МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.М. Климкин

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ МЕРЫ

Учебное пособие

*Рекомендовано научно-методическим советом
по математике и механике УМО по классическому
университетскому образованию*

Самара
Издательство «Универс групп»
2010

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

УДК 519.5
ББК 22.12
К 49

Климкин, В.М.

К49 Избранные главы теории меры : учеб. пособие. – Самара : Издательство «Универс групп», 2010. –140 с.

ISBN 978-5-467-00221-7

В пособии известного специалиста в области теории функций и функционального анализа В.М. Климкина рассматриваются вопросы, связанные с равномерной ограниченностью, равномерной непрерывностью и продолжением широкого класса неаддитивных функций на различных классах множеств, обобщающих большинство известных классов. В книге нашли отражение результаты, полученные автором за последние три десятилетия работы над указанной проблематикой. Представленная публикация в известной степени подытоживает достижения того научного направления, в рамках которого проводил исследования автор.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов механико-математических факультетов классических университетов.

УДК 519.5
ББК 22.12

Научные редакторы: д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций СамГУ С.В. Асташкин; д.ф.-м.н., проф. С.Я. Новиков

Рецензенты: д.ф.-м.н., проф., кафедра математического анализа МГУ А.М. Седлецкий; д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой высшей математики Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики И.А. Блатов

ISBN 978-5-467-00221-7

Предисловие

Настоящее издание посвящено памяти профессора кафедры функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета Виктора Михайловича Климкина, известного ученого в области теории меры и теории функций, талантливого педагога, замечательного человека. Более 20 лет он являлся бессменным заведующим кафедрой функционального анализа и теории функций и деканом механико-математического факультета. 19 марта 2010 года В.М. Климкину исполнилось бы 70 лет.

Тематика научно-исследовательской работы В.М. Климкина – обобщенная теория меры и интеграла, прежде всего, теория неаддитивных функций множества. Понятие функции множества, первоначально возникшее в теории функций вещественной переменной и связанное с понятием меры, в настоящее время играет важную роль в теории вероятности, функциональном анализе. топологической алгебре, качественной теории дифференциальных уравнений, теории игр, а также в различных разделах теоретической физики. Прогресс в теории функций множества в значительной степени связан с именами российских математиков. Исследования в этой области особенно активизировались после выхода в свет фундаментальной работы А.Д. Александрова «Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах» (Математический сборник, 1940. Т. 8. С. 307–348). В последние 20–30 лет в теории функций множества складываются новые направления. Происходит это, во-первых, за счет изменения области значений меры и интеграла; во-вторых, за счет изменения характера функций множества (переход от аддитивных к различным классам неаддитивных функций); в-третьих, за счет изменения области определения функций множества (переход от колец и σ-колец к более общим классам множеств, а также к различным типам решеток). Каждое из этих направлений продолжает интенсивно развиваться как в нашей стране, так и за рубежом, и получение новых результатов, безусловно, является важной и актуальной задачей. Классические результаты теории меры часто получаются как простые и очевидные следствия из более общих утверждений. Кроме того, обращение к общим случаям позволяет устанавливать новые существенные связи, выявлять суть проблемы, упрощать доказательства, получать новые результаты. Актуальность такого подхода к изучению функций множества обусловлена также необходимостью решения постоянно возрастающего числа прикладных задач, где возникают неаддитивные функции множества на «плохих» структурах: это и емкости Шоке в теории потенциала, и супераддитивные функции в теории игр, и функции на решетках.

Центральной темой книги В.М. Климкина являются принципы равномерной ограниченности и равномерной непрерывности семейства неаддитивных функций множества. Выделенные и изученные в работе классы функций множества существенно обобщают многие известные классы неаддитивных функций множества, рассмотренные в работах Д. Магарам, И. Добракова, Л. Древновского, В.Н. Алексюка, Ф.Д. Безносикова, Н.С. Гусельникова и других авторов.

Первая глава книги посвящена изложению принципа равномерной ограниченности (теорема Никодима) для произвольного семейства функций на широких классах множеств. Здесь излагаются новые результаты, полученные В.М. Климкиным совместно с М.Г. Свистулой.

Вторая глава содержит результаты, полученные В.М. Климкиным и его учениками В.А. Алякиным и Т.А. Срибной в исследовании различных свойств непрерывности семейств функций множества и продолжении этих свойств с одних классов множеств на другие, более широкие.

В третьей главе изложены элементы теории регулярных функций множества на σ-топологическом пространстве, решены проблемы равномерной ограниченности и равномерной непрерывности для таких функций.

Настоящая книга будет интересна студентам-математикам, занимающимся вопросами теории меры и их приложениями.

За оказанную помощь при издании книги выражаем благодарность ректору Самарского государственного университета И.А. Носкову, президенту Самарского государственного универси-

тета Г.П. Яровому, проректору по научной работе Ю.Н. Горелову и декану механико-математического факультета С.Я. Новикову.

Особые слова благодарности – М.Г. Лобовой, проделавшей большую работу по подготовке рукописи к печати.

В.А. Алякин, М.Г. Свистула, Т.А. Срибная
июнь 2010 г.

ГЛАВА 1
РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

1.1. Аналог теоремы Никодима в обобщенной теории меры

1.1.1. Основные обозначения и определения

Пусть T — некоторое множество; Σ — некоторый класс подмножеств множества $T(\emptyset \in \Sigma)$. Пусть $\mathcal{L} \subset \Sigma$ — некоторый подкласс класса $\Sigma(\emptyset \in \mathcal{L})$.

Последовательность (конечное множество) попарно непересекающихся множеств $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ будем называть спектром (соответственно, конечным спектром) из $\mathcal{L}$. Убывающую последовательность множеств $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$, пересечение которой — пустое множество, будем называть локализатором. Любые два непересекающиеся множества $A, B \in \mathcal{L}$ такие, что $A \bigcup B \in \mathcal{L}$, будем называть парой множеств из $\mathcal{L}$ и обозначать $(A, B) \in \mathcal{L}$.

Класс множеств $\mathcal{L}$ будем называть m-классом, если он замкнут относительно образования разности. Отметим некоторые свойства m-класса:

а) m-класс замкнут относительно образования пересечения;

б) если A, B, C принадлежат m-классу $\mathcal{L}$ и $A \bigcup B \subset C$, то $A \bigcup B \in \mathcal{L}$;

в) m-класс является полукольцом.

Понятие m-класса было введено автором в книге [185], также изложены свойства m-классов.

Класс $\mathcal{L}$ будем называть суммируемым (σ — суммируемым), если $\emptyset \in \mathcal{L}$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{L}$ (для любого спектра $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$) $A \bigcup B \in \mathcal{L}$ (соответственно, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{L}$).

Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ — некоторое семейство функций множества, заданных на Σ, со значениями во множестве X; пусть $E \in \Sigma$; пусть

$\mathcal{L} \subset \Sigma$; $\{E_n\} \subset \Sigma$. Положим

$$E \bigcap \mathcal{L} = \{A : A \subset E,\ A \in \mathcal{L}\};$$

$$\Phi(E) = \{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi\};$$

$$\varphi^{\vee}(E) = \{\varphi(A),\ A \in E \bigcap \Sigma\};$$

$$\Phi^{\vee}(E) = \{\varphi(A),\ \varphi \in \Phi,\ A \in E \bigcap \Sigma\};$$

$$\varphi(\mathcal{L}) = \{\varphi(A),\ A \in \mathcal{L}\};$$

$$\Phi(\mathcal{L}) = \{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \mathcal{L}\};$$

$$\Phi(\{E_n\}) = \{\varphi(E_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\}.$$

Пусть X — абелева группа. Функция $p : X \to [0, +\infty]$ называется преднормой (или квазинормой), если $p(0) = 0$, $p(-x) = p(x)$, $p(x + +y) \leq p(x) + p(y)$. Абелеву группу с квазинормой $\|\cdot\|$ будем называть квазинормированным пространством

1.1.2. Ограниченные множества в топологической абелевой группе

Пусть (X, η) — топологическая абелева группа (т.а.г.), где η — базис симметричных окрестностей нейтрального элемента $\Theta \in X$ [54].

Определение 1.1. Пусть $V \in \eta$. Следуя [68], будем говорить, что множество $A \subset X$ является V-1-ограниченным, если существует такое число $n \in N$, что $A \subset nV$, где

$$nV = \{\sum_{k=1}^{n} x_k,\ x_k \in V,\ k = \overline{1,n}\}.$$

Множество $A \subset X$ называется 1-ограниченным (ограниченным в смысле Дарста), если для любой окрестности $V \in \eta$ оно V-1-ограничено.

Замечание 1.1. Определение 1-ограниченности в т.а.г. (X, η) обладает существенным недостатком – одноточечные множества могут оказаться неограниченными, как показывает следующий пример.

Пример 1.1. Пусть (X, η) – т.а.г., имеющая не менее двух элементов, с дискретной топологией. Тогда единственным 1-ограниченным множеством будет одноточечное множество $\{\Theta\}$. Одноточечное множество $\{x\}$, где $x \neq \Theta$, не будет 1-ограниченным. Следующее определение ограниченного множества в т.а.г. (X, η), предложенное Н.Бурбаки [35, с. 252], указанного недостатка не имеет.

Определение 1.2. Пусть $V \in \eta$. Подмножество $A \subset X$ называется V-2-ограниченным, если существуют конечное множество $\mathcal{M} \subset X$ и число $n \in N$ такие, что

$$A \subset \mathcal{M} + nV.$$

Множество $A \subset X$ называется 2-ограниченным в т.а.г. (X, η) (ограниченным в смысле Бурбаки), если для любой окрестности $V \in \eta$ оно V-2-ограничено.

Замечание 1.2. Легко видеть, что в т.а.г. (X, η) 1-ограниченность множества $A \subset X$ влечет 2-ограниченность этого множества, но обратное не верно.

Пример 1.2. В условиях примера 1.1 одноточечное множество $\{x\}$, где $x \neq \Theta$, будет 2-ограничено, но не будет 1-ограничено.

Справедлива следующая

Теорема 1.1[123]. Для того, чтобы множество $A \subset X$ было 1-ограничено (2-ограничено), необходимо и достаточно, чтобы для любой квазинормы $p(x)$ (соответственно, конечной квазинормы $p(x)$), непрерывной на X, числовое множество

$$\{p(x),\ x \in A\}$$

было ограничено.

Предложение 1.1. В локально-компактной т.а.г. (X, η) следующие утверждения равносильны: 1) множество $A \subset X$ 2-ограничено; 2) существует такой компакт $C \subset X$, что $A \subset C$; 3) для любой окрестности $V \in \eta$ существует конечное множество $\mathcal{M} \subset X$ такое, что

$$A \subset \mathcal{M} + V.$$

Предложение 1.2. В локально-выпуклом пространстве (X, η, K) следующие утверждения равносильны: 1) множество $A \subset X$ 2-ограничено; 2) множество $A \subset X$ 1-ограничено; 3) для любой окрестности $V \in \eta$ существует такое число $\lambda > 0$, что

$$A \subset \lambda V.$$

Доказательство ввиду простоты опускаем.

Определение 1.3. Пусть (X, η) – т.а.г. Следуя [141], возрастающую последовательность симметричных окрестностей нуля $\beta = \{B_n\} \subset \eta$ будем называть ограничивающей системой (и писать о.с.) в т.а.г. (X, η), если для любых номеров n и m справедливо соотношение

$$B_n + B_m \subset B_{n+m}, \; n, m \in N.$$

Элементы о.с. β называются ограничителями.

Пусть $\beta = \{B_n\}$ – некоторая о.с. в т.а.г. (X, η). Множество $A \subset X$ называется β-ограниченным (ограниченным относительно о.с. β), если существует такой номер n_0, что

$$A \subset B_{n_0}.$$

Д.А. Райковым [57] введено понятие векторной топологической группы (X, η, K) (пишем в.т.г.) как линейного пространства X над полем K с топологией η, в которой непрерывны операции сложения векторов и умножения на скаляр по векторному аргументу. Кроме естественных определений ограниченного множества (ограниченность в смысле ограниченности множества в топологическом векторном пространстве, ограниченность в смысле 2-ограниченности множества в т.а.г. и т.д.) в в.т.г. (X, η, K) рассматривается специфическое определение ограниченного множества.

Определение 1.4. Пусть (X, η, K) – в.т.г. Множество $A \subset X$ называется ограниченным (в смысле Райкова), если для любой окрестности $V \in \eta$ существуют конечное множество $\mathcal{M} \subset X$ и число $n \in N$ такие, что

$$A \subset co\mathcal{M} + nV,$$

где $co\mathcal{M}$ – выпуклая оболочка множества $\mathcal{M}$. Справедлива следующая

Теорема 1.2 [124, с. 604] Пусть (X, η, K) локально-выпуклая векторная топологическая группа. Множество $A \subset X$ ограничено (в смысле Райкова) тогда и только тогда, когда для любого линейного непрерывного функционала f на X числовое множество

$$\{f(x),\, x \in A\}$$

ограничено.

Следующая теорема позволяет вопрос о равномерной 2-ограниченности семейства функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ свести к вопросу о равномерной β-ограниченности последовательности функций множества $\{\varphi_n\} \subset \Phi$.

Теорема 1.3. Пусть (X, η) – т.а.г.; пусть V – симметричная окрестность нуля; пусть Σ – некоторый класс подмножеств множества T; пусть далее $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство функций множества, заданных на Σ со значениями в т.а.г. (X, η), где $\varphi(\emptyset) = 0$, $\varphi \in \Phi$. Пусть выполняются условия:

1) для любой функции $\varphi \in \Phi$ множество $\varphi(\Sigma)$ V-2-ограничено;

2) для любого множества $E \in \Sigma$ множество $\Phi(E)$ V-2-ограничено;

3) для любой ограничивающей системы $\beta = \{B_n\}$ в т.а.г. (X, η) и для любой последовательности функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ из условия, что для любого множества $E \in \Sigma$ множество

$$\{\varphi_n(E),\ n \in N\}$$

β-ограничено, следует, что множество

$$\{\varphi_n(E),\ E \in \Sigma,\ n \in N\}$$

β-ограничено.

Тогда множество $\Phi(\Sigma)$ V-2-ограничено.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}(V)$ класс множеств вида $\mathcal{M} + nV$, где $\mathcal{M}$ – конечное множество из X и число $n \in N$. Для любого множества $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(V)$ соответствующее число n обозначим через $p(\mathcal{U})$. Отметим некоторые свойства множеств класса $\mathcal{F}(V)$: а) если $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(V)$, то $\mathcal{U} + \mathcal{U} \in \mathcal{F}(V)$; б) если $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(V)$, то $-\mathcal{U} \in$

$\mathcal{F}(V)$; в) если $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{F}(V)$ и $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{F}(V)$, то существует симметричное множество $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(V)$ такое, что

$$\mathcal{U}_1 \bigcup \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U};$$

г) для любого множества $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{F}(V)$ и для любого числа $n \in N$ существует такое множество $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{F}(V)$, что

$$\mathcal{U}_1 + nV \subset \mathcal{U}_2.$$

Предположим, что теорема 1.3 не верна. Тогда множество

$$\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} \not\subset \mathcal{U} \tag{1.1}$$

для любого множества $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(V)$. Положим $\mathcal{U}_1 = V$. В силу (1.1) существуют функция $\varphi_1 \in \Phi$ и множество E_1 такие, что

$$\varphi_1(E_1) \notin \mathcal{U}_1.$$

В силу условия 1) теоремы 1.3 существует такое множество $\mathcal{U}_2' \in \mathcal{F}(V)$, что множество

$$\{\varphi_1(E),\ E \in \Sigma\} \subset \mathcal{U}_2'.$$

Найдем такое симметричное множество $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{F}(V)$, что

$$(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1) \bigcup \mathcal{U}_2' \subset \mathcal{U}_2;$$

$$p(\mathcal{U}_2) > 2p(\mathcal{U}_1);$$

$$\mathcal{U}_1 + p(\mathcal{U}_1)V \subset \mathcal{U}_2.$$

По предположению существуют функция $\varphi_2 \in \Phi$ и множество $E_2 \in \Sigma$ такие, что

$$\varphi_2(E_2) \notin \mathcal{U}_2.$$

Найдем такое множество $\mathcal{U}_3' \in \mathcal{F}(V)$, что множество

$$\{\varphi_2(E),\ E \in \Sigma\} \subset \mathcal{U}_3'.$$

Найдем такое симметричное множество $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{F}(V)$, что

$$(\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_2) \bigcup \mathcal{U}_3' \subset \mathcal{U}_3;$$

$$p(\mathcal{U}_3) > 2p(\mathcal{U}_2);$$

$$\mathcal{U}_2 + p(\mathcal{U}_2)V \subset \mathcal{U}_3.$$

Продолжая этот процесс по индукции, построим последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$; последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$; последовательность множеств $\{\mathcal{U}_n'\} \subset \mathcal{F}(V)$ и последовательность симметричных множеств $\{\mathcal{U}_n\} \subset \mathcal{F}(V)$ такие, что

$$\varphi_n(E_n) \notin \mathcal{U}_n,\ n = 1, 2, ...,\ \mathcal{U}_1 = V; \tag{1.2}$$

$$\{\varphi_n(E),\ E \in \Sigma\} \subset \mathcal{U}_{n+1}',\ n = 1, 2, ...;$$

$$(\mathcal{U}_n + \mathcal{U}_n) \bigcup \mathcal{U}_{n+1}' \subset \mathcal{U}_{n+1},\ n = 1, 2, ...;$$

$$p(\mathcal{U}_n) > 2p(\mathcal{U}_{n-1}),\ n = 2, 3, ... \tag{1.3}$$

$$\mathcal{U}_n + p(\mathcal{U}_n)V \subset \mathcal{U}_{n+1},\ n = 1, 2, ...$$

Очевидно, что последовательность множеств $\beta = \{\mathcal{U}_n\}$ – о.с. в т.а.г. (X, η). Покажем, что для любого множества $E \in \Sigma$ множество

$$\{\varphi_n(E),\ n = 1, 2, ...\}$$

β-ограничено, где о.с. $\beta = \{\mathcal{U}_n\}$. Пусть $E \in \Sigma$. По условию теоремы существуют конечное множество элементов $\{x_1, x_2, ...,$
$x_s\} \subset X$ и число $m \in N$ такие, что множество

$$A = \{\varphi_n(E),\ n = 1, 2, ...\} \subset \bigcup_{k=1}^{s} \{x_k + mV\}.$$

Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что

$$x_k \in A,\ k = \overline{1, s}.$$

Поэтому

$$x_k = \varphi_{n_k}(E),\ k = \overline{1, s}.$$

Следовательно, множество

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{s} \{\varphi_{n_k}(E) + mV\}.$$

Отсюда множество

$$A \subset \mathcal{U}_t + mV,$$

где $t = \max(n_1, n_2, ..., n_s) + 1$. Пусть $r > t$ такое, что

$$p(\mathcal{U}_r) > m.$$

Тогда в силу (1.3)

$$\mathcal{U}_t + mV \subset \mathcal{U}_r + p(\mathcal{U}_r)V \subset \mathcal{U}_{r+1}.$$

Следовательно, множество

$$\{\varphi_n(E),\ n = 1, 2, ...\} \subset \mathcal{U}_{r+1}.$$

В силу условия 3 теоремы существует такой номер $n_0 \in N$, что

$$\{\varphi_n(E),\ n = 1, 2, ...\} \subset \mathcal{U}_{n_0},$$

что противоречит соотношению (1.2). Полученное противоречие доказывает теорему 1.3.

Следствие 1.1. Пусть (X, η) – т.а.г.; пусть Σ – некоторый класс множеств ($\emptyset \in \Sigma$); пусть далее $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство произвольных функций множества, заданных на Σ, со значениями в т.а.г. (X, η) таких, что $\varphi(\emptyset) = \Theta$, $\varphi \in \Phi$. Пусть выполняются условия:

1) для любой функции $\varphi \in \Phi$ множество $\varphi(\Sigma)$ 2-ограничено;

2) для любого множества $E \in \Sigma$ множество $\Phi(E)$ 2-ограничено;

3) для любой о.с. $\beta = \{B_n\}$ в т.а.г. (X, η) и для любой последовательности функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ из условия, что для любого множества $E \in \Sigma$ множество

$$\{\varphi_n(E), n \in N\}$$

β-ограничено, следует что множество

$$\{\varphi_n(E),\ E \in \Sigma,\ n \in N\}$$

β-ограничено. Тогда множество $\Phi(\Sigma)$ 2-ограничено.

Справедливость утверждения следует из теоремы 1.3 и определения 1.2.

1.1.3. Некоторые примеры неаддитивных функций множества

Через $\mathcal{F} = \{f\}$ обозначим класс непрерывных строго возрастающих функций точки таких, что

$$f : R^+ \to R^+,\ f(0) = 0,\ f(x) \geq x.$$

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – квазинормированное пространство. Пусть $\varphi : \Sigma \to X$, $\varphi(\emptyset) = 0$. Положим

$$\widetilde{\varphi}(E) = \sup\{\|\varphi(A)\|,\ A \in E\bigcap\Sigma\},\ E \subset T.$$

Функцию $\widetilde{\varphi}$ называют супремацией функции φ [185].

Функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to (X, \|\cdot\|)$ называют [185] f-полутреугольными (соответственно, f –полуаддитивными), если для любой пары $(A, B) \in \Sigma$ выполняется неравенство

$$\|\varphi(A)\| \leq f(\|\varphi(A\bigcup B)\|) + f(\|\varphi(B)\|)$$

(соответственно,

$$\|\varphi(A\bigcup B)\| \leq f(\|\varphi(A)\|) + f(\|\varphi(B)\|)).$$

Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ одновременно и f-полуаддитивные, и f-полутреугольные, то их будем называть f-композиционными. В случае, если $f(x) = x$ функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ называют, соответственно, полутреугольными, полуадддитивными и треугольными.

Пример 1.3. Пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ – аддитивные функции множества со значениями в квазинормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Положим

$$\mu_\alpha(E) = \|\varphi_\alpha(E)\|,\ E \in \Sigma,\ \alpha \in J.$$

Функции множества семейства $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in J}$-треугольные.

Пример 1.4. Пусть $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in J}$ – некоторое семейство неотрицательных аддитивных функций множества. Положим

$$\nu_\alpha(E) = e^{\mu_\alpha(E)} - 1,\ E \in \Sigma,\ \alpha \in J;$$

$$\eta_\alpha(E) = \begin{cases} \mu_\alpha(E), \text{ если } \mu_\alpha(E) < 1 \\ 2\mu_\alpha(E) - 1, \text{ если } \mu_\alpha(E) \geq 1,\ E \in \Sigma,\ \alpha \in J. \end{cases}$$

Покажем, что функции множества семейства $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in J}$ и семейства $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in J}$ – f-композиционные, где соответственно, $f(x) = x + x^2$ и $f(x) = 2x$.

Действительно, для любых чисел $b \geq a \geq 0$ имеем

$$e^{a+b} - 1 = e^a(e^b - 1) + (e^a - 1) \leq e^a(e^a - 1) + e^b(e^b - 1).$$

Таким образом,

$$e^{a+b} - 1 \leq e^a(e^a - 1) + e^b(e^b - 1).$$

Из этого неравенства и аддитивности ν_α получаем соответствующее утверждение для функции множества семейства $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Утверждение для функций семейства $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in J}$ очевидно.

Пример 1.5. Пусть $C_1, C_2, ..., C_n$ – некоторый набор неотрицательных чисел; пусть $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in J}$ – неотрицательные аддитивные функции множества. Положим

$$\Psi_\alpha(E) = \sum_{k=1}^{n} C_k \mu_\alpha^k(E),\ E \in \Sigma,\ \alpha \in J.$$

Функции множества семейства $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ f-композиционные, где

$$f(x) = 2^{n-1}x.$$

Пример 1.6. Пусть (x, η) – т.а.г. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to X$, $\varphi(\emptyset) = 0$ – обобщенные внешние меры, если для любой симметричной окрестности нуля $V \in \eta$ существует такое число $n_V \in N$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любой пары $(A, B) \in \Sigma$, если $\varphi(A) \in V$, то $\varphi(B) \in \varphi(A \bigcup B) + n_V V$.

Замечание 1.3. В случае, если $n_V \equiv K$ для любой симметричной окрестности $V \in \eta$, обобщенные внешние меры называются K-внешними мерами. Класс k-внешних мер ввел А.Н. Саженков [65], изучив условие V-1-ограниченности семейства исчерпывающих[1] K-внешних мер, заданных на σ-кольце Σ.

1.1.4. Постановка задачи

Классическая теорема Никодима о равномерной ограниченности семейства мер [41, Гл. IV, §9, С. 336] утверждает

Теорема 1.4. Если семейство $\Phi \subset ca(T, \Sigma)$ конечных счетно-аддитивных скалярных мер, определенных на σ-алгебре множеств Σ, «поточечно» ограничено, то это семейство мер равномерно ограничено на Σ, то есть из того, что для любого множества $E \in \Sigma$

$$\sup\{|\varphi(E)|,\ \varphi \in \Phi\} < \infty.$$

следует

$$\sup\{|\varphi(E)|,\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} < \infty.$$

Эта теорема, известная в классической теории меры как принцип равномерной ограниченности, подвергалась обобщениям в различных направлениях. М.Н. Бобынин [34], по-видимому, первым доказал теорему Никодима, используя только аппарат теории меры. В.Н. Алексюк [9] дал еще одно простое доказательство теоремы Никодима и обобщил ее на семейство непрерывных сверху в нуле[2] треугольных функций множества. A. Grothendieck [121] показал, что теорема Никодима остается справедливой для семейства ограниченных аддитивных функций множества.

R.Darst [93] обобщил результат А. Гротендика на случай комплексно-значных ограниченных аддитивных функций множества.

В квазинормированном пространстве для семейства $\Phi = \{\varphi\}$ конечно-аддитивных исчерпывающих функций множества условие

[1] Т.е. для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ $\lim \varphi(E_n) = \Theta$.

[2] Для любого локализатора $\{E_n\} \subset \Sigma$ $\lim \varphi(E_n) = 0$.

равномерной ограниченности было установлено Л. Древновским [107]; для семейства неаддитивных функций множества теорему Никодима рассматривали Г.Я. Арешкин, В.Н. Алексюк, В.М. Климкин [159], Н.С. Гусельников [40], Л.В. Агафонова, В.М. Климкин [156], В.А. Алякин [21], Л.Д. Рашкин [204], E. Pap [150], I. Dobrakov [104] и др.

В топологической абелевой группе (X, η) D. Landers, L. Rogge доказали теорему Никодима для счетно-аддитивных мер [141], рассматривая ограниченность в (X, η) относительно ограничивающей системы $\beta = \{B_n\}$.

В т.а.г. (X, η) теорема Никодима с условием 1-ограниченности для семейства конечно-аддитивных исчерпывающих функций множества была доказана Р.Б. Дарстом [94] и для k-внешних мер А.Н. Саженковым [65].

В т.а.г. теорему Никодима с условием 2-ограниченности доказывали А.Н. Саженков [68], P. Morales [148], для обобщенных внешних мер В.М.Климкин, М.Г. Свистула [181] и Б.В. Пахаев [55]. В работе [79] Ж. Андо поставил вопрос: будет ли верна теорема Никодима, если класс множеств Σ является алгеброй?

Автор [100] и Дарст дали отрицательный ответ на вопрос Ж. Андо. В работе [184] диссертант доказал достаточное условие, при выполнении которого не только теорема Никодима [1.4], но и результат В.Н. Алексюка [18] остаются верными, даже если условие «поточечной» ограниченности выполняется на алгебре.

Во многих работах доказывается аналог теоремы Никодима для семейства мер «поточечно» ограниченных на алгебре Σ, обладающей некоторым дополнительным условием (более слабым, чем замкнутость относительно счетных объединений), т.е.на не-σ-полной алгебре [86, 146] и др. Например, D. Candeloro [86] доказал теорему Никодима для семейства конечно-аддитивных исчерпывающих функций множества, заданных на алгебре Σ с f_1-свойством, со значениями в т.а.г. с требованием 1-ограниченности.

В связи с задачами квантовой физики [122] возникла проблема построения аналога классической теории меры на классах множеств, которые не являются кольцами. Следуя [122], такой аналог теории меры называют обобщенной теорией меры. Начиная с работ диссертанта [160, 171] и Дарста [93] в классической теории меры возникло и другое направление в развитии теоремы Никодима: какие дополнительные условия нужно наложить на семейство функции множества, чтобы, будучи «поточечно» ограничено на алгебре, оно было равномерно ограничено?

В данной главе рассматривается следующая постановка принципа равномерной ограниченности семейства функций множества:

Пусть на некотором классе множеств $\Sigma(\emptyset \in \Sigma)$ задано семейство неотрицательных функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ $(\varphi(\emptyset) = 0)$, причем о какой-либо форме «полуаддитивности» либо «непрерывности» у рассматриваемых функций множества не известно.

При каких условиях, налагаемых на класс множеств Σ или на функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, будет выполнено условие равномерной ограниченности, т.е.

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} < \infty?$$

Приведем ряд примеров, которые показывают необходимость изучения принципа равномерной ограниченности семейства функций множества именно в вышеприведенной формулировке.

