МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.А. Микенберг

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

ISBN 978-5-7883-1810-3

САМАРА
Издательство Самарского университета

2022

УДК 512.64(075)
ББК 22.143я7
М 590

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Н. Панов;
канд. физ.-мат. наук А.А. Мингазов

Микенберг, Михаил Аврамович

М 590 ***Линейная алгебра***: *учебное пособие / М.А. Микенберг*; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Самарский университет. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022.– 1 CD-ROM (1,2 Мб). – Загл. с титул. экрана. – Текст: электронный.

ISBN 978-5-7883-1810-3

Учебное пособие содержит материал лекционных и практических занятий по линейной алгебре для обучающихся по специальностям "Фундаментальная информатика и информационные технологии" и "Информационная безопасность автоматизированных систем".

Разработано на кафедре «Прикладные математика и физика» Самарского университета.

УДК 512.64(075)
ББК 22.143я7

Минимальные системные требования:
PC, процессор Pentium, 160 МГц;
Microsoft Windows XP; мышь;
дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Публикуется в авторской редакции

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано для тиражирования 18.11.2022
г. Объем издания 1,2 Мб.
Количество носителей 1 диск.
Тираж 11 дисков.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета. 443086,
Самара, Московское шоссе, 34.

Оглавление

Предисловие

Материал настоящего учебного пособия был прочитан студентам Самарского государственного университета специальностей "Фундаментальная информатика и информационные технологии" и "Информационная безопасность автоматизированных систем" на втором семестре первого курса. Этот материал сооствентствует семестровому курсу по линейной алгебре, рассчитанному на одну лекцию и одно практическое занятие в неделю. Все, что содержится в этом учебном пособии, кроме последней лекции, подробно (с доказательствами) излагалось на лекциях. Материал последней лекции давался без доказательства. Нумерация определений, предложений, лемм, теорем, следствий, упражнений, замечаний и формул своя в каждой лекции и обозначена двумя числами, разделенными точкой. Первое число обозначает номер лекции, а второе число – номер объекта внутри лекции. Так, например, "предложение 7.2" обозначает второе предложение седьмой лекции, а "формула (13.3)" обозначает третью формулу тринадцатой лекции. Символом ■ обозначен конец доказательства. Автор выражает благодарность рецензентам: заведующему кафедрой алгебры и геометрии СамГУ, доктору физико-математических наук, профессору Александру Николаевичу Панову и научному сотруднику ИСОИ РАН филиала ФНИЦ "Кристаллография и фотоника" РАН, кандидату физико-математических наук, Альберту Айдаровичу Мингазову за полезные советы и найденные опечатки в тексте.

Лекция 1

Алгебраические структуры

Рассмотрим множество G. Рассмотрим отображение $f\colon G\times G\to G$. Отображение f будем называть произведением элементов из G и записывать следующим образом: $f(a,b)=ab$ $(a,b\in G)$.

Определение 1.1 *Множество G называется группой, если отображение f удовлетворяет следующим аксиомам:*

$$\begin{aligned}
&1)\ \forall a,b,c\in G\quad (ab)c=a(bc),\\
&2)\ \exists e\in G,\ \forall a\in G\quad ae=ea=a,\\
&3)\ \forall a\in G,\ \exists a^{-1}\in G\quad aa^{-1}=a^{-1}a=e.
\end{aligned}$$

Первая аксиома выражает ассоциативность умножения, вторая аксиома – аксиома единичного элемента (единичный элемент обозначен символом e), третья аксиома – аксиома обратного элемента (обратный элемент к элементу a, обозначен символом a^{-1}). Группа G называется коммутативной или абелевой, если выполнена следующая аксиома:

$$\forall a,b\in G\quad ab=ba.$$

Умножение в группе G было записано в мультипликативной форме: $f(a,b)=ab$. Можно так же для обозначения умножения в группе использовать аддитивную форму записи: $f(a,b)=a+b$. Приведем примеры групп.

Пример 1. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции суммы образует абелеву группу. Единичным элементом в этой группе является число ноль, а обратным элементом – противоположный элемент. Точно так же множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или множество действительных чисел $\mathbb{R}$ относительно операции суммы образует абелеву группу.

Пример 2. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ с выброшенным нулевым элементом является абелевой группой относительно операции умножения. Единичным элементом этой группы является чило 1, а обратным элементом к ненулевому числу a является число $1/a$. Точно так же множество действительных чисел $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ с выброшенным нулевым элементом образует абелеву группу относительно операции умножения.

Пример 3. Множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+$ является абелевой группой относительно операции умножения. Единичным элементом этой группы является чило 1, а обратным элементом к положительному числу a является число $1/a$. Точно так же множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}_+$ образует абелеву группу относительно операции умножения.

Пример 4. Множество невырожденных матриц размера $n \times n$ с вещественными компонентами образует группу относительно операции умножения матриц. Эта группа обозначается символом $GL(n, \mathbb{R})$ и называется полной линейной группой. Единицей этой группы служит единичная матрица, а обратным элементом для матрицы A является обратная матрица A^{-1}. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ неабелева.

Пример 5. Множество движений евклидова пространства (преобразований, сохраняющих длину) образует группу относительно операции композиции движений. Единичным элементом этой группы является тождественное преобразование, а обратным элементом – обратное отображение.

Рассмотрим множество K. Рассмотрим два отображения $f\colon K \times K \to K$ и $g\colon K \times K \to K$. Отображение f будем называть суммой элементов из K и записывать так: $f(a,b) = a+b$, а отображение g будем называть произведением элементов из K и записывать так: $g(a,b) = ab \ \ (a, b \in K)$.

Определение 1.2 *Множество K называется кольцом, если относительно операции суммы оно является абелевой группой и так же выполняются следующие аксиомы:*

$$\forall a,b,c \in K \ (ab)c = a(bc),$$
$$\forall a,b,c \in K \ (a+b)c = ac+bc,$$
$$\forall a,b,c \in K \ c(a+b) = ca+cb.$$

Первая аксиома выражает ассоциативность умножения в кольце, вторая аксиома выражает левую дистрибутивность, а третья аксиома – правую дистрибутивность. Нейтральный (единичный) элемент кольца относительно операции суммы называется нулевым элементом. Кольцо K называется коммутативным, если выполнена следующая аксиома:

$$\forall a,b \in K \quad ab = ba.$$

Кольцо K называется кольцом с единицей, если выполнена аксиома:

$$\exists e \in K, \ \forall a \in K \quad ae = ea = a.$$

Элемент e называется единичным элементом кольца. Приведем примеры колец.

Пример 1. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции суммы и операции умножения образует коммутативное кольцо с единицей. Единичным элементом в этом кольце является число 1. Точно так же множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или множество действительных чисел $\mathbb{R}$ относительно операции суммы и операции умножения образует коммутативное кольцо с единицей.

Пример 2. Множество квадратных матриц $\mathrm{Mat(n;\mathbb{R})}$ размера $n \times n$ с вещественными компонентами образует кольцо с единицей относительно операции суммы и умножения матриц. Единицей этого кольца является единичная матрица.

Пример 3. Рассмотрим множество отображений множества M во множество действительных чисел $\mathbb{R}$. На множестве отображений определим операции суммы и умножения следующими формулами: если $t\colon M \to \mathbb{R}$ и $s\colon M \to \mathbb{R}$, то

$$(t+s)(x) = t(x) + s(x) \quad \text{и} \quad (ts)(x) = t(x)s(x),$$

где $x \in M$. Легко проверить, что относительно введенных операций суммы и умножения отображений множество отображений из множества M во множество действительных чисел $\mathbb{R}$ образует коммутативное кольцо с единицей. Нулевым элементом этого кольца является постоянное отображение, переводящее каждый элемент из M в число 0. Единицей этого кольца является постоянное отображение, переводящее каждый элемент из M в число 1.

Определение 1.3 *Коммутативное кольцо с единицей называется полем, если у него каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.*

Приведем примеры полей.

Пример 1. Множество рациональных $\mathbb{Q}$ чисел образует поле.

Множество действительных $\mathbb{R}$ чисел так же образует поле.

Пример 2. Рассмотрим множество рациональных функций (рациональных дробей), функций имеющих вид $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены с вещественными коэффициентами и $g(x)$ не равен тождественно нулю. Множество рациональных функций относительно операций суммы и умножения дробей образует поле, которое называется полем рациональных функций.

Поле комплексных чисел

Рассмотрим формальные суммы $w = u + iv$, где $u, v \in \mathbb{R}$ и i – символ, такой что $i^2 = -1$. Такие формальные суммы будем называть комплексными числами. Символ i будем называть мнимой единицей, число u – действительной частью комплексного числа w, а число v – мнимой частью комплексного числа w. Комплексное число $z = u - iv$ называется сопряженным к комплексному числу $w = u + iv$. Для сопряженного числа будем использовать обозначение $z = \overline{w}$. На множестве комплексных чисел введем арифметические операции. Пусть $w_1 = u_1 + iv_1$ и $w_2 = u_2 + iv_2$ – два комплексных числа, определим сумму, разность, умножение и деление комплексных чисел следующими формулами:

$$w_1 + w_2 = u_1 + u_2 + i(v_1 + v_2),$$
$$w_1 - w_2 = u_1 - u_2 + i(v_1 - v_2),$$

$$
\begin{aligned}
&w_1 w_2 = (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = \\
&= u_1u_2 - v_1v_2 + i(u_1v_2 + u_2v_1), \\
&\frac{w_1}{w_2} = \frac{(u_1 + iv_1)}{(u_2 + iv_2)} = \frac{(u_1 + iv_1)(u_2 - iv_2)}{(u_2 + iv_2)(u_2 - iv_2)} = \\
&= \frac{u_1u_2 + v_1v_2 + i(u_2v_1 - u_1v_2)}{u_2^2 + v_2^2} = \\
&= \frac{u_1u_2 + v_1v_2}{u_2^2 + v_2^2} + i\frac{u_2v_1 - u_1v_2}{u_2^2 + v_2^2},
\end{aligned}
$$

операция деления определена, если $u_2^2 + v_2^2 \neq 0$. Относительно введенных операций множество комплексных чисел превращается в поле. Это поле называют полем комплексных чисел и обозначают символом $\mathbb{C}$. Нулевым элементом поля $\mathbb{C}$ является комплексное число с нулевой действительной и мнимой частью. Единицей поля $\mathbb{C}$ является комплексное число, у которого действительная часть равна 1, а мнимая часть равна 0.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Комплексному числу $w = u + iv$ поставим в соотвествие вектор евклидовой плоскости $\overrightarrow{p}$ с координатами u и v: $w \leftrightarrow \overrightarrow{p}(u, v)$. Данное соотвествие согласовано с операциями суммы и разности: пусть даны два комплексных числа $w_1 = u_1 + iv_1$ и $w_2 = u_2 + iv_2$ им соотвествуют векторы $\overrightarrow{p_1}(u_1, v_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(u_2, v_2)$, тогда легко видеть, что комплексному числу $w_1 + w_2$ соответствует вектор $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$, а комплексному числу $w_1 - w_2$ соответствует вектор $\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2}$. Длину вектора $\overrightarrow{p}$ называют модулем комплексного числа $w = u + iv$ и обозначают символом $|w|$. Таким образом, $|w| = \sqrt{u^2 + v^2}$. Угол φ между ненулевым вектором $\overrightarrow{p}$ и осью абсцисс, отсчитываемый от оси абсцисс в направлении против часовой стрелки, называется аргументом комплексного числа w и обозначается символом arg. Аргумент определен только для ненулевого комплексного числа. Так $\arg(w) = \varphi$. Аргумент ненулевого комплексного числа $w = u + iv$ определяется с точностью до $2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ следующими формулами

$$\cos(\varphi) = \frac{u}{|w|}, \qquad \sin(\varphi) = \frac{v}{|w|}.$$

Следовательно, любое ненулевое комплексное число w можно записать в виде

$$w = |w|\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big), \tag{1.1}$$

где $|w|$ – модуль комплексного числа w, φ – аргумент комплексного числа w. Формулу (1.1) называют тригонометрической формой записи комплексного числа. Для нулевого комплексного числа тоже можно использовать формулу (1.1), считая, что правая часть (1.1) равна нулю. Приведем без доказательства важную формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi). \tag{1.2}$$

В силу формул (1.1) и (1.2) комплексное число w можно записать в виде $w = |w|e^{i\varphi}$, такую форму записи называют показательной или экспоненциальной формой записи комплексного числа. В тригонометрической форме записи легко умножать и делить комплексные числа. Пусть даны два комплексных числа $w_1 = |w_1|\big(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big)$ и $w_2 = |w_2|\big(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\big)$.

Предложение 1.1 *Имеет место следующая формула:*

$$w_1 w_2 = |w_1||w_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big). \tag{1.3}$$

Доказательство. Проведем следующие очевидные выкладки:

$$
\begin{aligned}
&w_1 w_2 = \\
&= w_1|\big(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big)\,|w_2|\big(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_2)\big) = \\
&= |w_1||w_2|\Big(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \\
&+ i\big(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1)\big)\Big) = \\
&= |w_1||w_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

В выкладках (1.4) были использованы формулы синуса суммы и косинуса суммы двух аргументов. ■

Упражнение 1.1 *Доказать формулу*

$$
\frac{w_1}{w_2} = \frac{|w_1|}{|w_2|}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big), \tag{1.5}
$$

если $w_2 \neq 0$.

Из формул (1.3) и (1.5) легко получить формулу возведения комплексного числа $w = |w|\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)$ в целую степень (формулу Муавра):

$$
\begin{aligned}
w^m = \Big(|w|\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)\Big)^m = \\
= |w|^m\big(\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)\big),
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где $m \in \mathbb{Z}$ (для отрицательных степеней $w \neq 0$). С помощью формулы Муавра (1.6) легко получить формулу для извлечения корня n-ой степени ($n \in \mathbb{N}$) из комплексного числа. Пусть $w = |w|\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)$, тогда

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \tag{1.7}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Заметим, что корень n-ой степени из комплексного числа является многозначной функцией. Если $w \neq 0$, то $\sqrt[n]{w}$ принимает n значений.

Выражение

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \tag{1.8}$$

где $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ – константы и $a_n \neq 0$, а $z \in \mathbb{C}$ – переменная, называется многочленом n-ой степени с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$. Комплексное чило z_0 называется корнем многочлена $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Поле комплексных чисел обладает важным свойством, которое выражается следующей теоремой, принимаемой без доказательства.

Теорема 1.1 *(Основная теорема алгебры) Всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Теорема 1.1 выражает свойство поля комплексных чисел, которое называется алгебраической замкнутостью.

Следствие 1.1 *Всякий многочлен n-ой степени с комплексными коэффициентами имеет n комплексных корней с учетом их кратности.*

Упражнение 1.2 *Докажите следствие 1.1.*

Лекция 2

Аксиомы линейного пространства

Рассмотрим множество L и поле K. Поле K в наших рассмотрениях будет либо полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Рассмотрим два отображения: $f\colon L \times L \to L$ и $g\colon K \times L \to L$. Отображение f будем называть суммой элементов из L и записывать следующим образом: $f(a, b) = a + b$ $(a, b \in L)$, а отображение g будем называть умножением элементов из L на скаляры K и использовать следующее обозначение: $g(\lambda, a) = \lambda a$ $(a \in L,\ \lambda \in K)$.

Определение 2.1 *Множество L называется линейным (векторным) пространством над полем K, если отображения f и g удовлетворяют следующим акиомам:*

$$
\begin{aligned}
&1)\ \forall a, b, c \in L \quad (a + b) + c = a + (b + c),\\
&2)\ \forall a, b \in L \quad a + b = b + a,\\
&3)\ \exists \theta \in L,\ \forall a \in L \quad a + \theta = a,\\
&4)\ \forall a \in L,\ \exists a' \in L \quad a + a' = \theta,\\
&5)\ \forall a \in L,\ \forall \lambda, \mu \in K \quad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,\\
&6)\ \forall a \in L,\ \forall \lambda, \mu \in K \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,\\
&7)\ \forall a, b \in L,\ \forall \lambda \in K \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,\\
&8)\ \forall a \in L \quad 1a = a.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

В аксиоме 8 символом 1 обозначена единица поля K. Аксиомы 1 – 4 показывают, что относительно операции сложения множество

L является абелевой группой. В аксиоме 3 символом θ обозначен нулевой (нейтральный) элемент, в аксиоме 4 символом a' обозначен противоположный элемент к элементу a. Аксиомы 6 и 7 выражают дистрибутвные свойства. Элементы векторного пространства L называются векторами. Докажем несколько простых утверждений, следующих из аксиом линейного пространства.

Следствие 2.1 *Нейтральный элемент единственен.*

Доказательство. Предположим, что существует еще один нейтральный элемент $\theta_1 \neq \theta$. Рассмотрим сумму $\theta + \theta_1$. Эта сумма, с одной стороны, равна θ_1 (в силу акиомы 3, так как θ – нейтральный элемен), а, с другой стороны, она равна θ (в силу аксиомы 3, так как θ_1 – нейтральный элемент). Следовательно $\theta = \theta_1$. Полученное противоречие доказывает следствие. ■

Следствие 2.2 *Противоположный элемент единственен.*

Доказательство. Предположим, что для элемента $a \in L$ существуют два различных противоположных элемента: a' и a'_1 при этом $a' \neq a'_1$. Рассмотрим выражение $(a' + a) + a'_1$. В силу аксиом 4 и 3 имеем следующее равенство:

$$(a' + a) + a'_1 = \theta + a'_1 = a'_1. \tag{2.2}$$

С другой стороны, в силу аксиом 1, 4 и 3 имеем цепочку равенств:

$$(a' + a) + a'_1 = a' + (a + a'_1) = a' + \theta = a'. \tag{2.3}$$

Из равенств (2.2) и (2.3) получим, что $a' = a'_1$. Полученное противоречие доказывает следствие. ■

Следствие 2.3 $\forall a \in L \quad 0a = \theta$ *(здесь символом* 0 *обозначен нулевой элемент поля* K*).*

Доказательство. В силу аксиом 8 и 6 имеем следующую цепочку равенств:

$$a = 1a = (1 + 0)a = 1a + 0a = a + 0a. \tag{2.4}$$

К обеим частям равенства (2.4) прибавим вектор a', противоположный вектору a. Получим требуемое равенство: $0a = \theta$. ■

Следствие 2.4 $\forall a \in L \quad a' = (-1)a.$

Доказательство. В силу аксиом 8, 6 и следствия 2.3 имеем следующую цепочку равенств:

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = \theta. \tag{2.5}$$

В силу единственности противоположного элемента (следствие 2.2), из формулы (2.5) получим: $a' = (-1)a$. Что и требовалось доказать. ■

Введем операцию разности векторов следующей формулой

$$a - b = a + b'.$$

Рассмотрим примеры линейных пространств.

Пример 1. Множество V_3 векторов (направленных отрезков прямой) пространства является линейным пространством относительно операций суммы векторов и умножения векторов на вещественные числа (выполнены восемь аксиом из определения 2.1). Аналогично, множество V_2 векторов плоскости или множество V_1 векторов прямой образует линейное пространство.

Пример 2. Пространство строк длины n. Рассмотрим множество, элементами которого являются строки вида $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in K$ $(i = \overline{1, n})$. Определим операцию суммы строк так

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

а операцию умножения строки на элементы поля K так

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n),$$

где $\lambda \in K$. Можно показать, что относительно таким образом введенных операций множество строк длины n является линейным пространством, то есть выполняются все восемь аксиом определения 2.1. Вместо пространства строк длины n можно аналогично рассмотреть пространство столбцов длины n. Далее рассмотрим более общий пример.

Пример 3. Пространство матриц. Рассмотрим множество матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из поля K. Обозначим это множество символом $\mathrm{Mat(m, n; K)}$. Относительно операций суммы матриц и умножения матрицы на элементы поля K выполняются все аксиомы определения 2.1. Таким образом, множество $\mathrm{Mat(m, n; K)}$ является линейным пространством.

Пример 4. Пространство функций. Пусть M – произвольное множество. Рассмотрим множество отображений из M в поле K. На множестве отображений введем операцию суммы: если

$f\colon M \to K$ и $g\colon M \to K$, то

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

и операцию умножения отображения на элементы поля K

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

где $\lambda \in K$. Относительно таким образом введенных операций множество отображений из M в поле K превращается в линейное пространство (выполнены все восемь аксиом определения 2.1).

