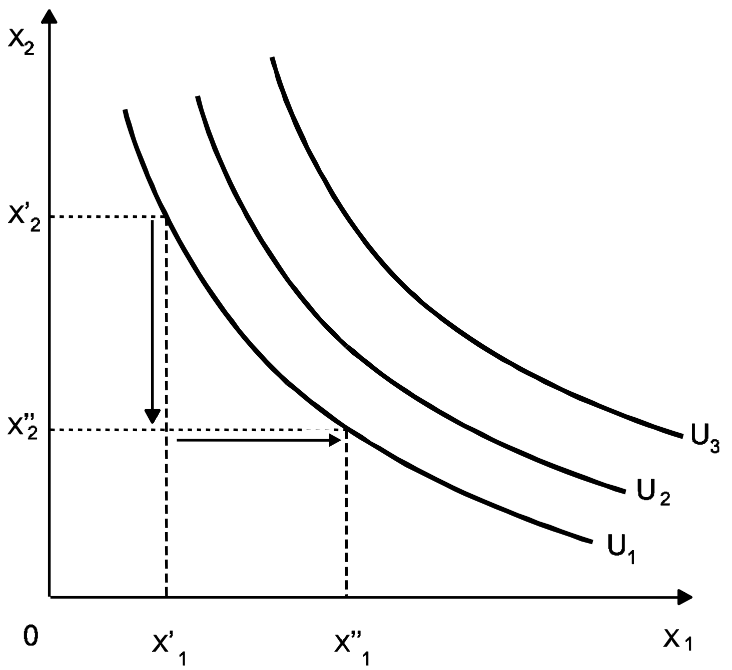

Рис. 4.2. Кривые безразличия (U_1=10 баллов, U_2=20 баллов, U_3=30 баллов)

Пример 4.1.1. *Для потребителя, покупающего масло и мед, построены кривые безразличия, изображенные на рис. 4.2. Используя кривую безразличия, соответствующую уровню полезности U_1=10 баллов, можно определить, что при потреблении x_1'=2 кг масла потребитель должен приобретать x_2'=12 литров меда, чтобы быть удовлетворенным на 10 баллов. В этом состоит экономический смысл кривых безразличия.*

Если же потребитель при той же степени удовлетворенности 10 баллов хочет приобрести $x_1''=8$ кг масла, то он готов отказаться от $(x_2''-x_2')=(12-6)=6$ литров меда. В этом проявляется эффект замены: при постоянном уровне удовлетворенности в случае увеличения потребления одного товара сокращается потребление другого товара.

Количественной характеристикой интенсивности эффекта замены (а значит и формы кривых безразличия) служит предельная норма замены:

$$MRS_{X_1X_2} = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=\text{const}} \tag{4.3}$$

Поскольку прирост полезности равен нулю при условии $U(x_1, x_2) = \text{const}$, то

$$dU = \frac{\partial U(x)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U(x)}{\partial x_2}dx_2 = 0,$$

следовательно

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U(x)}{\partial x_2} = -\frac{MU_1}{MU_2},$$

а при подстановке этого выражения в (4.3) получим:

$$MRS_{X_1X_2} = \frac{MU_1}{MU_2}. \tag{4.4}$$

Так как предельная норма замены $MRS_{X_1X_2}$ показывает, на сколько единиц можно сократить потребление блага x_2, чтобы при единичном увеличении потребления блага x_1 полезность набора благ не изменилась, то из условия (4.4) вытекает следующий вывод: во сколько раз предельная полезность блага-заменителя превышает предельную полезность замещаемого блага, во столько же раз сокращение объема его потребления превзойдет прирост потребления блага-заменителя.

§4.2. Виды функции полезности

Логарифмическая функция

В работе «Опыт новой теории измерения жребия», опубликованной в 1738 г., швейцарский математик Даниил Бернулли впервые предложил способ количественного определения полезности блага на основе вероятностной теории игр. Полезность (или выгода) U есть результат, получаемый потребителем от обладания благом (достижения выигрыша) x. Диапазон изменения объема потребления блага x разбивается на два интервала:

1) при $x > x_0$ благо обеспечивает доход (полезность); значение x_0 есть объем блага, соответствующий нулевому уровню полезности;

2) при $0 < x < x_0$ располагаемый объем блага снижает уровень удовлетворенности (приводит к убытку); причем чем меньше имеющийся объем блага, тем существеннее снижение удовлетворенности потребителя; иначе говоря, это интервал «антиблага».

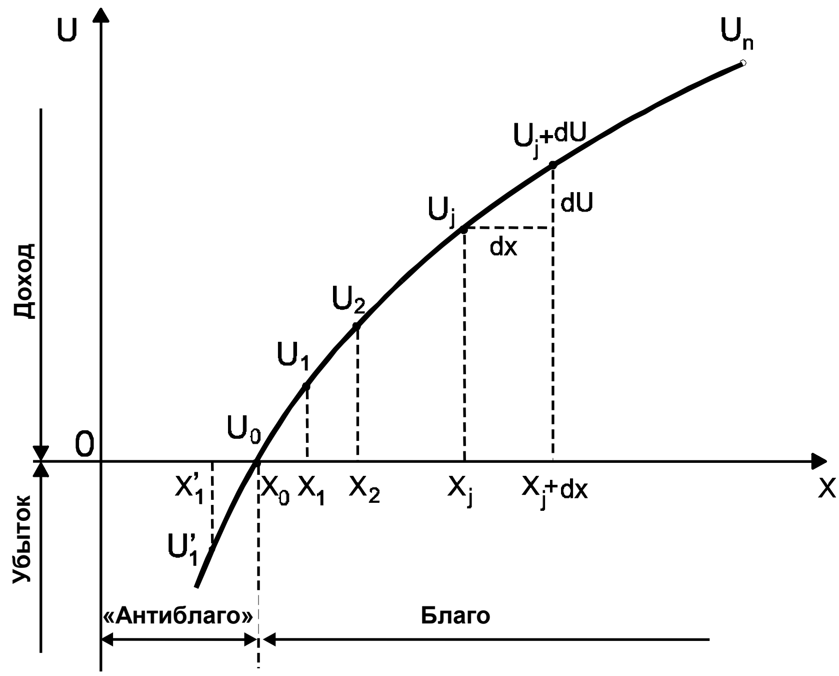

Рис. 4.3. Вид кривой полезности

С точки зрения теории игр благо интерпретируется как выигрыш, а «антиблаго» – как сумма ставки, необходимая для получения соответствующего выигрыша (рис. 4.3). В игре со справедливыми условиями убыток от проигрыша должен быть равен выгоде от выигрыша, то есть при

$$x_0 x_1 = x_0 x'_1$$

должно выполняться условие

$$U_1 = U'_1.$$

В дальнейших рассуждениях Д. Бернулли использовал следующее предположение: объем блага x_0, соответствующий полной неудовлетворенности потребителя ($U=0$), несопоставим с максимально возможным объемом потребления блага x_n, то есть $x_0 << x_n$.

В этом случае дугу U_0U_n можно рассматривать как кривую, близкую к отрезку прямой линии, угловой коэффициент которой, как видно из рис. 4.4, равен $\frac{a}{x}$; параметр a представляет собой длину подкасательной (проекции значения функции на ось аргумента), если рассматривать зависимость x от U.

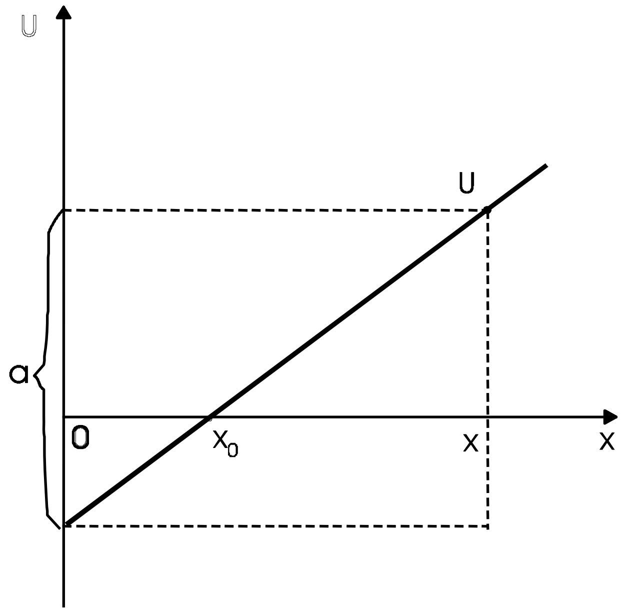

Рис. 4.4. Предположение Бернулли

Для получения уравнения кривой U_0U_n значению имеющегося блага x_j дается бесконечно малое приращение dx, приводящее к соответствующему приросту полезности dU. С учетом принятого предположения угловые коэффициенты дуги U_0U_n и дуги $(U_j; U_j + dU)$ как отрезка кривой, равны:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{a}{x} \Rightarrow, \; dU = \frac{a}{x}dx\,. \tag{4.5}$$

Решением дифференциального уравнения (4.5) является функция:

$$U = a\ln x + C$$

с начальным условием

$$U(x_0) = U_0 = 0,$$

откуда

$$a\ln x_0 + C = 0,$$

$$C = -a\ln x_0,$$

$$U = a\ln\frac{x}{x_0}. \tag{4.6}$$

Таким образом, ф у н к ц и я п о л е з н о с т и п р е д с т а в л я е т с о б о й л о г а р и ф м и ч е с к у ю к р и в у ю, подкасательная которой равна *a*, асимптота – ось ординат. Поэтому сумма дохода и убытка (длина подкасательной *a*) остается постоянной для любых игровых ситуаций, так как рассматривается игра с полной суммой.