Пример 1.7. Проблема предельного перехода под знаком интеграла заключается в следующем: пусть функции точки $\{f_n(t)\}$ некоторым образом сходятся к функции $f_0(t)$; пусть функции множества $\{\varphi_n\}$ некоторым образом сходятся к функции φ_0; пусть каждая функция $f_n(t)$ интегрируема по φ_n; при каких условиях функция $f_0(t)$ будет интегрируема по φ_0 и справедливо равенство

$$\lim_n \int_E f_n d\varphi_n = \int_E f_0 d\varphi_0$$

для любого измеримого множества $E \in \Sigma$? При решении этой задачи естественным образом возникает вопрос о равномерной ограниченности последовательности полувариаций $\{\overline{\varphi}_n\}$ (например, для интеграла Бартла).

Пример 1.8. В теории игр [23, 58] важную роль играет пространство $BV(T, \Sigma)$ – банахово пространство функций множества ограниченной вариации, то есть функций множества, заданных на

σ-алгебре Σ и представимых в виде разности двух монотонных неотрицательных функций множества, равных нулю на пустом множестве. Для любой функции множества $\varphi \in BV(T, \Sigma)$

$$\|\varphi\| = \inf\{\mu(T) + \nu(T)\},$$

где inf берется по всем разложениям функции φ, т.е. по всем таким неотрицательным монотонным функциям множества μ и ν, что $\varphi = \mu - \nu$ [23, С. 30]. В силу теоремы Аумана- Шепли [23, С. 37], равномерная ограниченность семейства функций множества $\Phi \subset BV(T, \Sigma)$ есть необходимое условие ограниченности этого семейства функций множества по норме в пространстве $BV(T, \Sigma)$.

Пример 1.9. Пусть $\{\varphi_n\}$ – последовательность скалярных аддитивных функций множества, заданных на алгебре Σ; пусть для любого множества $E \in \Sigma$

$$\lim \varphi_n(E) = \varphi_0(E).$$

Через $|\varphi|$ обозначим полную вариацию функции множества φ. При решении вопроса о возможности предельного перехода под знаком полной вариации, т.е.

$$\lim |\varphi_n|(E) = |\varphi_0|(E), \ E \in \Sigma,$$

встает вопрос о равномерной ограниченности последовательности функций $\{\varphi_n\}$ на алгебре Σ.

Пример 1.10. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство функций множества, заданных на некотором классе множеств Σ, со значениями в т.а.г. (X, η). Известно, что 1-ограниченность эквивалентна ограниченности по любой непрерывной на X квазинорме; 2-ограниченность эквивалентна ограниченности по любой непрерывной на X конечной квазинорме (см.теорему 1.1). Таким образом, вопрос о равномерной 1-ограниченности (2-ограниченности) семейства функций $\Phi = \{\varphi\}$ на классе Σ сводится к вопросу о равномерной ограниченности семейства неотрицательных функций множества $\{p \circ \varphi, \ \varphi \in \Phi\}$, где $p(x)$ – произвольная непрерывная на X (соответственно, произвольная конечная непрерывная на X) квазинорма.

Пример 1.11. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ семейство функций множества, заданных на некотором классе Σ, со значениями в т.а.г. (X, η); пусть $\beta = \{B_n\}$ – некоторая ограничивающая система. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} n, \text{ если } x \in B_n \setminus B_{n-1}, \ B_0 = \emptyset, \\ \infty, \text{ если } x \in X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n. \end{cases}$$

Тогда равномерная ограниченность функций множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ относительно о.с. β (β – ограниченность) будет эквивалентна равномерной ограниченности функций множества семейства $\{g \circ \varphi, \ \varphi \in \Phi\}$.

Пример 1.12. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство функций множества, заданных на некотором классе Σ со значениями в локально-выпуклой топологической векторной группе (X, η, K). Известно [124, т. 1.2], что в локально-выпуклой в.т.г. (X, η, K) ограниченность множества $A \subset X$ в смысле Д. Райкова эквивалентна ограниченности числового множества $\{f(x), x \in A\}$, где f – произвольный линейный непрерывный функционал на (X, η, K). Таким образом, вопрос о равномерной ограниченности семейства функций множества в смысле Д. Райкова сводится к вопросу о равномерной ограниченности семейства скалярных функций множества $\{f \circ \varphi, \varphi \in \Phi\}$, где f – произвольный непрерывный линейный функционал на (X, η, K).

Изучение равномерной ограниченности произвольного семейства неотрицательных функций множества на произвольном классе множеств вызвано также возросшим интересом к теории неаддитивных функций множества, например, в теории игр [23, 58], теории вероятности (емкости Шоке) [53], задачами обобщенной теории меры. Впервые для некоторых частных случаев непрерывных функций множества вопрос о равномерной ограниченности семейства функций множества в такой общей формулировке рассматривался И. Добраковым [104]. В общей формулировке вопрос решен автором [184, 185, 187] и [188].

1.2. Критерии равномерной ограниченности семейства функций множества

Если не оговорено противное, предполагается, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на некотором классе множеств Σ ($\emptyset \in \Sigma$), принимают значения из $[0, +\infty]$ и $\varphi(\emptyset) = 0$.

1.2.1. Свойства выборки и выпуклости

Определение 1.5. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки, если для любого числа $a > 0$ существует такое число $b > 0$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$, если $\varphi(A) \bigvee \varphi(A \bigcup B) < a$, то $\varphi(B) < b$.

Определение 1.6. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выпуклости, если для любого числа $a > 0$ существует такое число $b > 0$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$, если $\varphi(A) \bigvee \varphi(B) < a$, то $\varphi(A \bigcup B) < b$.

Определение 1.7. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают и свойством выборки, и свойством выпуклости, то будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ согласованы с классом множеств Σ.

Замечание 1.4. На практике часто бывает удобнее применять свойство выборки в следующей формулировке: для любых чисел $a > 0$ и $b > 0$ существует такое число $c > 0$ (пишем $c = \eta(a, b)$), что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$, если $\varphi(A) < a$ и $\varphi(A \bigcup B) < b$, то $\varphi(B) < c$. Аналогично можно сказать и для свойства выпуклости.

Приведем примеры семейств функций множества, которые обладают свойством выборки или свойством выпуклости.

Пример 1.13. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f – полуаддитивные (соответственно, f – полутреугольные), то они обладают свойством выпуклости (соответственно, выборки). Действительно, для любого числа $a > 0$ число $b = 2f(a)$ – искомое.

Пример 1.14. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f – композиционные (тем более аддитивные), то они согласованы с классом множеств Σ.

Пример 1.15. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, заданные на классе множеств Σ, со значениями в т.а.г. (X, η), – аддитивные, то для любой квазинормы $p(x)$ на X функции множества семейства $\{p \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ согласованы с классом Σ.

Пример 1.16. Пусть обобщенные внешние меры семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на классе Σ со значениями в т.а.г. (X, η), то для любой непрерывной квазинормы $p(x)$ на X функции множества семейства $\{p \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ согласованы с классом Σ.

Доказательство. Пусть $p(x)$ – непрерывная квазинорма на X. Проверим, например, что функции множества семейства $\{p \circ \varphi,$ $\varphi \in \Phi\}$ обладают свойством выборки. Возьмем любое число $a > 0$. Пусть $(A, B) \in \Sigma$. Пусть

$$p \circ \varphi(A) < a \text{ и } p \circ \varphi(A \bigcup B) < a.$$

Положим

$$V = \{x : x \in X,\ p(x) < a\}.$$

Ясно, что V – симметричная окрестность нейтрального элемента $\Theta \in X$. По определению обобщенной внешней меры найдем число $n_V \in N$.

Покажем, что число $b = (n_V + 1)a$ искомое.

Так как

$$\varphi(A) \in V \text{ и } \varphi(A \bigcup B) \in V,$$

то по определению обобщенной внешней меры

$$\varphi(A \bigcup B) - \varphi(B) \in n_V \cdot V.$$

Отсюда

$$\varphi(B) \in \varphi(A \bigcup B) + n_V V \subset V + n_V \cdot V \subset (n_V + 1)V.$$

Следовательно,

$$p \circ \varphi(B) < b.$$

Второе утверждение проверяется аналогичным образом.

Пример 1.17. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство функций множества, заданных на классе Σ, со значениями в т.а.г. (X, η) $(\varphi(\emptyset) = \Theta)$; пусть $\beta = \{B_n\}$ о.с. в т.а.г. (X, η); пусть $g(x)$ – функция на X из примера 1.11. Если для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любой пары $(E, F) \in \Sigma$ из условия

$$\varphi(E) \in B_n \text{ и } \varphi(E \bigcup F) \in B_m$$

(соответственно,

$$\varphi(E) \in B_n \text{ и } \varphi(F) \in B_m),$$

следует

$$\varphi(F) \in B_{n+m}$$

(соответственно,

$$\varphi(E \bigcup F) \in B_{n+m}),$$

то функции множества семейства $\{g \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ обладают свойством выборки (соответственно, выпуклости).

Пример 1.18. Если обобщенные внешние меры семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на классе Σ и принимают значения в локально-выпуклой в.т.г. (X, η, K), то для любого линейного непрерывного на X функционала f функции множества семейства $\{f \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ согласованы с классом Σ.

1.2.2. Равномерная ограниченность на спектрах

Как и раньше Σ – некоторый класс подмножеств множества T и $\mathcal{L} \subset \Sigma$ $(\emptyset \in \mathcal{L})$; функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на классе Σ, принимают значения из $[0, +\infty]$ и $\varphi(\emptyset) = 0$.

Определение 1.8. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$

– «поточечно» ограничены на классе $\mathcal{L}$, если для любого множества $E \in \mathcal{L}$

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi\} < \infty;$$

– равномерно ограничены на классе $\mathcal{L}$, если

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \mathcal{L}\} < \infty;$$

– ограничены на спектрах класса $\mathcal{L}$, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$

$$\sup\{\varphi(E_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} < \infty;$$

– равномерно ограничены на спектрах класса $\mathcal{L}$, если существует такое число $L > 0$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ существует такой номер n_0 (зависящий от спектра и функции φ), что

$$\sup\{\varphi(E_n),\ n > n_0\} \leq L.$$

Пример 1.19. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на классе $\Sigma(\emptyset \in \Sigma)$, принимают значения в т.а.г. (X, η) $(\varphi(\emptyset) = \Theta)$ и исчерпывающие, то для любой квазинормы $p(x)$, непрерывной на (X, η), функции множества семейства $\{p \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ равномерно ограничены на спектрах класса Σ.

Определение 1.9. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо ограничены на возрастающих (соответственно, убывающих) последовательностях класса $\mathcal{L}$, если для каждой возрастающей (соответственно, убывающей) последовательности множеств $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ существует такое число $L > 0$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует такой номер n_0, что

$$\sup\{\varphi(E_n),\ n > n_0\} \leq L.$$

Пример 1.20. Пусть T – множество натуральных чисел, а класс Σ состоит из пустого множества и тех подмножеств множества T, количество элементов в которых не превосходит 10.

Очевидно, что Σ – m-класс. Определим функцию множества φ на Σ следующим образом: для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0, \text{ если } E = \emptyset, \\ \sum_{k=1}^{m} n_k, \text{ если } E = \{n_1, n_2, ..., n_m\}. \end{cases}$$

Ясно, что функция φ – конечно-аддитивная. Если $\{E_n\}$ – возрастающая или убывающая последовательность множеств из Σ, то

$$E_{n_0} = E_{n_0+1} = ... = E_{n_0+k} = ...,$$

начиная с некоторого номера n_0.

Поэтому функция φ слабо ограничена на монотонных последовательностях.

С другой стороны, возьмем спектр одноэлементных множеств $\{F_n\}$, где $F_n = \{n\}$, $n \in N$. Очевидно, что $\varphi(F_n) = n$, $n \in N$, и функция φ не ограничена на спектрах m-класса Σ. Итак, функция φ слабо ограничена по монотонным последовательностям класса Σ и не ограничена на спектрах класса Σ.

Пример 1.21. Пусть Σ – кольцо измеримых по Лебегу множеств числовой прямой, мера Лебега которых – конечная. Мера Лебега μ на Σ согласована с кольцом Σ, слабо ограничена на убывающих последовательностях кольца Σ, но не является слабо ограниченной на возрастающих последовательностях и не является ограниченной на спектрах кольца Σ.

Пример 1.22. Пусть Σ – кольцо измеримых по Лебегу множеств отрезка $[0, 1]$ таких, что

$$\sup E < 1, \ E \in \Sigma, \ \emptyset \in \Sigma.$$

Пусть μ – мера Лебега на Σ; пусть $y = f(x)$ – некоторая неотрицательная возрастающая функция, заданная на $[0, 1)$, и такая, что

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0,$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty.$$

(Например, $f(x) = \frac{x}{1-x}$).

Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi(E) = f \circ \mu(E).$$

Ясно, что функция множества $\varphi : \Sigma \to R^+$ возрастающая (а тем более, обладает свойством выборки), ограничена на спектрах кольца Σ, но не является слабо ограниченой на возрастающих последовательностях кольца Σ.

Пример 1.23. Пусть Σ – тот же m-класс, что и в примере 1.20. Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0, \text{ если } 1 \notin E, \\ \sum_{k=1}^{m} n_k, \text{ если } E = \{n_1, ..., n_m\} \text{ и } 1 \in E. \end{cases}$$

Функция множества φ – возрастающая, ограничена на спектрах и слабо ограничена на монотонных последовательностях класса Σ.

Пример 1.24. Пусть Σ – класс всех подмножеств множества натуральных чисел. Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0, \text{ если } 1 \notin E, \\ \inf\{n : n \in E \text{ и } n > 1\}, \text{ если } 1 \in E. \end{cases}$$

Очевидно, что функция φ – полуаддитивная (и, следовательно, выпуклая), ограниченная на спектрах класса Σ и не является слабо ограниченной на убывающих последовательностях класса Σ.

Пример 1.25. Пусть Σ – класс всех подмножеств множества натуральных чисел. Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0, \text{ если } E = \emptyset \text{ или } E - \text{бесконечное}, \\ n, \text{ если } E \text{ содержит } n \text{ элементов}. \end{cases}$$

Очевидно, что функция φ – полуаддитивная (и, следовательно, выпуклая), слабо ограниченная на убывающих последовательностях класса Σ, но не ограничена на спектрах класса Σ и не является слабо ограниченной на возрастающих последовательностях класса Σ.

Пример 1.26. Пусть Σ – класс всех подмножеств множества натуральных чисел. Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0, \text{ если } E = \emptyset, \\ \inf E, \text{ если } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Очевидно, что функция φ – полуаддитивная, слабо ограниченная на возрастающих последовательностях, но не ограничена на спектрах и не является слабо ограниченной на убывающих последовательностях.

Пример 1.27. Пусть Σ – класс всех подмножеств множества натуральных чисел. Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0, \text{ если } E = \emptyset \text{ или } E \text{ – бесконечное;} \\ \inf E, \text{ если } E \text{ конечное.} \end{cases}$$

Ясно, что функция φ – полуаддитивная (и, следовательно, выпуклая), слабо ограниченная на убывающих и возрастающих последовательностях класса Σ, но не ограничена на спектрах класса Σ.

Теорема 1.5. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на суммируемом классе Σ. Если выполняются следующие условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно ограничены на спектрах класса Σ;

3) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо ограничены на возрастающих последовательностях класса Σ,

то функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ ограничены на спектрах класса Σ, т.е. для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$

$$\sup\{\varphi(E_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} < \infty.$$

Доказательство теоремы 1.5 опирается на следующую лемму, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 1.1. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, заданные на суммируемом классе Σ, равномерно ограничены на спектрах класса Σ, то существует такое число $L > 0$, что

1) для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ найдется такое число $K \in N$, что для любого конечного множества $J \subset \overline{K, +\infty}$ выполняется соотношение

$$\varphi(\bigcup E_n,\ n \in J) \leq L;$$

2) для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ найдется такой номер n_0, что

$$\sup\{\overline{\varphi}(E_n),\ n > n_0\} \leq L.$$

Доказательство. Выберем число $L > 0$ в силу условия равномерной ограниченности на спектрах класса Σ функций множества семейства Φ. Покажем, что число $L > 0$ искомое.

Пусть $\varphi \in \Phi$ и спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$ такие, что утверждение 1 леммы 1.1 не выполняется. Тогда существует спектр конечных подмножеств $J_k \subset N$ натуральных чисел, для которого

$$\varphi(\bigcup E_n,\ n \in J_k) > L,\ k = 1, 2, ...$$

Положив

$$A_k = \bigcup_{J_k} E_n,\ k = 1, 2, ...,$$

получим спектр из класса Σ, для которого

$$\varphi(A_k) > L,\ k = 1, 2, ...,$$

что противоречит выбору числа L.

Аналогично доказывается вторая часть леммы 1.1.

Приступаем к доказательству теоремы 1.5.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такой спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$, что

$$\sup\{\varphi(E_n),\ \varphi \in \Phi,\ n = 1, 2, ...\} = \infty. \tag{1.4}$$

В силу леммы 1.1 найдем число $L > 0$. По числам $L > 0$ и 1, в силу свойства выборки, найдем число n_1. В силу 1.4 существуют функция $\varphi_1 \in \Phi$ и множество E_{p_1} такие, что $\varphi_1(E_{p_1}) > n_1$. Согласно лемме 1.1 для функции φ_1 и спектра $\{E_n,\ n > p_1\}$ найдем такой номер $K_1 > p_1$, что для любого конечного множества $J \subset \overline{K_1, +\infty}$

$$\varphi_1(\bigcup E_n, n \in J) \leq L.$$

В силу условия 3 теоремы для любого множества $E \in \Sigma$ множество $\Phi(E)$ ограничено, поэтому существует такой номер $n_1^{'}$, что

$$\sup\{\varphi(E_{p_1}),\ \varphi \in \Phi\} \leq n_1^{'}.$$

В силу свойства выборки для чисел L и 2 найдем число n_2'', а по числам n_2'' и n_1' найдем число n_2. Согласно (1.4) существуют функция $\varphi_2 \in \Phi$ и множество E_{p_2} $(p_2 > p_1)$ такие, что $\varphi_2(E_{p_2}) > n_2$.

Найдем такое число n_2', что

$$\sup\{\varphi(E_{p_1} \bigcup E_{p_2}),\ \varphi \in \Phi\} \leq n_2'.$$

Продолжив процесс, по индукции построим последовательности чисел $\{n_m'\}$ и $\{n_m''\}$, спектр $\{E_{n_m}\}$ и последовательность функций $\{\varphi_m\} \subset \Phi$ такие, что

число n_1 находится по числам L и 1;

n_m'' – по числам L и m;

n_m – по числам n_m'' и n_{m-1}';

$$\varphi_m(E_{p_m}) > n_m,\ m = 1, 2, ...$$

$$\sup\{\varphi(\bigcup_{k=1}^{m-1} E_{p_k}),\ \varphi \in \Phi\} \leq n_{m-1}',\ m = 2, 3, ...$$

$\varphi_m(\bigcup E_n,\ n \in J) \leq L$ для любого конечного множества $J \subset$
$\subset \overline{p_{m+1}, \infty}$.

Отсюда получаем

$$\varphi_m(\bigcup_{k=1}^{m} E_{p_k}) > n_m'',\ m = 1, 2, ...$$

Положим

$$A_m = \bigcup_{k=1}^{m} E_{p_k},\ m = 1, 2, ...$$

Следовательно, для $m > n$ получим

$$\varphi_n(A_m) > n,\ n = 1, 2, ...$$

С другой стороны, в силу условия 3) теоремы для возрастающей последовательности множеств $\{A_n\} \subset \Sigma$ существует такое число $L_1 > 0$, что для любой функции φ_n существует номер m_0, для которого

$$\varphi_n(A_m) \leq L_1 \text{при } m > m_0.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему 1.5.

Следствие 1.2. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство функций множества, заданных на алгебре Σ.

Если выполняются следующие условия:

1) функции семейства Φ обладают свойством выборки,

2) функции семейства Φ равномерно ограничены на спектрах алгебры Σ,

3) функции семейства Φ слабо ограничены на возрастающих или убывающих последовательностях множеств алгебры Σ,

то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$

$$\sup\{\varphi(E_n),\ \varphi \in \Phi,\ n = 1, 2, ...\} < \infty.$$

Следствие 1.3. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на суммируемом классе Σ, со значениями в т.а.г. (X, η), причем $\varphi(\emptyset) = \Theta$; пусть $\beta = \{B_n\}$ – о.с. в группе (X, η); пусть, далее,

$$g(x) = \begin{cases} n, \text{ если } x \in B_n \setminus B_{n-1},\ B_0 = \emptyset, \\ \infty, \text{ если } x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \end{cases}$$

Если функции множества семейства $\{g \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ обладают свойством выборки, равномерно ограничены на спектрах класса Σ и слабо ограничены на возрастающих последовательностях класса Σ, то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ множество $\Phi(\{E_n\}) = \{\varphi(E_n),$ $n \in N,\ \varphi \in \Phi\}$ β-ограничено.

Следствие 1.4. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на суммируемом классе Σ и принимают значения в т.а.г (X, η), причем $\varphi(\emptyset) = \Theta$.

Если для любой квазинормы (соответственно, для любой конечной квазинормы) $p(x)$, непрерывной на (X, η), функции множества семейства $\{p \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ обладают свойством выборки, равномерно ограничены на спектрах класса Σ и слабо ограничены на возрастающих последовательностях класса Σ, то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ множество $\Phi(\{E_n\})$ 1-ограничено (соответственно, 2-ограничено).

Следствие 1.5. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на суммируемом классе Σ со значениями в локально-выпуклой в.т.г. (X, η, K); причем $\varphi(\emptyset) = \Theta$. Если для любого линейного непрерывного функционала $f(x)$ на (X, η, K) функции множества семейства $\{f \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ обладают свойством выборки, равномерно ограничены на спектрах класса Σ и слабо ограничены на возрастающих последовательностях класса Σ, то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ множество $\Phi(\{E_n\})$ ограничено в смысле Д. Райкова.

Следствие 1.6. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ – обобщенные внешние меры (в частности, K-внешние меры, аддитивные функции множества), заданные на суммируемом классе Σ, со значениями в т.а.г. (X, η); пусть, далее, $\beta = \{B_n\}$ – о.с. в группе (X, η). Если выполняются следующие условия:

1) существует такой ограничитель $B_{t_1} \in \beta$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ существует номер n_1, для которого

$$\{\varphi(E_n),\ n > n_1\} \subset B_{t_1};$$

2) для любой возрастающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ существует такой ограничитель $B_{t_2} \in \beta$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует номер n_2, для которого

$$\{\varphi(E_n),\ n > n_2\} \subset B_{t_2};$$

то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ множество $\Phi(\{E_n\})$ β-ограничено.

Следствие 1.7. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ – обобщенные внешние меры (в частности, K-внешние меры, аддитивные функции множества), заданные на суммируемом классе Σ, со значениями в т.а.г. (X, η); пусть $V \in \eta$; пусть, далее, $B_n = nV,\ n = 1, 2, \ldots$. Если для о.с. $\beta = \{nV\}$ выполнены условия 1) и 2) следствия 1.6, то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ множество $\Phi(\{E_n\})$ V – 1-ограничено.

1.2.3. Равномерная ограниченность семейства функций множества на m-классе

Напомним, что класс множеств Σ называется m-классом, если он замкнут относительно образования разности.

Теорема 1.6. Для того, чтобы семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$, заданных на m-классе Σ, было равномерно ограничено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ согласованы с классом Σ;

2) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ ограничены на спектрах класса Σ.

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы:

Лемма 1.2. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки на m-классе Σ; пусть (A, B) – некоторая пара из Σ. Если множество $\Phi(A \bigcup B)$ ограничено, а множество $\Phi^{\vee}(A \bigcup B)$ не ограничено, то по крайней мере, одно из множеств $\Phi^{\vee}(A)$ или $\Phi^{\vee}(B)$ неограниченное.

Доказательство. Предположим противное, то есть оба множества $\Phi^{\vee}(A)$ и $\Phi^{\vee}(B)$ – ограниченные.

Пусть

$$\sup\{\varphi(C),\ C \in A \bigcap \Sigma,\ \varphi \in \Phi\} \le n_1, \tag{1.5}$$

$$\sup\{\varphi(C),\ C \in B \bigcap \Sigma,\ \varphi \in \Phi\} \le n_1. \tag{1.6}$$

По условию

$$\sup\{\varphi(A \bigcup B),\ \varphi \in \Phi\} \le n_2. \tag{1.7}$$

В силу свойства выборки по числам n_1 и n_2 найдем число m_1, а по числам n_1 и m_1 найдем число m_2. Так как множество $\Phi^{\vee}(A \bigcup B)$ не ограниченное, то существуют функция $\varphi_1 \in \Phi$ и множество $C_1 \in (A \bigcup B) \bigcap \Sigma$ такие, что

$$\varphi_1(C_1) > m_2. \tag{1.8}$$

Положим

$$A_1 = A \setminus C_1 \text{ и } A_2 = B \setminus C_1.$$

Ясно, что $A_k \in \Sigma,\ k = 1, 2$.

Из (1.5) и (1.8) в силу выбора числа m_2 получим

$$\varphi_1(A_1 \bigcup C_1) > m_1. \tag{1.9}$$

Из (1.6) и (1.9) в силу выбора числа m_1 получим

$$\varphi_1(A_1 \bigcup C_1 \bigcup A_2) > n_2,$$

что противоречит (1.7), так как

$$A_1 \bigcup C_1 \bigcup A_2 = A \bigcup B.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму 1.2.

Лемма 1.3. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки на m-классе Σ.

Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ ограничены на спектрах класса Σ, то для любого множества $E \in \Sigma$ множество $\Phi^{\vee}(E)$ ограничено.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такое множество $E_0 \in \Sigma$, что

$$\sup\{\varphi(C),\ C \in E_0 \bigcap \Sigma\} = \infty. \tag{1.10}$$

Так как функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ ограничены на спектрах класса Σ, то существует такое число n_1, что

$$\sup\{\varphi(E_0),\ \varphi \in \Phi\} \leq n_1. \tag{1.11}$$

В силу свойства выборки для чисел n_1 и 1 найдем число m_1.

В силу (1.10) существуют функция $\varphi_1 \in \Phi$ и множество $C_1 \in$ $\in E_0 \bigcap \Sigma$ такие, что

$$\varphi_1(C_1) > m_1. \tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12), в силу выбора числа m_1 получаем

$$\varphi_1(E_0 \setminus C_1) > 1. \tag{1.13}$$

Согласно лемме 1.2, хотя бы одно из множеств $\Phi^{\vee}(E_0 \setminus C_1)$ и $\Phi^{\vee}(C_1)$ не ограничено. Обозначим через E_1 то из множеств $(E_0 \setminus C_1)$ и C_1, для которого множество $\Phi^{\vee}(E_1)$ не ограничено, а второе обозначим через F_1.

Из (1.12) и (1.13) следует, что $\varphi_1(F_1) > 1$.

Повторив наше рассуждение для множества E_1 вместо множества E_0 и для числа 2 вместо числа 1, построим непересекающиеся множества $E_2 \in E_1 \bigcap \Sigma$ и $F_2 \in E_1 \bigcap \Sigma$ и функцию $\varphi_2 \in \Phi$, для которых $\varphi_2(F_2) > 2$ и множество $\Phi^\vee(E_2)$ – не ограниченное. Продолжив процесс, по индукции построим спектр $\{F_n\} \subset \Sigma$, для которого

$$\sup\{\varphi(F_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} = \infty,$$

что противоречит условию леммы 1.3.

Лемма 1.4. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ ограничены на спектрах класса Σ, то для любого множества $E \subset T$ существует такой конечный спектр $E_1, ..., E_n$ из Σ, что множество $\Phi^\vee(E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k)$ ограниченное.

Доказательство леммы ввиду простоты опускаем.

Переходим к доказательству теоремы 1.6.

Доказательство. В силу леммы 1.4 существует конечный набор попарно непересекающихся множеств $E_1, ..., E_m$ из Σ таких, что множество $\Phi^\vee(T \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k)$ – ограниченное. Следовательно, существует такое число n_2, что

$$\sup\{\varphi(C),\ \varphi \in \Phi,\ C \in (T \setminus \bigcup_{k=1}^{m} E_k) \bigcap \Sigma\} \leq n_2. \tag{1.14}$$

В силу леммы 1.3 можем считать, что

$$\sup\{\varphi(C),\ \varphi \in \Phi,\ C \in E_k \bigcap \Sigma\} \leq n_2,\ k = \overline{1, m}. \tag{1.15}$$

В силу свойства выпуклости функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ из (1.15) получаем

$$\sup\{\varphi(A),\ \varphi \in \Phi,\ A \in \{\bigcup_{k=1}^{m} E_k) \bigcap \Sigma\} \leq n_3. \tag{1.16}$$

Из (1.14) и (1.16) в силу свойства выпуклости получаем

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} \leq n_4.$$

Достаточность доказана. Необходимость очевидна.

Замечание 1.5. При нарушении любого из условий в теореме 1.6 утверждение будет неверно.

Пример 1.28. В примере 1.20 построена неограниченная функция множества φ, согласованная с m-классом Σ, слабо ограниченная на монотонных последовательностях, но не ограниченная на спектрах класса Σ.