Определение 2.2 *Подмножество V линейного пространства L называется подпространством (или линейным подпространством), если выполнены следующие аксиомы:*

$$1)\ \forall a, b \in V \quad a + b \in V,$$
$$2)\ \forall a \in V,\ \forall \lambda \in K \quad \lambda a \in V.$$

Легко видеть, что подпространство V само является линейным пространством. Приведем примеры линейных подпространств.

Пример 1. Множество V_2 векторов плоскости является подпространством линейного пространства V_3 всех векторов пространства. Точно так же множество V_1 векторов прямой является подпространством линейного пространства V_3.

Пример 2. Во множестве всех матриц $\mathrm{Mat(m, n; K)}$ рассмотрим подмножество W, состоящее из матриц, у которых равны нулю фиксированные компоненты. Тогда W является подпространством линенйного пространства $\mathrm{Mat(m, n; K)}$.

Пример 3. Символом $C[a, b]$ обозначим множество непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, а символом $C^1[a, b]$ – множество дифференцируемых вещественнозначных функций на отрезке $[a, b]$. Множество $C^1[a, b]$ является подпространством линейного пространства $C[a, b]$.

Линейная зависимость векторов

Введем ряд важный определений. Рассмотрим упорядоченное множество векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{2.6}$$

$a_i \in L$ и упорядоченное множество скаляров

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \tag{2.7}$$

$\lambda_i \in K$ $(i = \overline{1, n})$. Выражение

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \tag{2.8}$$

называется линейной комбинацией системы векторов (2.6) с коэффициентами (2.7). Линейная комбинация (2.8) называется тривиальной, если все скаляры системы (2.7) нулевые. В противном случае (когда все скаляры одновременно не равны нулю) линейная комбинация (2.8) называется нетривиальной.

Определение 2.3 *Система векторов (2.6) называется линейно независимой, если для любого множества скаляров (2.7), одновременно не равных нулю, линейная комбинация (2.8) отлична от нулевого вектора. И наоборот, система векторов (2.6) называется линейно зависимой, если существует такое множество скаляров (2.7), одновременно не равных нулю, что линейная комбинация (2.8) равна нулевому вектору.*

Докажем некоторые простейшие свойства линейной зависимости.

Предложение 2.1 *Если в системе векторов (2.6) имеется нулевой вектор, то система (2.6) линейно зависима.*

Доказательство. Предположим, что в системе векторов (2.6) $a_1 = \theta$. Возьмем следующую систему скаляров:

$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$. Тогда, очевидно, линейная комбинация (2.8) равна нулевому вектору. ■

Упражнение 2.1 *Докажите, что если в системе векторов (2.6) имеется линейно зависимая подсистема векторов, то и вся система векторов (2.6) линейно зависима.*

Предложение 2.2 *Если система векторов (2.6) линейно зависима, то некоторый вектор этой системы является линейной комбинацией остальных векторов этой системы.*

Доказательство. Предположим, что система векторов (2.6) линейно зависима. Тогда существует такая система скаляров (2.7) одновременно не равных нулю, что линейная комбинация (2.8) равна нулевому вектору

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta. \tag{2.9}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда, проводя очевидные выкладки, имеем:

$$\lambda_1 a_1 = -\lambda_2 a_2 - \ldots - \lambda_n a_n,$$

$$a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, a_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\, a_n.$$

Что и доказывает предложение. ■

Лекция 3

Базис. Координаты вектора

Будем рассматривать линейное пространство L над полем K. Введем следующее важное определение.

Определение 3.1 *Упорядоченная система векторов линейного пространства L называется базисом этого пространства над полем K, если выполнены следующие условия:*
1) данная система векторов линейно независима,
2) всякий вектор пространства L является линейной комбинацией векторов этой системы.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис в L и $x \in L$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_i \in K$ $(i = \overline{1, n})$ – коэффициенты разложения вектора x по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Докажем следующую важную теорему.

Теорема 3.1 *Все базисы линейного пространства содержат одинаковое число векторов.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{3.1}$$

и

$$b_1, b_2, \ldots, b_m \tag{3.2}$$

– два базиса L, при этом $m > n$. Разложим векторы базиса (3.2) по векторам базиса (3.1), имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&b_1 = c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \ldots + c_{1n}a_n,\\
&b_2 = c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + \ldots + c_{2n}a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_m = c_{m1}a_1 + c_{m2}a_2 + \ldots + c_{mn}a_n,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$c_{ij} \in K$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\left\{\begin{aligned}
&c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{m1}x_m = 0,\\
&c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{m2}x_m = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{mn}x_m = 0.
\end{aligned}\right. \tag{3.4}$$

Так как $m > n$, то эта система имеет ненулевые решения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$ – ненулевое решение системы (3.4). Используя формулы (3.3), проведем следующие выкладки:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_m b_m = \sum_i^m \lambda_i b_i = \sum_i^m \lambda_i \left(\sum_j^n c_{ij} a_j \right) =\\
&= \sum_i^m \sum_j^n c_{ij}\lambda_i a_j = \sum_j^n \sum_i^m c_{ij}\lambda_i a_j = \sum_j^n \left(\sum_i^m c_{ij}\lambda_i \right) a_j =\\
&= \sum_j^n 0\, a_j = \theta.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

В предпоследнем равенстве цепочки формул (3.5) было использовано, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – решение системы линейных уравнений (3.4). Первое и последнее выражение цепочки равенств (3.5) показывает, что векторы системы (3.2) линейно зависимы, что противоречит определению базиса. Случай $n > m$ так же приведет к противоречию. Таким образом, $n = m$, что и доказывает теорему. ■

Замечание 3.1 *В доказательстве теоремы использовалось только следующие условия из пределения базиса: линейная независимость системы (3.2) и разложимость векторов системы (3.2) по векторам системы (3.1).*

Упражнение 3.1 *Докажите, что если в линейном пространстве задан базис, состоящий из n векторов, и дана система, состоящая из n линейно независимых векторов, то эта система тоже является базисом линейного пространства.*

Доказанная теорема позволяет корректно ввести следующее определение.

Определение 3.2 *Размерностью линейного пространства L над полем K называется число векторов базиса пространства.*

В силу доказанной теоремы размерность определена корректно. Пусть размерность линейного пространства L над полем K равна n. Тогда этот факт будем записывать сдедующим образом: $\dim_K(L) = n$, или $\dim(L) = n$, если понятно о каком поле идет речь, или просто использовать символ L_n. Рассмотрим примеры.
Пример 1. Во множестве векторов евклидовой плоскости базис

образуют любые два неколлинеарных вектора. Во множестве векторов трехмерного евклидова пространства базис образуют любые три некомпланарных вектора.

Пример 2. Рассмотрим линейное пространство строк длины n с элементами из поля K. В качестве базиса пространства строк длины n можно взять следующие строки:

$$\begin{aligned} &e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ &e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &e_n = (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

В этих строках один элемент равен единице, а остальные элементы нулевые. Таким образом, пространство строк длины n имеет размерность n. Это пространство будем обозначать символом K^n.

Пример 3. Рассмотрим линейное пространство $\mathrm{Mat(m,n;K)}$ (пространство матриц размера $m \times n$, m – число строк, n – число столбцов). Рассмотрим матрицы E_{ij}, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, у которых в i-ой строке и в j-ом столбце стоит единица, а остальные элементы нулевые. Матрицы E_{ij} образуют базис линейного пространства $\mathrm{Mat(m,n;K)}$. Так линейное пространство $\mathrm{Mat(m,n;K)}$ имеет размерность mn.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис в L_n и $x \in L_n$. Разложим вектор x по этому базису:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Коэффициенты разложения $x_i \in K$ $(i = \overline{1,n})$ называются координатами вектора x относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Этот факт будем записывать следующим образом $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Докажем следующее важное предложение.

Предложение 3.1 *Координаты вектора определены однозначно (то есть разложение вектора по базису единственно).*

Доказательство. Предположим противное. Пусть имеется два различных разложения вектора x относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \tag{3.6}$$

и

$$x = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \ldots + x'_n e_n, \tag{3.7}$$

$x_i, x'_i \in K$ $(i = \overline{1, n})$. Поскольку (3.6) и (3.7) – различные разложения, то без ограничения общности можно считать, что $x_1 \neq x'_1$. Вычитая из равенства (3.7) равенство (3.6), имеем

$$(x'_1 - x_1)e_1 + (x'_2 - x_2)e_2 + \ldots + (x'_n - x_n)e_n = \theta. \tag{3.8}$$

Так как $x'_1 - x_1 \neq 0$, равенство (3.8) показывает, что система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно зависимая, что противоречит определению базиса. Полученное противоречие доказывает предложение. ■

Упражнение 3.2 *Докажите, что координаты суммы (разности) векторов равны суммам (разностям) соответствующих координат, а координаты произведения вектора на число равны произведениям координат вектора на это число.*

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис линейного пространства L_n над полем K. Рассмотрим n векторов этого пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Разложим эти векторы по базису

$$\begin{aligned} &x_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \ldots + c_{1n}e_n, \\ &x_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$c_{ij} \in K$ $(i, j = \overline{1, n})$. Из коэффициентов разложения составим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

Упражнение 3.3 *Докажите, что векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель (3.10) отличен от нуля.*

В линейном пространстве L_n возьмем некоторое его подмножество $M \subset L_n$. Рассмотрим всевозможные линеные комбинации $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in M$, $m \in \mathbb{N}$. Множество всевозможных таких линейных комбинаций обозначим символом V. Несложно видеть, что множество V является линейным подпространством пространства L_n. Подпространство V называется линейной оболочкой множества M. Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \in L_n \tag{3.11}$$

(m<n) – линейно независимая система векторов.

Предложение 3.2 *Систему векторов (3.11) можно дополнить до базиса L_n.*

Доказательство. Пусть V – линейная оболочка системы векторов (3.11). V – собственное подпространство пространства L_n. Возьмем произвольный вектор из множества $L_n \setminus V$, обозначим этот вектор символом a_{m+1}. Рассмотрим систему векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1} \in L_n. \tag{3.12}$$

Упражнение 3.4 *Докажите, что система векторов (3.12) линейно независима.*

Если $m + 1 < n$, то применим к системе векторов (3.12) те же самые рассуждения, которые были применены к системе векторов (3.11). Получим линейно независимую систему векторов, которая содержит на один вектор больше, чем система (3.12) и так далее. Через конечное число шагов получим линейно независимую систему, состоящую из n векторов, которая и будет базисом L_n в силу упражнения 3.1. ■

Лекция 4
Формулы перехода от одного базиса к другому. Формулы преобразования координат

Будем рассматривать линейное пространство L_n над полем K. Рассмотрим в пространстве L_n два базиса

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{4.1}$$

и

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n. \tag{4.2}$$

Базис (4.1) будем называть старым базисом, а базис (4.2) – новым базисом. Разложим векторы базиса (4.2) по векторам базиса (4.1)

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n, \end{cases} \tag{4.3}$$

$a_{ij} \in K$ $(i, j = \overline{1, n})$. Формулы (4.3) называются формулами перехода от старого базиса (4.1) к новому базису (4.2). Из коэффициентов разложения (4.3) составим следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Матрица A называется матрицей перехода от старого базиса (4.1) к новому базису (4.2). В силу упражнения (3.3) матрица A невырождена. Введем следующие матрицы-строки, состоящие из векторов базисов (4.1) и (4.2):

$$e = (e_1 e_2 \ldots e_n) \quad \text{и} \quad e' = (e'_1 e'_2 \ldots e'_n).$$

Тогда формулы (4.3) можно записать на языке умножения матриц так

$$(e_1'e_2'\dots e_n') = (e_1e_2\dots e_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

или так

$$e' = eA. \qquad (4.6)$$

Пусть A' – матрица перехода от базиса (4.2) к базису (4.1), тогда имеем равенство аналогичное равенству (4.6):

$$e = e'A'. \qquad (4.7)$$

Подставим выражение для e' из формулы (4.6) в формулу (4.7), получим формулу

$$e = eAA'. \qquad (4.8)$$

В силу единственности разложения вектора по базису получим $AA' = E$, где символом E обозначена единичная матрица. Таким образом, матрица A' является матрицей обратной к A: $A' = A^{-1}$. Пусть x – произвольный вектор линейного пространства L_n. Разложим этот вектор по базисам (4.1) и (4.2), получим следующие формулы:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \quad \text{и} \quad x = x_1'e_1' + x_2'e_2' + \dots + x_n'e_n', \qquad (4.9)$$

где $x_i, x_i' \in K,\ (i = \overline{1,n})$ – координаты вектора x относительно заданных базисов. Координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем называть старыми координатами, а координаты $x_1', x_2', \dots, x_n'$ – новыми координатами. Сейчас решим важную задачу: найдем связь между старыми координатами вектора x и новыми координатами вектора x. Введем следующие матрицы-столбцы, состоящие из старых и новых координат вектора x:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Формулы (4.9) запишем на языке умножения матриц так

$$x = (e_1 e_2 \dots e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad x = (e_1' e_2' \dots e_n') \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

или так

$$x = eX \qquad \text{и} \qquad x = e'X'. \tag{4.12}$$

Из равенств (4.12) получим равенство

$$eX = e'X'. \tag{4.13}$$

Из формул (4.6) и (4.13) получаем формулу

$$eX = eAX'. \tag{4.14}$$

В силу единственности разложения вектора по базису имеем равенство

$$X = AX'. \tag{4.15}$$

Формула (4.15) является решением нашей задачи: она связывает старые и новые координаты вектора x. Формулы преобразования координат (4.15) можно записать более подробно так

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

или так

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n, \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n. \end{cases} \tag{4.17}$$

Формулы (4.17) выражают старые координаты вектора x через новые координаты. В этих формулах стоят компоненты a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ матрицы перехода (4.4) от базиса (4.1) к базису (4.2). Если мы хотим выразить новые координаты вектора x через старые координаты, то нужно разрешить систему линейных уравнений (4.17) относительно переменных $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Результат этого решения можно записать матричным равенством

$$X' = A^{-1}X, \tag{4.18}$$

где A^{-1} – обратная матрица к матрице A.

Сопряженное пространство

Пусть L_n – линейное пространство над полем K. Отображение $f\colon L_n \to K$ называется линейным, если выполняется следующее равенство:

$$\forall a, b \in L_n,\ \forall \lambda, \mu \in K \qquad f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b).$$

Линейные отображения в поле называют так же линейными функционалами или линейными формами. Множество линейных функционалов, заданных на линейном пространстве L_n обозначим символом L_n^*. На множестве L_n^* введем операцию суммы и операцию умножения на элементы поля K следующими формулами:

$$\begin{aligned} &1)\ \forall f, g \in L_n^*,\ \forall a \in L_n \qquad (f+g)(a) = f(a) + g(a),\\ &2)\ \forall f \in L_n^*,\ \forall \lambda \in K,\ \forall a \in L_n \qquad (\lambda f)(a) = \lambda f(a). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Легко проверить, что формулами (4.19) определены линейные функционалы. Несложно видеть, что относительно введенных операций множество L_n^* является линейным пространством над полем K. Пространство L_n^* называется сопряженным (к L_n) пространством. Изучим простейшие свойства сопряженного пространства. Пусть f – линейный функционал. Зафиксируем базис в L_n

$$e_1, e_2, \ldots, e_n. \tag{4.20}$$

Возьмем произвольный вектор x из L_n. Разложим этот вектор по базису (4.20)

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

$x_i \in K$ $(i = \overline{1, n})$. В силу линейности отображения f справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Формула (4.21) показывает, что линейный функционал f однозначно определяется своими значениями $f(e_i)$ $(i = \overline{1, n})$ на векторах базиса (4.20) линейного пространства L_n.

Упражнение 4.1 *Пусть даны n элементов поля K: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Положим $f(e_1) = p_1,\ f(e_2) = p_2,\ \ldots\ ,\ f(e_n) = p_n$. Докажите, что формула (4.21) корректно определит линейный функционал f на L_n.*

Теорема 4.1 *Сопряженное пространство L_n^* имеет размерность n.*

Доказательство. Пусть в L_n зафиксирован базис (4.20). Рассмотрим n линейных функционалов

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \tag{4.22}$$

которые действуют на базисных векторах (4.20) следующим образом: $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = \overline{1, n})$, где δ_{ij} – символ Кронекера (символ единичной матрицы), определяемый так

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В силу упражнения 4.1 такие линейные функционалы существуют. Покажем, что линейные функционалы (4.22) образуют базис линейного постранства L_n^*. Покажем, что система (4.22) линейно независима. Предположим противное. Пусть существует система элементов поля K

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \tag{4.23}$$

одновременно неравных нулю, такая что линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n \tag{4.24}$$

равна нулевому функционалу. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Подействуем функционалом (4.24) на базисный вектор e_1, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n)(e_1) = \\ &= \lambda_1 f_1(e_1) + \lambda_2 f_2(e_1) + \ldots + \lambda_n f_n(e_1) = \\ &= \lambda_1 \delta_{11} + \lambda_2 \delta_{21} + \ldots + \lambda_n \delta_{n1} = \lambda_1. \end{aligned} \tag{4.25}$$

В формуле (4.25) слева стоит ноль, потому что функционал (4.24) нулевой. Таким образом, мы получили, что $\lambda_1 = 0$ и пришли к противоречию. Значит, система функционалов (4.22) линейно независима. Покажем теперь, что любой линейный функционал в L_n^* является линейной комбинацией функционалов системы (4.22). Докажем, что справедливо следующее равенство:

$$f = f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \ldots + f(e_n)f_n. \qquad (4.26)$$

Подействуем правой частью формулы (4.26) на базисные векторы (4.20), получим

$$\begin{aligned}&(f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \ldots + f(e_n)f_n)(e_i) = f(e_1)f_1(e_i)+\\&+ f(e_2)f_2(e_i) + \ldots + f(e_n)f_n(e_i) = \\&= f(e_1)\delta_{1i} + f(e_2)\delta_{2i} + \ldots + f(e_n)\delta_{ni} = f(e_i),\end{aligned} \qquad (4.27)$$

где $i = \overline{1, n}$. Таким образом, левая и правая часть формулы (4.26) действует одинаково на базисных векторах системы (4.20). Это доказывает равенство (4.26), так как функционал однозначно определен своими значениями на базисных векторах. ■

Базис (4.22) называется базисом дуальным к базису (4.20).

Лекция 5

Фактор-пространство

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем K. Пусть $H \subset L_n$ – линейное подпространство пространства L_n. На множестве L_n введем отношение эквивалентности: два вектора x и y из L_n будем называть эквивалентными и записывать этот факт так $x \sim y$, если $y = x + h$ где $h \in H$. Множество классов эквивалентности обозначим символом L_n/H. Класс эквивалентности вектора $x \in L_n$ обозначим символом $[x]$. На множестве классов эквивалентности L_n/H введем операцию суммы и операцию умножения на элементы поля K следующими формулами:

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \text{где} \;\; x, y \in L_n,$$
$$\lambda[x] = [\lambda x], \quad \text{где} \;\; x \in L_n, \; \lambda \in K.$$

Упражнение 5.1 *Докажите, что эти формулы корректно определяют операцию суммы классов эквивалентности и операцию умножения класса эквивалентности на элементы поля K.*

Несложно показать, что относительно таким образом введенных операций множество классов эквивалентности L_n/H превращается в линейное пространство. Линейное пространство L_n/H называется фактор-пространством. Сюръективное отображение $p\colon L_n \to L_n/H$, $p(x) = [x]$ $(x \in L_n)$ называется канонической проекцией.

Теорема 5.1 *Пусть $H \subset L_n$ – линейное подпространство в L_n размерности $m < n$. Тогда $\dim(L_n/H) = n - m$.*

Доказательство. Зафиксируем базис в подпространстве H:

$$e_1, e_2, \ldots e_m. \tag{5.1}$$

Дополним этот базис до базиса пространства L_n

$$e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2} \ldots, e_n. \tag{5.2}$$

Докажем, что классы эквивалентности

$$[e_{m+1}], [e_{m+2}] \dots, [e_n] \tag{5.3}$$

образуют басис фактор-пространства L_n/H. Покажем, что система (5.3) линейно независима. Предположим противное: существует система скаляров (элементов поля K) $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots \lambda_n$ одновременно неравных нулю, что линейная комбинация

$$\lambda_{m+1}[e_{m+1}] + \lambda_{m+2}[e_{m+2}] + \dots + \lambda_n[e_n] \tag{5.4}$$

равна нулевому вектору в фактор-пространстве L_n/H. Это значит, что

$$\lambda_{m+1}e_{m+1} + \lambda_{m+2}e_{m+2} + \dots + \lambda_n e_n = h, \tag{5.5}$$

где $h \in H$. Разложим вектор h по базису (5.1), имеем:

$$h = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m, \tag{5.6}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$. Из равенств (5.5) и (5.6) получим равенство

$$\begin{gathered} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m - \\ - \lambda_{m+1}e_{m+1} - \lambda_{m+2}e_{m+2} - \dots - \lambda_n e_n = \theta \end{gathered} \tag{5.7}$$

Равенство (5.7) показывает, что система векторов (5.2) линейно зависима, чего не может быть, поскольку система векторов (5.2) является базисом в L_n. Мы пришли к противоречию, значит, система векторов (5.3) линейно независима. Теперь докажем, что всякий вектор фактор-пространства L_n/H является линейной комбинацией системы векторов (5.3).