Однако функция полезности вида (4.6), имеющая адекватную игровую интерпретацию, не нашла широкого применения в теории полезности, так как на интервале $0 < x < x_0$ функция (4.6) принимает отрицательные значения.

Более распространена логарифмическая функция Бернулли, полученная путем смещения дуги U_0U_n параллельно самой себе влево до совпадения точки U_0 с точкой, абсцисса которой $x=1$, то есть при сдвиге на величину $(x_0 - 1)$:

$$U = a\ln(x - x_0), \qquad x > x_0 \geq 0.$$

Для случая нескольких благ логарифмическая функция записывается в виде:

$$U = U_1 + U_2 = a_1\ln(x_1 - x_{01}) + a_2\ln(x_2 - x_{02}), \;\; a_i > 0, \quad x_i > x_{0i} \geq 0. \tag{4.7}$$

Пример 4.2.1. *Предпочтения потребителя, приобретающего 10 литров молока и 2 тюбика зубной пасты в месяц, выражаются логарифмической функцией полезности с коэффициентами*

$x_{01} = x_{02} = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1$. Потребитель рассуждает о том, что ему полезнее: приобрести дополнительно 1 литр молока или 1 тюбик пасты?

Запишем функцию полезности потребителя:

$$U = 2\ln(x_1 - 1) + \ln(x_2 - 1).$$

Для ответа на вопрос потребителю нужно сравнить предельные полезности молока и пасты при данном объеме потребления этих товаров. Вычислим предельные полезности по формуле (4.1):

$$MU_1 = \frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial[2\ln(x_1 - 1) + \ln(x_2 - 1)]}{\partial x_1} =$$

$$= 2\frac{\partial[\ln(x_1 - 1)]}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{10 - 1} = 0{,}22\,\frac{\text{ед.полез.}}{\text{литр}},$$

$$MU_2 = \frac{\partial U(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial[2\ln(x_1 - 1) + \ln(x_2 - 1)]}{\partial x_2} = \frac{\partial[\ln(x_2 - 1)]}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1\,\frac{\text{ед.полез.}}{\text{тюбик}}.$$

Таким образом, потребителю значительно полезнее приобрести дополнительно тюбик пасты, чем литр молока.

Степенная функция

Продолжая игровую интерпретацию (рис. 4.3), Д. Бернулли ввел понятие с р е д н е г о в ы и г р ы ш а (среднего значения полезности):

$$\overline{U} = \frac{f_1 U_1 + f_2 U_2}{f_1 + f_2},$$

где f_j – частота получения *j*-го блага (наступления *j*-го выигрыша).

Полагая $a_1 = a_2 = a$, то есть считая сумму дохода и убытка одинаковой для всех рассматриваемых товаров, получим формулу средней полезности:

$$\overline{U} = \frac{f_1 a\ln(x_1 - x_0) + f_2 a\ln(x_2 - x_0)}{f_1 + f_2} = a\ln\left[(x_1 - x_0)^{\frac{f_1}{f_1+f_2}} \cdot (x_2 - x_0)^{\frac{f_2}{f_1+f_2}}\right] =$$

$$= a\ln(x_1 - x_0)^{b_1} \cdot (x_2 - x_0)^{b_2}.$$

Поскольку логарифмическая функция является возрастающей, то подлогарифмическое выражение также представляет собой функцию полезности:

$$U = (x_1 - x_0)^{b_1} \cdot (x_2 - x_0)^{b_2}.$$

В общем виде степенная функция записывается следующим образом:

$$U = a\left(x_1 - x_{01}\right)^{b_1}\left(x_2 - x_{02}\right)^{b_2}, \quad a > 0, \quad b_1 + b_2 = 1 \quad x_i \geq x_{0i} > 0. \qquad (4.8)$$

Функция (4.8) применяется для описания предпочтений потребителя, который не удовлетворен при отсутствии хотя бы одного блага.

Смысл теории игр, вложенный Д. Бернулли в функцию средней полезности, позволил интерпретировать полезность в задачах определения первоначального объема блага, необходимого для достижения определенного уровня полезности, и прироста удовлетворения, связанного с приращением располагаемого объема блага. В этом случае предполагается, что речь идет об одном благе, которое может иметься в различных количествах и, следовательно, обеспечивать разный уровень удовлетворенности.

Пример 4.2.2. *Продавец планирует реализовать товар за 10 000 руб., однако, как правило, из 100 сделок аналогичного типа 5 оказываются неудачными. Сделка может быть застрахована за 800 руб. Определить: а) начиная с какой суммы капитала продавец может отказаться от страховки; б) каким минимальным капиталом должен располагать страховщик, чтобы ему были выгодны такие условия страхования.*

Определим размер начального капитала продавца x_1, считая $x_0 = 0$, $x_2 = x_1 + \delta$, δ – прирост капитала. Приравняем среднюю полезность при отказе от страховки $\left(x_1 + 10000\right)^{\frac{95}{100}} \cdot x_1^{\frac{5}{100}}$, и при согласии застраховать сделку $x_1 + \left(10000 - 800\right)$. Уравнение

$$\left(x_1 + 10000\right)^{\frac{95}{100}} \cdot x_1^{\frac{5}{100}} = x_1 + 9200$$

имеет приближенное решение $x_1 = 5043$. Поэтому если капитал продавца превышает сумму 5043 руб., то прирост средней полезности в случае отказа от страховки выше, чем в случае ее принятия.

Размер начального капитала страховщика определим из условия равенства его средней полезности при принятии на себя страхования и при отказе от страхования:

$$\left(x_1 + 800\right)^{\frac{95}{100}} \cdot \left(x_1 + [800 - 10000]\right)^{\frac{5}{100}} = x_1,$$

откуда $x_1 = 14243$*. Таким образом, если страховщик имеет капитал, превышающий 14243 руб., то ему полезнее взять на себя обязанности страхования, чем отказаться от них.*

Пример 4.2.3*. Предприниматель имеет товары на складе на сумму 4000 руб. и товары, отгруженные на сумму 8000 руб., причем, как правило, десятая часть отгруженных товаров не оплачивается покупателями. Определить полезность запасов предпринимателя.*

По формуле средней полезности:

$$\overline{U} = \left(4000 + 8000\right)^{\frac{9}{10}} \cdot 4000^{\frac{1}{10}} = 10752 \ \text{руб.},$$

а за вычетом оставшихся на складе товаров полезность отгруженных товаров равна 6752 руб.

Рассмотренные примеры показывают, что полезность (степень удовлетворенности) может быть к о л и ч е с т в е н н о о ц е н е н а .

Функция Аллена

Английский экономист Рой Джордж Аллен (1906-1983) предложил вид функции полезности, которая получила название к в а д р а т и ч е с к о й , и л и ф у н к ц и и А л л е н а .

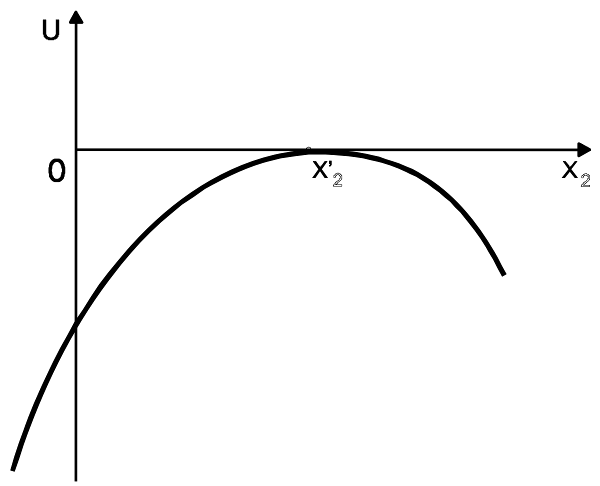

Рис. 4.5. Функция Аллена

Основной предпосылкой выбора вида функции было существование потребителей, для к о т о р ы х в о з м о ж н о с т ь п о л ь з о в а н и я о п р е д е л е н н ы м и б л а г а м и о г р а н и ч е н а , вследствие чего чрезмерный рост объема одного из благ при неизменном объеме потребления другого снижает общую полезность.