В примере 1.22 построена неограниченная функция множества, которая обладает свойством выборки, ограничена на спектрах кольца Σ, но не является слабо ограниченной на возрастающих последовательностях кольца Σ.

Пример 1.29. В примере 1.21 построена неограниченная функция φ, заданная на m-классе Σ, согласованная с классом Σ и не ограниченная на спектрах класса Σ.

В примере 1.23 построена неограниченная функция φ, заданная на m-классе Σ, ограниченная на спектрах класса Σ, у которой нарушено условие согласованности с классом Σ (есть свойство выборки, но функция φ не обладает условием выпуклости).

В примере 1.24 построена неограниченная функция множества φ, заданная на σ – алгебре Σ, ограниченная на спектрах класса Σ, у которой нарушено условие согласованности с классом Σ (есть условие выпуклости, но функция φ не обладает условием выборки).

Замечание 1.6. В теореме 1.6 нельзя условие ограниченности по спектрам заменить условием: для любой монотонной последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$

$$\sup\{\varphi(E_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} < \infty \tag{1.17}$$

(см.пример 1.21).

Теорема 1.7. Для того, чтобы семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$, заданных на m-классе Σ, было равномерно ограничено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладали свойством выпуклости;

2) для любого спектра и для любой убывающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ выполнялось соотношение (1.17).

Доказательство теоремы 1.7 опирается на следующие леммы.

Лемма 1.5. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ и обладают свойством выпуклости; пусть пара $(A, B) \in \Sigma$.

Если множество $\Phi^{\vee}(A \bigcup B)$ неограниченное, то, по крайней мере, одно из множеств $\Phi^{\vee}(A)$ или $\Phi^{\vee}(B)$ неограниченное.

Доказательство леммы 1.5 проводится от противного.

Лемма 1.6. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ и обладают свойством выпуклости.

Если для любого спектра и для любой убывающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение (1.17), то для любого множества $E \in \Sigma$ множество $\Phi^{\vee}(E)$ ограничено.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такое множество $E_1 \in \Sigma$, что

$$\sup\{\varphi(A),\ \varphi \in \Phi,\ A \in E_1 \bigcap \Sigma\} = \infty.$$

Следовательно, существуют функция $\varphi_1 \in \Phi$ и множество $A_1 \in \Sigma$, для которых

$$A_1 \subset E_1 \text{ и } \varphi_1(A_1) > 1.$$

Возможны два случая:

а) либо множество $\Phi^{\vee}(A_1)$ ограниченное,

б) либо множество $\Phi^{\vee}(A_1)$ неограниченное.

В первом случае положим $E_2 = E_1 \setminus A_1$, а во втором – $E_2 = A_1$.

В силу леммы 1.5 множество $\Phi^{\vee}(E_2)$ неограниченное.

Продолжив процесс по индукции, построим последовательность множеств $\{A_n\} \subset \Sigma$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, для которых

$$\varphi_n(A_n) > n,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.18}$$

Первый случай может повториться лишь конечное число раз, так как в противном случае будет построен спектр $\{A_{n_k}\} \subset \Sigma$, для которого

$$\varphi_{n_k}(A_{n_k}) > n_k,$$

что противоречит условию леммы.

Следовательно, начиная с некоторого номера, последовательность $\{A_n\}$ убывающая и выполняется условие (1.18), что противоречит условию леммы. Полученное противоречие и доказывает лемму 1.6.

Доказательство теоремы 1.7 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1.6, только вместо леммы 1.2 применяем лемму 1.5.

Теорема 1.7 доказана.

Замечание 1.7. При нарушении любого условия в теореме 1.7 утверждение будет неверно.

Пример 1.30. В примере 1.20 построена неограниченная функция φ, заданная на m-классе Σ, обладающая условием выпуклости, не ограниченная на спектрах Σ и для любой монотонной последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение (1.17).

В примере 1.23 построена неограниченная функция φ, заданная на m-классе Σ, не обладающая условием выпуклости, для любой убывающей последовательности множеств и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение (1.17).

В примере 1.24 построена неограниченная функция φ, заданная на σ-алгебре, обладающая условием выпуклости; ограниченая на спектрах, не ограниченная на убывающих последовательностях из Σ.

Замечание 1.8. Очевидным образом (как и для теоремы 1.6) получаем приложение теоремы 1.7 к различным конкретным классам функций множества.

1.2.4. Равномерная ограниченность семейства функций множества на кольце

Теорема 1.8. Для того чтобы семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$, заданных на кольце Σ, было равномерно ограничено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) для любой возрастающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$

$$\sup\{\varphi(E_n), \varphi \in \Phi, n \in N\} < \infty. \tag{1.19}$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение (1.19).

Предположим противное. Тогда существует такой спектр $\{A_n\} \subset \Sigma$, что

$$\sup\{\varphi(A_n), \varphi \in \Phi, n \in N\} = \infty. \tag{1.20}$$

Положим $F_0 = A_1$ и найдем такое число m_1, что

$$\sup\{\varphi(F_0), \varphi \in \Phi\} \leq m_1. \tag{1.21}$$

В силу свойства выборки, для чисел 1 и m_1 найдем число k_1. Согласно (1.20), существуют функция $\varphi_1 \in \Phi$ и множество $A_{n_1} (n_1 > 1)$ такие, что

$$\varphi_1(A_{n_1}) > k_1.$$

Положим $F_1 = F_0 \bigcup A_{n_1}$. Из (1.21), в силу выбора числа k_1, следует $\varphi_1(F_1) > 1$.

Найдем число m_2, для которого

$$\sup\{\varphi(F_1), \varphi \in \Phi\} \leq m_2,$$

и для чисел 2 и m_2, в силу свойства выборки, найдем число k_2.

Найдем функцию $\varphi_2 \in \Phi$ и множество $A_{n_2} (n_2 > n_1)$ такие, что $\varphi_2(A_{n_2}) > k_2$. Положив $F_2 = F_1 \bigcup A_{n_2}$, получим

$$\varphi_2(F_2) > 2.$$

Продолжив процесс по индукции, построим возрастающую последовательность множеств $\{F_n\} \subset \Sigma$, для которой

$$\varphi_n(F_n) > n, \ n = 1, 2, ...,$$

что противоречит условию (1.19). Полученное противоречие и доказывает, что для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение (1.19).

В силу леммы 1.3, для любого множества $E \in \Sigma$ множество $\Phi^{\vee}(E)$ ограничено.

Предположим, что множество $\Phi(\Sigma)$ не ограничено. Тогда существуют функция $\varphi_1 \in \Phi$ и множество $E_1 \in \Sigma$ такие, что $\varphi_1(E_1) > 1$. Положим $B_1 = E_1$. Найдем такое число m_1, что

$$\sup\{\varphi(A),\ \varphi \in \Phi,\ A \in B_1 \bigcap \Sigma\} \leq m_1. \tag{1.22}$$

Для чисел 2 и m_1, в силу свойства выборки, найдем число k_1. По предположению, существуют функция $\varphi_2 \in \Phi$ и множество $E_2 \in \Sigma$ такие, что $\varphi_2(E_2) > k_1$. Положим $B_2 = B_1 \bigcup E_2$. В силу выбора числа k_1, получаем из (1.22)

$$\varphi_2(B_2) > 2.$$

Найдем такое число m_2, что

$$\sup\{\varphi(A),\ \varphi \in \Phi,\ A \in B_2 \bigcap \Sigma\} \leq m_2.$$

Для чисел 3 и m_2, в силу свойства выборки, найдем число k_2.
Пусть

$$\varphi_3(E_3) > k_2.$$

Положим $B_3 = B_2 \bigcup E_3$.
Так как

$$\varphi_3((E_1 \bigcup E_2) \setminus E_3) \leq m_2 \text{ и } \varphi_3(E_3) > k_2,$$

то, в силу выбора числа k_2, получаем

$$\varphi_3(B_3) > 3.$$

Продолжив процесс по индукции, построим возрастающую последовательность множеств $\{B_n\} \subset \Sigma$, для которой

$$\sup\{\varphi(B_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} = \infty,$$

что противоречит условию 2 доказываемой теоремы. Полученное противоречие и доказывает справедливость теоремы 1.8.

Замечание 1.9. Если класс множеств Σ не является кольцом, то даже для семейства аддитивных функций множества аналог теоремы 1.8 не верен (см.пример 1.20).

Замечание 1.10. Теорема 1.8 будет неверна, если в ее формулировке условие выборки заменить на условие выпуклости (см. пример 1.26).

Замечание 1.11. Теорема 1.8 будет неверна, если в ее формулировке вместо возрастающих последовательностей множеств рассматривать убывающие последовательности или спектры (см. пример 1.21).

Таким образом, теорема 1.8 будет неверна, если нарушено хотя бы одно из ее условий.

Следствие 1.8. Для того чтобы семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$, заданных на алгебре Σ, было равномерно ограничено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) для любого спектра (или для любой возрастающей последовательности множеств, или для любой убывающей последовательности множеств) $\{E_n\} \subset \Sigma$ выполняется соотношение (1.19).

Доказательство. Пусть для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение (1.19). Тогда в силу леммы 1.3 множество $\Phi^{\vee}(T)$ ограничено.

Пусть для любой убывающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ выполняется соотношение (1.19).

Проверим, что тогда соотношение (1.19)справеливо для любой возрастающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, и применим теорему 1.8.

Пусть $\{E_n\}$ – некоторая возрастающая последовательность множеств из Σ. Положим $A_n = T \setminus E_n,\ n = 1, 2, ...$

По условию

$$\sup\{\varphi(A_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} \leq m_1,$$

$$\text{и} \tag{1.23}$$

$$\sup\{\varphi(T),\ \varphi \in \Phi,\} \leq m_2.$$

Для чисел m_1 и m_2, в силу свойства выборки, найдется число k. Тогда из (1.23) следует

$$\sup\{\varphi(E_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} \leq k.$$

В силу теоремы 1.8 множество $\Phi(\Sigma)$ ограничено.

Следствие 1.9. Для того чтобы семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$, заданных на σ-кольце Σ, было равномерно ограничено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) для любого спектра (или для любой возрастающей последовательности множеств, или для любой убывающей последовательности множеств) $\{E_n\} \subset \Sigma$ выполняется соотношение (1.19).

Замечание 1.12. Очевидным образом результаты раздела 1.2.4 формулируются для группо-значных функций множества.

1.2.5. Равномерная ограниченность «поточечно» ограниченного семейства функций множества

Вообще говоря, даже для семейства неотрицательных мер, заданных на кольце, теорема Никодима неверна [96].

Пример 1.31. Пусть Σ - класс всех конечных подмножеств множества натуральных чисел, пусть $\emptyset \in \Sigma$. На кольце Σ определим последовательность мер $\{\mu_n\}$ следующим образом: положим для $E \in \Sigma$ и $n \in N$

$$\mu_n(E) = \begin{cases} n, & \text{если } n \in E, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что для любого множества $E \in \Sigma$

$$\sup\{\mu_n(E),\ n \in N\} < \infty.$$

С другой стороны,

$$\sup\{\mu_n(E),\ E \in \Sigma,\ n \in N\} = \infty,$$

так как

$$\mu_n(E_n) = n,$$

где E_n есть одноточечное множество $\{n\}$, $n \in N$.

Естественно возник вопрос о существовании некоторых условий, наложенных на кольцо, более слабых, чем замкнутость кольца Σ относительно счетного объединения, при выполнении которых теорема Никодима будет верна. Для семейства мер этот вопрос рассматривался, например, в работах [146, 147, 148, 127, 92] и др.

Предлагаемые в этих работах условия являются более сильными, чем предложенное в работе [86] условие (f_1), которое мы и используем в дальнейшем.

Определение 1.10. Говорят [86], что класс множеств Σ обладает (f_1)-свойством, если для любых двух спектров $\{E_n\} \subset \Sigma$ и $\{F_n\} \subset \Sigma$ таких, что $E_n\, F_k = \emptyset$, $k, n \in N$, существуют бесконечное множество номеров $J \subset N$ и множество $F \in \Sigma$ такие, что

$$F_k \subset F \text{ для } k \in J,\ F_k F = \emptyset \text{ для } k \in N \setminus J,\ E_n F = \emptyset,\ n \in N.$$

Пример 1.32. Любой σ-суммируемый класс Σ (тем более, σ-кольцо) обладает (f_1)-свойством.

Существует алгебра Σ с (f_1)-свойством, которая не является σ-алгеброй.

Пример 1.33. Рассмотрим булеву алгебру

$$\overline{A} = 2^N/\Delta,$$

где Δ – идеал, образованный всевозможными конечными подмножествами множества натуральных чисел N.

Пусть $\{\overline{E_n}\}$ и $\{\overline{F_n}\}$ – спектры из $\overline{A}$ такие, что $\overline{E_k} \wedge \overline{F_n} = \overline{\emptyset}$ при всех k и $n \in N$.

Возьмем $E_n \in \overline{E_n}$ и $F_n \in \overline{F_n}$ при всех $n \in N$.

Положим

$$\mathcal{D}_1 = F_1,\ C_1 = E_1 \setminus F_1;$$

$$\mathcal{D}_2 = F_2 \setminus (F_1 \bigcup E_1),\ C_2 = E_2 \setminus (F_1 \bigcup F_2 \bigcup E_1),$$

....

$$\mathcal{D}_n = F_n \setminus \left((\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \right),$$

$$C_n = E_n \setminus \left((\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \right), ..., \ n = 1, 2, ...$$

Получили спектры $\{C_n\}$ и $\{\mathcal{D}_n\}$ из 2^N, для которых

$$C_n \bigcap \mathcal{D}_k = \emptyset, \ k, n \in N.$$

Очевидно, $C_n \in \overline{E_n}$ и $\mathcal{D}_n \in \overline{F_n}$, $n \in N$, так как они отличаются, соответственно, от E_n и F_n не более, чем на конечное число элементов. Положим

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n.$$

Рассмотрим класс $\overline{F} \in \overline{\mathcal{A}}$.

Очевидно, $\overline{F} \geq \overline{F_n}$ и $\overline{F} \wedge \overline{E_n} = \emptyset$ при всех $n \in N$. Отсюда следует, что алгебра открыто-замкнутых множеств реализующего стоуновского компакта булевой алгебры $\overline{\mathcal{A}}$ обладает (f_1)-свойством.

Пусть $\{E_n\}$ – некоторый спектр бесконечных множеств из 2^N.

Покажем, что спектр $\{\overline{E_n}\} \subset \overline{\mathcal{A}}$ не имеет наименьшей верхней грани в $\overline{\mathcal{A}}$.

Пусть $\overline{E} \in \overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{E} \geq \overline{E_n}$ при всех $n \in N$. Возьмем $E \in \overline{E}$. Для любого $n \in N$ зафиксируем натуральное число $m_n \in E_n \bigcap E$, получим последовательность попарно различных натуральных чисел $C = \{m_n\}$.

Положим

$$A = E \setminus C.$$

Очевидно, что класс $\overline{A}$ является верхней гранью $\{\overline{E_n}\}$, которая строго меньше $\overline{E}$. Следовательно, алгебра открыто-замкнутых множеств реализующего стоуновского компакта булевой алгебры $\overline{\mathcal{A}}$ не является σ – алгеброй множеств.

Лемма 1.7. Пусть класс Σ обладает (f_1)-свойством. Если $\{E_n\}$ некоторый спектр из Σ, то существуют спектр бесконечных подмножеств $\{J_n\}$ множества натуральных чисел и спектр $\{F_k\} \subset \Sigma$ такие, что $E_n \subset F_k$ для всех $n \in J_k$, $k = 1, 2, ...$.

Доказательство. Пусть $\{N_k\}$ – такой спектр бесконечных подмножеств множества натуральных чисел, что

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k.$$

В силу (f_1)-свойства существуют бесконечное подмножество натуральных чисел $J_1 \subset N_1$ и множество $F_1 \in \Sigma$ такие, что $E_n \subset F_1$ для всех $n \in J_1$ и

$$E_n \bigcap F_1 = \emptyset, \text{ если } n \in \bigcup_{k=2}^{\infty} J_k.$$

Аналогично найдем бесконечное подмножество натуральных чисел $J_2 \subset N_2$ и множество $F_2 \in \Sigma$ такие, что $F_1 \bigcap F_2 = \emptyset$; $E_n \subset F_2$ для $n \in J_2$; $E_n \bigcap F_2 = \emptyset$, если $n \in \bigcup\limits_{k=3}^{\infty} J_k$. Процесс продолжим неограниченно.

Лемма 1.8. Пусть Σ – m-класс со свойством (f_1); пусть $\{E_n\}$ – некоторый спектр из Σ; пусть $\{J_i\}$ – убывающая последовательность бесконечных множеств натуральных чисел, таких что

$$\min J_i \notin J_{i+1},\ i = 1, 2, ...$$

Пусть $\{F_i\}$ – убывающая последовательность множеств из Σ, для которой $E_n \subset F_i$, если $n \in J_i$, $i = 1, 2, ...$

Обозначим $n_i = \min J_i$, $i \in N$.

Тогда существуют последовательность $\{i_j\}$ натуральных чисел и множество $F \in \Sigma$ такие, что

$$E_{n_{i_j}} \subset F \text{и } (F \setminus \bigcup_{k=1}^{j} E_{n_{i_k}}) \subset F_{i_{j+1}},\ j = 1, 2, ...$$

Доказательство. Будем считать, что $F_i \bigcap E_n = \emptyset$ при всех $n < n_i$ (этого всегда можно добиться, заменив F_i на множество

$$F_i \setminus (\bigcup_{k=1}^{n_i - 1} E_k),\ i \in N.$$

Положим

$$\mathcal{D}_i = F_i \setminus (F_{i+1} \bigcup E_{n_i}),\ i \in N).$$

Рассмотрим два спектра $\{\mathcal{D}_k\}$ и $\{E_{n_i}\}$. Очевидно, что

$$\mathcal{D}_k E_{n_i} = \emptyset \text{ при всех } k, i \in N.$$

В силу (f_1)-свойства, существуют бесконечное множество номеров $\mathcal{P} = \{i_j\}$ и множество $F \in \Sigma, F \subset F_1$ такие, что

$$E_{n_i} \subset F \text{ при всех } i \in \mathcal{P}$$

и

$$\mathcal{D}_k F = E_{n_i} F = \emptyset \text{ при всех } k \in N,\ i \in N \setminus \mathcal{P}.$$

Заметим, что множество

$$F \setminus (E_{n_{i_1}} \bigcup ... \bigcup E_{n_{i_j}})$$

содержится в F_1 и дизъюнктно со всеми множествами

$$\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_{i_j}, E_{n_1}, ..., E_{n_{i_j}}.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{D}_1 \bigcup ... \bigcup \mathcal{D}_{i_j} \bigcup E_{n_1} \bigcup ... \bigcup E_{n_{i_j}} = F_1 \setminus F_{i_j+1}.$$

Тогда

$$F \setminus (E_{n_{i_1}} \bigcup ... \bigcup E_{n_{i_j}}) \subset F_{i_j+1},\ j \in N.$$

Теорема 1.9. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на кольце Σ с (f_1)-свойством.

Пусть выполнены следующие условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно ограничены на спектрах класса Σ;

3) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ «поточечно» ограничены, т.е. для любого множества $E \in \Sigma$

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi\} < \infty.$$

Тогда функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ ограничены на спектрах кольца Σ.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такой спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$, что

$$\sup\{\varphi(E_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} = \infty. \tag{1.24}$$

Следовательно, существуют функция $\varphi_1 \in \Phi$ и множество E_{n_1} такие, что

$$\varphi_1(E_{n_1}) > 1.$$

В силу условия 3) теоремы существует такое число k_1', что

$$\sup\{\varphi(E_{n_1}),\ \varphi \in \Phi\} \le k_1'.$$

В силу свойства выборки, для чисел k_1' и 2 найдем число k_2. Согласно (1.24), существуют функция $\varphi_2 \in \Phi$ и множество E_{n_2}, где $n_2 > n_1$, такие, что

$$\varphi_2(E_{n_2}) > k_2.$$

Найдем такое число k_2', что для любого $J \subset \{1, 2\}$

$$\sup\{\varphi(\bigcup_{i\in J} E_{n_i}),\ \varphi \in \Phi\} \le k_2'.$$

Для чисел k_2' и 3 в силу свойства выборки найдем число k_3.

По индукции построим последовательности чисел $\{k_p\}$, $\{k_p'\}$, спектр $\{E_{n_p}\}$ и последовательность функций $\{\varphi_p\} \subset \Phi$ такие, что $k_1 = 1$, число k_p находится для чисел p и k_{p-1}' в силу свойства выборки, для любого множества $J \subset \{1, 2, ..., m\}$ выполняется

$$\sup\{\varphi(\bigcup_{p\in J} E_{n_p}),\ \varphi \in \Phi\} \le k_m',\ m = 1, 2, 3, ...,$$

далее,

$$\varphi_p(E_{n_p}) > k_p,\ p = 1, 2, ...$$

Следовательно, для любого множества $J \subset \{1, 2, ..., p-1\}$

$$\varphi_p((\bigcup_{i\in J} E_{n_i}) \bigcup E_{n_p}) > p,\ p = 1, 2, ...$$

Положим

$$A_p = E_{n_p},\ p = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, построим последовательность функций $\{\varphi_p\} \subset \Phi$ и спектр $\{A_p\} \subset \Sigma$ такие, что для любого множества $J \subset \{1, 2, \ldots, p-1\}$

$$\varphi_p((\bigcup_{k \in J} A_k) \bigcup A_p) > p,\ p = 1, 2, \ldots \tag{1.25}$$

В силу свойства (f_1), существуют бесконечное подмножество $J_1 \subset N$ и множество $F_1 \in \Sigma$ такие, что $A_p \bigcap F_1 = \emptyset$, если $p \in N \setminus J_1$. Положим $p_1 = \min J_1$. В силу леммы 1.3 найдем число $L > 0$. В силу леммы 1.6, существуют бесконечное множество $J_2 \subset J_1$ натуральных чисел, где $\min J_2 > p_1$, и множество $F_2 \in \Sigma$ такие, что $F_2 \subset F_1$, $\widetilde{\varphi}_{p_1}(F_2) \leq L$ и $A_p \subset F_2$, если $p \in J_2$.

Продолжив процесс по индукции, построим убывающую последовательность бесконечных множеств натуральных чисел $\{J_k\}$, убывающую последовательность множеств $\{F_k\} \subset \Sigma$ такие, что

$$A_p \subset F_k, \text{ если } p \in J_k,$$

$$\widetilde{\varphi}_{p_k}(F_{k+1}) \leq L,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{1.26}$$

В силу леммы 1.8, существуют множество $F \in \Sigma$ и спектр $\{A_{p_{k_i}}\}$ такие, что

$$A_{p_{k_j}} \subset F,\ F \setminus \bigcup_{i=1}^{j} A_{p_{k_i}} \subset F_{k_j+1},\ j = 1, 2, \ldots.$$

Положим

$$C_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_{p_{k_i}},\ \mathcal{P}_j = F \setminus C_j,\ j = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, что

$$F = C_j \bigcup \mathcal{P}_j,\ \mathcal{P}_j \subset F_{k_j+1},\ j = 1, 2, \ldots.$$

Согласно (1.25) и (1.26), получим

$$\varphi_{p_{k_j}}(C_j) > k_j, \ j = 1, 2, ...,$$

$$\tilde{\varphi}_{p_{k_j}}(\mathcal{P}_j) \leq L, \ j = 1, 2, ...$$

Следовательно, в силу свойства выборки

$$\sup\{\varphi_{p_{k_j}}(F), \ j = 1, 2, ...\} = \infty,$$

что противоречит условию 3 доказываемой теоремы.

Полученное противоречие и доказывает теорему 1.9.

Теорема 1.10. Пусть Σ – σ-суммируемый класс; $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство функций множества, заданных на Σ. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) функции множества семейства Φ равномерно ограничены на спектрах класса Σ;

3) семейство функций $\Phi = \{\varphi\}$ «поточечно» ограничено.

Тогда функции семейства Φ ограничены на спектрах класса Σ.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ – некоторый спектр из Σ. Обозначим через S σ-кольцо, порожденное спектром $\{E_n\}$. Так как $S \subset \Sigma$, то на S выполнены все условия теоремы 1.9.

Следовательно,

$$\sup\{\varphi(E_n), \ \varphi \in \Phi, \ n \in M\} < \infty.$$

Замечание 1.13. Даже для семейства конечных неотрицательных σ-аддитивных функций множества, заданных на σ-суммируемом классе, из «поточечной» ограниченности, вообще говоря, не следует равномерная ограниченность этого семейства функций множества.

Пример 1.34. Пусть Σ – класс всех открытых подмножеств интервала $(0, 1)$. Ясно, что Σ – σ-суммируемый класс. Положим

$$T = (0, 1), \ E_n = (0, \frac{n}{n+1}), \ n = 1, 2, ...$$

Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\mu_1(E) = \begin{cases} 1, \text{ если } E = T, \\ 1, \text{ если } E \neq T \text{ и } E \supset E_1, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее,

$$\mu_n(E) = \begin{cases} 1, \text{ если } E = T, \\ 1, \text{ если } E \neq T, \ E \supset E_{n-1} \text{и } E \not\supset E_n, \\ n, \text{ если } E \supset E_n. \\ 0, \text{ в остальных случаях, } n = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Легко видеть, что каждая функция μ_n счетно-аддитивная на Σ и для любого множества $E \in \Sigma$

$$\sup\{\mu_n(E), \ n = 1, 2, ...\} < \infty.$$

Таким образом, для функций множества последовательности $\{\mu_n\}$ выполнены все условия теоремы 1.10, но

$$\sup\{\mu_n(E), \ E \in \Sigma, \ n \in N\} = \infty.$$

Следствие 1.10. Пусть кольцо Σ обладает свойством (f_1). Для того чтобы семейство $\Phi = \{\varphi\}$ функций множества, заданных на Σ, было равномерно ограничено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ согласованы с кольцом Σ,

2) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно ограничены на спектрах класса Σ,

3) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ «поточечно» ограничены на классе Σ.

Справедливость утверждения следует из теорем 1.6 и 1.9.

Следствие 1.11. Пусть Σ – кольцо со свойством (f_1); пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f-композиционные (тем более, аддитивные), заданные на кольце Σ, со значениями в квазинормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Для того чтобы

$$\sup\{\|\varphi(E)\|, \ \varphi \in \Phi, \ E \in \Sigma\} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) функции семейства Φ равномерно ограничены на спектрах;

2) функции семейства Φ «поточечно» ограничены на Σ.

Следствие 1.12. Пусть Σ – кольцо со свойством (f_1); пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f-композиционные, исчерпывающие, определенные на Σ, со значениями в квазинормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$.

Если для любого множества $E \in \Sigma$

$$\sup\{\|\varphi(E)\|, \varphi \in \Phi\} < \infty,$$

то

$$\sup\{\|\varphi(E)\|, \varphi \in \Phi, \; E \in \Sigma\} < \infty.$$

Естественным образом результаты этого пункта работы применяются к группо-значным функциям множества с тем или иным определением ограниченного множества в группе,например:

Следствие 1.13. Пусть Σ – кольцо со свойством (f_1); функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ – исчерпывающие обобщенные внешние меры, заданные на Σ, со значениями в т.а.г. (X, η).

Если для любого множества $E \in \Sigma$ множество $\Phi(E)$ ограничено в каком-либо смысле (β-ограничено; 1-ограничено; 2-ограничено), то множество $\Phi(\Sigma)$ ограничено в соответствующем смысле.

Следствие 1.14. Пусть Σ – кольцо со свойством (f_1); пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ – исчерпывающие, обобщенные внешние меры (тем более, k-внешние меры, аддитивные функции множества), заданные на Σ, со значениями в локально-выпуклой в.т.г. (X, η, K). Если для любого множества $E \in \Sigma$ множество $\Phi(E)$ ограничено в смысле Д. Райкова, то множество $\Phi(\Sigma)$ ограничено в этом смысле.

Основные результаты этой главы опубликованы нами в работах [184, 185, 192].

ГЛАВА 2
РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

2.1. Постановка задачи

Наиболее значительные результаты в теории счетно-аддитивных функций множества тесно связаны с различными понятиями равномерной непрерывности семейства мер: равномерной аддитивности, равномерной непрерывности, равностепенной слабой непрерывности и равномерной исчерпываемости.

В случае скалярных мер, заданных на σ-алгебре, эти понятия были введены, соответственно, В.М. Дубровским [42, 45], Р. Каччиопполи [91], Г.Я. Арешкиным [24] и А.Д. Александровым [1].

Напомним эти определения.

Говорят, что меры семейства $\Phi = \{\varphi\}$, заданные на σ-алгебре Σ,

– равномерно аддитивные на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$

$$\lim_n \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(E_k) = 0$$

равномерно относительно $\varphi \in \Phi$ (пишем $(PA)_{\mathcal{L}}$);

– равномерно непрерывные на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$, сходящейся к пустому множеству,

$$\lim \varphi(E_n) = 0 \tag{2.1}$$

равномерно относительно $\varphi \in \Phi$ (пишем $(PH_{\mathcal{L}})$;

– равностепенно слабо непрерывные на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если для любого локализатора $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ справедливо (2.1) (пишем $PCH_{\mathcal{L}}$);

– равномерно исчерпывающие на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ справедливо (2.1) (пишем $(P\mathcal{U})_{\mathcal{L}}$).