Возьмем класс эквивалентности $[x] \in L_n/H$ где $x \in L_n$ – представитель класса эквивалентности $[x]$. Разложим вектор x по базису (5.2)

$$\begin{aligned} x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m + \\ + x_{m+1}e_{m+1} + x_{m+2}e_{m+2} + \cdots + x_ne_n. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Так как

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m \in H,$$

то

$$\begin{aligned} &[x] = [x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m + \\ &+ x_{m+1}e_{m+1} + x_{m+2}e_{m+2} + \cdots + x_ne_n] = \\ &= [x_{m+1}e_{m+1} + x_{m+2}e_{m+2} + \cdots + x_ne_n] = \\ &= x_{m+1}[e_{m+1}] + x_{m+2}[e_{m+2}] + \cdots + x_n[e_n]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Первое и последнее выражение цепочки (5.9) показывают, что вектор $[x]$ разложен по базису (5.3), что и доказывает теорему. ■

Линейные операторы

Рассмотрим два линейных пространства L_n и L_m над полем K. Отображение $f\colon L_n \to L_m$ называется линейным, если выполненяется следующее равенство:

$$\forall a, b \in L_n,\ \forall \lambda, \mu \in K \qquad f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b).$$

В случае, когда $m = 1$, получим определение функционала. Линейные отображения называются так же линейными операторами.

Пример 1. Рассмотрим евклидову плоскость. Поворот в евклидовой плоскости, действующий на векторы плоскости, задает линейный оператор.

Пример 2. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство. Зафиксируем в этом пространстве плоскость. Симметрия пространства относительно этой фиксированной плоскости, действующая на векторы пространства, задает линейный оператор. Можно зафиксировать в пространстве прямую и рассмотреть поворот в пространстве относительно этой прямой. Поворот в пространстве относительно прямой, действующий на векторы пространства, так же задает линейный оператор.

Пример 3. Рассмотрим линейное пространство L_n, зафиксируем в нем базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Рассмотрим в L_n произвольный вектор x с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n$ и поставим ему в соответствие вектор y с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m, 0 \ldots, 0$, зануляем последние $n - m$ координат. Отображение $f \colon L_n \to L_n$, переводящее вектор x в вектор y ($y = f(x)$), является линейным оператором. Этот оператор называется проекционным оператором, он отображает пространство L_n на подпространство размерности m. Очевидно, что выполняется равенство $f^2 = f$.

Пример 4. Рассмотрим пространство $C^\infty[a, b]$ (бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$). Рассмотрим оператор дифференцирования f, заданный формулой

$$f(p(t)) = \frac{d(p(t))}{dt},$$

где $p(t) \in C^{\infty}[a,b]$ и $t \in [a,b]$. Таким образом получим линейный оператор $f\colon C^{\infty}[a,b] \to C^{\infty}[a,b]$.

Пример 5. Рассмотрим пространство $C[a,b]$ (непрерывных функций на отрезке $[a,b]$). Рассмотрим оператор интегрирования f, заданный формулой

$$f(p(t)) = \int\limits_a^t p(x)\,dx,$$

где $p(t) \in C[a,b]$ и $t \in [a,b]$. Так получим линейный оператор $f\colon C[a,b] \to C[a,b]$.

Пример 4 и пример 5 – это примеры линейных операторов в бесконечномерных пространствах. Обозначим символом $\mathrm{Hom_K(L_n, L_m)}$ множество линейных операторов из L_n в L_m над полем K. На множестве $\mathrm{Hom_K(L_n, L_m)}$ определим операцию суммы операторов и операцию умножения оператора на элементы поля K следующими формулами:

$$\begin{aligned}
&1)\ \forall f, g \in \mathrm{Hom_K(L_n, L_m)},\quad \forall a \in L_n\\
&(f+g)(a) = f(a) + g(a),\\
&2)\ \forall f \in \mathrm{Hom_K(L_n, L_m)},\quad \forall \lambda \in K, \forall a \in L_n\\
&(\lambda f)(a) = \lambda f(a).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Можно проверить, что формулами (5.10) определены линейные операторы. Несложно показать, что относительно введенных операций множество $\mathrm{Hom_K(L_n, L_m)}$ является линейным пространством над полем K. Пусть $f\colon L_n \to L_m$ – линейный оператор. Зафиксируем базис

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{5.11}$$

в пространстве L_n. Разложим вектор $x \in L_n$ по этому базису: $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n,\ x_i \in K\ (i = \overline{1, n})$. В силу линейности отображения f справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = \\ = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Формула (5.12) показывает, что линейный оператор f однозначно определяется своими значениями $f(e_i)$ $(i = \overline{1, n})$ на векторах базиса (5.11) линейного пространства L_n.

Упражнение 5.2 *Пусть даны n векторов линейного пространства L_m: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Положим $f(e_1) = y_1$, $f(e_2) = y_2$, $\ldots$, $f(e_n) = y_n$. Докажите, что формула (5.12) корректно определит линейный оператор $f\colon L_n \to L_m$.*

Введем ряд важных определений. Рассмотрим линейный оператор $f\colon L_n \to L_m$. Ядром оператора f называется подмножество множества L_n, состоящее из векторов, которые оператор f переводит в нулевой вектор пространства L_m. Ядро оператора f будем обозначать символом $\ker(f)$. Тогда на языке символов $\ker(f) = \{x \in L_n \mid f(x) = \theta\}$. Образом оператора f называется теоретико-множественный образ отображения f. Образ оператора f будем обозначать символом $\operatorname{im}(f)$. Используя язык символов, можно записать $\operatorname{im}(f) = \{y \in L_m \mid \exists x \in L_n,\ f(x) = y\}$.

Упражнение 5.3 *Докажите, что* $\ker(f)$ *– подпространство в L_n, а* $\operatorname{im}(f)$ *– подпространство в L_m.*

Определение 5.1 *Линейный оператор f называется мономорфизмом, если* $\ker(f) = \{\theta\}$. *Линейный оператор f называется* *эпиморфизмом, если* $\mathrm{im}(f) = L_m$. *Линейный оператор* f *называется изоморфизмом, если он одновременно является мономорфизмом и эпиморфизмом.*

Пример 1. Пусть H – подпространство линейного пространства L_n. Рассмотрим естественное вложение $i\colon H \to L_n$. Очевидно, что i – линейный оператор, являющийся мономорфизмом.
Пример 2. Пусть H – подпространство линейного пространства L_n. Рассмотрим фактор-пространство L_n/H. Рассмотрим каноническую проекцию $p\colon L_n \to L_n/H$. Несложно проверить, что p – линейный оператор, являющийся эпиморфизмом.
Если существует изоморфизм из одного линейного пространства в другое линейное пространство, то такие линейные пространства называются изоморфными. Изоморфные объекты отождествляются (они "одинаково устроены"), что и показывает следующая теорема.

Теорема 5.2 *Предположим, что* $f\colon L_n \to L_m$ *– изоморфизм, тогда* f *переводит базис пространства* L_n *в базис пространства* L_m. *Отсюда следует, что размерности постранств* L_n *и* L_m *равны, то есть* $m = n$.

Доказательство. Рассмотрим базис линейного пространства L_n

$$e_1, e_2, \ldots, e_n. \tag{5.13}$$

Покажем, что система векторов

$$f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \tag{5.14}$$

является базисом линейного пространства L_m. Сначала покажем, что система (5.14) линейно независима. Предположим противное, тогда существует совокупность элементов поля K

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,$$

одновременно неравных нулю, что линейная комбинация

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \ldots + \lambda_n f(e_n)$$

равна нулевому вектору пространства L_m. Так как f – линейный оператор, то имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \theta &= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = \\ &= f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Поскольку f – мономорфизм, то

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \theta. \tag{5.16}$$

Равенство (5.16) показывает, что система векторов (5.13) линейно зависима. Это противоречит определению базиса. Значит, наше предположение неверно и система (5.14) линейно независима. Теперь докажем, что всякий вектор линейного пространства L_m является линейной комбинацией системы векторов (5.14). Возьмем произвольный вектор $y \in L_m$. Так как f – эпиморфизм, то существует вектор $x \in L_n$ такой, что $y = f(x)$. Разложим вектор x по базису (5.13), имеем

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

$x_i \in K$ $(i = \overline{1, n})$. Далее в силу линейности f получим

$$y = f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) =$$
$$= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n).$$

Таким образом, вектор y является линейной комбинацией системы векторов (5.14). ■

Упражнение 5.4 *Докажите, что любое n-мерное пространство над полем K изоморфно линейному пространству K^n (пространству строк длины n).*

Прямая сумма пространств

Рассмотрим два линейных пространства U и V над полем K. Рассмотрим декартово произведение $U \times V$. Декартово произведение состоит из множества пар (u, v) где $u \in U$ и $v \in V$. На множестве $U \times V$ определим операцию суммы и умножения на элементы поля K следующими формулами:

$$\begin{aligned} (u, v) + (x, y) = (u + x, v + y), \ \text{ где } \ u, x \in U, \ v, y \in V \\ \lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v), \ \text{ где } \ u \in U, \ v \in V, \ \lambda \in K. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Относительно таким образом введенных операций декартово произведение $U \times V$ превращается в линейное пространство. Это линейное пространство называется прямой суммой пространств U и V и обозначается символом $U \oplus V$.

Упражнение 5.5 *Докажите, что линейные пространства $U \oplus V$ и $V \oplus U$ изоморфны.*

Упражнение 5.6 *Докажите, что в случае, когда пространства U и V конечномерны, имеет место формула:* $\dim_K(U \oplus V) = \dim_K(U) + \dim_K(V)$.

Пусть теперь U и V – подпространства линейного пространства L. Естественно поставить вопрос: когда пространство L изоморфно прямой сумме $V \oplus U$. Ответ на этот вопрос дает следующее упражнение.

Упражнение 5.7 *Пусть U и V – подпространства линейного пространства L. Если $U \cap V = \{\theta\}$ и $\forall x \in L$ $\exists u \in U$, $\exists v \in V$ такие, что $x = u + v$, тогда линейное пространство L изоморфно прямой сумме $U \oplus V$.*

Сумма и пересечение подпространств

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем K и два его подпространства U и V. Рассмотрим теоретико-множественное пересечение $U \cap V$. Несложно видеть, что $U \cap V$ является подпространством пространства L_n. Подпространство $U \cap V$ будем называть пересечением подпространств U и V. Символом $U + V$ обозначим линейную оболочку, порожденную множеством векторов из теоретико-множественного объединения $U \cup V$. Подпространство $U + V$ будем называть суммой пространств U и V. Наша цель доказать следующую теорему.

Теорема 5.3

$$\dim_K(U + V) = \dim_K(U) + \dim_K(V) - \dim_K(U \cap V).$$

Доказательство. Рассмотрим базис подпространства $U \cap V$

$$a_1, a_2, \ldots, a_p. \tag{5.18}$$

Дополним систему векторов (5.18) до базиса подпространства U:

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q. \tag{5.19}$$

Дополним систему векторов (5.18) до базиса подпространства V:

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, c_1, c_2, \ldots, c_r. \tag{5.20}$$

Покажем, что система векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q, c_1, c_2, \ldots, c_r \tag{5.21}$$

является базисом подпространства $U + V$. Так как каждый вектор подпространства $U + V$ является линейной комбинацией векторов из $U \cup V$, а каждый вектор из $U \cup V$ является линейной комбинацией системы (5.21), то каждый вектор из $U + V$ является линейной комбинацией системы (5.21). Остается показать, что система (5.21) линейно независима. Предположим противное. Пусть существует система одновременно неравных нулю скаляров

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, \tag{5.22}$$

что имеет место равенство

$$\begin{gathered} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_q b_q + \\ \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_r c_r = \theta. \end{gathered} \tag{5.23}$$

Последнее равенство перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_q b_q = \\ &= -\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \ldots - \gamma_r c_r. \end{aligned} \tag{5.24}$$

В левой части равенства (5.24) стоит вектор, лежащий в подпространстве U, а в правой части – вектор, лежащий в подпространстве V. Значит, и правая, и левая части равенства (5.24) определяют вектор из подпространства $U \cap V$. Отсюда, в силу единственности разложения вектора по базису получим

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_q = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_r = 0. \tag{5.25}$$

Из равенств (5.24) и (5.25) получим равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p = \theta. \tag{5.26}$$

Так как система векторов (5.18) является базисом подпространства $U \cap V$, следовательно

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0. \tag{5.27}$$

По предположению в системе (5.22) имелся ненулевой элемент, формулы (5.25) и (5.27) показывают, что все элементы системы (5.22) нулевые. Получено противоречие, которое показывает, что система векторов (5.21) линейно независима. Мы доказали, что система векторов (5.21) является базисом подпространства $U + V$. Таким образом, имеем: $\dim_K(U + V) = p + q + r$, $\dim_K(U) = p + q$, $\dim_K(V) = p + r$, $\dim_K(U \cap V) = p$. Что и доказывает теорему. ■

Теорема об изоморфизме

Пусть дан линейный оператор $f\colon L_n \to L_m$. Рассмотрим фактор-пространство $L_n/\ker(f)$ и каноническую проекцию $p\colon L_n \to L_n/\ker(f)$. $p(x) = [x]$, где $x \in L_n$ и $[x]$ – класс эквивалентности элемента x. Построим отображение $\hat{f}\colon L_n/\ker(f) \to \operatorname{im}(f)$: $\hat{f}([x]) = f(x)$.

Упражнение 5.8 *Докажите, что $\hat{f}$ корректно определенный линейный оператор.*

Таким образом, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
L_n \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & L_n/\ker(f) \arrow[d, "\hat{f}"] \\
& \operatorname{im}(f)
\end{tikzcd} \tag{5.28}$$

Коммутативность диаграммы (5.28) означает, что выполнено равенство $\hat{f} \circ p = f$.

Теорема 5.4 *Линейный оператор $\hat{f}$ является изоморфизмом.*

Доказательство. То, что линейный оператор $\hat{f}$ является эпиморфизмом – очевидно. Покажем, что $\hat{f}$ – мономорфизм. Пусть $\hat{f}([x]) = \theta$. Тогда $f(x) = \theta$. Значит, $x \in \ker(f)$. Следовательно, класс эквивалентности $[x]$ элемента x является нулевым элементом в фактор-пространстве $L_n/\ker(f)$. ■

Лекция 6

Матрица линейного оператора

Рассмотрим линейный оператор $f\colon L_n \to L_m$ над полем K. Зафиксируем базисы в L_n и в L_m:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{6.1}$$

– базис в L_n и

$$b_1, b_2, \ldots, b_m \tag{6.2}$$

– базис в L_m. Разложим образы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по базису $b_1, b_2, \ldots, b_m$:

$$\begin{aligned} f(a_1) &= \sum_{j=1}^{m} f_{j1} b_j, \\ f(a_2) &= \sum_{j=1}^{m} f_{j2} b_j, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(a_n) &= \sum_{j=1}^{m} f_{jn} b_j, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $f_{ji} \in K$. Из коэффициентов разложения сформируем следующую матрицу:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Матрицу F называют матрицей линейного оператора f. Возьмем вектор $x \in L_n$, тогда $y = f(x) \in L_m$. Разложим векторы x и y по базисам соответственно (6.1) и (6.2), имеем:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \qquad\qquad y = \sum_{j=1}^{m} y_j b_j.$$

Проведем следующее вычисление:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} y_j b_j = y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(a_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} f_{ji} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i f_{ji} b_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} f_{ji} x_i\right) b_j. \end{gathered} \tag{6.5}$$

В последней формуле пятое равенство следует из формул (6.3). В силу единственности разложения вектора по базису из равенства (6.5) получим равенство $y_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ji} x_i$. Это равенство запишем на языке умножения матриц

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

или формально в виде

$$Y = FX, \tag{6.7}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Формула (6.7) выражает действие линейного оператора f через координаты векторов пространств L_n и L_m. Очевидно, что матрица F линейного оператора f зависит от базисов линейных пространств L_n и L_m. Естественно поставить вопрос: как изменится матрица линейного оператора, если перейти к другим базисам линейных пространств L_n и L_m. Ответим на этот вопрос. Рассмотрим другие базисы пространств L_n и L_m:

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \tag{6.8}$$

– базис в L_n и

$$b'_1, b'_2, \ldots, b'_m \tag{6.9}$$

– базис в L_m. Пусть S – матрица перехода от базиса (6.1) к базису (6.8), а T – матрица перехода от базиса (6.2) к базису (6.9):

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1m} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ t_{m1} & \ldots & t_{mm} \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат векторов в пространствах L_n и L_m в матричном виде имеют вид:

$$X = SX' \qquad \text{и} \qquad Y = TY'. \tag{6.10}$$

Где X и X' – матрицы-столбцы, состоящие из координат вектора в L_n относительно базисов соответственно (6.1) и (6.8), а Y и

Y' – матрицы-столбцы, состоящие из координат вектора в L_m относительно базисов соответственно (6.2) и (6.9). Подставим формулы (6.10) в формулу (6.7), имеем:

$$TY' = FSX'$$

или

$$Y' = T^{-1}FSX'.$$

Окончательно получим формулу

$$F' = T^{-1}FS. \tag{6.11}$$

Это и есть формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базисов линейных пространств L_n и L_m. В формуле (6.11) F' – матрица линейного оператора f относительно базисов (6.8) и (6.9), а F – матрица линейного оператора f относительно базисов (6.1) и (6.2). Рассмотрим множество $\mathrm{Hom_K(L_n, L_m)}$ (линейных операторов из L_n в L_m над полем K), и множество $\mathrm{Mat(m, n; K)}$ (матриц размерности $m \times n$ с коэффициентами из поля K). Зафиксируем базисы линейных пространств L_n и L_m. Линейному оператору $f\colon L_n \to L_m$ соответствует однозначно матрица F по формуле (6.4) и наоборот, матрице F соответствует однозначно определенный линейный оператор по формулам (6.6) или (6.7). Легко видеть, что это соответствие является биекцией множества $\mathrm{Hom_K(L_n, L_m)}$ на множество $\mathrm{Mat(m, n; K)}$.

Упражнение 6.1 *Доказать, что эта биекция является изоморфизмом линейных пространств* $\mathrm{Hom_K(L_n, L_m)}$ *и* $\mathrm{Mat(m, n; K)}$.

Рассмотрим два линейных оператора $f\colon L_n \to L_m$ и $g\colon L_m \to L_k$. Зафиксируем базисы линейных простраенств L_n, L_m и L_k. Тогда операторам f и g сопоставляются некоторые матрицы соответственно F и G.

Упражнение 6.2 *Доказать, что линейному оператору композиции $g \circ f\colon L_n \to L_k$ соответствует матрица GF.*

Рассмотрим линейный изоморфизм $f\colon L_n \to L_n$. Линейные изоморфизмы пространства L_n называются автоморфизмами пространства L_n. Существует обратный линейный изоморфизм $f^{-1}\colon L_n \to L_n$. Очевидны равенства $f^{-1} \circ f = id_{L_n}$ и $f \circ f^{-1} = id_{L_n}$. Символом id_{L_n} обозначено тождественное отображение пространства L_n. Зафиксируем базис в L_n, тогда линейным операторам f и f^{-1} соответствуют некоторые матрицы соответственно F и F'.

Упражнение 6.3 *Доказать, что*
1) $F' = F^{-1}$,
2) соответствие $f \leftrightarrow F$ является биекцией (изоморфизмом групп) множества автоморфизмов пространства L_n и группы $GL(n; K)$.

Рангом линейного оператора f называется число $\dim(\mathrm{im}(f))$ (размерность образа оператора f).