Иначе говоря, полезность выражается абсолютной величиной отклонения объемов потребления благ друг от друга, взятой с обратным знаком:

$$U = -\left|x_1 - x_2\right|.$$

Более удобной является дифференцируемая функция полезности, поэтому функцию модуля целесообразно заменить на квадратическую функцию:

$$U = -\left(x_1 - x_2\right)^2,$$

или, в более общем виде:

$$U = -\left(a_1 x_1 - a_2 x_2\right)^2 = 2a_1 a_2 x_1 x_2 - a_1^2 x_1^2 - a_2^2 x_2^2. \qquad (4.9)$$

Функция Аллена, вид которой при фиксированном объеме потребления первого блага показан на рис. 4.5, всегда отрицательна и представляет собой «ф у н к ц и ю п о т е р ь», которые несет потребитель если располагаемые объемы благ отличаются от заданных удельных потребностей a_1 и a_2:

$$a_1 x_1 = a_2 x_2 \Rightarrow \ x_2 = \frac{a_1}{a_2} x_1;$$

только в этом случае потери равны нулю и «полезность» максимальна.

§4.3. Количественная теория полезности

Аддитивная функция полезности

Экономисты XIX века (Уильям Джевонс, Леон Вальрас), как основоположники к а р д и н а л и с т с к о г о (к о л и ч е с т в е н н о г о) подхода к оценке полезности потребителя, предполагали, что потребитель способен оценить потребляемые им товары с точки зрения величины полезности, причем ц е л ь ю п о т р е б и т е л я я в л я е т с я м а к с и м и з а ц и я п о л е з н о с т и. Поэтому первоначально полезность набора благ представлялась как сумма полезностей всех входящих в комплект благ, то есть использовалась а д д и т и в н а я функция полезности:

$$U = \sum_i U_i(x_i), \quad (4.10)$$

где U_i – полезность блага x_i.

Следовательно, предполагалась независимость полезностей отдельных благ друг от друга.

В современной теории многокритериального выбора решений вид (4.10) агрегированного критерия по-прежнему широко распространен, однако вводится зависимость альтернатив по полезности, выражаемая коэффициентами значимости k_i:

$$U = \sum_i k_i U_i(x_i), \qquad \sum_i k_i = 1. \quad (4.11)$$

Функции полезности, рассмотренные выше, также являются аддитивными функциями вида (4.11).

Пример 4.3.1. *Провести упорядочение по полезности альтернативных проектов трех моделей автомобилей при следующих значениях критериев (объемов благ) и коэффициентов значимости:*

№ п/п	*Критерий (благо)*	*Модель*			*Коэффициент значимости*
		1-я	*2-я*	*3-я*	
1	*Цена, тыс. руб*	*28*	*30*	*30*	*0,4*
2	*Полезный объем, м*^{3}	*4*	*5*	*6*	*0,1*
3	*Расходы на обслуживание, тыс. руб.*	*3*	*1*	*2*	*0,2*
4	*Скорость, км/ч*	*180*	*180*	*200*	*0,3*

Определим полезность блага $U_i(x_i)$ как возрастающую безразмерную функцию объема блага x_i, то есть большему количеству блага должно соответствовать большее значение его полезности:

$$U_i(x_i) = \begin{cases} \dfrac{x_i}{\sum\limits_i x_i}, & \text{если} \quad \dfrac{\partial U_i}{\partial x_i} > 0, \\[2ex] \dfrac{\tilde{x}_i}{\sum\limits_i \tilde{x}_i}, \quad \tilde{x}_i = \dfrac{1}{x_i}, & \text{если} \quad \dfrac{\partial U_i}{\partial x_i} < 0. \end{cases}$$

Расчет частных полезностей проведен в таблице:

Номер критерия	$x_i, \tilde{x}_i$			$\sum x_i, \sum \tilde{x}_i$	U_i		
	Модель				*Модель*		
	1-я	*2-я*	*3-я*		*1-я*	*2-я*	*3-я*
1	*1/28*	*1/30*	*1/30*	*0,1024*	*0,35*	*0,33*	*0,33*
2	*4*	*5*	*6*	*15*	*0,27*	*0,33*	*0,40*
3	*1/3*	*1*	*1/2*	*1,833*	*0,18*	*0,55*	*0,27*
4	*180*	*180*	*20*	*560*	*0,32*	*0,32*	*0,36*

Полезности моделей с учетом коэффициентов значимости равны:

$$U_1 = 0{,}4 \cdot 0{,}35 + 0{,}1 \cdot 0{,}27 + 0{,}2 \cdot 0{,}18 + 0{,}3 \cdot 0{,}32 = 0{,}299,$$

$$U_2 = 0{,}4 \cdot 0{,}33 + 0{,}1 \cdot 0{,}33 + 0{,}23 \cdot 0{,}55 + 0{,}3 \cdot 0{,}32 = 0{,}371,$$

$$U_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}33 + 0{,}1 \cdot 0{,}40 + 0{,}2 \cdot 0{,}27 + 0{,}3 \cdot 0{,}36 = 0{,}454.$$

Итак, модели предпочтительны в следующем порядке:

Модель 3 , Модель 2 , Модель 1

Законы Госсена

Цель максимизации количественной полезности нашла выражение в закономерностях, полученных немецким экономистом Германом Госсеном в 1854 г. в работе «Развитие законов общественного обмена и вытекающих отсюда правил человеческой деятельности».

Первый закон Госсена: в одном непрерывном акте потребления полезность последующей единицы блага убывает; при повторном акте потребления полезность каждой единицы блага уменьшается по сравнению с ее полезностью при первоначальном потреблении.

Математическая запись этого закона имеет вид:

$$MU = \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0, \quad \frac{\partial MU}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = 1,2, \tag{4.12}$$

то есть предельная полезность блага по мере его потребления уменьшается.

Этот закон также получил название «аксиомы ненасыщения», поскольку при $MU > 0$ функция полезности возрастающая, то есть насыщения потребителя не наступает. Рассмотренные виды функции полезности удовлетворяют аксиоме ненасыщения.

Первый закон Госсена был получен э м п и р и ч е с к и м п у т е м на основе обобщения с у б ъ е к т и в н ы х м н е н и й о полезности потребления благ в различных количествах.

Пример 4.3.2. *Потребитель, рассмотренный в примере 4.2.1, приобретал 10 литров молока и 2 тюбика зубной пасты в месяц, и при логарифмической функции полезности*

$$U = 2\ln(x_1 - 1) + \ln(x_2 - 1)$$

его удовлетворение от дополнительного литра молока составляло

$$MU_1 = \frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{10 - 1} = 0{,}22\,\frac{ед.полез.}{литр}.$$

Если же данный потребитель будет приобретать 30 литров молока в месяц, то увеличение закупок молока на 1 литр принесет ему дополнительно

$$MU_1 = \frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{30 - 1} = 0{,}07\,\frac{ед.полез.}{литр},$$

то есть предельная полезность уменьшится.

В т о р о й з а к о н Г о с с е н а: максимум полезности потребляемых благ за ограниченный период времени достигается, если затраты времени на потребление каждого блага таковы, что предельные полезности благ одинаковы.

Речь идет о задаче определения условного экстремума функции полезности

$$U = \sum_i U_i(x_i)$$

при ограниченном времени потребления благ

$$\sum_i t_i x_i = T,$$

где t_i – время потребления единицы i-го блага, T – располагаемый фонд времени.

Задача решается методом множителей Лагранжа; функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_i U_i(x_i) - \lambda\left[\sum_i t_i x_i - T\right], \tag{4.13}$$

λ – множитель Лагранжа.

Необходимые условия оптимальности определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial U_i}{\partial x_i} - \lambda t_i = 0, \quad i = 1,2, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_i t_i x_i - T = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует:

$$MU_i = \lambda t_i, \quad i = 1,2. \tag{4.14}$$

Деление одного уравнения (4.14) на другое приводит к соотношению:

$$\frac{MU_1(x_1^*)}{MU_2(x_2^*)} = \frac{t_1}{t_2}, \tag{4.15}$$

то есть наклон линии ограниченного времени (линия T на рис. 4.6) должен быть равен наклону касательной к кривой безразличия U при оптимальных объемах потребления благ.