Выявлением связи между различными формами равномерной непрерывности семейства мер занимались многие авторы как у нас, так и за рубежом [26, 90, 140] и т.д.

В работе [26] Г.Я. Арешкин сформулировал две задачи:

а) о соотношении между различными формами равномерной непрерывности семейства мер $\Phi = \{\varphi\}$ на классе множеств $\mathcal{L}$, который не является σ-кольцом;

б) о возможности продолжения того или иного свойства равномерной непрерывности семейства мер с кольца Σ на σ-кольцо $S = S(\Sigma)$, порожденное кольцом Σ.

В работе [26] Г.Я. Арешкин доказал, что для семейства $\Phi = \{\varphi\}$ неотрицательных, равномерно ограниченных мер, заданных на σ-кольце $S = S(\Sigma)$, порожденном счетным кольцом Σ, справедлива импликация

$$(PA)_\Sigma \Rightarrow (PA)_S.$$

В этой же работе Г.Я. Арешкин отмечает, что даже при тех же предложениях условия $(PA)_\Sigma$ и $(PCH)_\Sigma$ не равносильны, а именно, справедлива импликация

$$(PA)_\Sigma \Rightarrow (PCH)_\Sigma,$$

но обратное утверждение неверно. Позднее В.Н. Алексюк [6] снимает в теореме Г.Я. Арешкина предположение о равномерной ограниченности семейства мер, а именно доказывает следующую теорему:

Теорема 2.1. Для семейства $\Phi = \{\varphi\}$ конечных неотрицательных мер, заданных на σ-кольце $S = S(\Sigma)$, порожденном кольцом Σ, следующие условия $(PA)_\Sigma$, $(PA)_S$, $(PH)_S$, $(PH)_\Sigma$, $(P\mathcal{U})_\Sigma$, $(P\mathcal{U})_S$, $(PCH)_S$ равносильны.

В работе [159] этот результат был распространен на случай векторно-значных мер со значениями в банаховом пространстве, а в работе [140] на векторнозначные меры со значениями в т.а.г. (X, η).

Естественно, для семейства произвольных функций множества понятие равномерной аддитивности теряет смысл, но тем больший интерес представляют понятия равномерной непрерывности, равностепенной слабой непрерывности и равномерной исчерпываемости.

Так в работе [81] Дж.К. Брукс и в работе [172] автор изучают возможность продолжения свойства равномерной исчерпываемости с кольца Σ на порожденное σ-кольцо $S = S(\Sigma)$ для семейства конечно-аддитивных функций множества со значениями, соответственно, в B-пространстве и т.а.г. (X, η).

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, Σ-некоторый класс подмножеств множества $T(\emptyset \in \Sigma)$; $\mathcal{L} \subset \Sigma$ некоторый подкласс класса $\Sigma(\emptyset \in \mathcal{L})$; $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство функций множества заданных на Σ со значениями в $[0, +\infty]$ $(\varphi(\emptyset) = 0)$, $\varphi \in \Phi$.

Определение 2.1. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$:

– равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$ (пишем $((PU)_{\mathcal{L}})$;

– равностепенно слабо непрерывные на $\mathcal{L}$ (пишем $(PCH)_{\mathcal{L}}$);

– равномерно непрерывные на $\mathcal{L}$ (пишем $(PH)_{\mathcal{L}}$), если, соответственно, для любого спектра $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$;

для любого локализатора $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$;

для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$, сходящейся к пустому множеству,

выполняется условие

$$\lim \varphi(E_n) = 0$$

равномерно относительно $\varphi \in \Phi$.

В случае, если семейство Φ состоит из одной функции φ, то будем говорить, соответственно, что функция множества φ:

– исчерпывающая на $\mathcal{L}$;

– непрерывная сверху в нуле на $\mathcal{L}$;

– непрерывная в нуле на $\mathcal{L}$.

Определение 2.2. Будем говорить, что функция множества λ – квазибазис семейства $\Phi = \{\varphi\}$ на $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если из условия $\tilde{\lambda}(E) = 0$, $E \in \mathcal{L}$, следует $\varphi(E) = 0$ для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Определение 2.3. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равностепенно непрерывны на $\mathcal{L}$ относительно функции λ, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого множества $E \in \mathcal{L}$, как только $\tilde{\lambda}(E) < \delta$, так для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(E) < \varepsilon$$

(пишем $\varphi < p_{\mathcal{L}} < \lambda$).

В работе [111] Л. Древновский изучает связь между свойствами $(PCH)_\Sigma$ и $(PU)_\Sigma$ для семейства конечных, монотонных и полуаддитивных функций множества, заданных на σ-кольце Σ.

Аналогичные вопросы изучались Г.Я. Арешкиным и Н.С. Гусельниковым в работе [30] для семейства треугольных функций множества.

В наиболее абстрактном виде аналог свойства PU для функций множества со значениями в произвольном множестве рассматривал В.Н. Алексюк [9].

Замечание 2.1. История вопроса подробно изложена в депонированной статье: Алексюк В.Н. Функции множества IV. Сыктывкар, 1978. 26 с. Рукопись представлена Коми госпединститутом. Деп. в ВИНИТИ, №1355-78.

В этой главе рассматриваются две задачи:

– изучаются соотношения между различными формами равномерной непрерывности $(PU)_\Sigma, (PH)_\Sigma$ и $(PCH)_\Sigma$ функций множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$;

– изучается вопрос о возможности продолжения той или иной формы равномерной непрерывности с класса $\mathcal{L}$ на класс $\Sigma \supset \mathcal{L}$.

2.2. Равномерно квазитреугольные функции множества

Определение 2.4. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно квазитреугольные на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любой пары $(A, B) \in \mathcal{L}$

– если $\varphi(A) \vee \varphi(A \bigcup B) < \delta$, то $\varphi(B) < \varepsilon$;

– если $\varphi(A) \vee \varphi(B) < \delta$, то $\varphi(A \cup B) < \varepsilon$;

Пример 2.1. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f-композиционные, то они равномерно квазитреугольные.

Действительно, для любого числа $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = f^{-1}(\varepsilon/2)$.

Пример 2.2. Если $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство аддитивных функций множества, заданных на Σ, со значениями в т.а.г. (X, η), то для любой квазинормы $p(x)$, непрерывной на (X,η), функции множества $\{p\circ\varphi,\ \varphi\in\Phi\}$ равномерно квазитреугольные.

Действительно, функции множества семейства $\{p\circ\varphi,\ \varphi\in\Phi\}$ f-композиционные, где $f(x)=x$.

Замечание 2.2. Класс равномерно квазитреугольных функций множества ввел и впервые рассмотрел И. Добраков [103].

Пример 2.3. Говорят, что функция множества $\varphi:\Sigma\to(X,\|\cdot\|)$ обладает свойством Орлича, если для любого спектра $\{E_n\}\subset\Sigma$ из условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty}||\varphi(E_n)||<\infty$ следует

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\Sigma \text{ и } \|\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)|\le\sum_{n=1}^{\infty}||\varphi(E_n)||.$$

Очевидно, что если класс Σ замкнут относительно операции пересечения и функция φ обладает свойством Орлича, то и ее супремация $\widetilde{\varphi}$ на классе Σ обладает свойством Орлича.

Если класс Σ замкнут относительно операции пересечения и функции семейства $\Phi=\{\varphi\}$ обладают свойством Орлича на Σ, то супремации семейства $\{\widetilde{\varphi},\varphi\in\Phi\}$ равномерно квазитреугольные.

Действительно, для любого числа $\varepsilon>0$ можно взять $0<\delta<$ $<\varepsilon/2$.

Предложение 2.1. Пусть функции множества семейства $\Phi=\{\varphi\}$ заданы и равномерно квазитреугольные на m-классе $\mathcal{L}$, и $\Sigma=\Sigma(\mathcal{L})$ – кольцо, порожденное классом $\mathcal{L}$.

Супремации семейства $\{\widetilde{\varphi},\varphi\in\Phi\}$ равномерно квазитреугольные на Σ.

Предложение 2.2. Если функции множества семейства $\Phi=\{\varphi\}$, заданные на суммируемом классе Σ, равномерно квазитреугольные, то для любого числа $\varepsilon>0$ существует такая убывающая к нулю последовательность чисел $\{\delta_n\}$, что для любой функции $\varphi\in\Phi$ и для любого спектра $\{E_n\}\subset\Sigma$, если

$$\varphi(E_n)<\delta_n,\ n=1,2,...,$$

то для любых чисел n и $m > n$

$$\varphi(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) < \varepsilon \text{ и } \varphi(\bigcup_{k=n}^{m} E_k) < \delta_{n-1}.$$

Доказательство. Положим

$$\delta_1 = \min(1,\ \varepsilon,\ \delta(\varepsilon)), ...,$$

$$\delta_n = \min(\frac{1}{n},\ \delta_{n-1},\ \delta(\delta_{n-1})),\ n = 2, 3, ...$$

Последовательность чисел $\{\delta_n\}$ искомая.

2.3. Функции множества со свойством исчерпываемости

Лемма 2.1. Пусть Σ – некоторый класс множеств ($\emptyset \in \Sigma$); $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство функций множества, заданных на Σ со значениями в $[0, +\infty]$ ($\varphi(\emptyset) = 0$).

Следующие условия равносильны:

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на классе Σ;

2) супремации семейства $\{\widetilde{\varphi} \in \Phi\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на классе 2^T (всех подмножеств множества T);

3) для любой монотонной последовательности множеств $\{E_n\} \subset 2^T$ и для числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого номера $n > n_0$

$$\widetilde{\varphi}(E_n \Delta E_{n_0}) < \varepsilon;$$

4) для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset 2^T\}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого номера $n > n_0$

$$\widetilde{\varphi}(E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n_0} E_k) < \varepsilon,$$

5) для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset 2^T$ существует такой номер n_0, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого номера $n > n_0$

$$\widetilde{\varphi}(\bigcup_{k=n_0}^{n} E_k) < \varepsilon.$$

Доказательство леммы ввиду простоты опускаем.

Замечание 2.3. Из того, что каждая функция семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладает свойством исчерпываемости, вообще говоря, не следует, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие.

Пример 2.4. Пусть T есть множество натуральных чисел: $\Sigma = 2^T$. Для любого множества $E \subset T$ положим

$$\varphi_n(E) = \begin{cases} 1, \text{ если } n \in E, \\ 0, \text{ если } n \notin E. \end{cases}$$

Ясно, что каждая функция φ_n исчерпывающая.

С другой стороны, меры последовательности $\{\varphi_n\}$ не обладают свойством равномерной исчерпываемости. Действительно, возьмем спектр одноэлементных множеств $E_n = \{n\}$, $n \in N$.

Тогда

$$\lim \varphi_n(E_n) = 1.$$

Лемма 2.2.(Основная лемма). Пусть Σ – некоторый класс множеств. Если каждая функция множества последовательности $\{\varphi_n\}$, заданная на Σ, исчерпывающая, то для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset 2^T$ существует такая строго возрастающая последовательность номеров $\{k_m\}$, что для любого номера $m = 1, 2, \dots$

$$\widetilde{\varphi_n}\Big(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} E_{k_i}) < \frac{\varepsilon}{2^m}, \; n = \overline{1, k_m}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Разобьем спектр $\{E_n\}$ на счетное число попарно непересекающихся подспектров. В силу леммы 2.1

(п.2) супремация $\widetilde{\varphi}_1$ – исчерпывающая на классе 2^T. Поэтому существует такой подспектр $\{E_n^1\}$, что

$$\widetilde{\varphi}_1\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^1\Big) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Пусть $E_{k_1} \in \{E_n^1\}$, $k_1 > 1$. Положим

$$\psi_1(E) = \sum_{p=1}^{k_1} \widetilde{\varphi}_p(E),\ E \subset T.$$

Ясно, что функция ψ_1 – исчерпывающая на 2^T.

К функции ψ_1 и спектру $\{E_n^1\}$ применим предыдущее рассуждение и получим подспектр $\{E_n^2\} \subset \{E_n^1\}$ такой, что

$$\psi_1\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^2\Big) < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Пусть $E_{k_2} \in \{E_n^2\}$, $k_2 > k_1$.

Положим

$$\psi_2(E) = \sum_{p=1}^{k_2} \widetilde{\varphi}_p(E),\ E \subset T.$$

Продолжив процесс, по индукции построим строго возрастающую последовательность чисел $\{k_m\}$, для которой

$$\psi_m(E) = \sum_{p=1}^{k_m} \widetilde{\varphi}_p(E),\ E \subset T.$$

и

$$\psi_m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{m+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}},\ m = 1, 2, ...$$

Пусть $E_{k_m} \in \{E_n^m\}$, $m = 1, 2, ...$

Спектр $\{E_{k_m}\}$ искомый.

Теорема 2.2. Пусть Σ – некоторый класс множеств; функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$, заданные на Σ, конечные и исчерпывающие.

Для того чтобы функции последовательности $\{\varphi_n\}$ обладали свойством равномерной исчерпываемости на Σ, необходимо и достаточно, чтобы для любой подпоследовательности $\{p_k\} \subset N$ функции множества

$$\mu_k(E) = \varphi_{p_k}(E) - \varphi_{p_{k+1}}(E),\ E \in \Sigma$$

обладали свойством равномерной исчерпываемости.

Доказательство. Достаточность. Предположим противное. Тогда существуют спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varphi_n(E_n) > 2\varepsilon,\ n = 1, 2, ... \tag{2.2}$$

Положим $p_1 = 1$. Так как функция φ_{p_1} исчерпывающая, то существует номер $p_2 > p_1$, для которого

$$\varphi_{p_1}(E_{p_2}) < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$|\varphi_{p_2}(E_{p_2}) - \varphi_{p_1}(E_{p_2})| > \varepsilon.$$

Так как функция φ_{p_2} исчерпывающая, то существует номер $p_3 > p_2$, для которого

$$\varphi_{p_2}(E_{p_3}) < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|\varphi_{p_3}(E_{p_3}) - \varphi_{p_2}(E_{p_3})| > \varepsilon.$$

Продолжая процесс, по индукции построим строго возрастающую последовательность номеров $\{p_k\}$ такую, что

$$|\varphi_{p_{k+1}}(E_{p_{k+1}})| - \varphi_{p_k}(E_{p_{k+1}})| > \varepsilon,\ k = 1, 2, ...,$$

что противоречит условию теоремы.

Полученное противоречие и доказывает теорему 2.2, так как необходимость очевидна.

Теорема 2.3. Пусть функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$, заданные на σ-суммируемом классе Σ, равномерно квазитреугольные; пусть, далее, каждая функция φ_n исчерпывающая, $n = 1, 2, ...$

Для того чтобы функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладали свойством равномерной исчерпываемости, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ существовали номера n_0 и k_0 такие, что

$$\varphi_n(E_{k_0}) < \varepsilon,\ n > n_0.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ и спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$, для которых

$$\varphi_n(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, в силу леммы 2.2 можем считать, что

$$\widetilde{\varphi}_m\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right) < \frac{\varepsilon}{2^m},\ m = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

В силу свойства равномерной квазитреугольности для числа $\varepsilon > 0$ найдем число η, и для числа η найдем число $\delta > 0$. В силу предложения 2.2 для числа $\delta > 0$ построим убывающую к нулю последовательность чисел $\{\delta_n\}$.

По условию теоремы существуют номера N_1 и p_1, для которых

$$\varphi_n(E_{p_1}) < \delta_1,\ n > N_1.$$

Аналогично найдем номера N_2 и p_2, для которых $p_2 >$ $> \max(p_1, N_1)$ и

$$\varphi_n(E_{p_2}) < \delta_2,\ n > N_2.$$

Продолжив процесс, по индукции построим такую подпоследовательность номеров $\{p_k\}$ и $\{N_k\}$, что

$$p_k > \max(p_{k-1}, N_{k-1}),\ k = 2, 3, \ldots \tag{2.6}$$

$$\varphi_{p_k}(E_{p_k}) > \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

$$\varphi_{p_n}(E_{p_k}) < \delta_k,\ n > N_k, k = 1, 2, \ldots$$

Из (2.6) следует

$$\varphi_{p_m}(E_{p_k}) < \delta_k,\ m > k, k = 1, 2, ... \tag{2.8}$$

Из (2.5) и (2.8) следует, в силу выбора последовательности чисел $\{\delta_n\}$, что

$$\varphi_{p_m}(\bigcup_{k=1}^{m-1} E_{p_k}) < \delta,\ m = 2, 3, ... \tag{2.9}$$

$$\widetilde{\varphi}_{p_m}(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_{p_k}) < \delta,\ m > m_1. \tag{2.10}$$

Из (2.10) и (2.9), в силу выбора числа $\delta > 0$, следует, для $m > m_1$

$$\varphi_{p_m}(\bigcup_{k \neq m}^{\infty} E_{p_k}) < \eta/. \tag{2.11}$$

Положим

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{p_k}.$$

Ясно, что множество $A \in \Sigma$ и

$$\varphi_{p_m}(A) > \eta,\ m > m_1. \tag{2.12}$$

Таким образом, как мы показали, для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$, удовлетворяющего условию (2.4), можно построить такое множество $A \in \Sigma$ и выделить такую подпоследовательность функций $\{\varphi_{p_m}\}$, что

$$\varphi_{p_m}(A) > \eta,\ m > m_1.$$

Возьмем счетную систему попарно непересекающихся спектров, удовлетворяющих условию (2.4).

$$\{E_n^1\}, \{E_n^2\}, ..., \{E_n^k\}, ...$$

Для каждого спектра $\{E_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ построим соответствующее множество A из Σ и подпоследовательность функций множества, удовлетворяющие условию (2.12).

Обозначим эти множества через $\{A_k\}$. Для спектра $\{A_k\} \subset \Sigma$ и числа $\eta > 0$ условие теоремы 2.3 не выполняется.

Полученное противоречие доказывает сформулированную теорему.

Следствие 2.1. Пусть $\{\varphi_n\}$ – последовательность f-композиционных (а тем более аддитивных) функций множества, заданных на σ-суммируемом классе Σ; далее, каждая функция φ_n, исчерпывающая на Σ.

Для того чтобы функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладали свойством равномерной исчерпываемости, необходимо и достаточно, чтобы для спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существовали такие номера n_0 и k_0, что

$$\|\varphi_n(E_{k_0})\| < \varepsilon, \ n > n_0.$$

Следствие 2.2. Пусть $\{\varphi_n\}$ – последовательность k – внешних мер (а тем более аддитивных функций), заданных на σ-суммируемом классе Σ, со значениями в т.а.г. (X, η); далее, каждая функция φ_n, $n = 1, 2, ...$ исчерпывающая.

Для того чтобы функции последовательности $\{\varphi_n\}$ обладали свойством равномерной исчерпываемости, необходимо и достаточно, чтобы для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ и для любой окрестности $V \in \eta$ существовали такие номера n_0 и k_0, что

$$\varphi_n(E_{k_0}) \in V, \ n > n_0.$$

Замечание 2.4. В случае, когда $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство конечных обобщенных мер, заданных на σ-кольце Σ, теорема 2.3 была доказана Ф. Кафьеро в работе [90].

Следствие 2.3. Пусть $\{\varphi_n\}$ – последовательность конечных скалярных аддитивных функций множества, заданных на σ-суммируемом классе Σ; далее, каждая функция φ_n, $n = 1, 2, ...$ исчерпывающая.

Если для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ существует такое множество $E_{k_0} \in \{E_n\}$, что последовательность $\{\varphi_n(E_{k_0})\}$ фундаментальная, то функции последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно исчерпывающие.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{L}$ класс тех множеств $E \in \Sigma$, для которых последовательность $\{\varphi_n(E)\}$ сходится.

Для любого множества $E \in \mathcal{L}$ положим

$$\varphi_0(E) = \lim \varphi_n(E). \tag{2.13}$$

Покажем, что функция φ_0 исчерпывающая на классе $\mathcal{L}$.

Предположим противное. Тогда существуют спектр $\{E_n\} \subset \subset \mathcal{L}$ и число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|\varphi_0(E_n)| > \varepsilon,\ n = 1, 2, ... \tag{2.14}$$

Применяя лемму 2.2 и переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что

$$\widetilde{\varphi}_m\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}},\ m = 1, 2, ... \tag{2.15}$$

$$\varphi_0(E_k) > \varepsilon,\ k = 1, 2, ... \tag{2.16}$$

В силу (2.13) и (2.16), существует такой номер n_1, что

$$\varphi_n(E_{n_0}) > \varepsilon,\ n_0 = 1, n \geq n_1.$$

Аналогично существует такой номер n_2, что $n_2 > n_1$

$$\varphi_n(E_{n_1}) > \varepsilon,\ n \geq n_2.$$

Продолжив процесс, построим по индукции подпоследовательность номеров $\{n_k\}$ такую, что

$$\varphi_{n_k}(E_{n_p}) > \varepsilon,\ k > p, p = 0, 1, 2, ... \tag{2.17}$$

Положим

$$A = \bigcup_{p=0}^{\infty} E_{n_p},\ n_0 = 1.$$

Так как функция φ_{n_k} аддитивная, то из (2.16) и (2.17) получим

$$|\varphi_{n_k}(A)| \geq |\varphi_{n_k}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_{p_i}\right)| - |\varphi_{n_k}\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} E_{p_i}\right)| > (k-1)\varepsilon,\ k = 1, 2, ...$$

Таким образом, для любого спектра $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$, удовлетворяющего условию (2.14), можно построить множество $A \in \Sigma$, для которого последовательность $\{\varphi_n(A)\}$ расходится.

Возьмем счетную систему попарно непересекающихся спектров

$$\{E_n^1\}, \{E_n^2\}, ..., \{E_n^1\}, ..., \tag{2.18}$$

удовлетворяющих условию (2.14).

Для каждого спектра $\{E_n^k\}$ из (2.18) построим соответствующее множество A_k, $k = 1, 2, ...$

Для спектра $\{A_k\} \subset \Sigma$ условие следствия 2.3 не выполняется. Полученное противоречие и доказывает, что функция φ_0 – исчерпывающая на $\mathcal{L}$.

Осталось применить теорему 2.3.

Теорема 2.4. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на кольце Σ, монотонны, равномерно квазитреугольные и обладают свойством равномерной исчерпываемости на Σ.

Если существуют последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varphi_n(E_n) > \varepsilon, \ n = 1, 2, ..., \tag{2.19}$$

то существуют строго возрастающая последовательность номеров $\{t_k\}$, убывающая последовательность множеств $\{B_k\} \subset \Sigma$ и число $\delta > 0$, для которых

$$B_k \subset \bigcup_{n=t_{k-1}+1}^{t_k} E_n, \ t_0 = 0, \ k = 1, 2, ... \tag{2.20}$$

$$\varphi_n(B_k) > \delta, \ n > t_k, k = 1, 2, ...$$

Доказательство. Для числа $\varepsilon > 0$ найдем число $\delta(\varepsilon)$ в силу условия равномерной квазитреугольности функций семейства $\Phi = \{\varphi\}$. Для числа $\delta > 0$ в силу предложения 2.2 построим убывающую к нулю последовательность чисел $\{\delta_k\}$. В силу леммы 2.1 (часть 4) для числа $\delta_1 > 0$ найдем такой номер t_1, что для всех $n > t_1$ и для всех функций $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(E_n \setminus B_1) < \delta_1, \text{ где } B_1 = \bigcup_{k=1}^{t_1} E_k.$$

Аналогично, для последовательности $\{E_n B_1\}_{n>t_1}$ и для числа $\delta_2 > 0$ найдем номер t_2 такой, что для $n > t_2$ и для всех функций $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(E_n B_1 \setminus B_2) < \delta_2, \text{ где } B_2 = \bigcup_{k=t_1+1}^{t_2} E_k B_1.$$

Продолжив процесс, по индукции построим подпоследовательность номеров $\{t_k\}$ и убывающую последовательность множеств $\{B_k\} \subset \Sigma$ такие, что

$$B_k = \bigcup_{i=t_{k-1}+1}^{t_k} E_i\, B_{k-1},\ B_0 = T,\ k = 1, 2, ...$$

и для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(E_n B_{k-1} \setminus B_k) < \delta_k,\ n > t_k,\ k = 1, 2, ... \tag{2.21}$$

Покажем, что число $\delta > 0$, последовательность номеров $\{t_k\}$ и последовательность множеств $\{B_k\}$ – искомые.

В силу выбора последовательности чисел $\{\delta_k\}$ из (2.21), согласно предложению 2.2, получаем

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k}(E_n B_{i-1} \setminus B_i)\right) < \delta \tag{2.22}$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого номера $n > t_k,\ k = 1, 2, ...$ Легко видеть, что для любого $n > t_k,\ k = 1, 2, ...$

$$E_n \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k}(E_n B_{i-1} \setminus B_i)\right) \bigcup B_k,\ B_0 = T. \tag{2.23}$$

Из (2.19), (2.22) и (2.23) следует

$$\varphi_n(B_k) > \delta,\ n > t_k, k = 1, 2, ...$$

Следствие 2.4. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе $\mathcal{L}$, равномерно квазитреугольные и обладают свойством равномерной исчерпываемости; пусть $\Sigma = \Sigma(\mathcal{L})$ – кольцо, порожденное классом $\mathcal{L}$.

Если существуют последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ и число $\varepsilon > 0$, и последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ такие, что

$$\widetilde{\varphi}_n(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, ...,$$

то существуют последовательность номеров $\{t_k\}$, убывающая последовательность множеств $\{B_k\} \subset R(\mathcal{L})$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$$

$$B_k \subset \bigcup_{i=t_{k-1}+1}^{t_k} E_i,\ t_0 = 0,\ k = 1, 2, ...,$$

$$\widetilde{\varphi}_n(B_k) > \delta,\ n > t_k,\ k = 1, 2, ...$$

где $\widetilde{\varphi}$ – супремация функции φ.

Доказательство. В силу леммы 3.1, супремации $\{\widetilde{\varphi},\ \varphi \in \Phi\}$ равномерно исчерпывающие на $\Sigma(\mathcal{L})$. В силу предложения 3.1, супремации $\{\widetilde{\varphi},\ \varphi \in \Phi\}$ равномерно квазитреугольные на $\Sigma(\mathcal{L})$.

Осталось применить теорему 2.4.

Теорема 2.5. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, заданные на кольце Σ, монотонные, равномерно квазитреугольные и равномерно исчерпывающие, то не существуют числа $\varepsilon > 0$, последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ и последовательности функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ таких, что

$$\varphi_k(E_n) < \frac{1}{2^n},\ k = \overline{1, n}. \tag{2.24}$$

$$\varphi_{n+1}(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, ... \tag{2.25}$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. условия (2.24) и (2.25) выполняются. В силу предложения 2.2 для числа $\varepsilon > 0$ построим сходящуюся к нулю последовательность чисел $\{\delta_k\}$.

Переходя, если нужно к подпоследовательности, можем считать, что

$$\varphi_k(E_n) < \delta_n,\ k = \overline{1, n}. \tag{2.26}$$

$$\varphi_{n+1}(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, ... \tag{2.27}$$

В силу теоремы 2.4 существуют убывающая последовательность множеств $\{B_k\} \subset \Sigma$, число $\delta > 0$ и возрастающая последовательность номеров $\{t_k\}$, для которых

$$B_k \subset \bigcup_{i=t_{k-1}+1}^{t_k} E_i,\ t_0 = 0,\ k = 1, 2, ...,$$

$$\varphi_{n+1}(B_k) > \delta,\ n > t_k,\ k = 1, 2, ... \tag{2.28}$$

Для числа $\delta > 0$ найдем число $\eta = \eta(\delta)$ в силу условия равномерной квазитреугольности функций семейства $\Phi = \{\varphi\}$. В силу леммы 2.1 (часть 3), существует такой номер n_0, что для всех номеров $m > k > n_0$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(B_k \setminus B_m) < \eta. \tag{2.29}$$

Пусть $k > n_0$. Возьмем номер $j > t_k$ и найдем такой номер $m > k$, что

$$t_{m-1} > j \text{ и } \delta_{t_{m-1}} < \eta. \tag{2.30}$$

В силу выбора последовательности чисел $\{\delta_k\}$, из (2.26) и (2.28) следует

$$\varphi_{j+1}(B_m) \leq \varphi_{j+1}\left(\bigcup_{i=t_{m-1}+1}^{t_m} E_i \right) < \delta_{t_{m-1}}. \tag{2.31}$$

Из (2.29), (2.30) и (2.21) следует

$$\varphi_{j+1}(B_m) < \delta,\ j > t_k,$$

что противоречит (2.28).

Следствие 2.5. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе $\mathcal{L}$, равномерно квазитреугольные и равномерно исчерпывающие; пусть $\Sigma(\mathcal{L})$ – кольцо, порожденное классом $\mathcal{L}$. Не существуют последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma(\mathcal{L})$, числа $\varepsilon > 0$ и последовательности функций множества $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, для которых

$$\widetilde{\varphi}_k(E_n) < \frac{1}{2^n},\ k = \overline{1, n}$$

$$\widetilde{\varphi}_{n+1}(E_n) > \varepsilon, \ n = 1, 2, ...$$

2.4. Свойство сконденсированности функций множества

Определение 2.5. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, заданные на классе Σ, сконденсированы на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого конечного набора функций $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subset \Phi$ существует такое множество $e \in \mathcal{L}$, что

$$\widetilde{\varphi}_k(E \Delta e) < \varepsilon, \ k = \overline{1, n}.$$

Пример 2.5. Если μ – непрерывная сверху в нуле, монотонная, квазитреугольная функция множества, заданная на σ-кольце $S = S(\Sigma)$, порожденном кольцом Σ, то μ сконденсирована на кольце Σ.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{L}$ класс тех множеств из S, на которых функция μ сконденсирована на кольце Σ.