Упражнение 6.4 *Доказать, что ранг линейного f оператора равен рангу матрицы F этого оператора: $rang(F) = \dim(\mathrm{im}(f))$.*

Сопряженный оператор

Рассмотрим линейный оператор $f\colon L_n \to L_m$. Рассмотрим сопряженные пространства L_n^* и L_m^*. Построим линейный оператор $f^*\colon L_m^* \to L_n^*$ следующим образом:

$$f^*(t)(x) = t(f(x)) \tag{6.12}$$

где $x \in L_n$ и $t \in L_m^*$. Отображение f^* ставит в соответствие функционалу $t \in L_m^*$ функционал $f^*(t) \in L_n^*$ по формуле (6.12).

Упражнение 6.5 *Доказать, что отображение f^* – линейный оператор из L_m^* в L_n^*.*

Линейный оператор f^* называется оператором сопряженным к линейному оператору f. Зафиксируем базис (6.1) в L_n и базис (6.2) в L_m. Пусть относительно этих базисов матрица F линейного оператора f имеет вид (6.4). Пусть

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \tag{6.13}$$

– базис в L_n^*, сопряженный базису (6.1), а

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \tag{6.14}$$

– базис в L_m^*, сопряженный базису (6.2), $u_i(a_j) = \delta_{ij},\ \ i, j = \overline{1, n}$; $v_i(b_j) = \delta_{ij},\ \ i, j = \overline{1, m}$. Здесь δ_{ij} – символ Кронекера. Проведем следующие выкладки:

$$\begin{gathered} f^*(v_k)(a_i) = v_k(f(a_i)) = v_k\left(\sum_{j=1}^{m} f_{ji} b_j\right) = \\ = \sum_{j=1}^{m} f_{ji} v_k(b_j) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji} \delta_{kj} = f_{ki}, \end{gathered} \tag{6.15}$$

$k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$. Здесь во втором равенстве были использованы формулы (6.3), а в третьем – линейность функционала v_k. Из формулы (6.15) получаем равенство

$$f^*(v_k) = \sum_{i=1}^{n} f_{ki} u_i, \tag{6.16}$$

где $k = \overline{1, m}$, или более подробно равенства

$$\begin{aligned} f^*(v_1) &= \sum_{i=1}^{n} f_{1i} u_i, \\ f^*(v_2) &= \sum_{i=1}^{n} f_{2i} u_i, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^*(v_m) &= \sum_{i=1}^{n} f_{mi} u_i. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Упражнение 6.6 *Доказать, формулу (6.16). Указание: подействовать на вектор a_i $(i = \overline{1, n})$ левой и правой частью равенства (6.16) и показать, что получится одно и то же число. Используйте формулу (6.15).*

Из формул (6.17) видно, что матрица линейного оператора f^* относительно базисов (6.13) и (6.14) имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \dots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \dots & f_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Таким образом, матрица (6.18) линейного оператора f^* является матрицей, транспонированной к матрице F (формула (6.4)) линейного оператора f.

Лекция 7

Евклидово пространство

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем $\mathbb{R}$.

Определение 7.1 *Линейное пространство L_n называется евклидовым пространством, если задано отображение $\varphi\colon L_n \times L_n \to \mathbb{R}$ (в дальнейшем для удобства $\varphi(a,b)$ где $a, b \in L_n$ будем обозначать через (a,b)) удовлетворяющее следующим аксиомам:*

$$1)\ \forall a, b \in L_n\ (a,b) = (b,a),$$

$$2)\ \forall a, b \in L_n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ (\lambda a, b) = \lambda(a,b),$$

$$3)\ \forall a, b, c \in L_n\ \ (a+b, c) = (a,c) + (b,c),$$

$$4)\ \forall a \in L_n\ (a,a) \geq 0;$$

$$(a,a) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } a = \theta.$$

Аксиомы 1 – 4 называются аксиомами скалярного произведения. Линейное пространство, на котором задано скалярное произведение называется евклидовым пространством. Евклидово n-мерное пространство будем обозначать символом E_n. Сформулируем и докажем простейшие следствия из системы аксиом 1 – 4. Обозначим символом $|a|$ длину вектора a, по определению $|a| = \sqrt{(a,a)}$. Извлечение корня возможно в силу аксиомы 4.

Предложение 7.1 $\forall a, b \in E_n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ (a, \lambda b) = \lambda(a,b)$.

Доказательство. $(a, \lambda b) = (\lambda b, a) = \lambda(b, a) = \lambda(a, b)$,
в этой цепочке первое и третье равенства следуют из аксиомы 1, а второе равенство – из аксиомы 2. ■

Предложение 7.2 $\forall a, b, c \in E_n \quad (a, b + c) = (a, b) + (a, c)$.

Доказательство. $(a, b + c) = (b + c, a) = (b, a) + (c, a) = (a, b) + (a, c)$,
в этой цепочке первое и третье равенства следуют из аксиомы 1, а второе равенство – из аксиомы 3. ■

Упражнение 7.1 *Докажите, что из аксиом 2, 3, а так же из предложений 7.1 и 7.2 следует, что скалярное произведение* $(\cdot\,,\cdot)$ *– билинейная функция.*

Векторы $a, b \in E_n$ называются ортогональными, если $(a, b) = 0$.

Предложение 7.3 *(теорема Пифагора) Если векторы a и b ортогональны, то* $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2$.

Доказательство. $|a+b|^2 = (a+b, a+b) = (a, a+b) + (b, a+b) =$
$= (a, a) + (a, b) + (b, a) + (b, b) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2$. ■

Предложение 7.4 *(равенство параллелограмма)* $\forall a, b \in E_n$
$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$.

Доказательство. $|a+b|^2 + |a-b|^2 = (a+b, a+b) + (a-b, a-b) =$
$= (a, a) + 2(a, b) + (b, b) + (a, a) - 2(a, b) + (b, b) =$
$2(a, a) + 2(b, b) = 2|a|^2 + 2|b|^2$. ■

Доказанное равенство выражает известную из элементарной геометрии теорему: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Пример 1. Скалярное произведение, заданное на множестве векторов (направленных отрезков прямой) трехмерного пространства.

Пример 2. Рассмотрим линейное пространство L_n. Зафиксируем базис в L_n. Пусть вектор x имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно данного базиса, а вектор y – координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Скалярное произведение векторов x и y зададим следующим выражением: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Упражнение 7.2 *Докажите, что для функции (x, y) выполнены все аксиомы 1 – 4.*

Пример 3. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Определим скалярное произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ следующей формулой: $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Это пример бесконечномерного пространства со скалярным произведением.

Упражнение 7.3 *Докажите, что для (f, g) выполнены все аксиомы 1 – 4.*

Предложение 7.5 *(неравенство Шварца-Коши-Буняковского)* $\forall x, y \in E_n \quad |(x, y)| \leq |x||y|$.

Доказательство. Если вектор $x = \theta$ или $y = \theta$, то неравенство превращается в равенство. Пусть $y \neq \theta$, тогда для $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + ty, x + ty) = t^2(y, y) + 2(x, y)t + (x, x) = \\ &= |y|^2 t^2 + 2(x, y)t + |x|^2. \end{aligned} \tag{7.1}$$

В выражении (7.1) квадратный трехчлен неотрицателен. Значит, его дискриминант неположителен: $4(x,\ y)^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$, что и доказывает предложение. ■

Упражнение 7.4 *Докажите, что неравенство Шварца-Коши-Буняковского превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны.*

Доказанное неравенство позволяет ввести определение угла φ между двумя векторами x и y в евклидовом пространстве E_n: $\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|}$. Данное определение согласуется с определением скалярного произведения в элементарной геометрии.

Предложение 7.6 *(неравенство треугольника, неравенство Минковского)* $\forall x, y \in E_n \quad |x+y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство. Используя свойства скалярного произведения и неравенство Шварца-Коши-Буняковского, получим:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Что и доказывает предложение. ■

Матрица скалярного произведения

Получим формулы, выражающие скалярное произведение в координатах. Зафиксируем в евклидовом пространстве E_n базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Рассмотрим векторы $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Положим $g_{ij} = (e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$. В силу билинейности отображения $(\cdot\,,\cdot)$ имеем

$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(e_i,e_j)x_iy_j= \\ =\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_iy_j. \tag{7.3}$$

Длина вектора x выражается через координаты формулой

$$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_ix_j}.$$

Симметрическая матрица $G=(g_{ij})$ называется матрицей скалярного произведения. Базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$ евклидова пространства E_n называется ортонормированным, если $g_{ij}=(e_i,e_j)=\delta_{ij},\ \ i,j=\overline{1,n}$. Здесь δ_{ij} – символ Кронекера. В этом случае матрица скалярного произведения единичная. Относительно ортонормированного базиса скалярное произведение – сумма произведений соответствующих координат: $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, а длина вектора x находится по формуле $|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$.

Упражнение 7.5 *Докажите, что относительно ортонормированного базиса $e_1,e_2,\ldots,e_n$ вектор x имеет разложение $x=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$, то есть скалярные произведения (x,e_i) являются координатами вектора x.*

Упражнение 7.6 *Докажите, что матрица перехода A от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису ортогональная: $A^TA=E$. Символом E обозначена единичная матрица.*

Относительно ортонормированного базиса неравенство Шварца-Коши-Буняковского имеет вид

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

а неравенство треугольника имеет вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Выясним как меняется матрица скалярного произведения при замене базиса. Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{7.4}$$

– базис в E_n. Относительно этого базиса рассмотрим матрицу скалярного произведения G:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Рассмотрим матрицы-столбцы X и Y, состоящие из координат векторов соответственно x и y относительно базиса (7.4)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Запишем формулу (7.3) на языке умножения матриц:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_iy_j = X^TGY. \qquad (7.6)$$

Здесь символом X^T обозначена матрица транспонированная к матрице X. Пусть

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \qquad (7.7)$$

– еще один базис в E_n. Обозначим символом $G' = (g'_{ij})$ $(i,j = \overline{1,n})$ матрицу скалярного произведения относительно базиса (7.7), а символами X' и Y' матрицы-столбцы, состоящие из координат векторов соответственно x и y относительно базиса (7.7). Тогда имеем формулу аналогичную формуле (7.6):

$$(x,y) = X'^TG'Y'. \qquad (7.8)$$

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$ $(i,j = \overline{1,n})$ перехода от базиса (7.4) к базису (7.7). Имеем следующие формулы преобразования координат векторов x и y, записанные на языке умножения матриц:

$$X = AX' \quad \text{и} \quad Y = AY'. \qquad (7.9)$$

Подставим формулы (7.9) в формулу (7.6), получим

$$(x,y) = X^TGY = (AX')^TGAY' = X'^TA^TGAY'. \qquad (7.10)$$

Сравнивая формулы (7.10) и (7.8), справедливые для любых матриц-столбцов X' и Y', получим равенство

$$G' = A^TGA. \qquad (7.11)$$

Равенство (7.11) выражает формулы преобразования матрицы скалярного произведения при замене базиса. Равенство (7.11) равносильно следующей формуле:

$$g'_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} g_{pq} a_{pi} a_{qj}, \tag{7.12}$$

где $i, j = \overline{1, n}$.

Лекция 8

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Изложим алгоритм, позволяющий из любого базиса евклидова пространства построить ортонормированный базис. Этот алгоритм называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта. Докажем следующее предложение.

Предложение 8.1 *Пусть в евклидовом пространстве E_n задан базис: $v_1, v_2, \ldots, v_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$, первые k векторов которого попарно ортогональны: $(v_i, v_j) = 0$, для $i \neq j$; $i, j = \overline{1, k}$. Тогда в этом базисе вектор a_{k+1} можно заменить на вектор v_{k+1} такой, что система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ снова образует базис в E_n, а первые $k+1$ векторов системы попарно ортогональны: $(v_i, v_j) = 0$, для $i \neq j$; $i, j = \overline{1, k+1}$.*

Доказательство. Вектор v_{k+1} будем искать в виде следующей линейной комбинации:

$$v_{k+1} = a_{k+1} - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_k v_k \tag{8.1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ищем из условий ортогональности вектора v_{k+1} векторам $v_1, v_2, \ldots, v_k$:

$$\begin{aligned} 0 = (v_{k+1}, v_i) = (a_{k+1} - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_k v_k, v_i) = \\ = (a_{k+1}, v_i) - \lambda_i (v_i, v_i), \end{aligned} \tag{8.2}$$

$i = \overline{1,k}$. Здесь была использована попарная ортогональность векторов v_i $(i = \overline{1,k})$ и билинейность скалярного произведения. Из равенства (8.2) находим числа λ_i:

$$\lambda_i = \frac{(a_{k+1}, v_i)}{(v_i, v_i)}, \tag{8.3}$$

$i = \overline{1,k}$. Подставим формулы (8.3) в (8.1), получим:

$$v_{k+1} = a_{k+1} - \frac{(a_{k+1}, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(a_{k+1}, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 - \ldots - \frac{(a_{k+1}, v_k)}{(v_k, v_k)} v_k.$$

По построению вектор v_{k+1} ортогонален векторам v_i, $i = \overline{1,k}$.

Упражнение 8.1 *Докажите, что система векторов* $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ *линейно независима.*

■

Применяя n раз предложение 8.1 к произвольному базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклидова пространства E_n, получим базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в E_n, состоящий из попарно ортогональных векторов: $(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,n})$.

Упражнение 8.2 *Докажите, что матрица перехода от базиса* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *к базису* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *является треугольной матрицей.*

Теперь из ортогонального базиса $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в E_n сделаем ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пронормировав каждый вектор v_i:

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|},\ e_2 = \frac{v_2}{|v_2|},\ \ldots,\ e_n = \frac{v_n}{|v_n|}.$$

Рассмотрим евклидово пространство E_n и его пдпространство V.

Упражнение 8.3 *Используя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, докажите, что для любого подпространтва U евклидова пространства E_n существует такое подпространство $V \subset E_n$, что $E_n = U \oplus V$ и каждый вектор подпространства V ортогонален каждому вектору подпространства U.*

В упражнении 8.3 подпространство V называется ортогональным дополнением подпространства U, а подпространство U – ортогональным дополнением подпространства V. Используются обозначения $V = U^{\perp}$ и $U = V^{\perp}$. Определим два отображения: $pr_U : E_n \to U$ и $pr_V : E_n \to V$, первое называется ортогональной проекцией на подпространство U параллельно подпространству V, а второе – ортогональной проекцией на подпространство V параллельно подпространству U. Если дан вектор x и $x = u + v$, где $u \in U$, а $v \in V$, то $pr_U(x) = u$ и $pr_V(x) = v$.

Ортогональная проекция на подпространство. Коэффициенты Фурье

Рассмотрим евклидово пространство E_n и его подпространство V размерности m. Зафиксируем вектор x из E_n, возьмем произвольный вектор $y \in V$, будем искать минимум выражения

$|x-y|$: $\min_{y\in V}|x-y|$. Зафиксируем ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$ в V, тогда $y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$. Используя свойства скалярного произведения и ортонормированность системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$, имеем:

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= (x-y, x-y) = \left(x - \sum_{i=1}^m y_i e_i, x - \sum_{j=1}^m y_j e_j\right) = \\
&= (x,x) - \sum_{j=1}^m y_j (x, e_j) - \sum_{i=1}^m y_i (e_i, x) + \sum_{i=1}^m y_i^2 = \\
&= (x,x) - 2\sum_{i=1}^m y_i (x, e_i) + \sum_{i=1}^m y_i^2 = \\
&= (x,x) + \sum_{i=1}^m (y_i^2 - 2y_i (x, e_i)).
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Выделяя полный квадрат в каждом слагаемом последней суммы, получим:

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= (x,x) + \sum_{i=1}^m \big((y_i - (x, e_i))^2 - (x, e_i)^2\big) = \\
&= (x,x) - \sum_{i=1}^m (x, e_i)^2 + \sum_{i=1}^m (y_i - (x, e_i))^2.
\end{aligned} \tag{8.5}$$

В последнем выражении только третье слагаемое зависит от вектора y. Так как это слагаемое неотрицательное, то $\min_{y\in V}|x-y|^2$ достигается, когда это слагаемое обращается в ноль, то есть если $y_i = (x, e_i)$, $i = \overline{1, m}$, а $y = \sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i$. Таким образом, окончательно получили

$$\min_{y\in V} |x-y| = \sqrt{|x|^2 - \sum_{i=1}^m (x, e_i)^2}. \tag{8.6}$$

Числа (x, e_i) называются коэффициентами Фурье вектора x относительно ортонормированной системы $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Упражнение 8.4 *Докажите, что вектор* $x - \sum_{i=1}^{m}(x, e_i)e_i$ *ортогонален подпространству* V.

Из упражнения 8.4 следует, что $\sum_{i=1}^{m}(x, e_i)e_i$ – ортогональная проекция вектора x на подпространство V. Из равенства (8.6) получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}(x, e_i)^2 \leq |x|^2. \tag{8.7}$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя. Оно обращается в равенство, когда подпространство V совпадает с евклидовым пространством E_n.

Матрица Грама

В евклидовом пространстве E_n возьмем систему векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Рассмотрим всевозможные скалярные произведения: $(v_i, v_j) \quad (i, j = \overline{1, k})$. Из скалярных произведений составим симметрическую матрицу размера $k \times k$, которую обозначим символом $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)$:

$$\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \ldots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \ldots & (v_2, v_k) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \ldots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}. \tag{8.8}$$

Матрица $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ называется матрицей Грама системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$. В дальнейшем, для удобства, матрицу Грама $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, если понятно о какой системе векторов идет речь, будем обозначать просто символом Γ. Сформулируем и докажем следующее утверждение, выражающее свойства матрицы Грама. Определитель матрицы будем обозначать символом $|\cdot|$.

Предложение 8.2 $|\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)| \geq 0$, $|\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)| = 0$ *тогда и только тогда, когда система векторов* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *линейно зависима.*

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку V_m, порожденную векторами $v_1, v_2, \ldots, v_k$, $\dim(V_m) = m \leq k$. $m = k$ тогда и только тогда, когда система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно независима. Зафиксируем в V_m ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Разложим векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ по векторам базиса $e_1, e_2, \ldots, e_m$: $v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j \quad (i = \overline{1,k})$. Из коэффициентов разложения a_{ji} сформируем следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

Так как базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – ортонормированный, то несложно увидеть, что

$$\Gamma = A^T A. \tag{8.10}$$

Рассмотри два случая.

1) Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно независима. Тогда

$m = k$, матрица A – квадратная и невырождена (как матрица перехода от одного базиса к другому). Используя свойства определителя, имеем:

$$|\Gamma| = |A^T A| = |A^T||A| = |A||A| = |A|^2 > 0.$$

2) Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно зависима. Тогда $m < k$, ранг матрицы A равен m. Из формулы (8.10) в силу теоремы о ранге произведения матриц следует, что ранг матрицы Γ меньше k. Значит, $|\Gamma| = 0$. Что и доказывает предложение. ■

Геометрическая интерпретация матрицы Грама следующая. Если система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно независима, то определитель матрицы A можно взять за определение k-мерного ориентированного объема параллелепипеда, построенного на векторах $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (в случае $k = 3$ как раз получим известную формулу из аналитической геометрии). Тогда определитель матрицы Грама Γ – квадрат k-мерного объема параллелепипеда, построенного на векторах $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Теперь выведем формулу, выражающую компоненты матрицы Грама через координаты относительно произвольного базиса. Рассмотрим в евклидовом пространстве E_n систему векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ и произвольный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Разложим каждый вектор v_p по базису: $v_p = \sum_{i=1}^{n} b_{ip} e_i, \quad p = \overline{1,k}$. Рассмотрим три матрицы: матрицу, состоящую из коэффициентов разложения векторов v_p $B = (b_{ip}),\ i = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,k}$; матрицу Грама Γ системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$; матрицу скалярных произведений $G = (g_{ij}),\ g_{ij} = (e_i, e_j),\ i, j = \overline{1,n}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix},$$
$$\Gamma = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & \dots & (v_1, v_k) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ (v_k, v_1) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}. \tag{8.11}$$

Используя свойства скалярного произведения, вычислим скалярные произведения (v_p, v_q) $(p, q = \overline{1, k})$:

$$\begin{gathered} (v_p, v_q) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ip} e_i, \sum_{j=1}^{n} b_{jq} e_j \right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ip} b_{jq} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ip} b_{jq} g_{ij}. \end{gathered} \tag{8.12}$$

Равенство (8.12) выражает компоненты матрицы Грама через координаты векторов относительно произвольного базиса. Равенство (8.12) равносильно следующему матричному равенству:

$$\Gamma = B^T G B.$$

Лекция 9

Изометрические отображения евклидовых пространств

Рассмотрим евклидово пространство En. Линейное отображение. f : En → En называется изометрией, если оно сохраняет скалярное произведение, то есть $\forall$ x, y $\in$ En (f(x), f(y)) = (x, y). Так как |x| = = (x, x), то изометрия сохраняет и длину вектора.