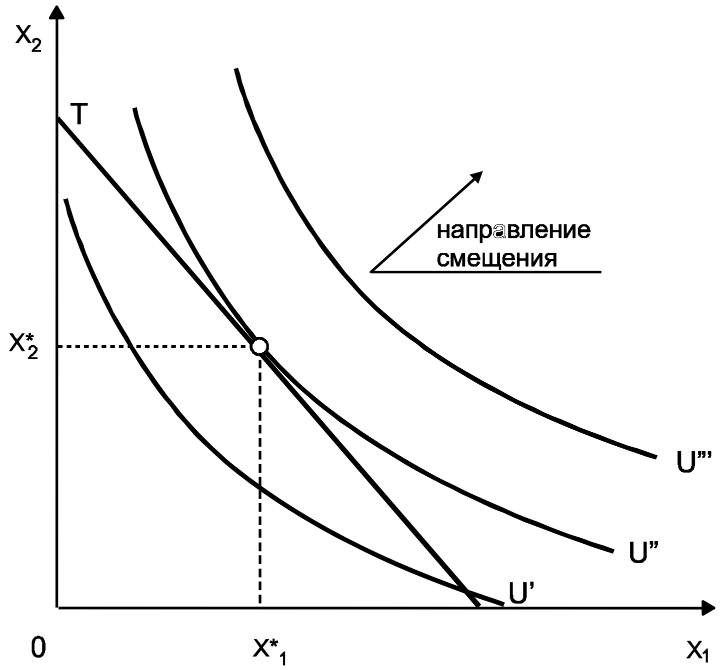

Рис. 4.6. Второй закон Госсена

Введем координаты $y_1 = t_1 x_1, \quad y_2 = t_2 x_2$, выражающие интервалы времени, затрачиваемые на потребление благ. Кривая безразличия будет представлена в новых координатах функцией полезности:

$$U_i(y_i) = U_i(t_i x_i), \quad i = 1,2.$$

Предельные полезности благ равны:

$$MU_i(x_i) = \frac{\partial U_i(y_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i(y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = MU_i(y_i) \cdot t_i, \quad i = 1,2.$$

Подставив это условие в соотношение (6), можно получить:

$$\frac{MU_1(y_1^*) \cdot t_1}{MU_2(y_2^*) \cdot t_2} = \frac{t_1}{t_2}, \quad \frac{MU_1(y_1^*)}{MU_2(y_2^*)} = 1,$$

то есть в момент окончания потребления каждого блага предельные полезности всех благ одинаковы.

Экономический смысл множителя Лагранжа λ состоит в том, что прирост фонда времени T на единицу приведет к увеличению полезности набора на λ (из уравнения (4.13)), то есть

$$\lambda = \frac{\partial \sum_i U_i}{\partial T}$$

представляет собой предельную полезность времени.

Пример 4.3.3. *Самолет летчика А. Ляпидевского, доставивший продукты героям-челюскинцам, зимовавшим на льдине в Северном ледовитом океане, имел возможность продолжать стоянку в течение 2 часов. Определить, какое количество хлеба (1-й товар) и одежды (2-й товар) полярники должны разгрузить, чтобы их полезность была максимальна, если их предпочтения выражает степенная функция вида* $U = x_1^{0,2} x_2^{0,8}$. *Сколько времени они должны затратить на разгрузку каждого товара, если 1 кг хлеба можно разгрузить за 3 мин., а упаковку одежды за 5 минут.*

Выражения предельных полезностей имеют вид:

$$MU_1 = \frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial \left[x_1^{0,2} x_2^{0,8}\right]}{\partial x_1} = 0,2 x_1^{-0,8} x_2^{0,8} \, \frac{ед.полез}{кг},$$

$$MU_2 = \frac{\partial U(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial \left[x_1^{0,2} x_2^{0,8}\right]}{\partial x_2} = 0{,}8 x_1^{0,2} x_2^{-0,2} \ \frac{ед.полез}{упак}.$$

Приравняв эти выражения, получим

$$0{,}2 x_1^{-0,8} x_2^{0,8} = 0{,}8 x_1^{0,2} x_2^{-0,2} \Rightarrow x_2 = 4x_1.$$

Учитывая затраты времени на разгрузку, составим уравнение фонда времени:

$$\frac{3}{60} x_1 + \frac{5}{60} x_2 = 2 часа,$$

откуда находим количество товаров, которые необходимо разгрузить, чтобы максимизировать полезность зимовщиков: $x_1 = 5{,}2 кг,\ x_2 = 20{,}9\ упак.$

Поэтому на разгрузку хлеба они должны потратить

$$x_1 t_1 = 5{,}2 \cdot 3 = 15{,}5 мин,\ \ x_2 t_2 = 20{,}9 \cdot 5 = 104{,}5 мин.$$

Закон спроса

Основным результатом количественной теории полезности стал з а к о н с п р о с а, полученный американским экономистом Альфредом Маршаллом в 1927 г. в работе "Принципы экономики". Маршалл исходил из того, что п р е д е л ь н а я п о л е з н о с т ь д е н е г[1], равная отношению предельной полезности блага к его цене, о с т а е т с я п о с т о я н н о й:

$$\frac{MU_i}{p_i} = MU_p = \text{const}.$$

Это объясняется тем, что, по второму закону Госсена, потребитель максимизирует свою полезность путем потребления широкого ассортимента товаров, следовательно, изменение цены одного товара не повлияет на покупательную способность денег в целом. Отсюда следует, что предельная полезность блага пропорциональна его цене:

$$MU_i \sim p_i,$$

а поскольку, согласно первому закону Госсена, предельная полезность обратно пропорциональна объему потребления блага $MU_i \sim \frac{1}{x_i}$, то $p_i \sim \frac{1}{x_i}$, то есть к р и в а я с п р о с а я в л я е т с я у б ы в а ю щ е й. В этом состоит закон спроса.

[1] Деньги фигурируют здесь в своей функции меры стоимости.

§4.4. Задача потребительского выбора

Бюджетная линия

Геометрическое место точек (множество точек) пространства благ, для которых сумма затрат потребителя на их приобретение неизменна, называется б ю д ж е т н о й   л и н и е й :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I = \text{const}, \tag{4.16}$$

где I (*Income*) – доход потребителя. Условие (4.16) выражает р а в е н с т в о   д о х о д о в   и   р а с х о д о в .

Изображенная на рис. 4.7 бюджетная линия аналогична рассмотренной выше линии ограниченного времени.

Экономический смысл бюджетной линии состоит в том, что она показывает количество второго товара, которое, истратив весь доход, может приобрести потребитель при различных количествах первого товара.

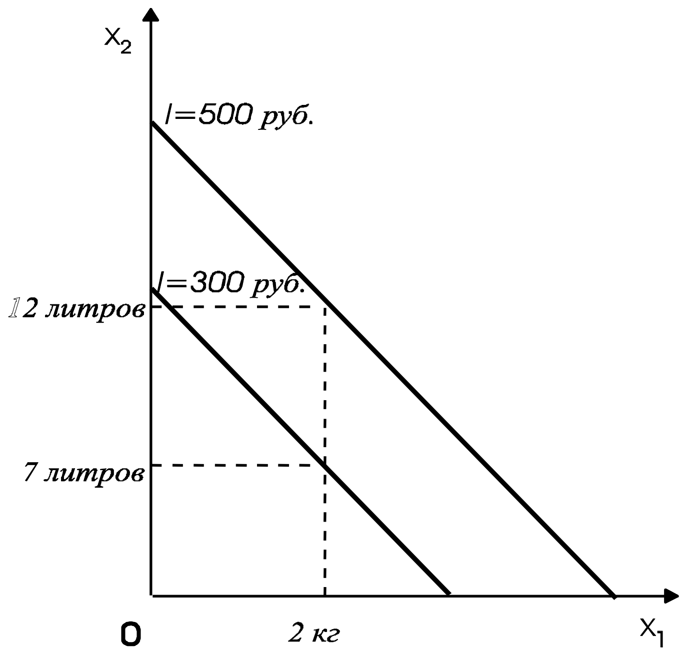

Рис. 4.7. Бюджетная линия

Пример 4.4.1. *Для потребителя, получающего ежемесячный доход 300 руб. и 500 руб., построены бюджетные линии на рис. 4.7. По рисунку видно, что, покупая 2 кг мяса, потребитель может приобрести 7 литров молока в месяц при доходе 300 руб. и 12 литров – при доходе 500 руб.*

Задача выбора. Графическое решение

Потребитель при составлении набора благ решает следующую задачу: определить количество потребляемых благ (x_1, x_2), при которых максимизируется совокупная полезность:

$$\max\ U(x_1, x_2)$$

при выполнении бюджетного ограничения

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I.$$

Графически задача выбора потребителя может быть решена путем построения семейства кривых безразличия и бюджетной линии (рис. 4.8):

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

Затем из всех кривых безразличия выбирается та, которая касается бюджетной линии (то есть имеет одну общую точку с ней). Соответствующая этой кривой безразличия полезность U будет максимально возможной полезностью при данном доходе I, а сочетание (x_1^*, x_2^*) – искомым набором благ.