Ясно, что $\Sigma \subset \mathcal{L}$. Покажем, что класс $\mathcal{L}$ – σ-кольцо. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу квазитреугольности φ и предложения 2.2, найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$ и для него построим последовательность чисел $\delta_k \downarrow 0$.

Пусть $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$. Тогда существуют множества $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$, для которых

$$\mu(E_k \Delta e_k) < \delta, \ k = 1, 2. \tag{2.32}$$

Из соотношений

$$(E_1 \bigcup E_2) \Delta (e_1 \bigcup e_2) \subset (E_1 \Delta e_1) \bigcup (E_2 \Delta e_2),$$

$$(E_1 \setminus E_2) \Delta (e_1 \setminus e_2) \subset (E_1 \Delta e_1) \bigcup (E_2 \Delta e_2),$$

в силу (2.32), получаем

$$\mu((E_1 \bigcup E_2) \Delta (e_1 \bigcup e_2)) < \varepsilon,$$

$$\mu((E_1 \setminus E_2) \Delta (e_1 \setminus e_2)) < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$(E_1 \bigcup E_2) \in \mathcal{L} \text{ и } (E_1 \setminus E_2) \in \mathcal{L}$$

т.е. класс $\mathcal{L}$ – кольцо.

Пусть $\{E_n\}$ – некоторый спектр из $\mathcal{L}$. По условию существуют такие множества $\{e_k\} \subset \mathcal{L}$, что

$$\mu(E_k \Delta e_k) < \delta_k, \ k = 1, 2, ... \tag{2.33}$$

Так как функция μ непрерывная сверху в нуле на S, то существует номер n_1, для которого

$$\mu\Big(\bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} E_k) < \delta. \tag{2.34}$$

Положим

$$E = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \text{ и } e = \bigcup_{k=1}^{n_1} e_k.$$

Очевидно, что

$$E \Delta e \subset \Big(\bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} E_k) \bigcup \Big(\bigcup_{k=1}^{n_1} (E_k \Delta e_k)).$$

Отсюда, в силу неравенств (2.33), (2.34) и выбора числа $\delta > 0$, получаем

$$\mu(E \Delta e) < \varepsilon.$$

Следовательно, множество $E \in \mathcal{L}$. Осталось заметить, что $S \subset \mathcal{L}$.

Пример 2.6. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на σ-кольце $S(\Sigma)$, порожденном кольцом Σ.

Если каждая функция $\varphi \in \Phi$ монотонная, квазитреугольная и непрерывная сверху в нуле на S, то функции семейства Φ сконденсированы на кольце Σ.

Пример 2.7. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, равномерно квазитреугольные и сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$; $R(\Sigma)$ и $R(\mathcal{L})$-кольца, порожденные, соответственно, классами Σ и $\mathcal{L}$; пусть

$$\mu = \widetilde{\varphi}|_R(\Sigma)$$

сужение супремации $\widetilde{\varphi}$ на кольцо $R(\Sigma)$ для каждой функции $\varphi \in \Phi$.

Тогда функции семейства $\mathcal{M} = \{\mu. \varphi \in \Phi\}$ сконденсированы на кольце $R(\mathcal{L})$.

Доказательство. Пусть число $\varepsilon > 0$ и множество $E \in R(\Sigma)$; $\{\mu_1, \mu_2, ...\mu_n\} \subset \mathcal{M}$ – некоторый конечный набор функций из $\mathcal{M}$.

В силу предложений 2.1 и 2.2, найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$ и построим последовательность чисел $\delta_k \downarrow 0$. Так как $E \in R(\Sigma)$, то

$$E = \bigcup_{k=1}^{m} A_k,$$

где $\{A_1, ..., A_m\}$ – попарно не пересекающиеся множества из Σ.

Найдем такие множества $\{e_k\} \subset \mathcal{L}$, $k = \overline{1, m}$, что

$$\mu_p(A_k \Delta e_k) < \delta_k, \ k = \overline{1, m}, p = \overline{1, n}.$$

Положим

$$e = \bigcup_{k=1}^{m} e_k.$$

Ясно, что $e \in \Sigma(\mathcal{L})$ и

$$E \Delta e \subset \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \Delta e_k).$$

Отсюда, в силу выбора чисел $\{\delta_k\}$. получаем

$$\mu_p(E \Delta e) < \varepsilon, \ p = \overline{1, n}.$$

Следовательно, функции семейства $\mathcal{M} = \{\mu\}$ сконденсированы на кольце $R(\mathcal{L})$.

Теорема 2.6. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, равномерно квазитреугольные на Σ; класс $\mathcal{L} \subset \Sigma$ замкнут относительно операции пересечения; пусть, далее, каждая функция $\varphi \in \Phi$ сконденсирована на классе $\mathcal{L}$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то и супремации семейства $\{\widetilde{\varphi}, \varphi \in \Phi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, т.е. справедлива импликация

$$(\varphi, \ PU)_{\mathcal{L}} \to (\widetilde{\varphi}, PU)_{\mathcal{L}}.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, спектр $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, для которых

$$\widetilde{\varphi}_n(E_n) > 2\varepsilon, \ n = 1, 2, ...$$

Отсюда, по определению супремации, найдем такие множества $A_n \in E_n \bigcap \Sigma \ n = 1, 2, ...$ что

$$\varphi_n(A_n) > \varepsilon, \ n = 1, 2, ... \qquad (2.35)$$

В силу предложения 2.1, для числа $\varepsilon > 0$ найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$ и для числа $\delta > 0$ найдем число $\eta_1 = \eta_1(\delta)$.

Положим

$$\eta = \min(\eta_1, \delta). \qquad (2.36)$$

Так как каждая функция φ_n сконденсирована на $\mathcal{L}$, то существует такое множество $B_n \in \mathcal{L}$, что

$$\widetilde{\varphi}_n(A_n \Delta B_n) < \eta, \ n = 1, 2, ... \qquad (2.37)$$

Положим

$$d_n = E_n \bigcap B_n, \ n = 1, 2, ...$$

Ясно, что $\{d_n\}$ – спектр из $\mathcal{D}$. Очевидно, что

$$d_n \setminus A_n \subset B_n \setminus A_n, \ n = 1, 2, ... \qquad (2.38)$$

$$A_n \setminus d_n = A_n \setminus B_n, \ n = 1, 2, ...$$

Из соотношения

$$A_n = (A_n \setminus d_n) \bigcup (A_n \setminus (A_n \setminus d_n)), \ n = 1, 2, ...$$

получаем, в силу (2.35), (2.36), (2.37) и (2.38),

$$\varphi_n(A_n \setminus (A_n \setminus d_n)) \geq \delta, \ n = 1, 2, ... \qquad (2.39)$$

Очевидно, что

$$d_n = (d_n \setminus A_n) \bigcup (A_n \setminus (A_n \setminus d_n)), \ n = 1, 2, ...$$

Отсюда, в силу (2.39), (2.36) и (2.38), получаем

$$\varphi_n(d_n) \geq \eta, \; n = 1, 2, ...,$$

что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает теорему 2.6.

Следствие 2.6. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ и равномерно квазитреугольные; пусть каждая функция $\varphi \in \Phi$ сконденсирована на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то и супремации семейства $\{\widetilde{\varphi}, \; \varphi \in \Phi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$.

Следствие 2.7. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданные на m-классе Σ, f-композиционные (а тем более аддитивные); пусть класс $\mathcal{L} \subset \Sigma$ замкнут относительно пересечения (а тем более $\mathcal{L}$ – m-класс); пусть каждая функция $\varphi \in \Phi$ сконденсирована на классе $\mathcal{L}$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на классе $\mathcal{L}$, то и супремации семейства $\{\widetilde{\varphi}, \varphi \in \Phi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$.

Теорема 2.7. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, равномерно квазитреугольные и сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ и конечный набор функций $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ такие, что как только для некоторого множества $E \in \Sigma$

$$\widetilde{\varphi}_k(E) < \delta, \; k = \overline{1, n},$$

так и для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\widetilde{\varphi}(E) < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ и для любого конечного набора функций $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subset \Sigma$ существуют функция $\varphi_0 \in \Phi$ и множество $E_0 \in \Sigma$ такие, что

$$\widetilde{\varphi}_k(E_0) < \delta, \; k = \overline{1, n} \text{ и } \widetilde{\varphi}_0(E_0) > \varepsilon.$$

В силу предложения 2.1 для числа $\varepsilon > 0$ найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$ и для каждого числа $\frac{1}{2^{k+1}}$ найдем число δ_k', $k = 1, 2, ...$

Положим

$$\delta_k = \min(\delta_k', \delta), \ k = 1, 2, ...$$

Пусть $\varphi_1 \in \Phi$. По предположению существуют функция $\varphi_2 \in \Phi$ и множество $E_1 \in \Sigma$ такие, что

$$\widetilde{\varphi}_1(E_1) < \delta_1 \text{ и } \widetilde{\varphi}_2(E_1) > \varepsilon. \tag{2.40}$$

Так как функция семейства $\Phi = \{\varphi\}$ сконденсированы на m-классе $\mathcal{L}$, то существует такое множество $e_1 \in \mathcal{L}$, что

$$\widetilde{\varphi}_k(E_1 \Delta e_1) < \delta_1, \ k = 1, 2. \tag{2.41}$$

Из соотношений

$$e_1 \subset (e_1 \setminus E_1) \bigcup E_1 \text{ и } E_1 \subset (E_1 \setminus e_1) \bigcup e_1$$

в силу (2.40) и (2.41) получаем

$$\widetilde{\varphi}_1(e_1) < \frac{1}{2} \text{ и } \widetilde{\varphi}_2(e_1) > \delta.$$

Для функций φ_1 и φ_2 найдем, в силу предположения, функцию $\varphi_3 \in \Phi$ и множество $E_2 \in \Sigma$ такие, что

$$\widetilde{\varphi}_k(E_2) < \delta_2, \ k = 1, 2 \text{ и } \widetilde{\varphi}_3(E_2) > \varepsilon.$$

В силу сконденсированности функций семейства $\Phi = \{\varphi\}$ на классе $\mathcal{L}$ существует такое множество $e_2 \in \mathcal{L}$, что

$$\widetilde{\varphi}_k(E_2 \Delta e_2) < \delta_2, \ k = \overline{1, 3}.$$

Отсюда легко следует, что

$$\widetilde{\varphi}_k(e_2) < \frac{1}{2^2}, \ k = 1, 2 \text{ и } \widetilde{\varphi}_3(e_2) > \delta.$$

Продолжив процесс, по индукции построим последовательность множеств $\{e_n\} \subset \mathcal{L}$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, для которых

$$\widetilde{\varphi}_k(e_n) < \frac{1}{2^n},\ k = \overline{1,n} \text{ и } \widetilde{\varphi}_{n+1}(e_n) > \delta,\ n = 1, 2, ...,$$

что противоречит следствию 2.5.

Теорема 2.8 (О существовании базиса). Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, монотонные, равномерно квазитреугольные и равномерно исчерпывающие на Σ, то существует исчерпывающая функция $\lambda : \Sigma \to [0, +\infty)$ такая, что

$$\varphi < \mathcal{P}_\Sigma < \lambda,\ \varphi \in \Phi.$$

Доказательство. В силу теоремы 3.6, каждому числу $\frac{1}{n}$ можем сопоставить число $\delta_n > 0$ и конечное семейство $\{\varphi_1^n, ..., \varphi_{k_n}^n\} \subset \Phi$ такие, что, как только для некоторого множества $E \in \Sigma$

$$\varphi_p^n(E) < \delta_n,\ p = \overline{1, k_n},$$

так и для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(E) < \frac{1}{n}.$$

Объединим все функции $\{\varphi_p^n\}$ $p = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, ...$ в одну последовательность, которую обозначим через $\{\varphi_n\}$.

Положим

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(1, \varphi_n(E))}{2^n},\ E \in \Sigma.$$

Легко видеть, что функция множества λ искомая.

Замечание 2.5. В случае, когда класс множеств Σ – σ-кольцо, из теоремы 2.8 следуют результаты В.М. Дубровского [42] и В.Н. Алексюка [17]. Отметим, что приведенное доказательство теоремы В.М. Дубровского [42] не опирается на принцип трансфинитной индукции.

Теорема 2.9 (О равномерной сконденсированности). Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, равномерно квазитреугольные и сконденсированные на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на классе $\mathcal{L}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого множества $E \in \Sigma$ существует такое множество $e \in \mathcal{L}$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\widetilde{\varphi}(E\Delta e) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть число $\varepsilon > 0$ и пусть множество $E \in \Sigma$. В силу теоремы 2.7, для числа $\varepsilon > 0$ найдем число $\delta > 0$ и конечный набор функций множества $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subset \Phi$. Так как функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ сконденсированы на классе $\mathcal{L}$, то существует такое множество $e \in \mathcal{L}$, что

$$\widetilde{\varphi_k}(E\Delta e) < \delta, \ k = \overline{1, n}.$$

Отсюда, в силу теоремы 2.7, получаем для любой функции $\varphi \in \in \Phi$ $\widetilde{\varphi}(E\Delta e) < \varepsilon$.

Следствие 2.8. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, f-композиционные (а тем более аддитивные) и сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого множества $E \in \Sigma$ существует такое множество $e \in \mathcal{L}$, что для любой функции $\varphi \in \in \Phi$ $\widetilde{\varphi}(E\Delta e) < \varepsilon$.

Следствие 2.9. Пусть аддитивные функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ заданы на m-классе Σ, принимают значения из квазинормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$, сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$ и равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$.

Если для любого множества $e \in \mathcal{L}$ последовательность $\{\varphi_n(e)\}$ фундаментальная, то и для любого множества $E \in \Sigma$ последовательность $\{\varphi_n(E)\}$ фундаментальная.

Доказательство. Пусть число $\varepsilon > 0$ и пусть множество $E \in \Sigma$. В силу теоремы 2.9, существует такое множество $e \in \mathcal{L}$, что

$$\widetilde{\varphi_n}(E\Delta e) < \frac{1}{8}\varepsilon$$

для любого номера $n = 1, 2, ...$

Следовательно, для достаточно больших номеров n и m получаем

$$\|\varphi_n(E) - \varphi_m(E)\| \leq \|\varphi_n(E) - \varphi_n(e)\| + \|\varphi_n(e) - \varphi_m(e)\| +$$

$$+\|\varphi_m(e) - \varphi_m(E)\| \leq \|\varphi_n(e) - \varphi_m(e)\| + 2\widetilde{\varphi}_n(E\Delta e) + 2\widetilde{\varphi}_m(E\Delta e) < \varepsilon.$$

Замечание 2.6. Из следствия 2.9 в случае, когда Σ – σ – алгебра, порожденная алгеброй $\mathcal{L}$, а $\{\varphi_n\}$ – аддитивные функции множества, заданные на Σ со значениями в B-пространстве X, следуют основные результаты работы [159].

2.5. Продолжение свойства равномерной исчерпываемости

Теорема 2.10. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, равномерно квазитреугольные и сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ существует такой спектр $\{d_n\} \subset \mathcal{L}$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\widetilde{\varphi}(E_n \Delta d_n) < \varepsilon, \; n = 1, 2, ...$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$. Для числа $\varepsilon > 0$ и супремаций семейства $\{\widetilde{\varphi}, \varphi \in \Phi\}$, в силу предложений 2.1 и 2.2, построим последовательность чисел $\{\delta_n\}$. В силу теоремы 2.9, существуют такие множества $\{e_k\} \subset \mathcal{L}$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\widetilde{\varphi}(E_n \Delta e_n) < \delta_n, \; n = 1, 2, ...$$

Положим

$$d_1 = e_1, ..., d_n = e_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} e_k, \; n = 2, 3, ...$$

Ясно, что $\{d_n\}$ – спектр из $\mathcal{L}$. Из соотношения

$$E_n \Delta e_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} (E_k \Delta e_k), \; n = 1, 2, ...$$

в силу выбора последовательности чисел $\{\delta_n\}$ получим для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\widetilde{\varphi}(E_n \Delta d_n) < \varepsilon,\ n = 1, 2, ...$$

Теорема 2.11. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, равномерно квазитреугольные и сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то супремации семейства $\{\widetilde{\varphi}, \varphi \in \Phi\}$ (а тем более функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$) равномерно исчерпывающие на Σ, т.е. справедливы импликации

$$(\varphi, P\mathcal{U})_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow (\widetilde{\varphi}, P\mathcal{U})_{\Sigma} \Leftrightarrow (\varphi, P\mathcal{U})_{\Sigma}.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ для которых

$$\widetilde{\varphi_n}(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, ... \tag{2.42}$$

Для числа $\varepsilon > 0$, в силу предложения 2.1, найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$. В силу теоремы 2.10 существует такой спектр $\{d_n\} \subset \mathcal{L}$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$

$$\widetilde{\varphi}(E_n \Delta d_n) < \delta,\ n = 1, 2, ... \tag{2.43}$$

Из соотношения

$$E_n \subset (E_n \setminus d_n) \bigcup d_n,\ n = 1, 2, ...$$

в силу (2.43), (2.42) и выбора числа $\delta > 0$ следует

$$\widetilde{\varphi_n}(d_n) > \delta,\ n = 1, 2, ...,$$

что противоречит теореме 2.6.

Полученное противоречие и доказывает справедливость импликации

$$(\varphi, P\mathcal{U})_{\mathcal{L}} \Rightarrow (\widetilde{\varphi}, P\mathcal{U})_{\Sigma}. \tag{2.44}$$

Из (2.44), по определению супремации, следует

$$(\widetilde{\varphi}, P\mathcal{U})_\Sigma \Leftrightarrow (\varphi, P\mathcal{U})_\Sigma \Leftrightarrow (\varphi, P\mathcal{U})_\mathcal{L}.$$

Следствие 2.10. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, f-композиционные (а тем более аддитивные) и сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то супремации семейства $\{\widetilde{\varphi}, \varphi \in \Phi\}$ равномерно исчерпывающие на Σ, т.е. справедлива импликация

$$(\varphi, P\mathcal{U})_\mathcal{L} \Rightarrow (\widetilde{\varphi}, P\mathcal{U})_\Sigma \Rightarrow (\varphi, P\mathcal{U})_\Sigma \Rightarrow (\varphi, P\mathcal{U})_\mathcal{L}.$$

Следствие 2.11. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, равномерно квазитреугольные и сконденсированные на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$.

Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то существует базис λ функций семейства $\Phi = \{\varphi\}$ на Σ такой, что

1) функция λ, исчерпывающая на Σ;

2) $\varphi < p_\Sigma < \lambda$, $\varphi \in \Phi$.

Замечание 2.7. Из следствия 2.10 в случае, когда Σ – σ-алгебра, а $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство аддитивных функций множества, заданных на σ-алгебре Σ со значениями в B-пространстве X, получаем основные результаты работы [159].

Следствие 2.12. Если Φ – семейство аддитивных функций, заданных на m-классе Σ, со значениями в т.а.г. (X, η) и сконденсированных на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$ [3], то справедлива импликация

$$(P\mathcal{U})_\mathcal{L} \Rightarrow (P\mathcal{U})_\Sigma.$$

Действительно, для любой квазинормы $p(x)$, непрерывной на группе (X, η), функции семейства $\{p \circ \varphi,\ \varphi \in \Phi\}$ f-композиционные, где $f(x) = x$.

Осталось применить следствие 2.10.

[3] Для любой окрестности нуля $\vartheta \in \eta$, для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого конечного набора функций $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subset \Phi$ существует такое множество $e \in \mathcal{L}$, что $\{\varphi_k(F), F \in \Sigma, F \subset E\Delta e\}) \subset \vartheta$, $k = \overline{1, n}$.

2.6. Равномерная непрерывность семейства функций множества

Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на классе $\Sigma(\emptyset \in \Sigma)$ и $\varphi(\emptyset) = 0$ для любой функции $\varphi \in \Phi$. Пусть $\mathcal{L} \subset \Sigma(\emptyset \in \mathcal{L})$.

Напомним, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$

– равностепенно слабо непрерывные на $\mathcal{L}$, если для любого локализатора $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$

$$\lim \varphi(E_n) = 0 \tag{2.45}$$

равномерно относительно $\varphi \in \Phi$;

– равномерно непрерывные на $\mathcal{L}$, если для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$, сходящейся к пустому множеству, справедливо соотношение (2.45).

Пример 2.8. Пусть λ – мера Лебега на числовой прямой; Σ – кольцо подмножеств числовой прямой, на которых мера λ конечная.

Так как λ – конечная и счетно-аддитивная, то она непрерывная сверху в нуле.

С другой стороны, функция λ не обладает свойством исчерпываемости на Σ. Действительно, возьмем спектр $E_n = (n-1, n]$, $n = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $\lambda(E_n) = 1 \not\to 0$.

Пример 2.9. Пусть $T = [0; 1]$. Пусть Σ – алгебра, порожденная полукольцом полуинтервалов $(a, b]$, $0 \le a \le b \le 1$. Через $\mathcal{L}$ обозначим класс тех множеств $E \in \Sigma$, которые в своем составе содержат полуинтервал $(0, b]$, $0 < b < 1$. Положим для любого множества $E \in \Sigma$

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, \text{ если } E \in \mathcal{L}, \\ 0, \text{ если } E \notin \mathcal{L}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция μ аддитивная на алгебре Σ. Проверим, что μ. исчерпывающая на Σ.

Пусть $\{E_n\}$ – некоторый спектр из Σ. Среди множеств $\{E_n\}$ есть не более одного из класса $\mathcal{L}$.

Следовательно,

$$\lim \mu(E_n) = 0.$$

С другой стороны, возьмем $F_n = (0, \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что $\{F_n\}$ – локализатор из Σ и

$$\lim \mu(F_n) = 1,$$

т.е. функция μ не является непрерывной сверху в нуле.

Теорема 2.12. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе $\mathcal{L}$, равномерно квазитреугольные и каждая функция $\varphi \in \Phi$ непрерывна сверху в нуле на $\mathcal{L}$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то супремации семейства $\{\widetilde{\varphi}, \varphi \in \Phi\}$ равностепенно слабо непрерывные на кольце $\Sigma = \Sigma(\mathcal{L})$, порожденном классом $\mathcal{L}$, т.е. справедлива импликация

$$(\varphi, P\mathcal{U})_{\mathcal{L}} \Rightarrow (\widetilde{\varphi}, PCH)_{\Sigma}.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, локализатор $\{E_n\} \subset \Sigma$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, для которых

$$\widetilde{\varphi}_n(E_n) > 2\varepsilon, \ n = 1, 2, \ldots \tag{2.46}$$

Для числа $\varepsilon > 0$ в силу равномерной квазитреугольности функций семейства $\Phi = \{\varphi\}$, найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$. Из (3.46), по определению супремации, найдем такое множество $A_1 \in E_1 \bigcap \mathcal{L}$, что

$$\varphi_1(A_1) > \varepsilon. \tag{2.47}$$

Так как последовательность множеств $\{E_n A_1\}$ – локализатор из $\mathcal{L}$, а функция φ_1 – непрерывная сверху в нуле, то существует такой номер n_1, что

$$\varphi_1(E_{n_1} A_1) < \delta. \tag{2.48}$$

Из соотношения

$$A_1 = (A_1 \setminus A_1 E_{n_1}) \bigcup A_1 E_{n_1}$$

в силу (2.47), (2.48) и выбора числа $\delta > 0$

$$\varphi_1(A_1 \setminus A_1 E_{n_1}) \geq \delta.$$

Аналогично, в силу (2.46), найдем множество

$$A_{n_1} \in E_{n_1} \bigcap \mathcal{L}.$$

для которого

$$\varphi_{n_1}(A_{n_1}) > \varepsilon. \tag{2.49}$$

Так последовательность $\{E_n A_{n_1}\}$ – локализатор из $\mathcal{L}$, то существует такой номер $n_2 > n_1$, что

$$\varphi_{n_1}(E_{n_2} A_{n_1}) < \delta.$$

Отсюда, в силу соотношения

$$A_{n_1} = (A_{n_1} \setminus E_{n_2} A_{n_1}) \bigcup E_{n_2} A_{n_1},$$

выбора числа $\delta > 0$ и условия (2.49), получаем

$$\varphi_{n_1}(A_{n_1} \setminus E_{n_2} A_{n_1}) \geq \delta.$$

Продолжив процесс, по индукции построим подпоследовательность номеров $\{n_k\}$ и последовательность множеств $\{A_{n_k}\}$, $A_{n_k} \in \in E_{n_k} \bigcap \mathcal{L}$, $k = 1, 2, ...$ для которых

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$$

$$\varphi_{n_k}(A_{n_k} \setminus A_{n_k} E_{n_{n+1}}) \geq \delta,$$

что противоречит условию теоремы, так как множества $\{A_{n_k} \setminus A_{n_k} E_{n_{k+1}}\}$ – спектр из $\mathcal{L}$.

Теорема 2.13. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе $\mathcal{L}$ и равномерно квазитреугольные; пусть каждая функция $\varphi \in \Phi$ непрерывна сверху в нуле на $\mathcal{L}$.

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$, то супремации семейства $\{\widetilde{\varphi}. \varphi \in \Phi\}$ равномерно непрерывные на кольце $\Sigma = \Sigma(\mathcal{L})$, порожденном m-классом $\mathcal{L}$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ и сходящаяся к пустому множеству $\emptyset$ последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, для которых

$$\widetilde{\varphi}_n(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, ...$$

В силу теоремы 2.4, существует убывающая последовательность множеств $\{B_k\} \subset \Sigma$, последовательность номеров $\{t_k\}$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$t_1 < t_2 < .... < t_k < ...$$

$$B_k \subset \bigcup_{i=t_{k-1}+1}^{t_{k+1}} E_i,\ t_0 = 0,\ k = 1, 2, ...$$

$$\widetilde{\varphi}_n(B_k) > \delta,\ n > t_k,\ k = 1, 2, ...,$$

что противоречит теореме 3.5, так как последовательность $\{B_k\}$ – локализатор из Σ.

Следствие 2.13. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе $\mathcal{L}$, равномерно квазитреугольные на $\mathcal{L}$ и каждая функция $\varphi \in \Phi$ непрерывна сверху в нуле на $\mathcal{L}$; пусть $\Sigma = \Sigma(\mathcal{L})$ – кольцо, порожденное классом $\mathcal{L}$. Справедливы импликации

$$(\varphi, P\mathcal{U})_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow (\widetilde{\varphi}, P\mathcal{U})_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow (\widetilde{\varphi}, P\mathcal{U})_{\Sigma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\widetilde{\varphi}, PH)_{\Sigma} \Leftrightarrow (\varphi, PH)_{\mathcal{L}} \Rightarrow (\widetilde{\varphi}, PCH)_{\Sigma} \Rightarrow (\varphi, PCH)_{\mathcal{L}}.$$

Следствие 2.14. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m-классе Σ, равномерно квазитреугольные, сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, равномерно исчерпывающие на $\mathcal{L}$ и каждая функция $\varphi \in \Phi$ непрерывная сверху в нуле, то функции множества семейства $\phi = \{\varphi\}$ равномерно непрерывные на Σ, т.е.

$$(\varphi, P\mathcal{U})_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow (\varphi, PH)_{\Sigma}.$$

Следствие 2.15. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, заданые на m-классе Σ – f-композиционные (а тем более аддитивные), пусть каждая функция $\varphi \in \Phi$ непрерывна сверху в нуле, если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ сконденсированы на m-классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, то справедлива импликация

$$(\varphi, P\mathcal{U})_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow (\varphi, PH)_{\Sigma} \Rightarrow (\varphi, PCH)_{\Sigma}.$$

2.7. Равностепенная абсолютная непрерывность

Определение 2.6. Говорят, что функции множества семейства $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ равностепенно абсолютно непрерывные относительно функций множества семейства $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in J}$ на классе L, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого индекса $\alpha \in J$ и для любого множества $E \in \mathcal{L}$, если

$$\widetilde{\nu}_\alpha(E) < \delta, \text{ то } \varphi_\alpha(E) < \varepsilon.$$

(Пишем $\varphi_\alpha < p_{\mathcal{L}} < \nu_\alpha$, $\alpha \in J$). В случае, если $\nu_\alpha \equiv \nu$ и $\varphi_\alpha \equiv \equiv \varphi$ для любого индекса $\alpha \in J$, говорят, что функция φ абсолютно непрерывная на $\mathcal{L}$ относительно функции (пишем $\varphi << \nu$ на $\mathcal{L}$).

Замечание 2.8. Понятие равностепенной абсолютной непрерывности интегралов $\{\int\limits_E f_n d\mu_n\}$ относительно последовательности мер $\{\mu_n\}$ на σ – алгебре Σ ввел Г.Я. Арешкин [28] в связи с задачей о возможности предельного перехода под знаком интеграла, когда меняются как подынтегральные функции точки $\{f_n(t)\}$, так и меры $\{\mu_n\}$, по которым берутся интегралы:

$$\lim_n \int_E f_n d\mu_n = \int_E f_0 d\mu_0,$$

где функции $\{f_n(t)\}$ некоторым образом сходятся к функции $f_0(t)$. а меры $\{\mu_n\}$ некоторым образом сходятся к мере μ_0.