Тогда $\ker f = \{\theta\}$. Так как f отображает E_n в себя, то f – автоморфизм (изоморфизм в себя) евклидова пространства E_n.

Упражнение 9.1 *Докажите, что всякое линейное отображение $f\colon E_n \to E_n$, сохраняющее расстояние, является изометрией. Указание: рассмотрите тождество* $(x, y) = \frac{1}{2}((x+y, x+y) - (x, x) - (y, y))$.

Множество изометрий евклидова пространства E_n, очевидно, образует группу относительно операции композиции отображений. Группу изометрий евклидова пространства E_n обозначим символом $\mathrm{Iso(E_n, E_n)}$. Эта группа является подгруппой группы всех линейных автоморфизмов пространства E_n. Зафиксируем в E_n ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Выясним какой вид имеет матрица изометрии относительно ортонормированного базиса. Пусть векторы x и y относительно этого ортонормированного базиса имеют соответственно координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогда $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Рассмотрим матрицы-столбцы, состоящие из координат векторов x и y:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Запишем скалярное произведение в ортонормированом базисе на языке умножения матриц:

$$(x, y) = X^T Y. \tag{9.1}$$

Предположим, что относительно данного ортонормированного базиса изометрия $f\colon E_n \to E_n$ представляется матрицей F. Рассмотрим образы векторов x и y: векторы $x' = f(x)$ и $y' = f(y)$. Рассмотрим матрицы-столбцы X' и Y', состоящие из координат векторов соотвественно x' и y' относительно этого же ортонормированного базиса. Имеем формулу аналогичную формуле (9.1):

$$(x', y') = X'^T Y'. \tag{9.2}$$

Запишем действие изометрии f на языке умножения матриц:

$$X' = FX \quad \text{и} \quad Y' = FY. \tag{9.3}$$

Подставим формулы (9.3) в (9.2)

$$(x', y') = X'^T Y' = (FX)^T FY = X^T F^T FY. \tag{9.4}$$

Так как f изометрия, то выполняется равенство $(x, y) = (x', y')$. Следовательно, правые части равенств (9.1) и (9.4) равны для любых матриц-столбцов X и Y. Тогда выполняется равенство

$$F^T F = E, \tag{9.5}$$

где символом E обозначена единичная матрица. Матрицы, для которых транспонированная матрица является обратной называются ортогональными матрицами. Множество ортогональных матриц ранга n обозначается символом $O(n)$.

Упражнение 9.2 *Докажите,что множество ортогональных матриц образует группу.*

Таким образом, доказано, что относительно ортонормированного базиса изометрии представляются ортогональными матрицами. Несложно видеть, что имеется биекция (изоморфизм групп) между множествами $\mathrm{Iso}(\mathrm{E_n}, \mathrm{E_n})$ и $O(n)$.

Общий вид функционала в евклидовом пространстве

Рассмотрим евклидово пространство E_n. Пусть $t\colon E_n \to \mathbb{R}$ – линейный функционал.

Предложение 9.1 *Существует однозначно определенный вектор $a \in E_n$, что $\forall x \in E_n \quad t(x) = (x, a)$.*

Доказательство. Зафиксируем ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в E_n. Возьмем произвольный вектор x, пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты вектора x относительно данного базиса. Тогда

$$t(x) = t\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i t(e_i) \tag{9.6}$$

Рассмотрим вектор a с координатами $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_n)$ относительно фиксированного ортонормированного базиса, тогда очевидно

$$(x, a) = \sum_{i=1}^{n} x_i t(e_i). \tag{9.7}$$

Равенства (9.6) и (9.7) доказывают предложение. ■

Предложение 9.1 показывает, что любой функционал в евклидовом пространстве выражается через скалярное произведение.

Упражнение 9.3 *Докажите, что отображение из предложения 9.1, сопоставляющее функционалу t вектор a, является изоморфизмом E_n^* на E_n.*

Упражнение (9.3) показывает, что сопряженное пространство к евклидову пространству естественным образом можно отождествить с самим евклидовым пространством.

Сопряженный оператор в евклидовом пространстве

Рассмотрим линейный оператор $f\colon E_n \to E_m$. В силу предложения 9.1 всякий функционал t на E_m имеет вид (y, a), где $a \in E_m$ – фиксированный вектор, а $y \in E_m$ – переменный вектор. Рассмотрим сопряженный оператор $f^*\colon E_m^* \to E_n^*$. Функционал $f^*(t)$ на E_n имеет вид $(f(x), a)$, где $x \in E_n$ – переменный вектор. Согласно предложению 9.1 $(f(x), a) = (x, b)$ для некоторого вектора $b \in E_n$. Отождествим, в силу упражнения 9.3, E_n^* с E_n и E_m^* с E_m. Тогда можно считать, что оператор f^* действует из E_m в E_n: $f^*\colon E_m \to E_n$. Следовательно, $b = f^*(a)$. Таким образом, получено равенство $(f(x), a) = (x, f^*(a))$ справедливое $\forall x \in E_n$ и $\forall a \in E_m$. В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать линейные операторы $f\colon E_n \to E_n$. Ранее (см. лекцию 6) было показано, что матрица сопряженного оператора относительно сопряженных базисов является транспонированной матрицей к матрице исходного оператора. Это утверждение будет доказано еще раз (в более частном случае) для сопряженного оператора в евклидовом пространстве: мы докажем, что относительно ортонормированного базиса матрица сопряженного оператора является транспонированной к матрице исходного оператора.

Рассмотрим линейный оператор $f\colon E_n \to E_n$. Рассмотрим оператор ему сопряженный $f^*\colon E_n \to E_n$. $\forall x \in E_n$ и $\forall y \in E_n$ имеет место равенство

$$(f(x), y) = (x, f^*(y)). \tag{9.8}$$

Зафиксируем в E_n ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Пусть X и Y матрицы-столбцы, составленные из координат соответственно векторов x и y относительно заданного ортонормированного базиса. Символоми F и F^* обозначим матрицы соответственно линейного оператора f и сопряженного оператора f^* относительно этого базиса. FX и F^*Y – матрицы-столбцы, составленные из координат соответственно векторов $f(x)$ и $f^*(y)$ относительно фиксированного ортонормированного базиса. В силу равенства (9.1)

$$(f(x), y) = (FX)^T Y = X^T F^T Y \quad \text{и} \quad (x, f^*(y)) = X^T F^* Y. \tag{9.9}$$

Из равенств (9.9) и (9.8) имеем

$$X^T F^T Y = X^T F^* Y. \tag{9.10}$$

Равенство (9.10) выполнянтся для любых матриц-столбцов X и Y, следовательно, $F^* = F^T$. Таким образом, еще раз доказано, что матрица сопряженного оператора является транспонированной матрицей к матрице исходного оператора.

Линейный оператор $f\colon E_n \to E_n$ называется самосопряженным, если $f = f^*$. Из полученных вычислений следует, что для матрицы самосопряженного оператора относительно ортонормированного базиса выполняется условие $F = F^T$.

То есть матрица самосопряженного оператора относительно ортонормированного базиса – симметрическая.

Эрмитово пространство

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем $\mathbb{C}$.

Определение 9.1 *Линейное пространство L_n называется эрмитовым пространством, если задано отображение $\varphi\colon L_n \times L_n \to \mathbb{C}$ (в дальнейшем для удобства $\varphi(a, b)$, где $a, b \in L_n$, будем обозначать через (a, b)) удовлетворяющее следующим аксиомам:*

$$1)\ \forall a, b \in L_n\ (a, b) = \overline{(b, a)},$$

$$2)\ \forall a, b \in L_n,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\quad (\lambda a, b) = \lambda(a, b),$$

$$3)\ \forall a, b, c \in L_n\quad (a + b, c) = (a, c) + (b, c),$$

$$4)\ \forall a \in L_n\ (a, a) \geq 0;$$

$$(a, a) = 0 \text{ *тогда и только тогда, когда* } a = \theta.$$

В аксиоме 1 чертой наверху обозначено комплексное сопряжение. Аксиомы 1 – 4 называются аксиомами эрмитова скалярного произведения. Линейное пространство, на котором задано эрмитово скалярное произведение называется эрмитовым пространством. Эрмитово n-мерное пространство будем обозначать тем же символом, что и евклидово пространство: E_n. Сформулируем простейшие следствия из системы аксиом эрмитова пространства. Доказательство их аналогично соответствующим свойствам евклидова пространства, поэтому большинство доказательств оставим в упражнениях. Обозначим символом $|a|$ длину вектора a, по определению $|a| = \sqrt{(a,a)}$. Извлечение корня возможно в силу аксиомы 4.

Упражнение 9.4 *Доказать, что* $\forall a, b \in E_n, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \ (a, \lambda b) = \overline{\lambda}(a,b)$.

Упражнение 9.5 *Доказать, что* $\forall a, b, c \in E_n \quad (a, b+c) = (a,b) + (a,c)$.

Упражнение 9.6 *Докажите, что* $\forall a, b, c \in E_n, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *выполняются следующие равенства:* $(\lambda a + \mu b, c) = \lambda(a,c) + \mu(b,c)$ *и* $(c, \lambda a + \mu b) = \overline{\lambda}(c,a) + \overline{\mu}(c,b)$.

Лекция 10

Эрмитово пространство (продолжение)

Символом E_n будем обозначать эрмитово пространство. Векторы a и b эрмитова пространства E_n называются ортогональными, если $(a,b) = 0$.

Упражнение 10.1 *Докажите теорему Пифагора для эрмитова пространства. Если векторы* a *и* b *ортогональны, то* $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$.

Упражнение 10.2 *Докажите равенство параллелограмма для эрмитова пространства.* $\forall a, b \in E_n \ |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$.

Пример 1. Рассмотрим линейное пространство L_n над полем $\mathbb{C}$. Зафиксируем базис в L_n. Пусть вектор x имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно данного базиса, а вектор y координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Эрмитово скалярное произведение векторов x и y зададим следующим выражением: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. Черта наверху обозначает комплексное сопряжение.

Упражнение 10.3 *Докажите, что для (x, y) выполнены все аксиомы эрмитова пространства.*

Пример 2. Рассмотрим множество непрерывных комплексно-значных функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Определим эрмитово скалярное произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ следующей формулой: $(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. Черта наверху обозначает комплексное сопряжение. Это пример бесконечномерного пространства с эрмитовым скалярным произведением.

Упражнение 10.4 *Докажите, что для (f, g) выполнены все аксиомы эрмитова пространства.*

Докажем неравенство Шварца-Коши-Буняковского для эрмитова просранства.

Предложение 10.1 *(неравенство Шварца-Коши-Буняковского)* $\forall x, y \in E_n \quad |(x, y)| \leq |x||y|$.

Доказательство. Если вектор $x = \theta$ или $y = \theta$, то неравенство превращается в равенство. Пусть $y \neq \theta, \quad t \in \mathbb{C}$, используя свойства эрмитова скалярного произведения имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + t(y, x) + \overline{t(y, x)} + |t|^2(y, y) = \\ = |x|^2 + 2\,\mathrm{Re}(t(y, x)) + |t|^2|y|^2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Символом Re обозначена действительная часть комплексного числа. Подставим в последнее выражение цепочки (10.1) $t = -\frac{\overline{(y,x)}}{|y|^2}$, получим

$$0 \le |x|^2 - \frac{|(y,x)|^2}{|y|^2}. \tag{10.2}$$

Что и доказывает предложение. ■

Предложение 10.2 *(неравенство треугольника, неравенство Минковского)* $\forall x, y \in E_n \quad |x+y| \le |x| + |y|$.

Доказательство. Используя свойства эрмитова скалярного произведения и неравенство Шварца-Коши-Буняковского, получим:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y) = \\ = |x|^2 + 2\operatorname{Re}((x,y)) + |y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Что и доказывает предложение. ■

Матрица эрмитова скалярного произведения

Получим формулы, выражающие эрмитово скалярное произведение в координатах. Зафиксируем в эрмитовом пространстве E_n базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Рассмотрим векторы $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Положим $g_{ij} = (e_i, e_j), \quad i, j = \overline{1,n}$. В силу свойств эрмитова скалярного произведения $(\cdot\,,\cdot)$ имеем

$$
\begin{aligned}
(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (e_i, e_j) x_i \overline{y_j} = \\
= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i \overline{y_j}.
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

Длина вектора x выражается через координаты формулой

$$
|x| = \sqrt{(x, x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i \overline{x_j}.
$$

Матрица $G = (g_{ij})$ называется матрицей эрмитова скалярного произведения. Так как в силу аксиомы 1 $g_{ji} = \overline{g_{ij}}$, то матрица G эрмитова: $G^T = \overline{G}$. Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ эрмитова пространства E_n называется ортонормированным, если $g_{ij} = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Здесь δ_{ij} – символ Кронекера. В этом случае матрица эрмитова скалярного произведения единичная. Относительно ортонормированного базиса эрмитово скалярное произведение выражается формулой $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$, а длина вектора x находится по формуле $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

Упражнение 10.5 *Докажите, что относительно ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ вектор x имеет разложение $x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$, то есть скалярные произведения (x, e_i) являются координатами вектора x.*

Упражнение 10.6 *Докажите, что матрица перехода A от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в эрмитовом пространстве унитарная: $\overline{A}^T A = E$. Символом $\overline{A}^T$ обозначена транспонированная и сопряженная матрица к матрице A, а символом E обозначена единичная матрица.*

Относительно ортонормированного базиса неравенство Шварца-Коши-Буняковского имеет вид

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2},$$

а неравенство треугольника имеет вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}.$$

Выясним, как меняется матрица эрмитова скалярного произведения при замене базиса. Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{10.5}$$

– базис в E_n. Относительно этого базиса рассмотрим матрицу эрмитова скалярного произведения $G = (g_{ij}), \quad i,j = \overline{1,n}$. Рассмотрим матрицы-столбцы X и Y, состоящие из координат векторов соответственно x и y относительно базиса (10.5) Запишем формулу (10.4) на языке умножения матриц:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_i\overline{y_j} = X^T G\overline{Y}. \tag{10.6}$$

Пусть

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \tag{10.7}$$

– еще один базис в E_n. Обозначим символом $G' = (g'_{ij})$ $(i,j = \overline{1,n})$ матрицу эрмитова скалярного произведения относительно базиса (10.7), а символами X' и Y' матрицы-столбцы, состоящие из координат векторов соответсвенно x и y относительно базиса (10.7). Тогда имеем формулу аналогичную формуле (10.6):

$$(x, y) = X'^T G' \overline{Y'}. \tag{10.8}$$

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n})$ перехода от базиса (10.5) к базису (10.7). Имеем следующие формулы преобразования координат векторов x и y, записанные на языке умножения матриц:

$$X = AX' \quad \text{и} \quad Y = AY'. \tag{10.9}$$

Подставим формулы (10.9) в формулу (10.6), получим

$$(x, y) = X^T G \overline{Y} = (AX')^T G \overline{AY'} = X'^T A^T G \overline{A}\ \overline{Y'}. \tag{10.10}$$

Сравнивая формулы (10.10) и (10.8), справедливые для любых матриц-столбцов X' и Y', получим равенство

$$G' = A^T G \overline{A}. \tag{10.11}$$

Равенство (10.11) выражает формулы преобразования матрицы эрмитова скалярного произведения при замене базиса. Равенство (10.11) равносильно следующей формуле:

$$g'_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} g_{pq} a_{pi} \overline{a_{qj}}, \tag{10.12}$$

$i, j = \overline{1, n}$. Темы: процесс ортогонализации Грама-Шмидта, ортогональная проекция на подпространство, матрица Грама переносятся на случай эрмитова пространства с незначительными изменениями и здесь рассматриваться не будут.

Изометрические отображения эрмитовых пространств

Рассмотрим эрмитово пространство E_n. Линейное отображение $f\colon E_n \to E_n$ называется изометрией, если оно сохраняет скалярное произведение, то есть $\forall x, y \in E_n \ (f(x), f(y)) = (x, y)$. Так как $|x| = \sqrt{(x,x)}$, то изометрия сохраняет и длину вектора. Тогда $\ker f = \{\theta\}$. Так как f отображает E_n в себя, то f – автоморфизм (изоморфизм в себя) эрмитова пространства E_n.

Упражнение 10.7 *Докажите, что всякое линейное отображение $f\colon E_n \to E_n$, сохраняющее расстояние, является изометрией. Указание: рассмотрите тождества $Re((x,y)) = \frac{1}{2}((x+y, x+y) - (x,x) - (y,y))$ и $Im((x,y)) = \frac{1}{2}((x,x) + (y,y) - (ix+y, ix+y))$. Здесь i – мнимая единица, Re – действительная часть комплексного числа, Im – мнимая часть комплексного числа.*

Множество изометрий эрмитова пространства E_n, очевидно, образует группу относительно операции композиции отображений. Группу изометрий эрмитова пространства E_n обозначим символом $\mathrm{Iso(E_n, E_n)}$. Эта группа является подгруппой группы всех линейных автоморфизмов пространства E_n. Зафиксируем в E_n ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Выясним какой вид имеет матрица изометрии относительно ортонормированного базиса. Пусть векторы x и y относительно этого ортонормированного базиса имеют соответственно координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогда $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. Рассмотрим матрицы-столбцы X и Y, состоящие из координат векторов x и y. Запишем скалярное произведение в ортонормированом базисе на языке умножения матриц:

$$(x, y) = X^T \overline{Y}. \tag{10.13}$$

Предположим, что относительно данного ортонормированного базиса изометрия $f\colon E_n \to E_n$ представляется матрицей F. Рассмотрим образы векторов x и y: векторы $x' = f(x)$ и $y' = f(y)$. Рассмотрим матрицы-столбцы X' и Y', состоящие из координат векторов соотвественно x' и y' относительно этого же ортонормированного базиса. Имеем формулу аналогичную формуле (10.13):

$$(x', y') = X'^T \overline{Y'}. \tag{10.14}$$

Запишем действие изометрии f на языке умножения матриц:

$$X' = FX \qquad \text{и} \qquad Y' = FY. \tag{10.15}$$

Подставим формулы (10.15) в (10.14)

$$(x', y') = X'^T \overline{Y'} = (FX)^T \overline{FY} = X^T F^T \overline{F}\ \overline{Y}. \tag{10.16}$$

Так как f изометрия, то выполняется равенство $(x, y) = (x', y')$. Следовательно, правые части равенств (10.13) и (10.16) равны для любых матриц-столбцов X и Y. Тогда выполняется равенство $F^T \overline{F} = E$ или равенство

$$\overline{F}^T F = E, \tag{10.17}$$

где символом E обозначена единичная матрица. Комплексные матрицы, для которых транспонированная и сопряженная матрица является обратной называются унитарными матрицами. Множество унитарных матриц ранга n обозначается символом $U(n)$.

Упражнение 10.8 *Докажите, что множество унитарных матриц образует группу.*

Таким образом, доказано, что относительно ортонормированного базиса изометрии эрмитова пространства представляются унитарными матрицами. Несложно видеть, что имеется биекция (изоморфизм групп) между множествами $\mathrm{Iso}(\mathrm{E_n}, \mathrm{E_n})$ и $U(n)$.

Лекция 11

Сопряженный оператор в эрмитовом пространстве

В эрмитовом пространстве E_n всякий функционал $t\colon E_n \to \mathbb{C}$ имеет вид $t(x) = (x, a)$ для некоторого вектора $a \in E_n$. Как и в случае евклидова пространства, в эрмитовом пространстве линейный функционал выражается через скалярное произведение. Доказательство аналогично соотвествующему утверждению в евклидовом пространстве и здесь приводиться не будет.

Упражнение 11.1 *Доказать, что отображение, сопоставляющее функционалу t вектор a является антилинейным изоморфизмом E_n^* на E_n. Отображение $f\colon L_n \to L_m$, где L_n и L_m линейные пространства над $\mathbb{C}$, называется антилинейным, если выполняются следующие равенства:*

1) $\forall x, y \in L_n \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,

2) $\forall x \in L_n, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Пусть $f\colon E_n \to E_n$ – линейный оператор в эрмитовом пространстве. Рассмотрим линейный функционал $(f(x), a)$ в E_n, где $a, x \in E_n$, a – фиксированный вектор, а x – переменный вектор. В силу вышесказанного существует единственный вектор $b \in E_n$ такой, что выполняется равенство $(f(x), a) = (x, b)$. Следовательно, имеем отображение $f^*\colon E_n \to E_n$, что $f^*(a) = b$.