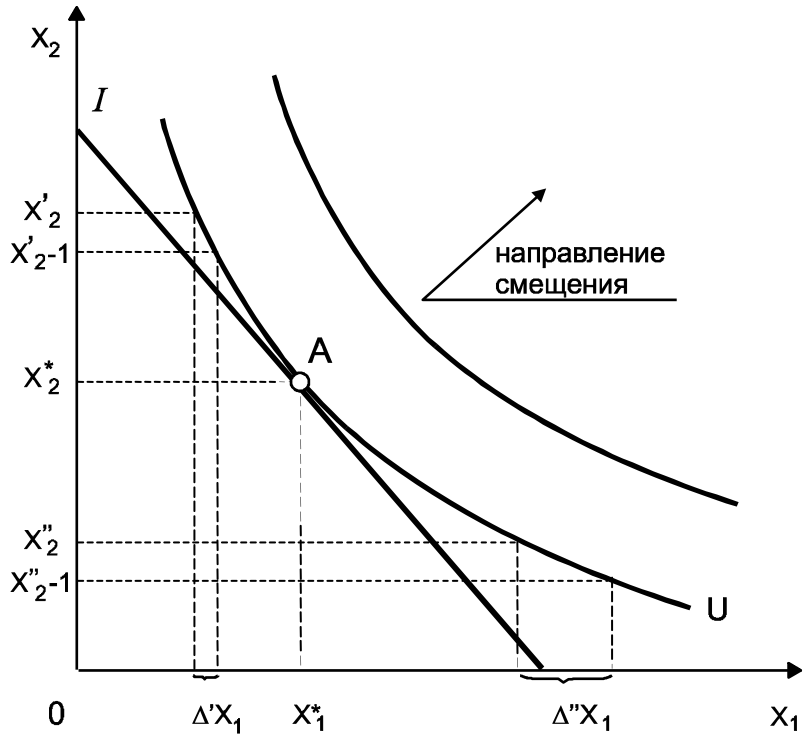

Рис. 4.8. Решение задачи выбора

Предпосылкой существования и единственности решения является выпуклость кривой безразличия, вытекающая из закона убывающей предельной полезности. На кривой безразличия этот закон выражается следующим образом: поскольку при единичном уменьшении потребления второго блага $\Delta x_2' = -1$ объем первого блага растет на $\Delta x_1'$, а при снижении второго блага на $\Delta x_2'' = -1$ первое благо потребляется на $\Delta x_1''$ больше, причем если

$$x_2' > x_2'', \text{ то } \Delta' x_1 < \Delta'' x_1,$$

это означает, что при большем исходном объеме заменяемого блага для его адекватной замены требуется меньшее количество блага-заменителя, и наоборот. Иными словами, предельная полезность блага x_2 ниже при большем объеме его потребления, чем при меньшем. Значит закон убывания предельной полезности соответствует убыванию предельной нормы замены (уменьшению угла наклона кривой безразличия к осям x_1 или x_2).

В точке А на рис. 4.8 с координатами x_2^*, x_2^* угловые коэффициенты бюджетной линии и касательной к кривой безразличия (предельной нормы замены) равны:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_1(x_1^*)}{MU_2(x_2^*)}, \tag{4.17}$$

то есть при оптимальной комбинации благ цена одного должна превосходить цену другого блага во столько же раз, во сколько раз первое благо полезнее второго.

Пример 4.4.2. *Потребитель, рассмотренный в примере 4.2.1, покупает молоко по цене 10 руб. за литр, а зубную пасту по цене 15 руб. за тюбик. Какой товарный набор наиболее выгоден для потребителя, если он может потратить на покупку этих товаров не более 120 руб. в месяц?*

Запишем бюджетное ограничение: $10x_1+15x_2=120$. Подставим выражения предельных полезностей, найденные в примере 4.2.1:

$$MU_1 = \frac{2}{x_1 - 1}, \quad MU_2 = \frac{1}{x_2 - 1},$$

а также цены товаров $p_1=10$, $p_2=15$ в условие оптимального выбора (4.17):

$$\frac{\dfrac{2}{x_1-1}}{\dfrac{1}{x_2-1}}=\frac{10}{15}\Rightarrow x_2=\frac{1}{3}(x_1-1)+1\,. \qquad (4.18)$$

Подставим это выражение для x_2 в бюджетное ограничение:

$$10x_1+15[(x_1-1)/3+1]=120,$$

откуда выразим оптимальный объем потребления первого товара: $x^*_1=7{,}3$ литра. Оптимальный объем потребления второго товара найдем по формуле (4.18):

$$x^*_2=(x_1-1)/3+1=(7{,}3-1)/3+1=3{,}1 \text{ тюбика.}$$

Таким образом, потребитель, приобретая 7,3 литра молока и 3,1 тюбика пасты в месяц при доходе в 120 руб., достигает максимального удовлетворения. Его уровень удовлетворенности при этом найдем, подставив оптимальные объемы потребления товаров в функцию полезности (пример 4.2.1):

$$U=2\ln(x_1-1)+\ln(x_2-1)=2\ln(7{,}3-1)+\ln(3{,}1-1)=4{,}4 \text{ед.полез.}$$

Пример 4.4.3. *Предположим, что цены товаров в примере 4.4.2 возросли: молока на 2 руб., зубной пасты на 4 руб. Вследствие этого реальный доход, то есть покупательная способность потребителя, понизилась. Какую компенсацию должен получить потребитель, чтобы он мог приобрести товары в прежних количествах?*

Если бы потребитель приобретал 1 литр молока и 1 тюбик пасты, то компенсация должна быть равна повышению цен:

$$\Delta p_1+\Delta p_2=2+4=6 \text{ руб.}$$

Но поскольку товарный набор потребителя x^*_1, x^*_2, то компенсация вычисляется по формуле:

$$\Delta I=\Delta p_1 x^*_1+\Delta p_2 x^*_2. \qquad (4.19)$$

Таким образом, чтобы сохранить прежний уровень удовлетворенности, потребитель должен получить $2\cdot7{,}3+4\cdot3{,}1=27$ руб.; при таком приросте дохода он может приобрести прежний товарный набор по возросшим ценам.

§4.5. Порядковая теория полезности

Порядковая (ординалистская) теория полезности выражала переход от поисков абсолютной величины стоимости к ее относительной величине. Основными предпосылками отказа от кардиналистского подхода к определению полезности явились:

а) невозможность количественно оценить субъективную полезность потребителя в силу несоответствия требования объективного измерения субъективным оценкам;

б) неизмеримость предельной полезности как основы кардиналистской теории;

в) неадекватность «закона» убывающей предельной полезности для некоторых экономических явлений, например, перекрестного влияния благ в наборе:

– увеличение количества одного субститута (печенья) влечет снижение предельной полезности другого субститута (баранок) при неизменном количестве его потребления;

– увеличение объема потребления одного комплимента (хлеба) приводит к увеличению предельной полезности другого комплимента (масла), хотя объем последнего постоянен.

Метод кривых безразличия

Основой нового подхода к определению полезности стали кривые безразличия, использованные в работе английского экономиста Джона Хикса и Роя Аллена «Еще раз о теории стоимости», опубликованной в 1934 г.

Метод кривых безразличия предполагает, что потребитель имеет субъективную шкалу предпочтений, а функция полезности устанавливает порядок предпочтений наборов благ. В результате от неизмеримой предельной полезности можно перейти к предельной норме замещения, которая выражает количество блага x_2, от которого потребитель согласен отказаться в обмен на дополнительную единицу блага x_1.

Поскольку предельная норма замещения равна соотношению цен благ, то этот показатель объективен, и величина $MRS_{x_1x_2}$ может быть установлена даже в том случае, когда сама полезность предполагается неизмеримой. Однако аппарат кривых безразличия также не был свободен от существенных недостатков:

1) принцип убывания предельной нормы замены, выражающий закон убывания предельной полезности, определяет форму кривых безразличия, однако этот принцип не является универсальным; на рис. 4.9 изображены кривые безразличия для субститутов (рис. 4.9,а) и комплиментов (рис. 4.9,б), которые не удовлетворяют этому принципу;