В общем виде определение 2.6 ввел автор в работе [163], где доказал некоторые условия равностепенной абсолютной непрерывности функций последовательности $\{\varphi_n\}$ относительно функций последовательности $\{\nu_n\}$ на кольце Σ.

Замечание 2.9. Вообще говоря, даже на Σ-алгебре Σ и для семейств мер из условия $\varphi_\alpha << \nu_\alpha$ для любого $\alpha \in J$ не следует условие

$$\varphi_\alpha < p_\Sigma < \nu_\alpha, \ \alpha \in J.$$

Пример 2.10. Пусть $T = [0;1]$; Σ – σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств отрезка $[0.1]$ и μ – мера Лебега на Σ.

Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\varphi_n(E) = n\mu(E\bigcap[1-\frac{1}{n},\ 1]),\ n = 1, 2, ...$$

$$\nu_n(E) = \mu(E),\ n = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что для любого номера $n = 1, 2, \ldots$ $\varphi_n << \nu_n$ на Σ. С другой стороны, так как

$$\varphi_n([1 - \frac{1}{n}, 1]) = 1,\ n = 1, 2, \ldots,$$

то условие

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma$$

не выполняется.

Замечание 2.11. На практике часто встречается случай, когда $\varphi_\alpha << \nu_\alpha$ на Σ для любого $\alpha \in J$; функции как семейства $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$, так и функции семейства $\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in J}$ – равномерно непрерывные, но условие $\varphi_\alpha < p_\Sigma < \nu_\alpha$ не выполняется (даже в случае, когда функции множества – меры, заданные на σ-алгебре Σ).

Пример 2.11. Пусть $T = [0; 1]$; Σ – σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств отрезка $[0; 1]$ и μ – мера Лебега на Σ.

Положим для любого множества $E \in \Sigma$.

$$\varphi_n(E) = \mu(E),\ n = 1, 2, \ldots$$

$$\nu_n(E) = \frac{1}{n}\mu(E),\ n = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что для любого номера $n = 1, 2, \ldots$ $\varphi_n << \nu_n$. Далее, как меры последовательности $\{\varphi_n\}$, так и меры последовательности $\{\nu_n\}$ равномерно непрерывные на Σ.

С другой стороны, так как $\varphi_n(T) = 1,\ n = 1, 2, \ldots$, то условие $\varphi_n < p < \nu_n$ не выполняется на Σ. Из этих примеров, естественно, возникает задача: какие дополнительные условия надо наложить на функции последовательности $\{\varphi_n\}$ или на функции последовательности $\{\nu_n\}$, чтобы из условия $\varphi_n << \nu_n,\ n = 1, 2, \ldots$, на Σ следовало условие $\varphi_n < p < \nu_n$ на Σ.

Определение 2.7. Будем говорить, что функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают диагональным свойством на классе множеств $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если для любой последовательности множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}$, для которой

$$\lim_n \widetilde{\varphi}_n(E_n) = 0,$$

выполняется условие

$$\lim_n \widetilde{\varphi}_k(E_n) = 0,\ k > k_0.$$

Пример 2.12. Если для любого номера $n = 1, 2, \ldots$ справедливо условие $\varphi_n < P_{\mathcal{L}} < (\varphi_k,\ k \geq n)$, то функции последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают диагональным свойством на $\mathcal{L}$.

Пример 2.13. Если $\{\varphi_n\}$ – возрастающая последовательность функций на $\mathcal{L}$. то функции последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают диагональным свойством на $\mathcal{L}$.

Определение 2.8. Будем говорить, что функции множества последовательности $\{\nu_n\}$ обладают трансдиагональным свойством на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$ (соответственно, на спектрах класса $\mathcal{L}$), если для любой последовательности множеств $\{E_k\} \subset \mathcal{L}$ (соответственно, для любого спектра $\{E_k\} \subset \mathcal{L}$) и для любой подпоследовательности номеров $\{n_p\}(n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots)$, для которых

$$\lim_k \widetilde{\varphi_{n_p}}(E_k) = 0,\ p = 1, 2, \ldots,$$

выполняется условие

$$\lim_k \varphi_{n_p}(E_k) = 0$$

равномерно относительно p.

Пример 2.14. Если для любого номера n выполняется условие

$$(\nu_k.\ k \geq n) < p < \nu_n \text{ на } \mathcal{L},$$

то функции последовательности $\{\nu_n\}$ обладают трансдиагональным свойством на классе $\mathcal{L}$.

Лемма 2.3. Пусть функции множества $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ заданы на классе Σ; пусть $\mathcal{L} \subset \Sigma$ и для любого номера $n = 1, 2, \ldots\ \varphi_n << \nu_n$ на $\mathcal{L}$.

Если функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают трансдиагональным свойством на $\mathcal{L}$. а функции последовательности $\{\nu_n\}$ – диагональным свойством на $\mathcal{L}$. то

$$\varphi_n < p_{\mathcal{L}} < \nu_n.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательность множеств $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ такие, что (если нужно, то перейдем к подпоследовательности)

$$\lim \widetilde{\nu}_n(E_n) = 0 \tag{2.50}$$

и

$$\varphi_n(E_n) > \varepsilon, \ n = 1, 2, ... \tag{2.51}$$

Так как функции последовательности $\{\nu_n\}$ обладают диагональным свойством на $\mathcal{L}$, то в силу (2.50)

$$\lim_n \widetilde{\nu}_k(E_n) = 0, \ k > k_0. \tag{2.52}$$

Так как $\varphi_k << \nu_k$ на $\mathcal{L}$, $k = 1, 2, ...$, то из (2.52) следует

$$\lim_n \widetilde{\varphi}_k(E_n) = 0, \ k > k_0. \tag{2.53}$$

Из (2.53), применяя свойство трансдиагональности, получаем

$$\lim_n \varphi_k(E_n) = 0$$

равномерно относительно $k > k_0$, что противоречит (2.51).

Лемма 2.4. Для того чтобы функции множества последовательности $\{\nu_n\}$, заданные на классе Σ, обладали трансдиагональным свойством на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$ (соответственно, на спектрах класса $\mathcal{L}$), необходимо и достаточно, чтобы супремации последовательности $\{\widetilde{\nu}_n\}$ обладали соответствующим свойством на классе Σ (соответственно, на спектрах класса Σ).

Доказательство ввиду простоты опускаем.

Теорема 2.14. Для того чтобы функции множества последовательности $\{\nu_n\}$, заданные на классе Σ, обладали трансдиагональным свойством на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого подмножества $N_0 \subset N$ существовали число $\delta > 0$ и конечное множество $\{n_1, n_2, ..., n_p\} \subset N_0$ такие, что как только для некоторого множества $E \in \mathcal{L}$,

$$\widetilde{\nu}_{n_k}(E) < \delta, \ k = \overline{1, p}$$

так и для любого числа $n \in N_0$

$$\widetilde{\nu}_n(E) < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим противное. Тогда существуют множество $N_0 \subset N$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для любого числа $\delta > 0$ и для любого конечного множества $J \subset N_0$ существуют множество $E_0 \in \mathcal{L}$ и номер $m_0 \in N_0$, для которых

$$\widetilde{\nu}_k(E_0) < \delta,\ k \in J \text{ и } \widetilde{\varphi}_{m_0}(E_0) \geq \varepsilon.$$

Положим

$$n_0 = \min N_0.$$

По предположению, для функции ν_{n_0} существуют функция $\nu_{n_1}, n_1 > n_0,\ n_1 \in N_0$ и множество $E_1 \in \mathcal{L}$ такие, что

$$\widetilde{\nu}_{n_0}(E_1) < 1 \text{ и } \widetilde{\nu}_{n_1}(E_1) \geq \varepsilon.$$

Аналогично для функций ν_{n_0} и ν_{n_1} найдем функцию $\nu_{n_2},\ n_2 > n_1$, $n_2 \in N_0$ и множество $E_2 \in \mathcal{L}$ такие, что

$$\widetilde{\nu}_{n_k}(E_2) < \frac{1}{2},\ k = 0, 1 \text{ и } \widetilde{\nu}_{n_2}(E_2) \geq \varepsilon.$$

Продолжив процесс, по индукции построим возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$ и последовательность множеств $\{E_m\} \subset \mathcal{L}$, для которых

$$\widetilde{\nu}_{n_k}(E_m) < \frac{1}{2^m},\ k = \overline{0, m-1}, \tag{2.54}$$

$$\widetilde{\nu}_{n_k}(E_k) \geq \varepsilon,\ k = 1, 2, ... \tag{2.55}$$

Из (2.54), в силу свойства трансдиагональности и леммы 2.4, получаем

$$\lim_k \widetilde{\nu}_{n_i}(E_k) = 0$$

равномерно относительно i, что противоречит (2.55).

Полученное противоречие доказывает необходимость сформулированной теоремы.

Так как достаточность очевидна, то теорема 2.14 доказана.

Теорема 2.15. Пусть функции множества последовательности $\{\nu_n\}$ заданы на кольце Σ и равномерно квазитреугольные на Σ.

Для того чтобы функции последовательности $\{\nu_n\}$ обладали трансдиагональным свойством на кольце Σ, необходимо и достаточно, чтобы они обладали трансдиагональным свойством на спектрах кольца Σ.

Доказательство. Достаточность. Доказательство достаточности проведем в три этапа.

I. Покажем, что если для убывающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ и подпоследовательности номеров

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$$

$$\lim_k \widetilde{\varphi}_{n_i}(E_k) = 0, \ i = 1, 2, ..., \tag{2.56}$$

то справедливо условие

$$\lim_k \varphi_{n_i}(E_k) = 0$$

равномерно относительно i.

Предположим противное. Тогда существуют убывающая последовательность $\{E_n\} \subset \Sigma$, подпоследовательность номеров $\{n_i\}$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\lim_k \widetilde{\nu}_{n_i}(E_k) = 0, \ i = 1, 2, ... \tag{2.57}$$

$$\widetilde{\nu}_{n_k}(E_k) > \varepsilon, \ k = 1, 2, ... \tag{2.58}$$

В силу предложения 1.1 для числа $\varepsilon > 0$ найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$.

В силу (2.57) существует номер $k_1 > n_1$ такой, что

$$\widetilde{\nu}_{n_1}(E_{k_1}) < \delta. \tag{2.59}$$

Положим

$$e_1 = E_{n_1} \setminus E_{k_1}. \tag{2.60}$$

В силу выбора числа $\delta > 0$ из (2.57), (2.59) и (2.60) получаем

$$\widetilde{\nu}_{n_1}(e_1) \geq \delta.$$

В силу (2.57) найдем номер $k_2 > k_1$, для которого

$$\widetilde{\nu}_{n_1}(E_{k_2}) < \delta.$$

Положим

$$e_2 = E_{k_1} \setminus E_{k_2}.$$

Тогда

$$\widetilde{\nu}_{n_{k_1}}(e_2) \geq \delta.$$

По индукции построим последовательность чисел $\{k_m\}$, для которой

$$n_1 < k_1 < k_2 < ... < k_m < ...$$

последовательность множеств $\{e_m\}$ из Σ,

$$e_m = E_{k_{m-1}} \setminus E_{k_m}, \; k_0 = n_1, \; m = 1, 2, ... \tag{2.61}$$

$$\widetilde{\nu}_{n_{k_{m-1}}}(e_m) \geq \delta, \; k_0 = 1, \; m = 1, 2, ... \tag{2.62}$$

В силу (2.57) и (2.61), получаем

$$\lim_p \widetilde{\nu}_{n_{k_m}}(e_p) = 0, \; m = 1, 2, ...$$

Отсюда, учитывая, что $\{e_p\}$ – спектр из Σ, следует

$$\lim_p \widetilde{\nu}_{n_{k_m}}(e_p) = 0$$

равномерно относительно m, что противоречит (2.62).

Полученное противоречие и доказывает первую часть теоремы 2.15.

II. Покажем, что для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, для которой

$$\lim_k \widetilde{\nu}_n(E_k) = 0, n = 1, 2, ... \tag{2.63}$$

и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ и для любой функции ν_p, $p = 1, 2, ...$, справедливо

$$\widetilde{\nu}_p(E_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n_0} E_m) < \varepsilon, \; n = 1, 2, ... \tag{2.64}$$

Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, удовлетворяющая условию (2.63), для которых утверждение неверно.

Рассуждая по индукции, построим такие подпоследовательности номеров $\{n_m\}$ и $\{k_m\}$, что

$$\widetilde{\nu}_{k_m}(E_{n_m} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_{m-1}} E_i) \geq \varepsilon, \; m = 1, 2, ... \tag{2.65}$$

Положим

$$d_m = E_{n_m} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_{m-1}} E_i, \; m = 1, 2, ...$$

В силу (2.63)

$$\lim_m \widetilde{\nu}_{k_i}(d_m) = 0, \; i = 1, 2, ... \tag{2.66}$$

Отсюда, учитывая, что $\{d_m\}$ – спектр из Σ, получим

$$\lim_m \widetilde{\nu}_{k_i}(dm) = 0$$

равномерно относительно i, что противоречит (2.65).

Полученное противоречие и доказывает вторую часть доказательства теоремы 2.16.

III. Завершаем доказательство в части достаточности теоремы 2.15.

Предположим противное. Тогда существуют последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, подпоследовательность номеров $\{n_i\}$ и число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющие условиям (2.57) и (2.58). В силу предложения 2.1 по числу $\varepsilon > 0$ найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$ и в силу предложения 2.2 для числа $\delta > 0$ построим последовательность чисел $\delta_n \downarrow 0$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что выполняются условия

$$\widetilde{\nu}_k(E_n) < \delta_n, \; k = \overline{1, n-1} \tag{2.67}$$

$$\widetilde{\nu}_n(E_n) > \varepsilon, \; n = 1, 2, ... \tag{2.68}$$

Согласно второй части доказательства существует такой номер t_1, что для $n > t_1$ и для всех функций ν_m, $m = 1, 2, ...$,

$$\widetilde{\nu}_m(E_n \setminus B_1) < \delta_1, \text{ где } B_1 = \bigcup_{p=1}^{t_1} E_p.$$

Аналогично для последовательности $\{E_n B_1\}_{n>t_1}$ существует такой номер t_2, что для $n > t_2$ и для любой функции ν_m, $m = 1, 2, ...$,

$$\widetilde{\nu}_m(E_n B_1 \setminus B_2) < \delta_2, \text{ где } B_2 = \bigcup_{p=t_1+1}^{t_2} E_p B_1.$$

Продолжив процесс, по индукции построим возрастающую последовательность номеров $\{t_i\}$ и убывающую последовательность множеств $\{B_k\} \subset \Sigma$ такие, что

$$B_k = \bigcup_{p=t_{k-1}+1}^{t_k} E_p B_{k-1}, \ B_0 = T, \ t_0 = 1, \ k = 1, 2, ... \tag{2.69}$$

и для любой функции φ_m, $m = 1, 2, ...$

$$\widetilde{\nu_m}(E_n B_{k-1} \setminus B_k) < \delta_k, \ B_0 = T, \ k = 1, 2, ... \ n > t_k. \tag{2.70}$$

Из (2.69) и (2.70) получаем для любой функции ν_k, при $k < t_{m+1}$,

$$\widetilde{\nu_k}(B_m) \leq \widetilde{\nu_k}(\bigcup_{i=t_{m-1}+1}^{t_m} E_i) < \delta_{t_{m-1}}, \ m = 1, 2, ...,$$

то есть

$$\lim_m \widetilde{\nu_k}(B_m) = 0, \ k = 1, 2, ... \tag{2.71}$$

Легко проверить, что для любых номеров k и $n > t_k$ справедливы соотношения

$$E_n \subset \left(\bigcup_{p=1}^{k} (E_n B_{p-1} \setminus B_p)\right) \bigcup B_k. \tag{2.72}$$

Из (2.70), в силу выбора последовательности чисел $\{\delta_k\}$, получаем для любой функции $\nu_m, m = 1, 2, ...$

$$\widetilde{\nu_m}(\bigcup_{p=1}^{k}(E_n B_{p-1} \setminus B_p)) < \delta,\ k = 1, 2, ... \tag{2.73}$$

Из (2.70), (2.73) и (2.68) получаем для $n > t_k$

$$\widetilde{\nu_n}(B_k) \geq \delta,\ k = 1, 2, ...$$

С другой стороны, в силу (2.71) и первой части доказательства теоремы 2.16 следует

$$\lim_k \widetilde{\nu_n}(B_k) = 0$$

равномерно относительно n.

Полученное противоречие и доказывает в части достаточности теорему 2.15.

Так как необходимость утверждения очевидна, то доказательство теоремы 2.15 завершено.

Следствие 2.16. Пусть функции множества последовательности $\{\nu_n\}$ заданы и равномерно квазитреугольные на m-классе $\mathcal{L}$.

Для того чтобы функции последовательности $\{\widetilde{\nu_n}\}$ обладали трансдиагональным свойством на кольце $\Sigma = \Sigma(\mathcal{L})$, порожденном классом $\mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы они обладали трансдиагональным свойством на спектрах класса $\mathcal{L}$.

Следствие 2.17. Пусть функции множества последовательности $\{\nu_n\}$ заданы и равномерно квазитреугольные на m-классе $\mathcal{L}$.

Если функции последовательности $\{\widetilde{\nu_n}\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на $\mathcal{L}$, то они обладают трансдиагональным свойством на кольце $\Sigma = \Sigma(\mathcal{L})$, порожденном классом $\mathcal{L}$.

Приведем пример функций множества, которые обладают трансдиагональным свойством, но не являются исчерпывающими.

Теорема 2.16. Пусть функции множества последовательности $\{\nu_n\}$ аддитивные и заданы на m-классе $\Sigma(\nu_n : \Sigma \to (-\infty, +\infty))$; пусть супремация $\widetilde{\nu}_1$, обладает свойством Орлича на Σ.

Если в любом спектре $\{E_k\} \subset \Sigma$ существует такое множество E_{k_0}, что последовательность $\{\nu_n(E_{k_0})\}$ фундаментальная, то функции множества последовательности $\{\nu_n\}$ обладают трансдиагональным свойством.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, в силу следствия 2.16, существуют число $\varepsilon > 0$ и спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$ такие, что

$$\lim_k \widetilde{\nu_n}(E_k) = 0, \ n = 1, 2, ... \tag{2.74}$$

$$|\nu_n(E_n)| > \varepsilon, \ n = 1, 2, ... \tag{2.75}$$

В силу (2.74) построим такой подспектр $\{E_n^{'}\}$, что

$$\widetilde{\nu}_1(E_n^1) < \frac{1}{2^{n+1}}, \ n = 1, 2, ...$$

Положим

$$n_1 = 1 \text{ и } E_{n_2} = E_1^1.$$

Построим такой подспектр $\{E_n^2\} \subset \{E_n^1\}$, что

$$\widetilde{\nu}_2(E_n^2) < \frac{1}{2^{n+2}}, \ n = 1, 2, ...$$

Положим

$$E_{n_3} = E_2^2.$$

По индукции построим такую подпоследовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$\widetilde{\nu}_k(E_{n_{k+i}}) < \frac{1}{2^{k+i}}, \ i = 1, 2, ... \tag{2.76}$$

$$|\nu_{n_k}(E_{n_k})| > \varepsilon, \ k = 1, 2, ... \tag{2.77}$$

Обозначим через S σ-кольцо, порожденное спектром $\{E_{n_k}\}$. Легко видеть, что любое множество $E \in S$ есть объединение не более, чем счетного объединения элементов спектра $\{E_{n_k}\}$.

Так как супремация $\widetilde{\nu}_1$ обладает свойством Орлича, то

$$S \subset \Sigma.$$

Покажем, что каждая функция ν_{n_k}, $k = 1, 2, ...,$ – исчерпывающая на σ-кольце S.

Действительно, пусть $\{\mathcal{A}_p\}$ – некоторый спектр из S. Положим

$$t_p = \min\{n_k : E_{n_k} \subset \mathcal{A}_p\}.$$

Так как $\{\mathcal{A}_p\}$ – спектр, то $t_p \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_p \widetilde{\nu_{n_k}}(\mathcal{A}_p) = 0,$$

то есть функции ν_{n_k}, $k = 1, 2, ...,$ исчерпывающие на S.

В силу следствия 2.3 функции последовательности $\{\nu_{n_k}\}$ равномерно исчерпывающие на S, что противоречит (2.75).

Следствие 2.18. Пусть функции множества последовательности $\{\nu_n\}$ аддитивные и заданы на σ-кольце Σ; пусть супремация $\widetilde{\nu_1}$ – – σ-полуаддитивная.

Если в любом спектре $\{E_n\} \subset \Sigma$ существует такое множество E_{k_0}, что последовательность $\{\nu_n(E_{k_0})\}$ фундаментальная, то функции множества последовательности $\{\nu_n\}$ обладают трансдиагональным свойством.

Теорема 2.17. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – две последовательности функций множества, заданные на m-классе Σ; пусть функции последовательности $\{\varphi_n\}$ – равномерно квазитреугольные, а функции последовательности $\{\nu_n\}$ обладают диагональным свойством, пусть, далее, для любого номера $n = 1, 2, ...$

$$\varphi_n << \nu_n.$$

Если выполняется одно из следующих условий:

1) функции последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно исчерпывающие;

2) функции последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают трансдиагональным свойством на спектрах класса Σ, то

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на} \Sigma.$$

Справедливость утверждения следует из теоремы 2.16, леммы 2.3 и следствия 2.15.

Следствие 2.19. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – две последовательности функций множества, заданных на m-классе Σ: пусть функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно квазитреугольные и равномерно исчерпывающие; пусть для любого номера $n = 1, 2, ...$

$$\varphi_n << \nu_n \text{ на } \Sigma.$$

Если выполняется одно из следующих условий:

1) $\nu_n < p < (\varphi_k,\ k \geq n)$ на Σ;

2) последовательность $\{\nu_n\}$ возрастающая на Σ, то

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma.$$

Доказательство. Как условие 1, так и условие 2 обеспечивают свойство диагональности для функций множества последовательности $\{\nu_n\}$. Осталось применить лемму 2.3.

Замечание 2.12. В следствии 2.19 условие 1) нельзя заменить условием

$$\nu_n << \nu_{n+1},\ n = 1, 2, ...$$

Следствие 2.20. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – последовательности функций множества, заданных на m-классе Σ; функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно квазитреугольные, а функции последовательности $\{\nu_n\}$ обладают диагональным свойством; пусть для любого номера $n = 1, 2, ...$

$$\varphi_n << \nu_n \text{ на } \Sigma;$$

пусть, далее, функции последовательности $\{\nu_n\}$ – равномерно исчерпывающие.

Для того чтобы выполнялось условие

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma,$$

необходимо и достаточно, чтобы функции последовательности $\{\varphi_n\}$ были равномерно исчерпывающими.

Следствие 2.21. (Теорема Витали–Хана–Сакса). Пусть функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ и функция ν скалярные и заданы на σ-кольце Σ; пусть каждая функция φ_n, $n = 1, 2, ...$ аддитивная и исчерпывающая; пусть в любом спектре $\{E_n\}$ существует множество $E_{k_0} \in \{E_n\}$, для которого последовательность $\{\varphi_n(E_{k_0})\}$ фундаментальная.

Если для любого номера

$$\varphi_n << \nu \text{ на } \Sigma,$$

то

$$\varphi_n < p < \nu \text{ на } \Sigma.$$

Теорема 2.18. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – две последовательности функций множества, заданы на m-классе Σ; пусть функции последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно квазитреугольные, а функции последовательности $\{\nu_n\}$ обладают диагональным свойством; пусть для любого номера $n = 1, 2, ...$

$$\varphi_n \equiv \nu_n \ \text{ на } \ \Sigma;$$

$$(\varphi_n << \nu_n \ \text{ и } \nu_n << \varphi_n \text{ на } \ \Sigma\ ), \tag{2.78}$$

пусть, далее, функции последовательности $\{\nu_n\}$ обладают трансдиагональным свойством на спектрах класса Σ.

Для того чтобы выполнялось условие

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma,$$

необходимо и достаточно, чтобы функции последовательности $\{\varphi_n\}$ обладали трансдиагональным свойством.

Доказательство. Достаточность следует из леммы 2.3.

Необходимость. Пусть $\{E_n\}$ – некоторый спектр из Σ и $\{n_i\}$ – некоторая подпоследовательность номеров, пусть

$$\lim_k \widetilde{\varphi_{n_i}}(E_k) = 0, \ i = 1, 2, ... \tag{2.79}$$

Так как $\nu_n << \varphi_n$, $n = 1, 2, ...$, то из (2.79) следует

$$\lim_k \widetilde{\nu_{n_i}}(E_k) = 0, \ i = 1, 2, ...$$

Следовательно, по условию теоремы получаем

$$\lim_k \widetilde{\nu_{n_k}}(E_{n_k}) = 0.$$

Отсюда, в силу условия $\varphi_n << \nu_n$, $n = 1, 2, ...$, следует

$$\lim_k \widetilde{\varphi_{n_k}}(E_{n_k}) = 0.$$

Осталось применить теорему 2.15.

Теорема 2.19. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – две последовательности монотонных функций множества, заданных на m-классе Σ; пусть функции $\{\varphi_n\}$ равномерно квазитреугольные, а функции $\{\nu_n\}$ обладают диагональным свойством; пусть каждая функция ν_n, $n = 1, 2, ...$, обладает свойством Орлича; пусть, далее, для любого номера $n = 1, 2, ...$

$$\varphi_n << \nu_n \text{ на } \Sigma.$$

Для того чтобы выполнялось условие

$$\varphi_n < \mathcal{P} < \nu_n \text{ на } \Sigma,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$, для которого

$$\lim \nu_n(E_n) = 0, \tag{2.80}$$

выполнялось условие

$$\lim \varphi_n(E_n) = 0. \tag{2.81}$$

Доказательство. Достаточность. Прежде всего покажем, что для любой убывающей последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, для которой верно соотношение (2.80), выполняется условие (2.81).

Предположим противное. Тогда существует убывающая последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что справедливо (2.80) и

$$\varphi_n(E_n) > \varepsilon, \ n = 1, 2, ... \tag{2.82}$$

Для числа $\varepsilon > 0$ в силу условия равномерной квазитреугольности функций последовательности $\{\varphi_n\}$ найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$. Так как функции последовательности $\{\nu_n\}$ обладают диагональным свойством, то из (2.80) следует

$$\lim_k \nu_n(E_k) = 0,\ n > n_0. \tag{2.83}$$

Пусть $n_1 > n_0$. Так как $\varphi_{n_1} << \nu_{n_1}$, то из (2.80) следует существование номера $k_1 > n_1$, для которого

$$\varphi_{n_1}(E_{k_1}) < \delta.$$

Положим

$$e_1 = E_{n_1} \setminus E_{k_1}.$$

Из (2.82) следует

$$\varphi_{n_1}(e_1) > \delta.$$

Продолжая процесс, по индукции построим две последовательности номеров такие, что

$$n_0 < n_1 < k_1 < ... < n_i < k_i < ...$$

$$\varphi_{n_i}(E_{k_i}) < \delta,\ i = 1, 2, ... \tag{2.84}$$

$$e_i = E_{n_i} \setminus E_{k_i},\ i = 1, 2, ...$$

$$\varphi_{n_i}(e_i) > \delta,\ i = 1, 2, ...$$

С другой стороны, так как $\{e_k\}$ – спектр из Σ, для которого

$$\lim_k \nu_{n_i}(e_k) = 0,\ i = 1, 2, ...,$$

то, согласно условию теоремы, получаем

$$\lim_k \varphi_{n_k}(e_k) = 0,$$

что противоречит (2.84).

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Предположим, что условие

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma$$

не выполняется. Тогда существует последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что выполняются условия (2.80) и (2.81). Так как функции множества $\{\nu_n\}$ обладают диагональным свойством, то справедливо (2.83).

Пусть $n_1 > n_0$. Построим такую подпоследовательность $\{E_n^1\} \subset \subset \{E_n\}$, что

$$\nu_{n_1}(E_n^1) < \frac{1}{2^{n+1}},\ n = 1, 2, ...$$

Положим

$$E_{n_2} = E_1^1,\ n_2 > n_1.$$

Построим такую подпоследовательность $\{E_n^2\} \subset \{E_n^1\}$, что

$$\nu_{n_2}(E_n^2) < \frac{1}{2^{n+2}},\ n = 1, 2, ...,$$

Положим

$$E_{n_3} = E_2^2,\ n_3 > n_2.$$

Продолжая процесс, по индукции построим такую подпоследовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$\nu_{n_k}(E_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+i}},\ i = 1, 2, ... \tag{2.85}$$

$$\nu_{n_k}(E_{n_k}) > \varepsilon,\ k = 1, 2, ... \tag{2.86}$$

Обозначим через S σ-кольцо, порожденное последовательностью $\{E_{n_k}\}$. Так как функции ν_n, $n = 1, 2, ...$, обладают свойством Орлича, то

$$S \subset \Sigma.$$

Положим

$$B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k},\ m = 1, 2, ...$$

Так как каждая функция ν_{n_k}, $k = 1, 2, ...$, обладает свойством Орлича, то

$$\lim_m \nu_{n_k}(B_m) = 0.$$

Отсюда, в силу первой части доказательства, получаем

$$\lim \varphi_{n_k}(B_k) = 0,$$

что противоречит (2.86). Полученное противоречие и доказывает теорему 2.19.