Упражнение 11.2 *Докажите, что f^* – линейный оператор.*

Таким образом, $\forall x, a \in E_n$ выполняется равенство $(f(x), a) = (x, f^*(a))$. Оператор f^* называется оператором сопряженным к оператору f в эрмитовом пространстве E_n.

Выясним как связаны матрицы операторов f и f^* относительно ортонормированного базиса. Рассмотрим линейный оператор $f\colon E_n \to E_n$ в эрмитовом пространстве E_n. Рассмотрим оператор ему сопряженный $f^*\colon E_n \to E_n$. Значит, $\forall x \in E_n$ и $\forall y \in E_n$ выполняется равенство

$$(f(x), y) = (x, f^*(y)). \tag{11.1}$$

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в эрмитовом пространстве E_n. Символами X и Y обозначим матрицы-столбцы, составленные из координат соответственно векторов x и y относительно заданного ортонормированного базиса. Символами F и F^* обозначим матрицы соответственно линейного оператора f и сопряженного ему оператора f^*

относительно этого базиса. Тогда FX и F^*Y – матрицы-столбцы, составленные из координат соответственно векторов $f(x)$ и $f^*(y)$ относительно заданного ортонормированного базиса. Так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в эрмитовом пространстве E_n, то

$$\begin{aligned} (f(x), y) &= (FX)^T \overline{Y} = X^T F^T \overline{Y}, \\ (x, f^*(y)) &= X^T \overline{F^* Y} = X^T \overline{F^*}\ \overline{Y}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Из равенств (11.1) и (11.2) получим

$$X^T F^T \overline{Y} = X^T \overline{F^*}\ \overline{Y}. \tag{11.3}$$

Равенство (11.3) выполняется для любых матриц-столбцов X и Y. Следовательно, матрицы оператора f и сопряженного ему оператора f^* относительно ортонормированного базиса в эрмитовом пространстве связаны равенством $\overline{F^*} = F^T$ или равенством $F^* = \overline{F^T}$. Линейный оператор $f\colon E_n \to E_n$ в эрмитовом пространстве называется самосопряженным, если $f = f^*$. Из полученных вычислений следует, что для матрицы самосопряженного оператора в эрмитовом пространстве относительно ортонормированного базиса выполняется условие $F = \overline{F^T}$. То есть матрица самосопряженного оператора относительно ортонормированного базиса в эрмитовом пространстве эрмитова.

Комплексификация и овеществление

Рассмотрим линейное n-мерное пространство L_n над полем $\mathbb{R}$. Зафиксируем в L_n базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Рассмотрим всевозможные формальные линейные комбинации $x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, считая векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимыми над $\mathbb{C}$. Множество всевозможных формальных линейных комбинаций образует линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Это линейное пространство будем обозначать символом $L_n^{\mathbb{C}}$. Линейное пространство $L_n^{\mathbb{C}}$ называется комплексификацией линейного пространства L_n. Для векторов из $L_n^{\mathbb{C}}$ определено умножение на комплексные числа. Размерность линейного пространства $L_n^{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$ равна n, а векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют его базис (над $\mathbb{C}$). Пространство $L_n^{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, тогда линейное пространство L_n является подпространством (относительно $\mathbb{R}$–структуры) пространства $L_n^{\mathbb{C}}$. Конструкция комплексификации не зависит от выбора базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в L_n. Взяв другой базис в L_n, получим пространство изомрофное $L_n^{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$. В дальнейшем будем использовать комплексификацию в следующих случаях.

1) Пусть L_n и L_m – линейные пространства над полем $\mathbb{R}$, а $f\colon L_n \to L_m$ – линейный оператор. Продолжим отображение f до отображения из $L_n^{\mathbb{C}}$ в $L_m^{\mathbb{C}}$, которое обозначим тем же символом f. Продолжение строим следующим образом. Зафиксируем в L_n базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Возьмем вектор $x \in L_n^{\mathbb{C}}$, $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ где $x_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$, тогда

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right) = \sum_{i=1}^n x_if(e_i).$$

Таким образом, построено отображение $f\colon L_n^{\mathbb{C}} \to L_m^{\mathbb{C}}$.

2) Пусть E_n – евклидово пространство. Вложим евклидово пространство E_n в эрмитово следующим образом. Зафиксируем

в E_n ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Рассмотрим комплексификацию $E_n^{\mathbb{C}}$, элементами $E_n^{\mathbb{C}}$ являются всевозможные формальные линейные комбинации $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ где $x_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$. Зададим эрмитову структуру $(\cdot\,, \cdot)$ на $E_n^{\mathbb{C}}$ следующим образом. Пусть $x, y \in E_n^{\mathbb{C}}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, где $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$. Положим $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. Так введенная эрмитова структура на $E_n^{\mathbb{C}}$ является продолжением евклидовой структуры на E_n.

Рассмотрим линейное n-мерное пространство L_n над полем $\mathbb{C}$. L_n можно рассматривать как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, "забыв" умножения на комплексные числа и рассматривая только умножения на вещественные числа. Множество векторов остается то же самое, но векторы умножаются теперь только на вещественные числа. Такое игнорирование комплексной структуры называется овеществлением. Овеществленное линейное пространство будем обозначать тем же символом L_n. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис в линейном пространстве L_n над полем $\mathbb{C}$.

Упражнение 11.3 *Докажите, что векторы*

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ie_2, \ldots, ie_n$$

образуют базис линейного пространства L_n над полем $\mathbb{R}$. Символом i здесь обозначена мнимая единица.

Упражнение 11.3 показывает, что размерность овеществленного пространства удваивается.

Собственные векторы и собственные значения

Рассмотрим линейное n-мерное пространство L_n над полем K. Пусть задан линейный оператор $f\colon L_n \to L_n$.

Определение 11.1 *Ненулевой вектор $x \in L_n$ называется собственным вектором оператора f, соответствующим собственному значению $\lambda \in K$, если выполняется равенство*

$$f(x) = \lambda x. \tag{11.4}$$

По определению собственный вектор всегда ненулевой, так как равенство (11.4) справедливо всегда для нулевого вектора при любом λ. Заметим, что если x – собственный вектор оператора f, соответствующий собственному значеню λ, то и всякий вектор αx (где $\alpha \in K$ и $\alpha \neq 0$) – собственный вектор оператора f, соответствующий собственному значеню λ. То есть собственные векторы определяются с точностью до ненулевого множителя. Одна из важнейших задач математики – нахождение собственных векторов и собственных значений. Будем решать эту задачу для конечномерного случая. Зафиксируем басис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в линейном пространстве L_n. Обозначим через F матрицу линейного оператора f относительно этого базиса, а через X матрицу-столбец, состоящую из координат вектора x относительно данного базиса

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{11.5}$$

Записывая равенство (11.4) через координаты, получим равенство

$$FX = \lambda X. \tag{11.6}$$

Равенство (11.6) равносильно следующему равенству

$$(F - \lambda E)X = 0. \tag{11.7}$$

Символом E здесь обозначена единичная матрица, в правой части равенства (11.7) стоит матрица-столбец из нулевых элементов. Наша задача на собственные векторы и собственные значения свелась к решению системы линейных однородных уравнений (11.7). Система (11.7) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы равен нулю:

$$|F - \lambda E| = \begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{11.8}$$

(11.8) – алгебраическое уравнение степени n, оно называется характеристическим уравнением оператора f. Многочлен $|F - \lambda E|$ называется характеристическим многочленом оператора f. Уравнение (11.8) было получено через матрицу линейного оператора f относительно некоторого фиксированного базиса. Покажем, что если взять матрицу линейного оператора f относительно другого базиса, то характеристический многочлен $|F - \lambda E|$ не изменится.

Предложение 11.1 *Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Рассмотрим еще один базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Пусть матрица оператора f относительно этого базиса F'. Тогда характеристический многочлен относительно штрихованного базиса имеет вид

$$|F' - \lambda E|. \tag{11.9}$$

Рассмотрим матрицу переход от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Обозначим эту матрицу символом A. Тогда $F' = A^{-1}FA$. Следовательно, имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} |F' - \lambda E| &= |A^{-1}FA - \lambda E| = |A^{-1}FA - \lambda A^{-1}A| = \\ &= |A^{-1}(F - \lambda E)A| = |A^{-1}||F - \lambda E||A| = |F - \lambda E|. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Что и доказывает, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. ■

Из всего сказанного выше следует, что задача на нахождение собственных векторов и собственных значений решается в два этапа. На первом этапе находим корни характеристического уравнения (собственные значения оператора f). На втором этапе для каждого корня характеристического уравнения находим собственные векторы, ему соответствующие из системы уравнений (11.7). Может так оказаться, что для некоторого собственного значения пространство решений системы уравнения (11.7) неодномерно. В этом случае находим базис собственного подпространства (пространства решений системы (11.7)), соответствующего этому собственному значению. Нахождение собственных векторов и собственных значений оператора f (если их нельзя найти из формальных выкладок) проводится относительно фиксированного базиса. Характеристическое уравнение относительно базиса не зависит, но координаты собственных векторов, разумеется, зависят от выбранного базиса. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Рассмотрим трехмерное точечно-векторное евклидово пространство. Зафиксируем в нем декартову систему координат. Пусть прямая p проходит через начало координат. Рассмотрим поворот f вокруг прямой p. Всякий ненулевой вектор параллельный прямой p будет собственным вектором поворота f, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$.

Пример 2. Рассмотрим трехмерное точечно-векторное евклидово пространство. Зафиксируем в нем декартову систему координат. Рассмотрим гомотетию f с коэффициентом k и с центром в начале координат. Всякий ненулевой вектор пространства будет собственным вектором гомотетии f, с собственным значением $\lambda = k$.

Пример 3. Рассмотрим пространство дифференцируемых функций, вещественного переменного t. Рассмотрим оператор дифференцирования $f = \frac{d}{dt}$. Функция e^{at} (a – вещественная постоянная) является собственной функцией оператора дифференцирования f, отвечающей собственному значению $\lambda = a$.

Лекция 12

Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем K и линейный оператор $f\colon L_n \to L_n$. Докажем следующую теорему.

Теорема 12.1 *Собственные векторы оператора f, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Доказательство будем проводить методом математической индукции по числу собственных векторов. Для одного собственного вектора доказательство очевидно. Предположим, что утверждение верно для k собственных векторов, докажем, что тогда оно верно и для $k+1$ собственного вектора. Пусть даны собственные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ оператора f, отвечающие различным собственным значениям соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$: $f(x_i) = \lambda_i x_i$ где $i = \overline{1, k+1}$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ для $i \neq j$. Покажем, что данная система собственных векторов линейно независима. Предположим противное. Пусть система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ линейно зависима. Тогда найдется система элементов поля K: $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \mu_{k+1}$, среди которых, по крайней мере, один элемент ненулевой, что выполяется равенство

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_k x_k + \mu_{k+1} x_{k+1} = \theta. \qquad (12.1)$$

Заметим, что на самом деле все элементы поля $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \mu_{k+1}$ ненулевые. Действительно, если какое-то $\mu_i = 0$, то равенство (12.1) дает линейную зависимость k собственных векторов, что невозможно по предположению индукции. Подействуем оператором f на равенство (12.1), имеем

$$\mu_1 \lambda_1 x_1 + \mu_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \mu_k \lambda_k x_k + \mu_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = \theta. \qquad (12.2)$$

Умножим равенство (12.1) на λ_1 и отнимем от равенства (12.2), получим выражение

$$\mu_2(\lambda_2-\lambda_1)x_2+\dots+\mu_k(\lambda_k-\lambda_1)x_k+\mu_{k+1}(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x_{k+1}=\theta. \quad (12.3)$$

В равенстве (12.3) все коэффициенты, стоящие при векторах $x_2,\dots,x_k,x_{k+1}$, ненулевые. Это противоречит линейной независимости k собственных векторов. Следовательно, наше предположение неверно и система собственных векторов $x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1}$ линейно независима. ■

Следствие 12.1 *Пусть дано линейное пространство L_n над полем K и линейный оператор $f\colon L_n \to L_n$. Если линейный оператор f имеет n различных собственных значений, тогда он диагонализируем, то есть найдется базис, относительно которого матрица оператора f имеет диагональный вид.*

Доказательство. Рассмотрим собственные векторы $x_1,x_2,\dots,x_n$ оператора f, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. В силу теоремы, собственные векторы $x_1,x_2,\dots,x_n$ линейно независимы и, значит, образуют базис в L_n. Относительно этого базиса матрица F оператора f имеет диагональный вид с собственными значениями на диагонали:

$$F=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Многочлены от операторов. Теорема Гамильтона-Кэли

Будем рассматривать линейное пространство L_n над полем K и линейный оператор $f\colon L_n \to L_n$. Пусть

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + a_m z^m \qquad (12.4)$$

– многочлен степени m с коэффициентами из поля K ($a_i \in K$, $i = \overline{1,m}$, $a_m \neq 0$). Подставим оператор f вместо переменной z в выражение (12.4), получим

$$p(f) = a_0\, id + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{m-1} f^{m-1} + a_m f^m, \qquad (12.5)$$

здесь символом id обозначен тождественный оператор, а символом f^k композиция оператора f, взятая k раз. Выражение (12.5) будем называть многочленом от оператора. Выражение (12.5) является линейным оператором в пространстве L_n. Нас будут интересовать многочлены $p(z)$, для которых $p(f)$ является тривиальным оператором, то есть $p(f) = 0$. Многочлен $p(z)$ называют аннулятором линейного оператора f или аннулирующим многочленом.

Пример 1. Пусть f – нильпотентный оператор. Это значит, что существует такое натуральное m, что $f^m = 0$. Для такого оператора аннулирующим многочленом является z^m.

Пример 2. Пусть f – оператор проектирования. Тогда $f^2 = f$. Аннулирующим многочленом для проектора f является многочлен $z^2 - z$.

Предложение 12.1 *Для любого линейного оператора $f\colon L_n \to L_n$ существует аннулирующий его многочлен.*

Доказательство. Рассмотрим степени оператора f: $id, f, f^2, \ldots, f^{n^2}$. Пространство линейных операторов, действующих в L_n имеет размерность n^2, значит система, состоящая из n^2+1 оператора: $id, f, f^2, \dots, f^{n^2}$ – линейно зависима. Тогда существует n^2+1 элементов поля K: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n^2}$, одновременно не равных нулю, что

$$a_0\, id + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0. \tag{12.6}$$

Равенство (12.6) показывает, что многочлен $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_{n^2} z^{n^2}$ аннулирует оператор f. ■

Интерес представляют многочлены наименьшей степени, аннулирующие оператор f. Такие многочлены, очевидно, существуют. Аннулирующий многочлен оператора f наименьшей степени с коэффициентом при старшей степени равным единице называется минимальным многочленом оператора f.

Предложение 12.2 *Всякий аннулирующий многочлен $q(z)$ оператора f делится на минимальный многочлен $p(z)$ этого оператора.*

Доказательство. Предположим противное: пусть при делении многочлена $q(z)$ на многочлен $p(z)$ возникает ненулевой остаток:

$$q(z) = \alpha(z)p(z) + \beta(z). \tag{12.7}$$

Многочлен $\beta(z)$ имеет степень меньшую, чем многочлен $p(z)$. Подставляя оператор f в выражение (12.7) вместо z, получим $\beta(f) = 0$, так как $q(f) = 0$ и $p(f) = 0$ по условию. Это противоречит тому факту, что $p(z)$ – минимальный многочлен оператора f. ■

Упражнение 12.1 *Докажите, что минимальный многочлен линейного оператора однозначно определен.*

В предложении 12.1 было показано, что всегда существует многочлен, аннулирующий линейный оператор, возможно "большой" степени. Следующая теорема показывает, что эту степень можно существенно понизить.

Теорема 12.2 *(Гамильтона-Кэли) Характеристический многочлен линейного оператора аннулирует этот линейный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $f\colon L_n \to L_n$. В линейном пространстве L_n зафиксируем базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Рассмотрим матрицу F линейного оператора f относительно этого базиса и его характеристический многочлен $p(\lambda) = |F - \lambda E|$. Теорема будет доказана, если покажем, что при подстановке матрицы F вместо λ в многочлен $p(\lambda)$ получается нулевая матрица: $p(F) = 0$. Обозначим символом $(F - \lambda E)^*$ матрицу присоединенную к матрице $F - \lambda E$. Напомним, что у присоединенной матрицы $(F - \lambda E)^*$ в i-й строке и в j-ом столбце стоит алгебраическое дополнение к элементу матрицы $F - \lambda E$, стоящему j-й строке и в i-ом столбце. Заметим, что компонентами матриц $F-\lambda E$ и $(F-\lambda E)^*$ являются не элементы поля K, а многочлены с коэффициентами из поля K. Для таких матриц, как и для числовых, имеем следующее равенство:

$$|F - \lambda E|E = (F - \lambda E)(F - \lambda E)^*.$$

Последнее равенство запишем так:

$$p(\lambda)E = (F - \lambda E)(F - \lambda E)^*. \tag{12.8}$$

В левой части равенства (12.8) стоит диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоит характеристический многочлен $p(\lambda)$. Равенство (12.8) можно рассматривать как равенство относительно многочленов от переменной λ с матричными коэффициентами. Подставим в эти многочлены с матричными коэффициентами вместо λ матрицу F. Правая часть равенства (12.8) равна нулевой матрице, так как обращается в ноль первый множитель. Значит, в левой части равенства (12.8) единичная матрица умножается на нулевую матрицу. Таким образом, $p(F) = 0$, что и доказывает теорему. ∎

Лекция 13

Билинейные и квадратичные формы

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем K. Отображение $b\colon L_n \times L_n \to K$ называется билинейной формой, если $\forall x, y, z \in L_n$ и $\forall \lambda, \mu \in K$ выполняются следующие равенства:

$$1)\ b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda b(x, z) + \mu b(y, z),$$

$$2)\ b(z, \lambda x + \mu y) = \lambda b(z, x) + \mu b(z, y).$$

Выразим значение билинейной формы через координаты. Зафиксируем базис линейного пространства $e_1, e_2, \dots, e_n$. Разложим векторы x и y по базису: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ и $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Из значений билинейной формы на базисных векторах $b_{ij} = b(e_i, e_j)$, где $i, j = \overline{1, n}$, сформируем матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{13.1}$$

Эту матрицу будем называть матрицей билинейной формы. Рассмотрим так же матрицы-столбцы X и Y, состоящие соответственно из координат векторов x и y:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{13.2}$$

Используя билинейность формы, получим

$$\begin{aligned} b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Запишем последнее выражение на языке умножения матриц, имеем:

$$b(x,y) = X^T BY. \tag{13.4}$$

Выясним как меняется матрица билинейной формы при замене базиса. Рассмотрим еще один базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ линейного пространства L_n. Пусть A – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Обозначим символами X' и Y' матрицы-столбцы, состоящие соответственно из координат векторов x и y относительно базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Тогда имеем следующие формулы преобразования координат:

$$X = AX' \qquad \text{и} \qquad Y = AY'. \tag{13.5}$$

Обозначим символом B' матрицу билинейной формы, вычисленную относительно базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$: $B' = b(e'_i, e'_j)$, где $i, j = \overline{1, n}$. Тогда имеем формулу аналогичную формуле (13.4):

$$b(x, y) = X'^T B' Y'. \tag{13.6}$$

Подставим формулы (13.5) в формулу (13.4), получим:

$$b(x, y) = X^T B Y = (AX')^T BAY' = X'^T A^T BAY'. \tag{13.7}$$

Равенства (13.6) и (13.7) справедливы для любых матриц столбцов X' и Y', следовательно, имеем равенство

$$B' = A^T BA. \tag{13.8}$$

Это и есть формула преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса. Билинейная форма называется симметрической, если $\forall x, y \in L_n$ выполняется равенство $b(x, y) = b(y, x)$. Если билинейная форма симметрическая, то ее матрица B относительно любого базиса симметрическая: $B^T = B$. Примером симметрической билинейной формы является скалярное произведение, которое было подробно изучено в предыдущих лекциях.