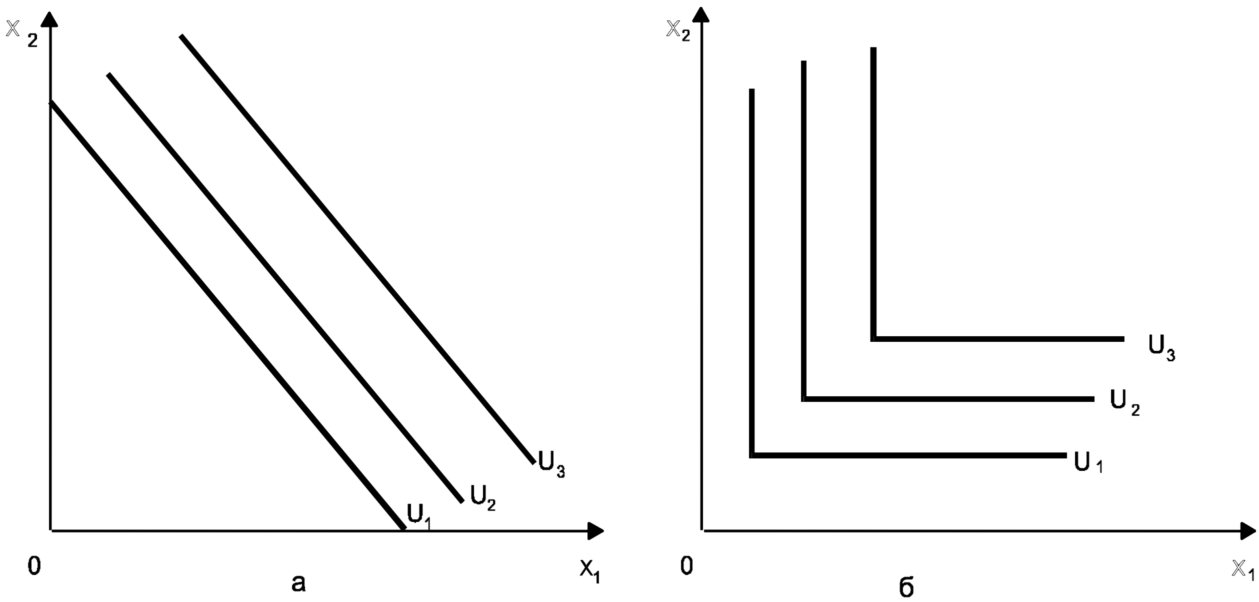

Рис. 4.9. Кривые безразличия субститутов и комплиментов

2) «карта безразличия» имеет статический характер, отражая неизменность предпочтений потребителя; появление новых или исчезновение имеющихся благ набора требует построения новой «карты безразличия»;

3) предположение о способности потребителя определить бесконечно много равноценных комбинаций благ нереалистично.

Концепция выявленных предпочтений

Развитием ординалистской теории полезности стала теория выявленных предпочтений, предложенная в 1938 г. американским экономистом Полом Самуэльсоном в работе «Замечания по поводу чистой теории поведения потребителя».

П. Самуэльсон утверждал, что потребитель, приобретая определенный набор благ, выявляет свое предпочтение и, если потребитель рационален, то выявленное предпочтение сохранится и при изменении структуры цен (рис. 4.10). В результате при анализе поведения потребителя удается избежать использования кривых безразличия, которые невозможно получить с помощью опытных наблюдений, а основываться только на объективных данных о доходе и ценах благ.

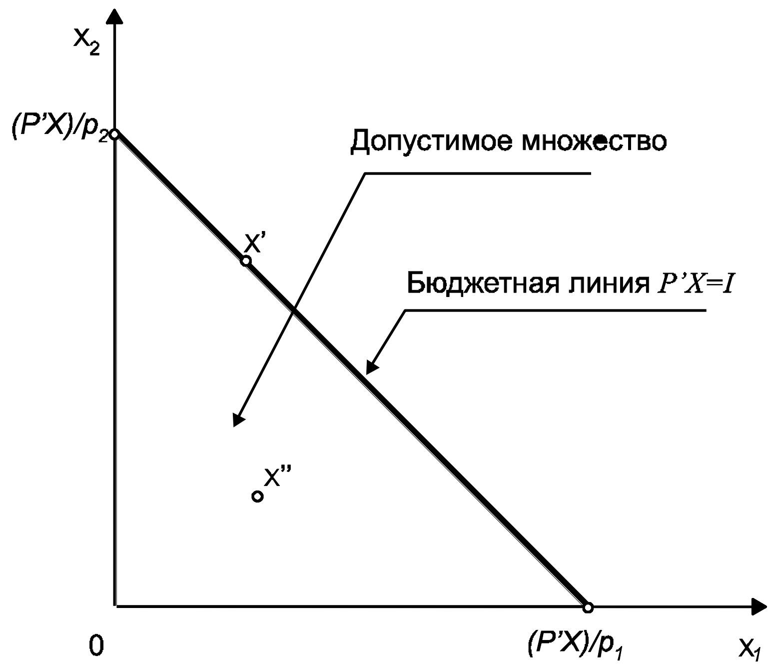

Рис. 4.10. Выявление предпочтения

Набор благ x' считается предпочтительнее набора x'', если $P'X' \geq P'X''$ (то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i' x_i' \geq \sum_{i=1}^{n} p_i' x_i''$). Если потребитель выбирает набор благ x' по ценам p', в то время как он мог бы купить при этих ценах другой набор благ x'', то он тем самым выявляет свое предпочтение.

Подход П. Самуэльсона использовался ранее (в 1915 г.) в работах Е.Е. Слуцкого, поэтому рассматриваемый ниже анализ изменения цены носит название метода Слуцкого-Самуэльсона.

Главный недостаток концепции П. Самуэльсона – требование неизменности системы предпочтений, то есть опора на «среднестатического» потребителя.

§4.6. Различные типы благ (товаров)

Коэффициенты чувствительности

Коэффициент чувствительности спроса по цене $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}$ показывает, на сколько единиц изменится спрос на данный товар, если его цена увеличится на 1 рубль. Коэффициент чувствительности спроса по доходу $\frac{\partial x_j^*}{\partial I}$ показывает, на сколько единиц изменится спрос на данный товар, если доход потребителя увеличится на 1 рубль. В соответствии со знаками показателей чувствительности блага могут быть отнесены к одному из следующих типов:

1. Нормальные и ценные блага: $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} < 0$, $\frac{\partial x_j^*}{\partial I} > 0$, то есть спрос на благо снижается при увеличении его цены и возрастает при увеличении дохода потребителя (например, масло).

2. Нормальные и малоценные блага: $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} < 0$, $\frac{\partial x_j^*}{\partial I} < 0$, то есть спрос на благо снижается как при увеличении его цены, так и при росте дохода потребителя. Например, ценным благом может считаться масло, а малоценным – маргарин.

3. «Товары Гиффина»: $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} > 0$, это означает, что спрос на благо растет при увеличении его цены. Товары Гиффина[1] являются малоценными. Примером товаров Гиффина может служить труд низкоквалифицированных работников для небольших предприятий как потребителей: при повышении цены блага (минимальной оплаты труда), предприятие, не имея возможности приобрести технологичное оборудование в связи с бюджетным ограничением, вынуждено нанимать еще больше низкооплачиваемых работников. Другой пример товаров Гиффина: продовольственные товары в комбинации с одеждой – повышение цены на продукты приводит к тому, что реальный доход потребителя снижается на столько,

[1] Роберт Гиффин (1878-1943) – английский экономист, исследовавший проблемы потребительского выбора.

что он не может потреблять прежнее количество одежды и вынужден большую часть дохода расходовать на продукты.

Таким образом, главная особенность товаров Гиффина – их о т н о с и т е л ь н а я д е ш е в и з н а по сравнению с возможными аналогами.

Коэффициенты эластичности

Безразмерные показатели чувствительности комбинации благ к изменению параметров рынка получили название коэффициентов эластичности.

Э л а с т и ч н о с т ь с п р о с а п о д о х о д у показывает, на сколько процентов изменится объем потребления блага при изменении дохода на 1 %:

$$\mathrm{E}_{x_i}^{I} = \frac{\partial x_i^*}{\partial I} \cdot \frac{I}{x_i^*}.$$

В соответствии со значениями $\mathrm{E}_{x_i}^{I}$ различают следующие типы благ, кривые «доход-потребление» которых приведены на рис. 4.11:

1. Н и з к о к а ч е с т в е н н ы е (м а л о ц е н н ы е) б л а г а, спрос на которые падает с увеличением дохода: $\mathrm{E}_{x_i}^{I} < 0$.

2. Б л а г а п е р в о й н е о б х о д и м о с т и, потребление которых не зависит от изменения дохода: $\mathrm{E}_{x_i}^{I} = 0$.

3. К а ч е с т в е н н ы е (ц е н н ы е) б л а г а, объем потребления которых увеличивается с ростом дохода: $\mathrm{E}_{x_i}^{I} > 0$.