Следствие 2.22. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – две последовательности функций множества, заданных на m-классе Σ; функции последовательности $\{\nu_n\}$ монотонные и обладают диагональным свойством, а функции последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно квазитреугольные; пусть каждая функция ν_n, $n = 1, 2, ...$ обладает свойством Орлича; пусть, далее, для любого номера $n = 1, 2, ...$

$$\varphi_n << \nu_n \text{ на } \Sigma.$$

Для того чтобы выполнялось условие

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$, для которого

$$\lim \nu_n(E_n) = 0,$$

выполнялось условие

$$\lim \varphi_n(E_n) = 0.$$

Следствие 2.23. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – две последовательности функций множества, заданные на m-классе; пусть функции $\{\nu_n\}$ монотонные и обладают диагональным свойством; пусть для любого номера $n = 1, 2, ...$ функция ν_n обладает свойством Орлича, а функция φ_n аддитивная; пусть в любом спектре $\{E_n\} \subset \Sigma$ существует множество $E_{k_0} \in \{E_n\}$ такое, что последовательность $\{\varphi_n(E_{k_0})\}$ фундаментальная.

Если для любого номера $n = 1, 2, ...$

$$\varphi_n << \nu_n \text{ на } \Sigma, \text{ то } \varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда в силу теоремы 2.20 существует спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\lim \nu_n(E_n) = 0,$$

$$\varphi_n(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, ...$$

Как и при доказательстве теоремы 2.20, построим такую последовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$\widetilde{\nu_{n_k}}(E_{n_{k+i}}) < \frac{1}{2^{k+i}},\ i = 1, 2, ...$$

$$\nu_{n_k}(E_{n_k}) > \varepsilon,\ k = 1, 2, ...$$

Обозначим через S σ-кольцо, порожденное подспектром $\{E_{n_k}\}$. Так как функции ν_n, $n = 1, 2, ...$, обладает свойством Орлича, то

$$S \subset \Sigma$$

и каждая функция ν_{n_k}, $k = 1, 2, ...$ исчерпывающая на S. Отсюда, в силу условия $\varphi_{n_k} << \nu_{n_k}$, следует, что каждая функция φ_{n_k} исчерпывающая на S.

Следовательно, в силу следствия 2.3 функции последовательности $\{\varphi_{n_k}\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на S, что противоречит (2:87).

Полученное противоречие и доказывает следствие 2.23.

Теорема 2.20. Пусть на m-классе Σ заданы две последовательности монотонных, равномерно квазитреугольных функций множества $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$. Если каждая пара (φ_n, ν_n), $n = 1, 2, ...$, сконденсирована на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, то из условия

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \mathcal{L}$$

следует

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ такие, что

$$\nu_n(E_n) < \frac{1}{n},\ n = 1, 2, ... \qquad (2.87)$$

$$\varphi_n(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, ... \qquad (2.88)$$

Для числа $\varepsilon > 0$ найдем число $\delta = \delta(\varepsilon)$ в силу условия равномерной квазитреугольности функций $\{\varphi_n\}$; для каждого числа $\frac{1}{n}$ найдем число $\delta_n' = \delta(\frac{1}{n})$ в силу условия равномерной квазитреугольности функций последовательности $\{\nu_n\}$. Положим $\delta_n = \min\{\delta, \delta_n'\}/$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что

$$\nu_n(E_n) < \delta_n,\ n = 1, 2, ... \tag{2.89}$$

$$\varphi_n(E_n) > \varepsilon,\ n = 1, 2, ... \tag{2.90}$$

Так как каждая пара функций (φ_n, ν_n), $n = 1, 2, ...$ сконденсирована на классе $\mathcal{L} \subset \Sigma$, то существуют такие множества $e_n \in \mathcal{L}$, $n = = 1, 2, ...$, что

$$\widetilde{\varphi_n}(E_n \Delta e_n) < \delta_n \text{ и } \widetilde{\nu_n}(E_n \Delta e_n) < \delta_n. \tag{2.91}$$

Из (2.89), (2.90) и (2.91) получаем

$$\nu_n(e_n) < \frac{1}{n},\ n = 1, 2, ...,$$

$$\varphi_n(e_n) > \delta,\ n = 1, 2, ...,$$

что противоречит условию

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \mathcal{L}.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему 2.20.

Следствие 2.24. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – две последовательности монотонных, равномерно квазитреугольных функций множества, заданных на m-классе Σ; класс $\mathcal{L} \subset \Sigma$ замкнут относительно операции объединения. Если каждая функция φ_n, $n = 1, 2, ...$ и каждая функция ν_n, $n = 1, 2, ...$ сконденсирована на m-классе $\mathcal{L}$, то из условия

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \mathcal{L}$$

следует

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma.$$

Действительно, каждая пара (φ_n, ν_n), $n = 1, 2, ...$, сконденсирована на классе $\mathcal{L}$. Осталось применить теорему 2.21.

Следствие 2.25. Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\nu_n\}$ две последовательности конечных мер, заданные на σ-кольце $S = S(\Sigma)$, порожденном кольцом Σ, то из условия

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } \Sigma$$

следует

$$\varphi_n < p < \nu_n \text{ на } S.$$

ГЛАВА 3
РЕГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

3.1. σ-топологическое пространство

Определение 3.1. Пусть T – некоторое множество; $\tau \subset 2^T$ – некоторый класс подмножеств множества T, удовлетворяющий аксиомам:

1) $T \in \tau$ и $\emptyset \in \tau$;

2) класс τ замкнут относительно счетного объединения;

3) класс τ замкнут относительно конечного пересечения.

Следуя А.Д. Александрову [1], пространство (T, τ) будем называть σ-топологическим, множества класса τ – открытыми, а их дополнения замкнутыми.

Обозначим через ω класс всех замкнутых множеств σ-топологического пространства (T, τ);

– $\mathcal{L} \subset \omega$ и $K \subset \omega$; $\emptyset \in \mathcal{L} \bigcap K$;

Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$ (как показано в примере 3.6), из этого условия, вообще говоря, не следует, что алгебра Σ является σ-алгеброй;

– $\mathcal{G} \subset \omega$, класс замкнутых множеств, обладающих свойством: из любого счетного открытого покрытия множества $C \in \mathcal{G}$ можно выделить конечное покрытие.

Определение 3.2. σ-топологическое пространство (T, τ) будем называть $\mathcal{L}K$-отделимым (в случае, если $\mathcal{L} = K$, $\mathcal{L}$-отделимым) если для любых непересекающихся множеств $C \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{D} \in K$ существуют непересекающиеся открытые множества $\mathcal{U}$ и ϑ из τ, для которых

$$C \subset \mathcal{U} \text{ и } \mathcal{D} \subset \vartheta.$$

Очевидно, справедливо

Предложение 3.1. σ – топологическоге пространство (T, τ) – $\omega\mathcal{L}$ – отделимо тогда и только тогда, когда для любых множеств $\mathcal{D} \in \mathcal{L}$

и $\mathcal{U} \in \tau$. для которых $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$ существуют множества $C \in \omega$ и $\vartheta \in \tau$ такие, что
$$\mathcal{D} \subset \vartheta \subset C \subset \mathcal{U}. \tag{3.1}$$

Определение 3.3. Будем говорить, что класс $\mathcal{L} \subset \omega$ удовлетворяет аксиоме (*): если для любых множеств $C \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{U} \in \tau$ таких, что $C \subset \mathcal{U}$, существуют такие множества $\mathcal{D} \in \mathcal{L}$ и $\vartheta \in \tau$, что
$$C \subset \vartheta \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{U}.$$

Предложение 3.2. Пусть (T, τ) – σ-топологическое пространство; пусть $\mathcal{L}$ – такой класс замкнутых множеств, что
$$\mathcal{L} \setminus \tau \subset \mathcal{L}$$
и пространство (T, τ) $\mathcal{L}$ отделимое.

Если $C \in \mathcal{L}$. а $\mathcal{U}$ и ϑ – такие открытые множества, что
$$C \subset \mathcal{U} \bigcup \vartheta,$$
то существуют такие множества $\mathcal{D} \in \mathcal{L}$ и $E \in \mathcal{L}$, что
$$C = \mathcal{D} \bigcup E, \ \mathcal{D} \subset \mathcal{U}, \ E \subset \vartheta.$$

Доказательство. Так как $C \setminus \mathcal{U}$ и $C \setminus \vartheta$ непересекающиеся замкнутые множества из $\mathcal{L}$, то существуют непересекающиеся открытые множества $\widetilde{\mathcal{U}}$ и $\widetilde{\vartheta}$ такие, что $C \setminus \mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{U}}$ и $C \setminus \vartheta \subset \widetilde{\vartheta}$.

Положим
$$\mathcal{D} = C \setminus \widetilde{\mathcal{U}} \text{ и } E = C \setminus \widetilde{\vartheta}.$$
Ясно, что
$$\mathcal{D} \in \mathcal{L}, \ E \in \mathcal{L}, \ \mathcal{D} \subset \mathcal{U}, \ E \subset \vartheta.$$

Так как
$$\widetilde{\mathcal{U}} \bigcap \widetilde{\vartheta} = \emptyset,$$
то
$$\mathcal{D} \bigcup E = (C \setminus \widetilde{\mathcal{U}}) \bigcup (C \setminus \widetilde{\vartheta}) = C \setminus (\widetilde{\mathcal{U}} \bigcap \widetilde{\vartheta}) = C.$$

Замечание 3.1. В случае, когда (T, τ) – хаусдорфово локально-компактное топологическое пространство, а $\mathcal{L}$ – класс компактов, из предложения 4.2 следует теорема П. Халмоша [76, C. 211].

Пример 3.1. Пусть (T, τ) – хаусдорфово топологическое пространство; пусть $\mathcal{L}$ – некоторый класс его компактных множеств.

Пространство (T, τ) является σ-топологическим и $\mathcal{L}$-отделимым. Условие 3.1, вообще говоря, не выполняется.

Пример 3.2. Пусть (T, τ) – хаусдорфово регулярное топологическое пространство; пусть $\mathcal{L}$ – некоторый класс его компактных множеств.

Ясно, что (T, τ) – σ-топологическое $\mathcal{L}\omega$-отделимое пространство и выполняется условие (3.1).

Пример 3.3. Пусть (T, τ) – нормальное пространство; пусть $\mathcal{L}$ и K – некоторый класс замкнутых множеств.

Очевидно, что (T, τ) – топологическое $\mathcal{L}K$-отделимое пространство. Условие (3.1) выполняется, если $\mathcal{L}$ – класс всех замкнутых множеств.

Прежде чем сформулировать пример 3.4, введем следующие обозначения.

Пусть (T, τ) – локально-компактное, хаусдорфово топологическое пространство. Обозначим

K – класс всех компактных множеств;

K_0 – класс всех компактных множеств типа G_δ;

S – σ-кольцо борелевских множеств;

S_0 – σ-кольцо бэровских множеств;

$\mathcal{H}$ – класс всех открытых борелевских множеств, т.е. $\mathcal{H} = S \bigcap \tau$;

$\mathcal{H}_0$ – класс всех открытых бэровских множеств, т.е. $\mathcal{H}_0 = S_0 \bigcap \tau$;

$\mathcal{L}$ – класс замкнутых борелевских множеств;

$\mathcal{L}_0$ – класс всех замкнутых бэровских множеств.

Известно [76, C. 212], что если C – компактное множество и $\mathcal{U}$ – открытое множество такие, что $C \subset \mathcal{U}$, то существуют компактное типа G_δ-множество C_0 и σ-компактное открытое множество $\mathcal{U}_0$ такие, что

$$C \subset \mathcal{U}_0 \subset C_0 \subset \mathcal{U}.$$

Напомним, что σ-компактное открытое множество является бэровским.

Теперь можем сформулировать следующие предложения.

Предложение 3.3. Пусть (T, τ) – хаусдорфово локально-компактное топологическое пространство. Если C – компактное множество, а $\mathcal{U}$ – открытое, такие, что $C \subset \mathcal{U}$, то существуют такие бэровские множества $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}_0$ и $\mathcal{D}_0 \in \mathcal{H}_0$, что

$$C \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{U}.$$

Предложение 3.4. Пусть (T, τ) – хаусдорфово локально-компактное топологическое пространство. Если $E \in S$, то существует такое открытое множество $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}_0$, что $E \subset \mathcal{U}_0$.

В дальнейшем условимся под $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{K}$, $\hat{\mathcal{H}}$, $\hat{S}$ понимать либо $\mathcal{L}$, K, $\mathcal{H}$ и S; либо $\mathcal{L}_0$, K_0, $\mathcal{H}_0$ и S_0.

Пример 3.4. Пусть (T, τ) – хаусдорфово локально-компактное хаусдорфово топологическое пространство. Пусть $E \in \mathcal{H}_0$.

Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}} \bigcap E,$$

т.е. $\widetilde{\mathcal{H}}$ – либо класс всех открытых борелевских множеств, содержащихся в E; либо класс всех открытых бэровских множеств, содержащихся в E.

Очевидно, что $(E, \widetilde{\mathcal{H}})$ – σ-топологическое пространство, вообще говоря, не являющееся топологическим (например, в случае, когда $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \bigcap E$).

Пример 3.5. Через $\widetilde{\mathcal{L}}$ обозначим класс всех замкнутых множеств σ-топологического пространства $(E, \widetilde{\mathcal{H}})$ и через $\widetilde{K} = \hat{K} \bigcap E$.

Ясно, что

$$\hat{\mathcal{L}} \bigcap E \subset \widetilde{\mathcal{L}} \text{ и } \widetilde{K} \subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

Из предложений 3.1. и 3.3 легко видеть, что $(E, \widetilde{\mathcal{H}})$ является $\widetilde{K}$-отделимым и выполняется условие (3.1).

Пусть (T, τ) – некоторое σ-топологическое пространство и Σ – алгебра подмножеств множества T, для которой $\Sigma \supset \tau$. Покажем, что из этого условия, вообще говоря, не следует, что алгебра Σ является σ-алгеброй.

Пример 3.6. Пусть $T = [0;1]$; пусть τ – класс всех открытых подмножеств отрезка $[0;1]$ и пусть ω – класс всех замкнутых подмножеств отрезка $[0;1]$. Пространство (T,τ) – σ-топологическое и ω-отделимое.

Обозначим через $\mathcal{A}$ класс множеств

$$\mathcal{A} = \{\tau;\omega\}.$$

Положим $\mathcal{L}_1$ – класс всех конечных объединений множеств из $\mathcal{A}$, т.е. $E \in \mathcal{L}_1$ тогда и только тогда, когда

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \text{ где } \{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{A}.$$

Ясно, что

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1.$$

Обозначим через $\mathcal{G}_1$ класс всех разностей элементов из $\mathcal{L}_1$, т.е. $E \in \mathcal{G}_1$ тогда и только тогда, когда $E = A \setminus B$, где $A, B \in \mathcal{L}_1$.

Обозначим через $\mathcal{L}_2$ класс всех конечных объединений элементов класса $\mathcal{G}_1$, а через $\mathcal{G}_2$ – класс всех разностей элементов из $\mathcal{L}_2$ и т.д.

Продолжив процесс, построим две последовательности множеств $\{\mathcal{L}_n\}$ и $\{\mathcal{G}_n\}$. Ясно, что

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{G}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \ldots \tag{3.2}$$

Положим

$$\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n. \tag{3.3}$$

Очевидно, что Σ – алгебра, такая, что $\Sigma \supset \tau$. Покажем, что алгебра Σ не является σ-алгеброй.

Обозначим через S класс подмножеств $E \subset T$, обладающих свойством: существует интервал (α,β), для которого

$$(\alpha,\beta) \subset \overline{E} \bigcap \overline{E^1}, \tag{3.4}$$

где $\overline{E}$ – замыкание множества E, E^1 – дополнение множества E до T.

Отметим свойства класса множеств S.

1) Класс S – не пуст.

2) Если $E \notin S$, то $E' \notin S$.

3) Если $A, B \notin S$, то

$$A\bigcup B \notin S,\ AB \notin S,\ A \setminus B \notin S.$$

4) Для любого промежутка $< a, b > \subset [0;1]$ следует $< a, b > \notin S$.

5) Если $\mathcal{U} \in \tau$, то $\mathcal{U} \notin S$.

6) Если $E \in \Sigma$, то $E \notin S$.

Таким образом, алгебра Σ не является σ-алгеброй.

Пусть (T, τ) – σ-топологическое пространство; Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$; предполагается, что рассматриваемые функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, если не оговорено противное, заданы на алгебре Σ, принимают значения из $[0, +\infty]$ и $\varphi(\emptyset) = 0$.

Через $\widetilde{\varphi}$, как обычно, будем обозначать супремацию функции $\varphi \in \Phi$, т.е.

$$\widetilde{\varphi}(E) = \sup\{\varphi(A),\ A \in E\bigcap\Sigma\},\ E \subset T.$$

Если функция множества φ принимает значения из т.а.г. (X, η), то, как обычно, положим

$$\varphi^{\vee}(E) = \{\varphi(A),\ A \in E\bigcap\Sigma\},\ E \subset T.$$

Если $\Phi_0 \subset \Phi$ и $\mathcal{P} \subset \Sigma$, то обозначим

$$\Phi_0^{\vee}(\mathcal{P}) = \bigcup\{\varphi^{\vee}(E),\ \varphi \in \Phi_0,\ E \in \mathcal{P}\}.$$

Определение 3.4. Пусть $\mathcal{L}$ – некоторый класс замкнутых множеств. Будем говорить, что функция множества $\varphi\mathcal{L}$-регулярная (слабо $\mathcal{L}$-регулярная) на классе $\mathcal{P} \subset \Sigma$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого множества $E \in \mathcal{P}$ существует такое замкнутое множество $C \in \mathcal{L}$, что

$$C \subset E \text{ и } \widetilde{\varphi}(E \setminus C) < \varepsilon$$

(соответственно, $C \subset E$ и $\varphi(E \setminus C) < \varepsilon$).

Определение 3.5. Пусть $\mathcal{L}$ – некоторый класс замкнутых множеств; пусть (X, η) – т.а.г. Будем говорить, что функция $\varphi : \Sigma \to (X, \eta)$ $\mathcal{L}$-регулярная (слабо $\mathcal{L}$-регулярная) на классе $\mathcal{P} \subset \Sigma$, если для любой окрестности $\mathcal{U} \in \eta$ и для любого множества $E \in \mathcal{P}$ существует такое замкнутое множество $C \in \mathcal{L}$, что

$$C \subset E \text{ и } \varphi^{\vee}(E \setminus C) \subset \mathcal{U}$$

(соответственно, $C \subset E$ и $\varphi(E \setminus C) \in \mathcal{U}$).

Предложение 3.5. Пусть (T, τ) – σ-топологическое пространство; $\Sigma \supset \tau$ и $\mathcal{G} \subset \omega$ (т.е. такой класс замкнутых множеств, что из любого счетного открытого покрытия которых можно выделить конечное покрытие).

Если функция φ $\mathcal{G}$-регулярная на классе τ-открытых множеств, то она исчерпывается на τ.

Следствие 3.1. Пусть (T, τ) – хаусдорфово топологическое пространство и Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$ $\mathcal{L}$ – некоторый класс компактов. Если функция φ $\mathcal{L}$-регулярная на классе τ, то она исчерпывающая на τ.

Предложение 3.6. Пусть (T, τ) – хаусдорфово топологическое пространство; алгебра множеств Σ такова, что $\Sigma \supset \tau$ и $\mathcal{L}$ – некоторый класс компактов.

Если функция φ квазитреугольная и φ регулярная Σ, то φ непрерывная сверху в нуле Σ.

Замечание 3.2. Из предложения 3.7 получаем справедливость известной теоремы А.Д. Александрова [1] о σ-аддитивности конечной регулярной аддитивной функции множества.

Предложение 3.7. Пусть (T, τ) – σ-топологическое пространство; пусть алгебра $\Sigma \supset \tau$.

Если функция φ $\mathcal{L}$-слабо регулярная ($\mathcal{L}$-регулярная) на классе τ, то для любого замкнутого множества C и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество $\mathcal{U} \in \tau$, что

$$C \subset \mathcal{U} \text{ и } \varphi(\mathcal{U} \setminus C) < \varepsilon$$

(соответственно, $C \subset \mathcal{U}$ и $\widetilde{\varphi}(\mathcal{U} \setminus C) < \varepsilon$).

Доказательство. Пусть множество $C \in \omega$, т.е. C замкнутое. Положим $E = T \setminus C$. По условию существует такое замкнутое множество $\mathcal{D} \in \mathcal{L}$, что

$$\mathcal{D} \subset E \text{ и } \varphi(E \setminus \mathcal{D}) < \varepsilon$$

(соответственно, $\mathcal{D} \subset E$ и $\widetilde{\varphi}(E \setminus \mathcal{D}) < \varepsilon$)

Множество

$$\mathcal{U} = T \setminus \mathcal{D}$$

искомое.

Замечание 3.3. Для группо-значных функций множества справедливы аналоги предложений 3.5–3.7. Например,

Предложение 3.8. Пусть (T, τ) –σ-топологическое пространство, пусть алгебра $\Sigma \supset \tau$. Если функция φ, заданная на Σ, со значениями в т.а.г. (X, η) $\mathcal{L}$-слабо регулярная ($\mathcal{L}$-регулярная) на классе τ, то для любого множества $C \in \omega$ и для любой окрестности $\vartheta \in \eta$ существует такое открытое множество $\mathcal{U} \in \tau$, что

$$C \subset \mathcal{U} \text{ и } \varphi(\mathcal{U} \setminus C) \in \vartheta,$$

(соответственно, $C \subset \mathcal{U}$ и $\varphi^{\vee}(\mathcal{U} \setminus C) \subset \vartheta$).

Теорема 3.1 (Лемма Урысона). Пусть (T, τ) – σ-топологическое пространство; пусть класс $\mathcal{L} \subset \omega$ удовлетворяет аксиоме (*); пусть $C \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{U} \in \tau$ таковы, что $C \subset \mathcal{U}$. Тогда существует такая непрерывная функция $f : T \to [0, 1]$, что

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in C, \\ 1, & \text{если } x \in T \setminus \mathcal{U}. \end{cases}$$

Для любого числа $a \in [0, 1)$ существует такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{L}$, что

$$f^{-1}((-\infty, a]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

3.2. Постановка задачи

По-видимому, впервые наиболее полно вопрос о влиянии регулярности функции множества на ее свойства изучал А.Д. Александров [1,2].

Например, в предложениях 3.5, 3.8 и в следствии 3.1 показано о связи регулярности функции φ и ее непрерывности.

В самостоятельное направление выделились теоремы, в которых конечные меры семейства $\Phi = \{\varphi\}$ определены на борелевской σ-алгебре Σ топологического пространства (T, τ), причем условия (например, «поточечной» ограниченности мер семейства $\Phi = \{\varphi\}$ или равномерной исчерпываемости, сходимости $\lim \varphi_n(E) = \varphi_0(E)$ $E \in \Sigma$) выполняется не на всей σ-алгебре Σ, а лишь на ее части, (на открытых множествах τ или даже на некоторой части класса открытых множеств).

Основные результаты в этом направлении принадлежат J. Diedonne [97].

Теорема 3.2. Пусть (T, τ) – компактное хаусдорфово топологическое пространство; $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство конечных регулярных борелевских мер, заданных на σ-алгебре Σ борелевских множеств пространства (T, τ):

а) Если для любого открытого множества $\mathcal{U} \in \tau$

$$\sup\{|\varphi(\mathcal{U})|,\ \varphi \in \Phi\} < \infty,$$

то

$$\sup\{|\varphi(E)|,\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} < \infty;$$

б) Если меры семейства $\Phi = \{\varphi\}$-равномерно исчерпывающие на классе открытых множеств, то они равномерно исчерпывающие на σ-алгебре Σ, то есть справедлива импликация

$$(P\mathcal{U}_\tau)_\tau \Rightarrow (P\mathcal{U})_\Sigma.$$

Теорема 3.3. Пусть (T, τ) – компактное хаусдорфово топологическое пространство; пусть $\{\varphi_n\}$-последовательность конечных регулярных борелевских мер, заданных на σ – алгебре борелевских множеств пространства (T, τ).

Если для любого открытого множества $\mathcal{U} \in \tau$

$$\lim \varphi_n(\mathcal{U}) = \varphi_0(\mathcal{U}),$$

то для любого множества $E \in \Sigma$

$$\lim \varphi_n(E) = \varphi_0(E).$$

Теоремы Дьедонне, как и теорема Никодима, подвергались многочисленным обобщениям в различных направлениях:

– менялся класс функций множества;

– менялся класс топологических пространств (T, τ);

– брались различные части класса открытых множеств;

– менялось множество значений рассматриваемых функций множества;

– менялось понятие «ограниченного» множества в т.а.г. (X, η);

менялись как понятие регулярности, так и класс замкнутых множеств, относительно которого определяется регулярность функции множества φ.

Регулярность борелевской меры φ понималась как регулярность ее полной вариации $|\varphi|$ относительно класса компактов, т.е. для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой компакт C, что

$$C \subset E \text{ и } |\varphi|(E \setminus C) < \varepsilon.$$

A. Grothendieck [121] обобщил теоремы Дьедонне на аддитивные ограниченные функции множества.

B.B. Wells, сохранив требование компактности пространства, доказал, что «поточечной» ограниченности достаточно требовать на регулярных открытых множествах.

J. Kupka [133] – достаточно «поточечной» ограниченности на множествах из некоторого аксиоматически определенного класса (типа открытые множества вида F_σ или бэровские открытые множества).

P. Morales [148] перенес результаты работы J. Kupka на семейство мер со значениями в т.а.г. (X, η) с требованием 2-ограниченности (т.е. определения ограниченного множества группе (X, η) в смысле Бурбаки).

В.М. Климкин, Т.А. Срибная доказывают теорему 3.3 Дьедонне для произвольного σ-топологического пространства, причем рассматриваемые функции множества неаддитивные.

J. Stein заменил условие компактности топологического пространства (T, η) на условие регулярности.

Е. Рар[150] обобщил теорему Дьедонне для хаусдорфова топологического пространства и в работе [151] – для неаддитивных функций множества в случае локально-компактного топологического пространства.

А.Н. Саженков [68] доказал теорему Дьедонне для $\mathcal{F}$-отделимых σ-топологических пространств.

Л.Д. Рашкин обобщил теорему 3.3 Дьедонне на класс слабо регулярных f-композиционных функций на регулярном топологическом пространстве.

Б.В. Пахаев [55] получил аналог теоремы 3.3 Дьедонне для слабо регулярных K-внешних мер.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что

– (T, τ) – некоторое σ-топологическое пространство.

– Σ-алгебра подмножеств множества T, для которой $\Sigma \supset \tau$;

– ω – класс всех замкнутых множеств пространства (T, τ);

– $\mathcal{L}$ и K – некоторые классы замкнутых множеств;

– функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на алгебре Σ, принимают значения из $[0, +\infty]$ и $\varphi(\emptyset) = 0$;

– $\widetilde{\varphi}$ – супремация функции φ;

– используемая терминология (свойство выборки, «поточечной» ограниченности, равномерная ограниченность, свойство выпуклости и т.д.) приведена в главе 3.

Определение 3.6. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ ε_0 $\mathcal{L}$-регулярные (слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные) на классе множеств $\mathcal{P} \subset \Sigma$, если существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого множества $E \in \mathcal{P}$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует такое множество $C \in \mathcal{L}$ (зависящее от множества $E \in \mathcal{P}$ и функции $\varphi \in \Phi$), что

$$C \subset E \text{ и } \widetilde{\varphi}(E \setminus C) < \varepsilon_0$$

(соответственно, $C \subset E$ и $\varphi(E \setminus C) < \varepsilon_0$).

Определение 3.7. Пусть (X, η) – т.а.г. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, заданные на Σ со значениями в т.а.г. $(X, \eta)\vartheta_0$. $\mathcal{L}$-регулярные (слабо ϑ_0, $\mathcal{L}$-регулярные) на классе множеств $\mathcal{P} \subset \Sigma$, если существует такая окрестность $\vartheta_0 \in \eta$, что для любого множества $E \in \mathcal{P}$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует множество $C \in \mathcal{L}$ (зависящее от множества $E \in \mathcal{P}$ и функции $\varphi \in \Phi$), для которого

$$C \subset E \text{ и } \varphi^{\vee}(E \setminus C) \subset \vartheta_0$$

(соответственно, $C \subset E$ и $\varphi(E \setminus C) \in \vartheta_0$).

Предложение 3.9. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ ε_0 $\mathcal{G}$-регулярные на классе τ, то супремации семейства $\{\widetilde{\varphi}, \varphi \in \Phi\}$ равномерно ограничены на спектрах класса τ.

Доказательство проходит по аналогии с доказательством предложения 3.5.