Пусть дана билинейная симмметрическая форма $b(x, y)$. Квадратичной формой на линейном пространстве L_n называется следующая функция: $q(x) = b(x, x)$. Мы определили квадратичную форму через симметрическую билинейную форму. Заметим, что по квадратичной форме можно восстановить симметрическую билинейную форму, которая эту квадратичную форму определяла. Для этого нужно воспользоваться формулой

$$b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)). \tag{13.9}$$

Упражнение 13.1 *Докажите равенство (13.9).*

Зафиксируем в линейном пространстве L_n базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Разложим вектор x по базису: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. В силу формулы (13.3) имеем:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j. \tag{13.10}$$

Таким образом, выражение для квадратичной формы через координаты вектора имеет вид (13.10), где $b_{ij} = b_{ji}$. Матрицу $B = (b_{ij})$ будем называть так же матрицей квадратичной формы. Матрица квадратичной формы при замене базиса так же преобразуется по формуле (13.8).

Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Рассмотрим квадратичную форму $q(x)$. Относительно фиксированного базиса $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора x, а b_{ij} $(i, j = \overline{1, n},\ b_{ij} = b_{ji})$ – компоненты матрицы квадратичной формы, относительно этого базиса. Будем искать такой базис, относительно которого квадратичная форма имеет наиболее простой вид. Нормальным видом квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$ называется следующее выражение:

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+m}^2. \qquad (13.11)$$

Это выражение содержит k положительных квадратов, m отрицательных квадратов и $n-k-m$ "нулевых" квадратов.

Теорема 13.1 *Для любой квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$ найдется такой базис, относительно которого она имеет вид (13.11).*

Доказательство. Доказательство будем проводить методом математической индукции по размерности пространства L_n. Предположим, что для размерности пространства меньше n утверждение теоремы выполнено. Докажем, что тогда оно выполнено и для размерности пространства равной n. Зафиксируем некоторый базис и рассмотрим выражение для квадратичной формы относительно этого базиса: $q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$. Будем искать формулы преобразования координат (другой базис), которые приводят данное выражение к сумме и разности квадратов. Рассмотрим два случая.

1) Среди чисел $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ имеется хотя бы одно ненулевое. Без ограниченя общности считаем, что $b_{11} \neq 0$. Используя симметричность матрицы квадратичной формы, запишем квадратичную форму $q(x)$ следующим образом:

$$q(x) = b_{11}x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n} b_{1i}x_1x_i + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j. \qquad (13.12)$$

Выделим полный квадрат по переменной x_1, имеем:

$$q(x) = b_{11}\left(x_1^2 + 2\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i\right)x_1\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j =$$
$$= b_{11}\left(\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i\right)^2\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j =$$
$$= b_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i\right)^2 - \frac{1}{b_{11}}\left(\sum_{i=2}^{n}b_{1i}x_i\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j.$$

Таким образом, получили равенство

$$q(x) = b_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i\right)^2 + q_1(x),$$

где квадратичная форма

$$q_1(x) = -\frac{1}{b_{11}}\left(\sum_{i=2}^{n}b_{1i}x_i\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

не зависит от переменной x_1. Рассмотрим формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x_1' = \sqrt{|b_{11}|}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i\right) \\ x_2' = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = x_n. \end{cases} \tag{13.13}$$

Относительно нового базиса (относительно координат $x_1', x_2', \ldots, x_n'$) квадратичная форма $q(x)$ имеет вид:

$$q(x) = sign(b_{11})(x_1')^2 + q_1(x),$$

где квадратичная форма

$$q_1(x) = -\frac{1}{b_{11}} \left(\sum_{i=2}^{n} b_{1i} x_i' \right)^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} x_i' x_j'$$

не зависит от переменной x_1'. Символом $sign(a)$ обозначен знак числа a. Квадратичная форма $q_1(x)$ задана на подпространстве размерности $n-1$ пространства L_n. Это подпространство состоит из векторов, у которых координата x_1' равна нулю. По предположению индукции найдется базис этого подпространства, относительно которого квадратичная форма $q_1(x)$ имеет нормальный вид. Что и доказывает утверждение в первом случае.

2) Все коэффициенты при квадратах переменных равны нулю: $b_{11} = b_{22} = \cdots = b_{nn} = 0$. Без ограничения общности считаем, что $b_{12} \neq 0$. Рассмотрим следующие формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n'. \end{cases} \tag{13.14}$$

Относительно координат $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ формула квадратичной формы $q(x)$ содержит ненулевые коэффициенты при квадратах переменных. Теперь проведем все выкладки из случая 1. Теорема полностью доказана. ■

Заметим, что доказательство содержит и алгоритм приведения квадратичной форму к нормальному виду. На каждом шаге алгоритма мы с помощью метода выделения полного квадрата "отщепляем" одну переменную от выражения, получая новое выражение от меньшего числа переменных, к которому так же применяем метод выделения полного квадрата и "отщепляем" еще одну переменную, и так далее. Алгоритм приведения квадратичной формы к нормальному виду методом выделения полного квадрата называется методом Лагранжа.

Лекция 14

Закон инерции квадратичных форм

Пусть $q(x)$ – квадратичная форма, заданная на линейном вещественном пространстве L_n, $x \in L_n$. Как известно из прошлой лекции, существует базис в L_n, относительно которого квадратичная форма $q(x)$ имеет нормальный вид. То есть приводится к сумме и разности квадратов. Следующая теорема выражает, так называемый, закон инерции квадратичных форм: число положительных и число отрицательных квадратов являются инвариантами квадратичной формы.

Теорема 14.1 *Число положительных и число отрицательных квадратов в любом нормальном виде квадратичной формы одно и то же.*

Доказательство. Доказательство будем проводить методом от противного. Пусть существует базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, относительно которого квадратичная форма $q(x)$ $(x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i)$ имеет нормальный вид

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+m}^2 \tag{14.1}$$

и существует еще один базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, относительно которого квадратичная форма $q(x)$ $(x = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i)$ имеет нормальный вид

$$q(x) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+s}^2, \tag{14.2}$$

где $k + m \leq n$ и $p + s \leq n$. Нужно показать, что $k = p$ и $m = s$. Предположим противное, пусть $k > p$. Рассмотрим формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{14.3}$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_n$ – линейные функкции от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{14.4}$$

По предположению $k > p$, тогда можно выбрать ненулевое решение системы (14.4) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, у которого последние

$n-k$ координат равны нулю $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Рассмотрим вектор x, имеющий относительно базиса $a_1, a_2, \dots, a_n$ координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0$. Тогда в силу равенства (14.1) $q(x) > 0$. Подставим числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0$ (решение системы (14.4)) в правую часть уравнений системы (14.3), тогда в левой части получим числа $0, \dots, 0, \beta_{p+1}, \dots, \beta_n$. Вектор x относительно базиса $b_1, b_2, \dots, b_n$ имеет координаты $0, \dots, 0, \beta_{p+1}, \dots, \beta_n$. Значит, в силу равенства (14.2) $q(x) \le 0$. Получено противоречие, следовательно предположение $k > p$ неверно. Случай $k < p$ рассматривается аналогично. Так же к противоречию приводят случаи $m > s$ и $m < s$. ■

Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра

Квадратичная форма $q(x)$, заданная на линейном вещественном пространстве L_n, называется положительно определенной, если $\forall x \in L_n$ $q(x) \ge 0$ и $q(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$. Примером положительно определенной квадратичной формы является скалярное произведение в евклидовом пространстве. Если квадратичная форма на линейном вещественном пространстве L_n положительно определена, то в ее нормальном виде стоят n положительных квадратов (напомним, что $n = \dim(L_n)$). Далее потребуется следующее важное определение. Рассмотрим квадратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{14.5}$$

Угловыми минорами матрицы A называются определители, стоящие в первых k строках и в первых k столбцах, где k пробегает значения от 1 до n:

$$d_1 = a_{11},\ d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \dots,\ d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{14.6}$$

Определитель d_k будем называть k-м угловым минором матрицы A. Сейчас сформулируем и докажем следующее важное необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичной формы в вещественном линейном пространстве. В вещественном линейном пространстве L_n зафиксируем базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пусть относительно этого базиса квадратичная форма $q(x)$ имеет вид: $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,\ \ b_{ij} = b_{ji},\ \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Рассмотрим матрицу $B = (b_{ij})$ квадратичной формы.

Теорема 14.2 *(критерий Сильвестра) Квадратичная форма $q(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы квадратичной формы B положительны.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим квадратичную форму $q_1(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j$, где $k \le n$. Эта квадратичная форма задана на подпространстве L_k пространства L_n. Подпространство L_k состоит из векторов пространства L_n, у которых последние $n - k$ координат относительно фиксированного базиса нулевые. Матрицей квадратичной формы $q_1(x)$ является матрица, состоящая из элементов матрицы B, стоящих в первых k строках и первых k столбцах. Эту матрицу обозначим символом B_k. Определителем матрицы B_k является k-й угловой минор матрицы B. По условию $q(x)$ положительно определена на L_n, значит $q_1(x)$ положительно определена на L_k. Тогда существует базис в L_k, относительно которого $q_1(x)$ представляется суммой k квадратов, то есть матрица квадратичной формы $q_1(x)$ относительно этого базиса – единичная. Вспомним закон преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса:

$$E = A^T B_k A, \tag{14.7}$$

где A – невырожденная матрица размера $k \times k$. Из равенства (14.7) имеем:

$$1 = |A^T B_k A| = |A^T||B_k||A| = |A|^2|B_k|. \tag{14.8}$$

Значит, определитель матрицы B_k положителен. Так как k пробегает значения от 1 до n, то доказательство необходимости закончено.

Достаточность. Доказательство достаточности будем проводить методом математической индукции по размерности пространства. Предположим, что для пространств размерности меньше n утверждение справедливо. Докажем, что тогда утверждение справедливо и для пространства размерности n. Запишем выражение для квадратичной формы $q(x)$

относительно фиксированного базиса следующим образом:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n-1} b_{in} x_i x_n + b_{nn} x_n^2. \tag{14.9}$$

Рассмотрим квадратичную форму $q_2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} x_i x_j$. Это квадратичная форма определена на подпространстве L_{n-1} пространства L_n, состоящего из векторов, у которых координата x_n нулевая. Все угловые миноры матрицы квадратичной формы $q_2(x)$ положительны по условию. Значит, по предположению индукции квадратичная форма $q_2(x)$ положительно определена на L_{n-1}. Тогда существует базис подпространства L_{n-1}, относительно которого форма $q_2(x)$ является суммой $n-1$ квадрата. Следовательно, существует базис L_n, относительно которого квадратичная форма $q(x)$ имеет вид:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2. \tag{14.10}$$

Матрицу квадратичной формы относительно этого базиса обозначим символом C,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1n} \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \dots & b_{n-1n} & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{14.11}$$

Напомним, что символом B была обозначена матрица квадратичной формы относительно исходного базиса. Запишем закон преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса:

$$C = D^T BD, \tag{14.12}$$

где D – невырожденная матрица размера $n \times n$. Так как по условию $|B| > 0$, то из формулы (14.12) следует, что и $|C| > 0$. Преобразуем равенство (14.10), выделяя полный квадрат по перемнным $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, имеем:

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i=1}^{n-1}((y_i + b_{in}y_n)^2 - b_{in}^2 y_n^2) + b_{nn}y_n^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(y_i + b_{in}y_n)^2 + (b_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} b_{in}^2)y_n^2. \end{aligned} \tag{14.13}$$

Вычислим определитель матрицы C. Умножим первый столбец на b_{1n} и отнимем от последнего столбца, умножим второй столбец на b_{2n} и отнимем от последнего столбца, и так далее, умножим $(n-1)$-й столбец на b_{n-1n} и отнимем от последнего столбца. В результате получим следующий определитель:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \ldots & b_{n-1n} & b_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} b_{in}^2 \end{vmatrix}. \tag{14.14}$$

Значит, $0 < |C| = b_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} b_{in}^2$. Таким образом, коэффициент при y_n^2 в равенстве (14.13) положителен. Тогда равенство (14.13) показывает, что квадратичная форма $q(x)$ положительно определена. ■

Замечание 14.1 *Определение положительной определенности квадратичной формы не зависит от базиса (инвариантно), однако, проверку положительной определенности с помощью критерия Сильвестра можно провести относительно любого базиса. На практике критерий Сильвестра целесообразно использовать для пространств малых размерностей, так как вычисление определителей очень затратно (нужно осуществить много операций). Для пространств больших размерностей для выяснения положительной определенности квадратичной формы лучше использовать метод Лагранжа приведения квадратичной формы к нормальному виду.*

Лекция 15

Теорема Якоби

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем $\mathbb{R}$ и квадратичную форму $q(x)$ на L_n. В случае поля вещественных чисел квадратичная форма приводилась к нормальному виду – к сумме и разности квадратов. Теперь будем искать базис, относительно которого $q(x)$ является суммой квадратов с некоторыми коэффициентами. Такой вид квадратичной формы будем называть каноническим. К такому виду можно привести квадратичную форму всегда, используя, например, метод Лагранжа. Нас будет интересовать канонический вид, в котором коэффициенты при квадратах выражены определенный образом при некоторых условиях на квадратичную форму. Нам потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 15.1 *Пусть A – квадратная матрица размера $n \times n$, и M – верхнетреугольная матрица размера $n \times n$ с единицами на главной диагонали. Тогда угловые миноры матриц A и $M^T AM$ совпадают.*

Доказательство. Запишем матрицы A и M в виде блоков:

$$A = \begin{pmatrix} S & * \\ * & * \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} Q & * \\ 0 & * \end{pmatrix}. \tag{15.1}$$

S и Q – квадратные матрицы размера $k \times k$, Q – верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали. Символом 0 обозначена нулевая матрица размера $(n-k) \times k$, символом $*$ обозначены блоки, которые нас не интересуют.

$$M^T AM = \begin{pmatrix} Q^T & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^T SQ & * \\ * & * \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$

$$|Q^T SQ| = |Q^T||S||Q| = |S||Q|^2 = |S|, \tag{15.3}$$

так как $|Q| = 1$. Это показывает, что угловые миноры матриц A и $M^T AM$ размера $k \times k$ совпадают. Меняя k от 1 до n, получим утверждение леммы. ■

Зафиксируем в вещественном линейном пространстве L_n некоторый базис. Пусть относительно этого базиса квадратичная форма имеет вид $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j$. Матрицу квадратичной формы $q(x)$ относительно данного базиса обозначим через B. Угловые миноры матрицы B обозначим символами $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Теорема 15.1 *(Якоби) Если угловые миноры $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ отличны от нуля, то существует базис, относительно* *которого квадратичная форма имеет вид*

$$q(x) = d_1 y_1^2 + \frac{d_2}{d_1} y_2^2 + \frac{d_3}{d_2} y_3^2 + \dots + \frac{d_n}{d_{n-1}} y_n^2. \qquad (15.4)$$

Доказательство. Доказательство будем проводить методом математической индукции по размерности пространства L_n. По условию $b_{11} = d_1 \neq 0$. Используя метод Лагранжа, выделим полный квадрат по пременной x_1 (выкладки были проделаны подробно в лекции 13) имеем:

$$q(x) = b_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i\right)^2 + q_1(x), \qquad (15.5)$$

где квадратичная форма

$$q_1(x) = -\frac{1}{b_{11}}\left(\sum_{i=2}^{n} b_{1i} x_i\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j \qquad (15.6)$$

не зависит от переменной x_1. Рассмотрим формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i \\ x_2' = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n' = x_n. \end{cases} \qquad (15.7)$$

Относительно нового базиса (относительно координат $x_1', x_2', \dots, x_n'$) квадратичная форма $q(x)$ имеет вид:

$$q(x) = b_{11}(x_1')^2 + q_1(x), \qquad (15.8)$$

где квадратичная форма

$$q_1(x) = -\frac{1}{b_{11}}\left(\sum_{i=2}^{n} b_{1i}x_i'\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_i'x_j'. \tag{15.9}$$

не зависит от переменной x_1'. Рассмотрим формулы преобразования координат обратные формулам (15.7):

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - \sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{b_{1i}}{b_{11}} x_i' \\ x_2 = x_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n'. \end{cases} \tag{15.10}$$

Обозначим матрицу линейного преобразования (15.10) через M. M – верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали. Символом C обозначим матрицу квадратичной формы $q(x)$ относительно координат $x_1', x_2', \ldots, x_n'$. Из формулы преобразования матрицы квадратичной формы $C = M^T BM$ и из леммы 15.1 следует, что угловые миноры матриц B и C совпадают. Запишем матрицу C через блоки:

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \tag{15.11}$$

символом 0 обозначены блоки размера $1 \times (n-1)$ и $(n-1) \times 1$, а символом D обозначена матрица размера $(n-1) \times (n-1)$. Квадратичная форма $q_1(x)$ задана на подпостранстве L_{n-1} пространства L_n, состоящем из векторов, у которых координата x_1' равна нулю. Матрица D – матрица квадратичной формы $q_1(x)$ относительно координат $x_2', \ldots, x_n'$. Угловые минора матрицы D равны $\frac{d_2}{b_{11}}, \frac{d_3}{b_{11}}, \ldots, \frac{d_n}{b_{11}}$. По предположению индукции можно выбрать базис подпространства L_{n-1}, относительно которого квадратичная форма $q_1(x)$ имеет вид: $q_1(x) = \frac{d_2}{b_{11}} y_2^2 + \frac{d_3}{d_2} y_3^2 + \cdots + \frac{d_n}{d_{n-1}} y_n^2$. Так как $b_{11} = d_1$, то найдется базис в L_n, относительно которого квадратичная форма $q(x)$ меет вид (15.4). Что и доказывает теорему. ■

Упражнение 15.1 *Вывести условие достаточности критерия Сильвестра из теоремы Якоби.*

Самосопряженные операторы

Рассмотрим эрмитово пространство E_n с эрмитовым произведением $(\cdot\,,\cdot)$ и самосопряженный оператор $f\colon E_n \to E_n$. Тогда $\forall x, y \in E_n$ выполняется равенство:

$$(f(x), y) = (x, f(y)). \tag{15.12}$$

Докажем два простых предложения о собственных значениях и собственных векторах самосопряженного оператора.

Предложение 15.1 *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. Рассмотрим собственный вектор x самосопряженного оператора f с собственным значением λ, тогда $f(x) = \lambda x$. Используя свойства эрмитова произведения, имеем равенство:

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (f(x), x) = (x, f(x)) = (x, \lambda x) = \\ = \overline{\lambda}(x,x). \tag{15.13}$$

Из равенства (15.13) получим $\lambda = \overline{\lambda}$. Следовательно, $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Предложение 15.2 *Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям самосопряженного оператора, ортогональны.*

Доказательство. Пусть x и y – собственные векторы самосопряженного оператора f, отвечающие соответственно собственным значениям λ и μ ($\lambda \neq \mu$): $f(x) = \lambda x$ и $f(y) = \mu y$. Используя свойства эрмитова произведения и предложение 15.1, имеем:

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (f(x), y) = (x, f(y)) = (x, \mu y) = \\ = \overline{\mu}(x,y) = \mu(x,y). \tag{15.14}$$

Из равенства (15.14) получим $(x,y) = 0$. Значит, векторы x и y ортогональны. ■

Предложение 15.3 *Пусть $f\colon E_n \to E_n$ самосопряженный оператор в эрмитовом пространстве и $E_n = V \oplus V^{\perp}$. Если V – подпространство инвариантаное относительно f, тогда и $V^{\perp}$ так же инвариантно относительно f.*

Доказательство. Зафиксируем вектор $x \in V^{\perp}$, возьмем произвольный вектор $y \in V$, $f(y) \in V$. Тогда

$$(f(x), y) = (x, f(y)) = 0. \qquad (15.15)$$

Так как вектор $y \in V$ произвольный, то из формулы (15.15) следует, что $f(x) \in V^{\perp}$. ■

Следствие 15.1 *Пусть $f\colon E_n \to E_n$ самосопряженный оператор в эрмитовом пространстве. В E_n существует базис, относительно которого оператор f имеет диагональный вид.*

Доказательство. Доказательство будем проводить методом математической индукции по размерности эрмитова пространства E_n. Предположим, что для пространств размерности меньше n утверждение следствия выполнено. Пусть x – собственный вектор оператора f, отвечающий собственному значению λ. Пусть E_1 – одномерное подпространство, порожденное вектором x. Рассмотрим ортогональное дополнение $E_1^{\perp}$ к E_1 в E_n. $E_n = E_1 \oplus E_1^{\perp}$, по предложению 15.3 подпространства E_1 и $E_1^{\perp}$ инвариантны относительно оператора f. Так как $\dim(E_1^{\perp}) = n - 1$, то в силу предположения индукции в $E_1^{\perp}$ существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, относительно которого оператор f имеет диагональный вид в $E_1^{\perp}$. Тогда относительно базиса $x, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ в E_n оператор f имеет диагональный вид в E_n. ■

Замечание 15.1 *Базис из собственных векторов, относительно которого самосопряженный оператор имеет диагональный вид, можно сделать ортонормированным. В силу предложения 15.2 собственные векторы базиса, отвечающие различным собственным значениям ортогональны. Для* *векторов базиса, отвечающих одному собственному значению, можно провести процесс ортогонализации Грама-Шмидта.*

Замечание 15.2 *Все, что доказано в этом разделе для самосопряженного оператора в эрмитовом пространстве, справедливо и для самосопряженного оператора в евклидовом пространстве. Для обоснования этого нужно рассмотреть комплексификацию евклидова пространства, распространить евклидово скалярное произведение до эрмитова скалярного произведения на комплексификацию и продолжить самосопряженный оператор в евклидовом пространстве до самосопряженного оператора в эрмитовом пространстве. Далее применить предложения 15.1, 15.2, 15.3 и следствие 15.1. Так как в силу предложения 15.1 все собственные значения самосопряженного оператора вещественны, то мы не выйдем за поле вещественных чисел. Все собственные значения и собственные векторы будут вещественными.*

Приведение квадратичной формы к главным осям

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем $\mathbb{R}$ и квадратичную форму $q(x)$ в L_n. Зафиксируем в L_n некоторый базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Пусть относительно этого базиса квадратичная форма имеет вид $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j$, где $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $b_{ij} = b_{ji}$. Рассмотрим матрицу квадратичной формы $B = (b_{ij})$. Введем в L_n евклидову структуру, относительно которой базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный. Так как матрица B симметрическая, то она является матрицей некоторого самосопряженного оператора f. В силу замечаний

15.1 и 15.2 существует ортонормированный базис $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, относительно которого оператор f имеет диагональный вид. Обозначим через A матрицу перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Диагональная матрица самосопряженного оператора f относительно базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ есть

$$A^{-1}BA. \tag{15.16}$$

Формула (15.16) – закон преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса. Но матрица A – матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, значит, матрица A ортогональная: $A^T = A^{-1}$. Тогда формулу (15.16) можно записать так:

$$A^T BA. \tag{15.17}$$

Выражение (15.17) – закон преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса. Таким образом, относительно базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ квадратичная форма $q(x)$ представляется суммой квадратов с коэффициентами, являющимися собственными значениями оператора f. Собственные векторы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ самосопряженного оператора f называются главными осями квадратичной формы $q(x)$.