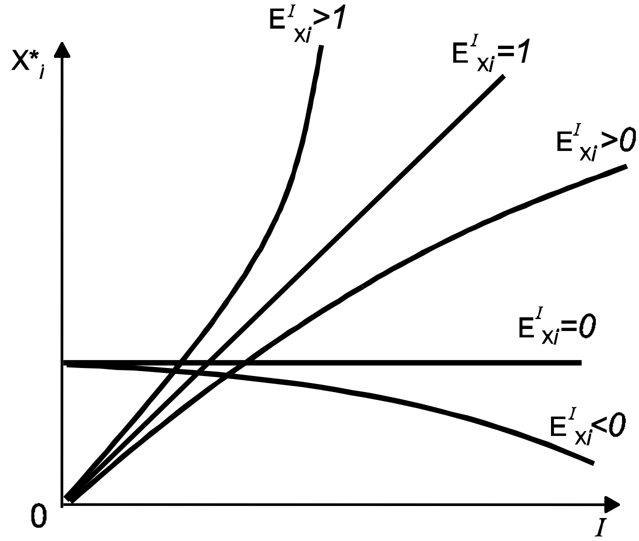

Рис. 4.11. Кривые «доход-потребление»

4. П р е д м е т ы р о с к о ш и, потребление которых растет опережающими темпами по сравнению с увеличением дохода: $\mathrm{E}_{x_i}^{I} > 1.$

Э л а с т и ч н о с т ь с п р о с а п о ц е н е показывает на сколько процентов изменится объем потребления блага при изменении его цены на 1 %:

$$\mathrm{E}_{x_i}^{p_i} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i^*}.$$

При существенных колебаниях рыночных цен используют формулу средней эластичности:

$$\mathrm{E}_{x_i}^{p_i} = \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_i} \cdot \frac{\left(p_i^{'} + p_i^{''}\right)/\,2}{\left(x_i^{*'} + x_i^{*''}\right)/\,2} = \frac{x_i^{*''} - x_i^{*'}}{p_i^{''} - p_i^{'}} \cdot \frac{p_i^{'} + p_i^{''}}{x_i^{*'} + x_i^{*''}}. \qquad (4.20)$$

На карте кривых «цена-потребление» (кривых спроса на рис. 4.12) коэффициент эластичности позволяет различить блага следующим образом:

1. Н о р м а л ь н ы е б л а г а, которые приобретаются в больших объемах по меньшей цене: $\mathrm{E}_{x_i}^{p_i} < 0.$ В том числе вполне заменяемые блага, спрос на которые бесконечно падает при малом увеличении цены: $\mathrm{E}_{x_i}^{p_i} = -\infty.$

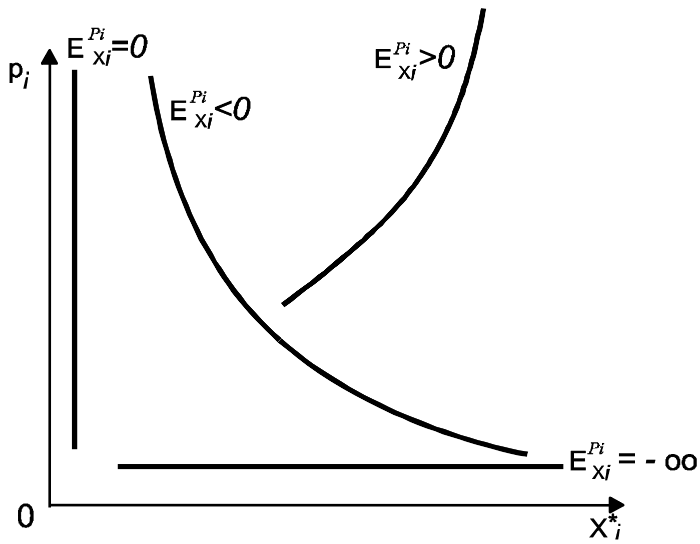

Рис. 4.12. Кривые «цена-потребление»

2. Незаменимые блага, изменение цены которых не влияет на объем потребления (спрос совершенно не эластичен): $E_{x_i}^{p_i} = 0.$

3. Товары Гиффина, спрос на которые растет с увеличением цены: $E_{x_i}^{p_i} > 0.$ Блага Гиффина с совершенно эластичным спросом невозможны ввиду бюджетного ограничения.

Перекрестная эластичность спроса по цене показывает процентное изменение спроса на одно благо при 1-процентном изменении цены другого:

$$E_{x_i}^{p_j} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i^*}.$$

В соответствии со значением этого коэффициента блага могут быть взаимозаменяемыми $\left(E_{x_i}^{p_i} > 0\right)$, взаимодополняемыми $\left(E_{x_i}^{p_i} < 0\right)$ или независимыми $\left(E_{x_i}^{p_i} = 0\right)$.

Пример 4.6.1. *Рыночная цена масла животного возросла с 80 руб. за кг до 100 руб., вследствие чего средний потребительский спрос на него упал с 5 кг в месяц до 4 кг в месяц. Насколько эластичен спрос на масло?*

Определим коэффициент эластичности спроса на масло по формуле (4.20):

$$E_{x_i}^{p_i} = \frac{x_i^{*''} - x_i^{*'}}{p_i^{''} - p_i^{'}} \cdot \frac{p_i^{'} + p_i^{''}}{x_i^{*'} + x_i^{*''}} = \frac{5-4}{80-100} \cdot \frac{80+100}{5+4} = -1\%.$$

Таким образом, при повышении цены масла на 1% спрос на него снижается на 1%. То есть масло относится к нормальным благам, спрос на которые существенно эластичен.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

4.1. Анализ функции полезности

4.1.1. Предпочтения потребителя описываются логарифмической функцией полезности с коэффициентами a_1=2, a_2=3, x_{10}=0,5, x_{20}=1. На сколько единиц повысится удовлетворенность потребителя, если он потребляет 5 кг мяса (1-й товар) и изнашивает 3 пары носков (2-й товар) в месяц и решил купить дополнительную пару носков?

4.1.2. Решить задачу 4.1.1, если у потребителя степенная функция полезности с коэффициентами A=10, b_1=*0,3*, b_2=0,7, x_{10}=0,1, x_{20}=0,2. Потребитель решил купить дополнительно 1 кг мяса, а носки использует в неизменном количестве.

4.1.3-4.1.4. В задачах 4.1.1, 4.1.2 построить график кривой полезности мяса (при постоянном количестве используемых носков). Графически объяснить предельную полезность.

4.1.5. Потребитель в задаче 4.1.1 приобретает 5 кг мяса в месяц. Сколько пар носков он должен изнашивать ежемесячно, чтобы его удовлетворенность составила 10 единиц?

4.1.6. Потребитель в задаче 4.1.2 изнашивает 3 пары носков в месяц. Сколько мяса он должен покупать ежемесячно, чтобы быть удовлетворенным на 30 единиц?

4.1.7. Степень удовлетворенности потребителя из задачи 4.1.1 равна 2 единицам. Сколько он потребляет мяса и изнашивает носков ежемесячно, если он согласен за лишний кг мяса отказаться от 4-х пар носков? Построить график кривой безразличия. Показать геометрический смысл нормы замены.

4.1.8. Степень удовлетворенности потребителя из задачи 4.1.2 равна 10 единицам. Сколько он потребляет товаров, если взамен на две пары носков он согласен есть на 1 кг мяса меньше? Построить график кривой безразличия. Показать геометрический смысл нормы замены.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

4.2. Решение задачи потребительского выбора

4.2.1. Потребитель из задачи 4.1.1 имеет доход 300 рублей в месяц, цена мяса 50 рублей за кг, цена носков 20 рублей за пару. Решить задачу потребительского выбора графически и аналитически.

4.2.2. Потребитель из задачи 4.1.2 имеет доход 600 рублей в месяц, цена мяса 100 рублей за кг, цена носков 30 рублей за пару. Решить задачу потребительского выбора графически и аналитически.

4.2.3. Цены в задаче 4.2.1 возросли: мяса на 10%, носков – на 20%. Государственный бюджет компенсирует потери потребителя в виде дотации, сумму которой требуется определить.

4.2.4. Цены в задаче 4.2.2 возросли: мяса на 5%, носков – на 10%. Найти размер дотации, которая полностью компенсирует потери потребителя.

4.2.5. Цена на мясо снизилась со 100 рублей за кг до 90 рублей за кг, вследствие чего спрос на него возрос с 2 кг в месяц до 4 кг в месяц . Найти среднюю эластичность спроса по цене.

4.2.6. Цена на обувь возросла с 700 рублей за пару до 1000 рублей за пару, в результате чего спрос на нее упал с 3 пар в год до 2 пар в год. Найти среднюю эластичность спроса по цене.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ашманов, С.А. Введение в математическую экономику / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1984. – 296 с.

2. Замков, О.О. Математические методы в экономике: учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1998. – 368 с.

3. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М.: Прогресс, 1975.- 605 с.

4. Гришанов, Г.М. Математические основы экономической теории производства / Г.М. Гришанов, М.И. Гераськин; Самар. гос. аэроком. ун-т. – Самара, 2001. – 102 с.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

♦Курс «Математическая экономика» охватывает 2 семестра, в каждом из которых необходимо решить две контрольных работы: в первом семестре студенты решают контрольные работы 1,2, во втором семестре – контрольные работы 3,4. Выполненные контрольные работы сдаются в деканат факультета заочного обучения, причем на каждую контрольную работу должен быть выписан отдельный учетный талон.