Приведение к каноническому виду пар форм

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем $\mathbb{R}$ и две квадратичные формы $q_1(x)$ и $q_2(x)$ в L_n. Предположим, что квадратичная форма $q_1(x)$ положительно определена.

Рассмотрим базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в L_n, относительно которого $q_1(x)$ представляется суммой n квадратов:

$$q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{15.18}$$

К сумме квадратов $q_1(x)$ можно привести, например, методом Лагранжа. Предположим, что относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ квадратичная форма $q_2(x)$ имеет вид:

$$q_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j. \tag{15.19}$$

В силу предыдущего раздела существует базис $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в L_n, относительно которого квадратичная форма $q_2(x)$ представляется суммой квдратов с некоторыми коэффициентами

$$q_2(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{15.20}$$

и матрица перехода A от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ортогональная. Так как относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица квадратичной формы $q_1(x)$ единичная, а матрица перехода A от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ортогональня, то относительно базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ квадратичная форма $q_1(x)$ представляется суммой n квадратов:

$$q_1(x) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2. \tag{15.21}$$

Таким образом, если даны две квадратичные формы, одна из которых положительно определена, то существует базис, относительно которого положительно определенная форма представляется суммой квадратов, а вторая форма – суммой квадратов с некоторыми коэффициентами.

Лекция 16

Приведение матрицы линейного оператора к нормальной жордановой форме

Рассмотрим линейное пространство L_n над полем $\mathbb{C}$ и линейный оператор $f\colon L_n \to L_n$. Рассмотрим различные собственные значения оператора f: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ с кратностями $k_1, k_2, \ldots, k_m$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $m \leq n$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ (n – размерность пространства L_n). Следовательно, характеристический многочлен оператора f имеет вид $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$. Напомним, что символом id обозначали тождественный оператор в L_n: $\forall x \in L_n$ $\mathrm{id}(x) = x$. Зафиксируем i, рассмотрим последовательность операторов $(f - \lambda_i \mathrm{id})^p$ и последовательность подпространств $\ker((f - \lambda_i \mathrm{id})^p)$ $p \in \mathbb{N}$. Последовательность $\ker((f - \lambda_i \mathrm{id})^p)$ стабилизируется относительно вложений, так как исходное пространство L_n конечномерно:

$$\begin{aligned}
&\ker(f - \lambda_i \mathrm{id}) \subset \ker((f - \lambda_i \mathrm{id})^2) \subset \cdots \subset \\
&\subset \ker((f - \lambda_i \mathrm{id})^{k-1}) \subset \ker((f - \lambda_i \mathrm{id})^{k}) = \\
&= \ker((f - \lambda_i \mathrm{id})^{k+1}) = \ldots
\end{aligned} \tag{16.1}$$

Рассмотрим подпространство

$$L_{\lambda_i} = \{x \in L_n \mid \exists p \in \mathbb{N}\ (f - \lambda_i \mathrm{id})^p(x) = \theta\}. \tag{16.2}$$

Упражнение 16.1 *Покажите, что* $\exists k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in L_{\lambda_i}$ $(f - \lambda_i \mathrm{id})^k(x) = \theta$.

Упражнение 16.2 *Покажите, что подпространство L_{λ_i} инвариантно относительно оператора f и операторов $(f-\lambda_j \mathrm{id})^p$.*

Подпространство L_{λ_i} называется корневым подпространством оператора f, соотвестствующим собственному значению λ_i. Рассмотрим множество корневых подпространств оператора f: $L_{\lambda_1}, L_{\lambda_2}, \ldots, L_{\lambda_m}$.

Теорема 16.1

$$L_n = \bigoplus_{i=1}^{m} L_{\lambda_i}. \tag{16.3}$$

Доказательство. Сначала покажем, что сумма подпространств $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_{\lambda_i}$ – прямая. Предположим противное, тогда существует ненулевой вектор x такой, что с одной стороны $x \in L_{\lambda_i}$, а с другой стороны x – линейная комбинация векторов из подпространств L_{λ_j}, где $j \neq i$. Тогда существуют такие натуральные числа k и s, что

$$(f-\lambda_i \mathrm{id})^k(x) = \theta \qquad \text{и} \qquad \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (f-\lambda_j \mathrm{id})\right)^s (x) = \theta. \tag{16.4}$$

Так как многочлены

$$(\lambda-\lambda_i)^k \qquad \text{и} \qquad \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (\lambda-\lambda_j)\right)^s$$

взаимно простые, то существуют многочлены $G(\lambda)$ и $H(\lambda)$ такие, что

$$G(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^k + H(\lambda)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(\lambda-\lambda_j)\right)^s = 1. \qquad (16.5)$$

Из равенства (16.5) следует равенство

$$G(f)(f-\lambda_i\mathrm{id})^k + H(f)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(f-\lambda_j\mathrm{id})\right)^s = \mathrm{id}$$

и, значит, $\forall x \in L_n$ равенство

$$G(f)(f-\lambda_i\mathrm{id})^k(x) + H(f)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(f-\lambda_j\mathrm{id})\right)^s(x) = x. \qquad (16.6)$$

Равенства (16.4) и (16.6) показывают, что вектор x – нулевой, что противоречит предположению. Итак, мы показали, что сумма подпространств $\overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} L_{\lambda_i}$ – прямая. Теперь покажем, что эта сумма совпадает со всем пространством L_n. Наибольший общий делитель системы многочленов

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{m}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}, \quad \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{m}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}, \quad \ldots, \quad \prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{m}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$$

равен 1. Следовательно, существуют многочлены $T_1(\lambda), T_2(\lambda), \ldots, T_m(\lambda)$ такие, что выполняется равенство

$$
\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{m}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}\right)T_1(\lambda)+\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{m}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}\right)T_2(\lambda)+\dots+
+\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{m}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}\right)T_m(\lambda)=1. \tag{16.7}
$$

Из равенства (16.7) следует равенство

$$
\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{m}(f-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\right)T_1(f)+\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{m}(f-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\right)T_2(f)+\dots+
+\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{m}(f-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\right)T_m(f)=\mathrm{id}
$$

и, значит, $\forall x\in L_n$ равенство

$$
\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{m}(f-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\right)T_1(f)(x)+\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{m}(f-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\right)T_2(f)(x)+
+\dots+\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{m}(f-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\right)T_m(f)(x)=x. \tag{16.8}
$$

Далее $\forall i \ \ (i = \overline{1, m})$

$$\left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (f - \lambda_j \mathrm{id})^{k_j} \right) T_i(f)(x) \in L_{\lambda_i},$$

это следует из теоремы Гамильтона – Кэли:

$$(f - \lambda_i \mathrm{id})^{k_i} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (f - \lambda_j \mathrm{id})^{k_j} \right) T_i(f)(x) = p(f) T_i(f)(x) = \theta \quad (16.9)$$

(оператор f аннулирует свой характеристический многочлен $p(\lambda)$). Что и доказывает теорему. ■

По определению корневого подпространства L_{λ_i} некоторая степень оператора $(f - \lambda_i \mathrm{id})$ равна нулевому оператору на подпространстве L_{λ_i}. Введем следующее определение.

Определение 16.1 *Оператор $g\colon L_n \to L_n$ называется нильпотентным, если существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $g^p = 0$. Здесь символом 0 обозначен нулевой оператор. Наименьшее p, для которого $g^p = 0$ называется показателнм нильпотентности оператора g.*

Будем говорить, что упорядоченная система ненулевых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ образует серию относительно нильпотентного оператора g, если $g(a_k) = a_{k+1}$ $(k = \overline{1, m-1})$, $g(a_m) = \theta$. Этот факт будем записывать следующей диаграммой:

$$a_1 \xrightarrow{\mathrm{g}} a_2 \xrightarrow{\mathrm{g}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{g}} a_{m-1} \xrightarrow{\mathrm{g}} a_m \xrightarrow{\mathrm{g}} \theta \qquad (16.10)$$

Упражнение 16.3 *Докажите, что векторы $a_1, a_2, \dots, a_m$ серии (16.10) линейно независимы.*

Рассмотрим нильпотентный оператор $g\colon L_n \to L_n$. Будем говорить, что векторы базиса в L_n

$$a_1^1, a_2^1 \dots, a_{n_1-1}^1, a_{n_1}^1, a_1^2, a_2^2 \dots, a_{n_2-1}^2, a_{n_2}^2, \dots, a_1^k, a_2^k \dots, a_{n_k-1}^k, a_{n_k}^k$$

образуют серии относительно нильпотентного оператора g, если имеют место диаграммы

$$\begin{array}{c}
a_1^1 \xrightarrow{\mathrm{g}} a_2^1 \xrightarrow{\mathrm{g}} \dots \xrightarrow{\mathrm{g}} a_{n_1-1}^1 \xrightarrow{\mathrm{g}} a_{n_1}^1 \xrightarrow{\mathrm{g}} \theta \\
a_1^2 \xrightarrow{\mathrm{g}} a_2^2 \xrightarrow{\mathrm{g}} \dots \xrightarrow{\mathrm{g}} a_{n_2-1}^2 \xrightarrow{\mathrm{g}} a_{n_2}^2 \xrightarrow{\mathrm{g}} \theta \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_1^k \xrightarrow{\mathrm{g}} a_2^k \xrightarrow{\mathrm{g}} \dots \xrightarrow{\mathrm{g}} a_{n_k-1}^k \xrightarrow{\mathrm{g}} a_{n_k}^k \xrightarrow{\mathrm{g}} \theta.
\end{array}$$

Существует ли такой базис? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 16.2 *Для нильпотентного оператора $g\colon L_n \to L_n$ в L_n существует базис, векторы которого образуют серии относительно g.*

Доказательство. Доказательство будем проводить методом математической индукции по показателю нильпотентности оператора. Предположим, что для показателей нильпотентности меньших p теорема верна. Покажем, что тогда теорема верна и для показателя нильпотентности p. Пусть оператор g имеет показатель нильпотентности p. Рассмотрим сужение оператора g на $\operatorname{im}(g)$. Этот оператор обозначим тем же символом g.

Оператор $g\colon \operatorname{im}(g) \to \operatorname{im}(g)$ является нильпотентным оператором с показателем нильпотентности $p-1$. Для сужения оператора g по предположению индукции теорема верна. Значит, в $\operatorname{im}(g)$ существует базис

$$\begin{aligned} &a_1^1, a_2^1 \ldots, a_{n_1-1}^1, a_{n_1}^1, a_1^2, a_2^2 \ldots, a_{n_2-1}^2, a_{n_2}^2, \ldots, \\ &a_1^k, a_2^k \ldots, a_{n_k-1}^k, a_{n_k}^k, \end{aligned} \tag{16.11}$$

векторы которого образуют серии относительно сужения оператора g:

$$\begin{aligned} &a_1^1 \xrightarrow{g} a_2^1 \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} a_{n_1-1}^1 \xrightarrow{g} a_{n_1}^1 \xrightarrow{g} \theta \\ &a_1^2 \xrightarrow{g} a_2^2 \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} a_{n_2-1}^2 \xrightarrow{g} a_{n_2}^2 \xrightarrow{g} \theta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1^k \xrightarrow{g} a_2^k \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} a_{n_k-1}^k \xrightarrow{g} a_{n_k}^k \xrightarrow{g} \theta. \end{aligned}$$

Лемма 16.1 *Пусть $h\colon L_n \to L_m$ – эпиморфизм. Зафиксируем базис в L_m: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Рассморим векторы $b_1, b_2, \ldots, b_m$, такие что $h(b_1) = a_1, h(b_2) = a_2, \ldots, h(b_m) = a_m$. Рассмотрим базис подпространства $\ker(h)$: $c_1, c_2, \ldots, c_l$. Тогда векторы $b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_l$ образуют базис в L_n ($n = m + l$, n – размерность L_n).*

Упражнение 16.4 *Докажите лемму 16.1.*

Применим лемму 16.1 к эпиморфизму $g\colon L_n \to \operatorname{im}(g)$. Возьмем векторы $b_1, b_2, \ldots, b_k$, такие что $g(b_1) = a_1^1, g(b_2) = a_1^2, \ldots, g(b_k) = a_1^k$. Система векторов

$$b_1, a_1^1, \ldots, a_{n_1-1}^1, b_2, a_1^2, \ldots, a_{n_2-1}^2, \ldots, b_k, a_1^k, \ldots, a_{n_k-1}^k$$

переходит в базис (16.11) подпространства $\mathrm{im}(g)$ при отображении g. Дополним линейно независимую систему векторов $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$ до базиса $\ker(g)$:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, c_1, c_2, \ldots, c_q.$$

Таким образом, в силу леммы 16.1 имеем базис в L_n:

$$\begin{aligned} &b_1, a_1^1, \ldots, a_{n_1-1}^1, a_{n_1}^1, b_2, a_1^2, \ldots, a_{n_2-1}^2, a_{n_2}^2 \ldots, \\ &b_k, a_1^k, \ldots, a_{n_k-1}^k, a_{n_k}^k, c_1, c_2, \ldots, c_q, \end{aligned} \tag{16.12}$$

из векторов которого можно составить серии:

$$\begin{aligned} &b_1 \xrightarrow{\text{g}} a_1^1 \xrightarrow{\text{g}} a_2^1 \xrightarrow{\text{g}} \ldots \xrightarrow{\text{g}} a_{n_1-1}^1 \xrightarrow{\text{g}} a_{n_1}^1 \xrightarrow{\text{g}} \theta \\ &b_2 \xrightarrow{\text{g}} a_1^2 \xrightarrow{\text{g}} a_2^2 \xrightarrow{\text{g}} \ldots \xrightarrow{\text{g}} a_{n_2-1}^2 \xrightarrow{\text{g}} a_{n_2}^2 \xrightarrow{\text{g}} \theta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_k \xrightarrow{\text{g}} a_1^k \xrightarrow{\text{g}} a_2^k \xrightarrow{\text{g}} \ldots \xrightarrow{\text{g}} a_{n_k-1}^k \xrightarrow{\text{g}} a_{n_k}^k \xrightarrow{\text{g}} \theta \\ &c_1 \xrightarrow{\text{g}} \theta \\ &c_2 \xrightarrow{\text{g}} \theta \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &c_q \xrightarrow{\text{g}} \theta. \end{aligned}$$

Что и доказывает теорему. ■

Базис (16.12), построенный в процессе доказательства теоремы 16.2 будем называть каноническим базисом для нильпотентного оператора g. Относительно канонического базиса матрица нильпотентного оператора g имеет блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \tag{16.13}$$

где каждый блок A_t – квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16.14}$$

Каждый блок A_t соответствует серии базисных векторов, а его размер равен числу векторов в серии.

Теорема 16.3 *(о приведении матрицы линейного оператора к нормальной жордановой форме) Пусть $f\colon L_n \to L_n$ – линейный оператор, тогда в L_n существует базис, относительно которого матрица оператора f имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}, \tag{16.15}$$

где каждый блок B_k – квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{16.16}$$

(λ_i – собственное значение линейного оператора f).

Доказательство. Рассмотрим корневое подпространство L_{λ_i}. Оно инвариантно относительно оператора f, а оператор $f - \lambda_i \mathrm{id}$ нильпотентен на нем. В подпространстве L_{λ_i} возьмем канонический базис для нильпотентного оператора $f - \lambda_i \mathrm{id}$. Относительно этого базиса матрица нильпотентного оператора $f - \lambda_i \mathrm{id}$ в подпространстве L_{λ_i} имеет вид (16.13). Тогда относительно этого же базиса в подпространстве L_{λ_i} матрица линейного оператора f имеет вид (16.15). Так как пространство L_n является прямой суммой корневых подпространств L_{λ_i} (теорема 16.1), каждое из которых инвариантно относительно оператора f, то выбирая в каждом подпространстве L_{λ_i} канонический базис для нильпотентного оператора $f - \lambda_i \mathrm{id}$, получим утверждение теоремы. ■

Если матрица (16.16) имеет размер l, то ее называют жордановой клеткой размера l, соответствующей собственному значению λ_i.

Формула для числа жордановых клеток

Рассмотрим линейный оператор $f\colon L_n \to L_n$. Пусть $r_k = \mathrm{rang}(f - \lambda_i \mathrm{id})^k$, гдк $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим выражение

$$r_{k+1} + r_{k-1} - 2r_k. \qquad (16.17)$$

Предложение 16.1 *Формула (16.17) дает число жордановых клеток размера k, соответствующих собственному значению λ_i, линейного оператора f.*

Доказательство. Пространство L_n является прямой суммой корневых подпространств L_{λ_j} (теорема 16.1). Подпространство L_{λ_j}, где $j \neq i$, оператор $f - \lambda_i \mathrm{id}$ изоморфно переводит в себя. Значит, на корневых подпространствах L_{λ_j}, где $j \neq i$, выражение (16.17) равно нулю. Подсчитаем выражение (16.17) на корневом подпространстве L_{λ_i}. В подпространстве L_{λ_i} рассмотрим канонический базис для нильпотентного оператора $f - \lambda_i \mathrm{id}$. Число жордановых клеток размера k, соответствующих собственному значению λ_i оператора f, равно числу серий, состоящих из k векторов канонического базиса. Возьмем серию, состоящую из l векторов канонического базиса. Рассмотрим подпространство, порожденное векторами этой серии. Посчитаем выражение (16.17) для этого подпространства. Возможны следующие случаи.

1) $l \leq k-1$, тогда $r_{k+1} = r_{k-1} = r_k = 0$. Следовательно, выражение (16.17) равно нулю.

2) $l = k$, тогда $r_{k+1} = r_k = 0$ и $r_{k-1} = 1$. Следовательно, выражение (16.17) равно единице.

3) $l \geq k+1$, тогда $r_{k+1} = l-k-1$, $r_k = l-k$, $r_{k-1} = l-k+1$. Следовательно, выражение (16.17) равно нулю.

Таким образом, выражение (16.17) на корневом подпространстве L_{λ_i} равно числу серий, состоящих из k векторов канонического базиса. Что и доказывает предложение. ■