♦ВЫБОР НОМЕРА ВАРИАНТА: номер варианта №, фигурирующий в заданиях к контрольным работам, соответствует номеру студента в списке группы.

♦Контрольную работу следует выполнять на листах формата А4; пример оформления титульного листа приводится в данном учебном пособии (с. 122); страницы должны быть пронумерованы и иметь поля для замечаний рецензента; текст должен быть написан разборчиво, без зачеркиваний и исправлений; графики рисуются с использованием линейки и цветных карандашей; в конце работы должен быть список использованной литературы.

♦При оформлении решения каждой задачи в контрольной работе должна приводиться краткая информация по соответствующему разделу теоретического курса. Применение каждой формулы должно быть объяснено. При вычислениях необходимо привести расчетную формулу, численное представление расчетной формулы, результат вычислений и экономическую интерпретацию результата.

♦При отчете по контрольной работе студент должен знать теоретические положения, использованные при решении каждой задачи, а также свободно ориентироваться в процессе решения задачи.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

Определение коэффициентов и характеристик производственной функции

1.1. Автотранспортная фирма за последние 5 лет характеризовалась следующими показателями хозяйственной деятельности:

Год	Объем перевозок, тонн×км	Количество автомобилей, ед.	Численность работников, чел.
1	1200/№	3	9
2	1700/№	5	10
3	2800/№	8	18
4	3500/№	10	22
5	4800/№	14	30

Построить графики кривых выпуска, на основе которых подобрать вид ПФ. Определить значения коэффициентов ПФ, объяснить их экономический смысл. Спрогнозировать объем перевозок в 6-й год, если запланировано довести количество автомобилей до 20 ед., численность работников до 35 чел.

1.2. Железобетонный завод за последние 5 лет характеризовался следующими показателями хозяйственной деятельности:

Год	Объем выпуска бетона, тонн	Количество бетонных установок, единиц	Численность работников, чел.
1	500/№	1	3
2	900/№	2	10
3	1200/№	3	14
4	1400/№	4	20
5	1500/№	5	25

Построить графики кривых выпуска, на основе которых подобрать вид ПФ. Определить значения коэффициентов ПФ, объяснить их экономический смысл. Спрогнозировать объем выпуска в 6-й год, если запланировано довести количество установок до 8 ед., численность работников до 35 чел.

1.3. При сборке печатной платы используется 20/№ чипов и 60/№ соединительных проводов. Построить графики кривых выпуска, если на сборку подано: а) 30000/№ чипов; б) 120000/№ соединительных проводов. Определить значения коэффициентов ПФ, объяснить их экономический смысл.

1.4-1.6. Для ПФ в задачах 1.1-1.3 получить выражения среднего и предельного продуктов, а также коэффициентов эластичности по ресурсам. Изобразить графически зависимости экономико-математических характеристик, как функций соответствующего ресурса. В задачах 1.1, 1.2 вычислить значения экономико-математических характеристик по данным 5-го и 6-го года работы, объяснить их экономический смысл, сопоставить эффективность работы в эти годы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

Функция издержек в долгосрочном и краткосрочном периодах

2.1. Меховая фирма для изготовления шапок использует меховые шкурки по цене 800/(1+0,01№) руб. за шкурку и обратную кожу по цене 600/(1+0,01№) руб. за шкурку. Коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам равны 0,5/(1+0,01№) и 0,7/(1+0,01№) соответственно, А=1. Определить функции спроса на ресурсы и функцию издержек, если потребление ресурсов не ограничено и технология описывается ПФ Кобба-Дугласа. Построить графики функций спроса на ресурсы и функции издержек.

2.2. Решить задачу 2.1 графическим методом, построив линию долговременного развития.

2.3. В задаче 2.1 определить функции предельных и средних издержек. Построить графики.

2.4. Решить задачу 2.1, если расход обратной кожи по условиям договора с поставщиком ограничен объемом 1000/(1+0,01№) шкурок в месяц.

2.5. Решить задачу 2.4 графическим методом.

2.6. В задаче 2.4 определить функцию средних издержек. Построить график.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3
Оптимизация прибыли фирмы

3.1. Фирма «Стройкерамика» использует глину по цене 2/(1+0,01№) руб. за кг и краситель по цене 8/(1+0,01№) руб. за кг и продает кирпич по цене 100·(1+0,01№) руб. за штуку. Коэффициенты ПФ равны: $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$, А=(10+№). Определить функции спроса на ресурсы, оптимальный объем выпуска и максимальное значение прибыли в долгосрочном периоде.

3.2. Решить задачу 3.1 для случаев: а) возрастающей отдачи от расширения масштаба $\alpha = 0{,}8$; $\beta = 0{,}6$; б) убывающей отдачи от расширения масштаба $\alpha = 0{,}2$; $\beta = 0{,}6$; в) отсутствия эффекта расширения масштаба $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$.

3.3-3.4. Решить задачи 3.1-3.2 в условиях краткосрочного периода, если объем затрат первого ресурса зафиксирован – закупки глины ограничены объемом 10(1+0,01№) кг.

3.5. Фирма–монополист производства хрустальных ваз оплачивает песок по цене 3/(1+0,01№) руб. за кг и цинк по цене 8/(1+0,01№) руб. за кг. Цена продукции определяется выражением: p_0=1000-0,1Q (руб. за вазу). Определить оптимальный объем выпуска в случае А=1 и а) при убывающей отдаче от расширения масштаба $\alpha = 0{,}1$; $\beta = 0{,}4$; б) при отсутствии эффекта расширения масштаба $\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}6$. Найти оптимальный с точки зрения прибыли объём выпуска. Определить спрос на ресурсы и найти максимальную прибыль. Построить графики дохода, издержек, прибыли.

3.6. Решить задачу 3.5 для случаев: а) $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}2$; б) $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 0{,}5$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 4
Моделирование потребительского выбора

4.1. Предпочтения потребителя описываются логарифмической функцией полезности с коэффициентами a_1=2(1+0,01№), a_2=3(1+0,01№), x_{10}=0,5/(1+0,01№), x_{20}=1/(1+0,01№). На сколько единиц повысится удовлетворенность потребителя, если он потребляет 4(1+0,01№) кг колбасы (1-й товар) и использует 3(1+0,01№) куска мыла (2-й товар) в месяц и решил купить дополнительно кусок мыла?

4.2. Решить задачу 4.1, если у потребителя степенная функция полезности с коэффициентами A=10(1+0,01№), $b_1=0{,}4$, b_2=0,5, x_{10}=0,2/(1+0,01№), x_{20}=0,3/(1+0,01№). Потребитель решил купить дополнительно 1 кг колбасы, а мыло использует в неизменном количестве.

4.3-4.4. В задачах 4.1, 4.2 построить графики кривых полезности товаров. Дать графическую интерпретацию предельной полезности.

4.5. Потребитель в задаче 4.1 приобретает 4(1+0,01№) кг колбасы в месяц. Сколько кусков мыла он должен использовать ежемесячно, чтобы его удовлетворенность составила 10(1+0,01№) единиц.

4.6. Степень удовлетворенности потребителя из задачи 4.2 равна 10(1+0,01№) единиц. Сколько он потребляет товаров, если взамен на 0,5(1+0,01№) кг колбасы он согласен отказаться от 2(1+0,01№) кусков мыла? Построить график кривой безразличия. Показать геометрический смысл нормы замены.

4.7. Потребитель из задачи 4.2 имеет доход 500(1+0,01№) рублей в месяц, цена колбасы 60/(1+0,01№) рублей за кг, цена мыла 30/(1+0,01№) рублей за кусок. Решить задачу потребительского выбора графически и аналитически.

4.8. Цены в задаче 4.7 возросли: колбасы на 10(1+0,01№)%, мыла – на 15(1+0,01№)%. Государственный бюджет полностью компенсирует потери потребителя в виде дотации, сумму которой требуется определить.

4.9. Цена на колбасу возросла с 60/(1+0,01№) рублей за кг до 80/(1+0,01№) рублей за кг, вследствие чего спрос на нее упал с 2(1+0,01№) кг в месяц до 4(1+0,01№) кг в месяц. Найти среднюю эластичность спроса по цене.

Образец титульного листа контрольной работы

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Факультет заочного обучения

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1
ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА»
тема «**Определение коэффициентов и характеристик производственной функции»**

Выполнил:
студент группы____ Петров А.И.
Проверил:
доцент Гераськин М.И.

Самара 2008

Учебное издание

Гераськин Михаил Иванович

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА:
ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА
И ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА**

Учебное пособие

Редактор Н. С. К у п р и я н о в а
Компьютерная верстка Т. Е. П о л о в н е в а

Подписано в печать 24.04.08. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,75.
Тираж 100 экз. Заказ .

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34