В параграфе 3.2 решаются две задачи:

1) при каком условии функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ будут равномерно ограничены на Σ;

2) при каком условии функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и «поточечно» ограниченные на классе τ будут равномерно ограничены на Σ, (каких-либо предположений относительно какой-либо формы «полуаддитивности» и непрерывности у рассматриваемых функций множества не предполагается).

Таким образом, в этом параграфе доказан принцип равномерной ограниченности (глава 1) для семейства слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярных на Σ функций множества.

В работе [1] А.Д. Александров показал, что в любом некомпактном нормальном σ-топологическом пространстве существует аддитивная исчерпывающая конечная функция множества, полная вариация $|\varphi|$ которой регулярная относительно класса *всех замкнутых множеств*, но функция φ не является непрерывной сверху в нуле. Естественно возник вопрос – будет ли регулярная σ-аддитивная функция множества φ исчерпывающей.

А.Н. Саженков в работе [64] дал положительный ответ на поставленный выше вопрос, т.е. регулярная относительно класс замкнутых множеств σ-аддитивная функция множества является исчерпывающей.

В работе [175] В.М. Климкин указал довольно широкий класс неаддитивных функций множества, для которых из регулярности относительно класса замкнутых множеств и непрерывности сверху в нуле следует наличие свойства исчерпываемости.

3.3. Равномерная ограниченность одного семейства слабо регулярных функций множества

Теорема 3.4. Пусть (T, τ) – некоторое σ-топологическое $\mathcal{L}K$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$; пусть, далее, функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и $\varepsilon_0 K$-регулярные на классе τ.

Для того чтобы

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} < \infty, \tag{3.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) для любого спектра $\{\mathcal{U}_n\}$ открытых множеств

$$\sup\{\varphi(\mathcal{U}_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} < \infty. \tag{3.6}$$

Доказательство теоремы 3.4 опирается на следующие леммы, в формулировках которых используются обозначения теоремы 3.4.

Лемма 3.1. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и обладают свойством выборки; пусть $E \in \Sigma$.

Если

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi\} < \infty \tag{3.7}$$

и

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(E),\ \varphi \in \Phi\} = \infty, \tag{3.8}$$

то существуют последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ и последовательность множеств $\{F_n\} \subset \mathcal{L}$, для которых $F_n \subset E,\ n = 1, 2, \dots$ и

$$\sup\{\varphi_n(F_n),\ n = 1, 2, \dots\} = \infty.$$

Лемма 3.2. Пусть функция множества φ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$ – регулярная на Σ; пусть $C \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{U} \in \tau$.

Если $C \subset \mathcal{U}$, то существует такое открытое множество $\mathcal{U}_0 \in \tau$, что

$$C \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U} \text{ и } \varphi(\mathcal{U}_0 \setminus C) < \varepsilon_0.$$

Лемма 3.3. Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$ – регулярные на Σ.

Если выполняются условия

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки на Σ;

2) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ – слабо $\varepsilon_0 K$-регулярные на τ;

3) для любого спектра $\{\mathcal{U}_n\}$ открытых множеств справедливо (3.6),

то для любого множества $F \in K$ существует такое открытое множество $\mathcal{U} \in \tau$, что $F \subset \mathcal{U}$ и

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(\mathcal{U} \setminus F),\ \varphi \in \Phi\} < \infty. \tag{3.9}$$

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.3; пусть $\mathcal{U} \in \tau$. Если

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(\mathcal{U}),\ \varphi \in \Phi\} = \infty,$$

то для любого числа m существуют функция $\varphi \in \Phi$ и множества

$$F \in \mathcal{L}\bigcap\mathcal{U},\ C \in K\bigcap\mathcal{U},\ A \in \tau,\ B \in \tau$$

такие, что $A \bigcap B = \emptyset$,

$$F \subset A,\ C \subset B, \varphi(A) > m,\ \varphi(B) > m,$$

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(A\bigcup B),\ \varphi \in \Phi\} < \infty. \tag{3.10}$$

$$\widetilde{\varphi}(\mathcal{U} \setminus (F\bigcup C)) < \varepsilon_0.$$

Рассмотрим теперь частный случай теоремы 3.4, когда класс $K = \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ – класс замкнутых множеств, обладающих свойством: из любого счетного, открытого покрытия, можно выделить конечное покрытие.

Теорема 3.5. Пусть (T, τ) – σ-топологическое $\mathcal{LG}$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$; пусть, далее, функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и $\varepsilon_0\mathcal{G}$-регулярные на τ.

Для того чтобы функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ были равномерно ограничены на Σ, т.е. было справедливо (3.5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладали свойством выборки;

2) для любого открытого множества $\mathcal{U} \in \tau$

$$\sup\{\varphi(\mathcal{U}),\ \varphi \in \Phi\} < \infty. \tag{3.11}$$

Следствие 3.2. Пусть (T, τ) – σ-топологическое $\mathcal{L}K$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$; пусть, далее, функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f-композиционные (а тем более аддитивные), слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и εK-регулярные на τ.

Для того чтобы функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ были равномерно ограничены на Σ, т.е. справедливо (3.5), необходимо и достаточно, чтобы для любого спектра $\{\mathcal{U}_n\}$ открытых множеств выполнялось условие (3.6).

Следствие 3.3. Пусть (T, τ) – σ-топологическое, $\mathcal{LG}$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, пусть, далее, функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f-композиционные (а тем более аддитивные), слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и $\varepsilon_0\mathcal{G}$-регулярные на τ.

Для того чтобы функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ были равномерно ограничены на Σ, т.е. справедливо (3.5), необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого множества $\mathcal{U} \in \tau$ было справедливо условие (3.7).

Следствие 3.4. Пусть (T, τ) – σ-топологическое, $\mathcal{GG}$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$; пусть, далее, функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{G}$-регулярные на Σ и $\varepsilon_0\mathcal{G}$-регулярные на τ.

Для того чтобы функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ были равномерно ограничены на Σ, т.е. выполнялось (3.5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладали свойством выборки;

2) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ были «поточечно» ограничены на классе открытых множеств, т.е. выполнялось условие (3.7).

Следствие 3.5. Пусть (T, τ) – σ-топологическое, $\mathcal{G}\mathcal{G}$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \subset \tau$; пусть, далее, функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f-композиционные (а тем более аддитивные), слабо $\varepsilon_0\mathcal{G}$-регулярные на Σ и $\varepsilon_0\mathcal{G}$-регулярные на τ.

Для того чтобы функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ были равномерно ограничены на Σ, т.е. справедливо (3.5), необходимо и достаточно, чтобы они были «поточечно» ограничены на классе открытых множеств, т.е. выполнялось условие (3.7).

Теорема 3.6. Пусть (T, τ) – σ- топологическое $\mathcal{L}K$-отделимое пространство; Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \supset \tau$; функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на алгебре Σ и принимают значения из т.а.г. (X, η); $\beta = \{B_n\}$ о.с. в группе (X, η); $\mathcal{U}_0 \in \beta$; пусть, далее, функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ – слабо $\mathcal{U}_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и $\mathcal{U}_0K$-регулярные на классе τ.

Для того чтобы множество $\Phi(\Sigma)$ было β-ограничено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки относительно о.с. β;

2) для любого спектра открытых множеств $\{\mathcal{U}_n\}$ множество $\Phi(\{\mathcal{U}_n\})$ β-ограничено.

Замечание 3.4. Подобно тому, как, применяя теорему 3.4, получили теорему 3.5 и следствия 3.2–3.5, для группозначных функций множества можно применить теорему 3.6.

Следующая теорема (теорема 3.7) значительно усиливает теорему 3.4, (вместо условия ε_0 K-регулярности на классе открытых множеств рассматривается условие *слабой* ε_0K-регулярности на классе открытых множеств). но ввиду того, что на практике более часто применяется теорема 3.4, мы дали независимое доказательство теоремы 3.4.

Теорема 3.7. Пусть (T, τ) – σ-топологическое $\mathcal{L}K$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, причем

$\Sigma \supset \tau$; пусть, далее, функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и слабо εK-регулярные на классе τ.

Для того чтобы функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ были равномерно ограничены Σ, т.е.

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) для любого открытого множества H существует такое число $l(H)$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ найдется конечный набор множеств

$$\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_{n_\varphi}\} \subset H \bigcap (\mathcal{L} \bigcup K),$$

для которых

$$\widetilde{\varphi}(H \setminus \bigcup_{k=1}^{n_\varphi} \mathcal{D}_k) < l(H);$$

3) для любого спектра открытых множеств $\{\mathcal{U}_n\}$

$$\sup\{\varphi(\mathcal{U}_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} < \infty.$$

Доказательство достаточности опирается на следующие леммы, которые формулируются в предположении, что выполнены условия и обозначения теоремы 3.7.

Лемма 3.5. Пусть $\varphi \in \Phi$, $\mathcal{U} \in \tau$, $E \in \Sigma$ и $n \in N$. Если

$$E \subset \mathcal{U} \text{ и } \varphi(E) > \xi(n, \varepsilon_0),$$

то существует такое открытое множество $V \in \tau$, что

$$E \subset V \subset \mathcal{U} \text{ и } \varphi(V) > n.$$

Лемма 3.6. Пусть $\mathcal{U} \in \tau$. Если

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(\mathcal{U}),\ \varphi \in \Phi\} = \infty, \qquad (3.12)$$

то для любого числа n существуют функция множества $\varphi \in \Phi$ и непересекающиеся множества $C \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{D} \in K$, для которых

$$C \bigcup \mathcal{D} \subset \mathcal{U},\ \varphi(C) > n \text{ и } \varphi(\mathcal{D}) > n.$$

Лемма 3.7. Пусть $\mathcal{U} \in \tau$. Если

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(\mathcal{U}),\ \varphi \in \Phi\} = \infty, \tag{3.13}$$

то существует такое открытое множество $V \in \tau$, что $V \subset \mathcal{U}$,

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(V),\ \varphi \in \Phi\} = \infty$$

и для любого множества $\mathcal{D} \in V \bigcap (\mathcal{L} \bigcup K)$

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(\mathcal{D}),\ \varphi \in \Phi\} < \infty.$$

Лемма 3.8. Пусть $\mathcal{D} \in \mathcal{L} \bigcup K$. Если

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(\mathcal{D}),\ \varphi \in \Phi\} < \infty, \tag{3.14}$$

то существует такое открытое множество H, что $\mathcal{D} \subset H$ и

$$\sup\{\widetilde{\varphi}(H),\ \varphi \in \Phi\} < \infty.$$

Теорема 3.8. Пусть (T, τ) – σ-топологическое, $\mathcal{L}K$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$; пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярные на Σ и слабо $\varepsilon_0 K$-регулярные на τ; пусть, далее, для любого открытого множества $\mathcal{U} \in \tau$

$$\sup\{\varphi(\mathcal{U}),\ \varphi \in \Phi\} < \infty.$$

Для того чтобы

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) для любого открытого множества H существует такое число $l(H)$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ найдется такой конечный набор множеств

$$\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_{n_\varphi}\} \subset H \bigcap (\mathcal{L} \bigcup K),$$

что
$$\widetilde{\varphi}(H \setminus \bigcup_{i=1}^{n_\varphi} \mathcal{D}_i < l(H);$$

3) функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно ограничены на спектрах открытых множеств.

Замечание 3.5. В теоремах 3.7 и 3.8 условие 2) выполняется автоматически, если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ $\varepsilon_0 K$-регулярные на τ.

Ясно, что из $\mathcal{L}$-регулярности (слабой $\mathcal{L}$-регулярности) следует $\varepsilon_0\mathcal{L}$-регулярность (соответственно, слабая ε_0 $\mathcal{L}$ – регулярность) функции множества.

Поэтому справедлива, например,

Теорема 3.9. Пусть (T, τ) – σ-топологическое $\mathcal{L}K$-отделимое пространство; пусть Σ – алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \tau$; пусть, далее, функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо $\mathcal{L}$-регулярные на Σ и слабо K-регулярные на классе τ.

Для того чтобы функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ были равномерно ограничены на Σ, т.е.

$$\sup\{\varphi(E),\ \varphi \in \Phi,\ E \in \Sigma\} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством выборки;

2) для любого открытого множества H существует такое число $l(H)$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ найдется конечный набор множеств
$$\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_n\} \subset H \bigcap (\mathcal{L} \bigcup K),$$
для которых
$$\widetilde{\varphi}(H \setminus \bigcup_{p=1}^{n_\varphi} \mathcal{D}_p) < l(H);$$

3) для любого спектра открытых множеств $\{\mathcal{U}_n\} \subset \tau$

$$\sup\{\varphi(\mathcal{U}_n),\ \varphi \in \Phi,\ n \in N\} < \infty.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.Д. Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах // Матем. сб., 1940. Т. 8. С. 342–348.
2. Александров А.Д. Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах // Матем. сб., 1941. Т. 9(51). С. 563–628.
3. Алексюк В.Н. О переходе к пределу под знаком интеграла Лебега // Изв. вузов. Математика. 1965. №5. С. 3–12.
4. Алексюк В.Н. Две теоремы о существовании квазибазиса семейства квазимер // Изв. вузов. Математика. 1968. №6. С. 11–18.
5. Алексюк В.Н. О слабой компактности семейства квазимер. О взаимосвязи метрики и меры // Сиб. матем. журнал. 1974. №4. С. 723–728.
6. Алексюк В.Н. Равномерная аддитивность: Материалы третьей Коми республ. научной конференции молодых ученых. Тез. докл. Сыктывкар: Коми филиал АН СССР, 1969. С. 239–242.
7. Алексюк В.Н. Продолжение векторной меры со значениями в банаховом пространстве // Rev. Roum. Math. pures et appl. 1970. V. 15. No. 10. P. 1589–1592.
8. Алексюк В.Н. Продолжение квазимеры. Новосибирск. 1973. 18 с. Рукопись представлена ред. журнала СМЖ. Деп. в ВИНИТИ. №6724-73.
9. Алексюк В.Н. Функции множества. Сыктывкар, 1981. 165 с. Рукопись представлена Коми пединститутом. Деп. в ВИНИТИ. №4543-81.
10. Алексюк В.Н. Метод полуаддитивных отображений I. Сыктывкар, 1998. 10 с. Рукопись представлена Коми пединститутом. Деп. в ВИНИТИ. №413-В98.

11. Алексюк В.Н. Метод полуаддитивных отображений VIII. Сыктывкар, 1998. 17 с. Рукопись представлена Коми пединститутом. Деп. в ВИНИТИ. №1048-B98.
12. Алексюк В.В., Алексюк В.Н. Супермеры без аддитивных мажорант. Сыктывкар, 1997. 10 с. Рукопись представлена Коми пединститутом. Деп. в ВИНИТИ. №1889-B97.
13. Алексюк В.Н. Метод полуаддитивных отображений V. Сыктывкар, 1998. 10 с. Рукопись представлена Коми пединститутом. Деп. в ВИНИТИ. №796-B98.
14. Алексюк В.Н. Функции множества: Учеб. пособие. Л., 1982. 76 с.
15. Алексюк В.Н., Арешкин Г.Я. Компактные семейства функций множества // Теория функций и функциональный анализ: Сб. науч. тр. Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена. 1975. С. 15–21.
16. Алексюк В.Н., Безносиков Ф.Д. Продолжение векторной меры на булевой алгебре // Изв. вузов. Математика. 1974. №6. С. 3–7.
17. Алексюк В.Н. Функции множества VI. Сыктывкар, 1978. 27 с. Рукопись представлена Коми пединститутом. Деп. в ВИНИТИ. №2452-B78.
18. Алексюк В.Н. Функции множества I. Сыктывкар, 1978. 27 с. Рукопись представлена Коми пединститутом. Деп. в ВИНИТИ. №362-B78.
19. Адольф В.А., Алякин В.А. Продолжение субмеры Добракова со значениями в частично упорядоченной полугруппе. Казань. 1985. 15 с. Рукопись представлена ред. журнала Изв. вузов. Математика. Деп. в ВИНИТИ. №3781-85.
20. Александров И.И. О разложении конечно-аддитивных функций множества // Comment. math. univ. Caroline, 1973. V. 14. №1. P. 87–93.
21. Алякин В.А. О функциях множества со значениями в частично упорядоченной полугруппе с базисом и вычитанием. Куйбышев, 1978. Т. 226. С. 8–14.
22. Алякин В.А. Теорема Витали—Хана—Сакса для двух последовательностей мер // Вопросы функционального анализа. Мера и интеграл. Куйбышев, 1984. С. 8–13.

23. Ауман Р., Шепли А. Значения для неатомических игр. М.: Мир, 1977. 356 с.
24. Арешкин Г.Я. Вполне аддитивные функции множества и интеграл Лебега–Радона: Труды Тбилисского матем. института. 1946. Т. 14. №6. С. 173–213.
25. Арешкин Г.Я. О сходимости кривых по длине и о криволинейном интеграле Лебега // ДАН СССР. 1950. Т. 72. №72. С. 821-824.
26. Арешкин Г.Я. О компактности семейства вполне аддитивных функций множества // Уч. записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. Л., 1962. Т. 238. С. 102–118.
27. Арешкин Г.Я. О компактности семейства вполне аддитивных функций множества // Успехи матем. наук. 1962. Т. 17. С. 221-223.
28. Арешкин Г.Я. О переходе к пределу под знаком интеграла Радона // Сообщ. АН Груз. ССР. 1949. Т. 10. №2. С. 69–76.
29. Арешкин Г.Я. К вопросу о возможности перестановки предела и полной вариации в теории вполне аддитивных функций множества // Успехи матем. наук. 1949. Вып. 3. С. 134–135.
30. Арешкин Г.Я., Гусельников Н.С. О некоторых свойствах N-треугольных функций множества // Математический анализ и теория функций. М., 1973. №1. С. 211–219.
31. Арешкин Г.Я., Попов В.А. Функционалы и интеграл по непрерывной внешней мере // Известия вузов. Математика. 1976. №8. С. 3–8.
32. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.И. и др. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск: Наука, 1968. 265 с.
33. Безносиков Ф.Д. Теорема о множестве значений непрерывной внешней меры, заданной на сигма-полной непрерывной булевой алгебре // Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии. М., 1973. С. 43-48.
34. Бобынин М.Н. Об одной теореме теории вполне аддитивных функций множества // Успехи матем. наук. 1952. Т. 3. Вып. 7. С. 113–120.

35. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
36. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: Иностр. лит., 1959. 272 с.
37. Бурбаки Н. Интегрирование (меры, интегрирование мер). М.: Наука, 1967. 365 с.
38. Варидарайн В.С. Меры на топологических пространствах // Матем. сб. 1961. Т. 55(97). Вып. 1. С. 35–100.
39. Гусельников Н.С. Об одном аналоге теоремы Витали–Хана–Сакса // Математич. заметки. 1976. Т. 19. №4. С. 641–642.
40. Гусельников Н.С. Треугольные функции множества и теорема Никодима о равномерной ограниченности семейства мер // Матем. сб. 1978. Т. 106. №3. С. 310–356.
41. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория // М.: Иност. лит., 1962. 895 с.
42. Дубровский В.М. О базисе семейства вполне аддитивных функций множества и о свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности // ДАН СССР. 1947. Т. 58. №5. С. 737–740.
43. Дубровский В.М. О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и предельном переходе под знаком интеграла // Изв. АН СССР. 1945. Матем. №9. С. 311–320.
44. Дубровский В.М. О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и их применение к обобщению одной теоремы Лебега // Матем. сб. 1947. Т. 20. №2. С. 317–330.
45. Дубровский В.М. О равностепенно суммируемых функциях и свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства вполне аддитивных функций множества // Изв. АН СССР. 1949. Матем. Т. 13. С. 341–356.
46. Кац М.П. О продолжении векторных мер // Сиб. матем. журнал. 1972. Т. 5. С. 1158–1168.
47. Келли Дж. Общая топология. М. Наука., 1981. 431 с.
48. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука., 1967.
49. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1984. 752 с.

50. Ляпунов А.А. О вполне аддитивных векторных функциях // Известия АН СССР. Матем. 1940. №4. С. 465–478.

51. Малюгин С.А. Топология покрывающих множеств и непрерывное продолжение внешних мер // Матем. заметки. 1979. Т. 26. №2. С. 285–292.

52. Малюгин С.А. Непрерывное продолжение жордановых и Лебеговых внешних мер // Препринт №4. ИМ СОАН СССР. Новосибирск, 1982. 22 с.

53. Мейер П.А. Вероятность и потенциал. М.: Наука, 1973. 325 с.

54. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973. 520 с.

55. Пахаев Б.В. Равномерная ограниченность семейства слабо регулярных неаддитивных отображений // Матем. заметки. 1983. Т. 34. №1. С. 47–53.

56. Попов В.А. Полумеры на кольцах множеств V. Сыктывкар, 1996. 39 с. Рукопись представлена Коми гос. пед. институтом. Деп. в ВИНИТИ. 09.12.96. №3579-В96.

57. Райков Д.А. О В-полных топологических группах // Studia Math. 1968. V. 31. P. 295–305.

58. Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974. 167 с.

59. Рыбаков В.И. Теорема Радона–Никодима о представлении векторных интегралов // ДАН СССР. 1968. Т. 180. №2. С. 282–285.

60. Рыбаков В.И. О векторных мерах // Изв. вузов. Математика. 1968. №12. С. 92–101.

61. Савельев Л.Я. Продолжение непрерывных мер // ДАН СССР. 1978. Т. 239. №2. С. 272–274.

62. Савельев Л.Я. Пространства с мерами // Докл. РАН. 1997. Т. 357. №3. С. 310–312.

63. Садовничий Ю.В. О норме Канторовича для знакопеременных мер // Докл. РАН. 1999. Т. 368. №4. С. 459–461.

64. Саженков А.Н. Принцип ограниченности для топологических мер // Препринт ИМСО АН СССР. Новосибирск, 1978. 10 с.

65. Саженков А.Н. Ограниченность векторных внешних мер // Матем. заметки. 1979. Т. 25. №6. С. 913–917.

66. Саженков А.Н. Принцип равномерной ограниченности для топологических мер // Матем. заметки. 1982. Т. 31. №2. С. 263–267.
67. Саженков А.Н. Ограниченность в топологических группах и равномерная ограниченность мер. Новосибирск, 1984. Рукопись представлена ред. журн. QLF. Деп. в ВИНИТИ. №3465-84.
68. Саженков А.Н. Принцип ограниченности для мер: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1984. 62 с.
69. Свистула М.Г. Принцип равномерной ограниченности в обобщенной теории меры // Всесоюзная Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докл. Тамбов, 1987. Ч. II. С. 70.
70. Свистула М.Г. Аналог теоремы Дьедонне для нормального пространства в обобщенной теории меры // Труды X Всесоюзного семинара: Проблема устойчивости стохастических моделей. Куйбышев, 1987. С. 84–88.
71. Толстов Г.П. Мера и интеграл. М.: Наука, 1976. 392 с.
72. Толстов Г.П. Дифференцирование и интегрирование в абстрактных пространствах // Матем. сб. 1966. Т. 71(113). С. 420–422.
73. Уланов М.П. Векторнозначные функции множества и представление непрерывных линейных отображений // Сиб. матем. журн. 1968. №2. С. 410–425.
74. Хафизов М.Х. Об абсолютной непрерывности векторнозначной меры // Матем. заметки. 1975. Т. 17. №1. С. 71–78.
75. Хафизов М.Х. О равномерной ограниченности семейства функций множества // Матем. заметки. 1978. Т. 23. №6. С. 853–861.
76. Халмош П. Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 287 с.
77. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр.лит., 1962. 876 с.
78. Хьютт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. М.: Мир, 1975. 654 с.
79. Ando J. Convergent sequences of finitely additive measures // Pacif. J. Math. 1961. V. 11. P. 395–404.

80. Bartle R.G. A general bilinear vector integral // Studia. Math. 1956. V. 15. №3. P. 337–352.
81. Brooks J.K. Equicontinuous sets of measures and applications to Vitalis integral convergence theorem and control measures // Adv. in Math. 1973. V. 10. No. 2. P. 165–171.
82. Brooks J.K. On the Vitali—Hahn—Saks and Nikodym theorems // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1969. V. 64. P. 468–471.
83. Brooks J.K., Jewet R. S. On finitely additive vector measures // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1970. V. 67. P. 1294–1298.
84. Brooks J.K., Dinculianu. Weak compactness and measures in the space of unbounded measures // Proc. Nat. Acad. Sci. 1972. V. 69. P. 1083–1085.
85. Bylund P. Besov spaces and measures on arbitrary closed sets // Doct. Thes. Univ. Umea. Dep. Math. 1994. No. 8. P. 1–12.
86. Candeloro D. Alcuni teoremi di uniforme limitatezza // Rend. Accad. Naz. Sci. XL. 1985. V. 9. No. 11. P. 249–260.
87. Candeloro D.S. Sui theoremi di Vitali—Hahn—Saks, Diedonne, Nikodym // Rend. Circ. mat. Palermo. 1986. V. 34. No. 8. P. 439–445.
88. Candeloro D.S., Giorgio L. Sui teoremi di Vitali—Hahn—Saks et Diedonne // Rend. Acad. Naz. sci. 1985. V. 9. No. 1. P. 203–213.
89. Cafiero F. Sulle passagio al limite sotto il signo d'integrall persuc cesioni d'integrali di Stiltjes—Lebesque nedlispazi astrati, con masse variabli con gli integrandi // Rend. Seminar. mat. Univ. Padova. 1953. V. 22. No. 2. P. 223–245.
90. Cafiero F. Sulle famigli di funzione additive d'insieme uniformente continui // Rend. Acc. Naz. Lincei. 1952. V. 181. No. 12. P. 155–162.
91. Cacciopoli R. Integrali impropri di Stieltjes. Extensioni die teorema die Vitali // Rend. Acc. sci. Fos. Math. Napoli. 1925. No. 4(35). P. 147–169.
92. Constantinescu C. On Nikodym's boundedness theorem // Libertas Mathematica. 1981. V. 1. P. 51–73.
93. Darst R.B. The Vitali–Hahn–Saks and Nikodym theorems for additive set functions I // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. P. 1297–1298.

94. Darst R.B. The Vitali–Hahn–Saks and Nikodym theorems for additive set functions II // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. P. 758–760.
95. Darst R.B. On a theorem of Nikodym nith applications to weak convergence and von Neumann algebras // Pacif. J. Math. 1967. V. 23. No. 3. P. 473–477.
96. Diestal J., Uhl J.J. Vector measures. Mathem. surveys of AMS. 1977. V. 15.
97. Diedonne J. Sur la convergence des suites de measure de Radon // Ann. Acad. Brasil. Sci. 1951. V. 23. P. 21–38. P. 277–282.
98. Dinculeanu N. Vector measures. Berlin: VEB, 1966. 432 p.
99. Dinculeanu N. Contributions of Rumania mathematic to the measure and integration theory // Rev. Roum. Math. pures et appl. 1966. V. 11. No. 9. P. 1075–1102.
100. Dinculeanu N., Kluvanek J. On vector measures // Proc. London. Math. Soc. 1967. V. 3. No. 17. P. 505–512.
101. Dinculeanu N., Lewis W. Regularity of Baire measure // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 126. P. 92–94.
102. Dinculeanu N., Focus G. On the uniqueness of the outer measure // Rev. Roum. Math. pures et appl. 1966. V. 11. No. 6. P. 693–698.
103. Dobrakov I. On submeasures. I // Rozpr. Math. 1974. V. 112. 39 p.
104. Dobrakov I. Uniform boundedness principle for exhaustive set finctions // Rozpr. Math. 1984. V. 24. No. 2. P. 201–205.
105. Dobrakov I. On integration in Banach spaces. IV // Cizech. Math. 1980. No. 30(105). P. 259–278.
106. Dobrakov I., Farkova J. On submeasures. II // Math. Slovaka. 1980. V. 30. No. 1. P. 65–81.
107. Drewnowski L. Uniform boundednes principle for finitely additive vector measures // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron., physics. 1973. V. 21. P. 115–118.
108. Drewnowski L. Topological rings of sets continuons functions, integration I–II // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron., physics. 1972. V. 20. P. 269–276. P. 277–286.

109. Drewnowski L. Topological rings of sets continuons functions, in tegration III // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron., physics. 1972. V. 20. P. 439–445.
110. Drewnowski L. Equivalence of Brooks—Jewet, Vitali—Hahn—Saks and Nikodym theorems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron., physics. 1972. V. 20. P. 726–731.
111. Drewnowski L. On the continuity of certion non. additive set functions // Colloy. 1978. V. 38. No. 4. P. 243–253.
112. Drewnowski L. Decompositions of set functions // Stud. Math. (PRL). 1973. V. 48. No. 1. P. 23–48.
113. Drewnowski L. Control submeasures and measures // Stud. Math. (PRL). 1974. V. 50. No. 3. P. 203–299.
114. Fox G., Morales P. Strongly additive functions on slatices // Fund. Math. 1973. LXXVIII. P. 96–106.
115. Fox G. Inductive extension of vector measure under a convergence condition // Canad. J. Math. 1968. V. 20. P. 1246–1255.
116. Gaina S. Sur les notions de measure compacte measure regulire Ann. Fac. Sci. Kinshasa, section math.-phys. 1976. V. 2. P. 71–79.
117. Ganzler P. A convergence theorem for measures in regular Hausdorf spaces // Math. Scand. 1971. V. 29. P. 237–244.
118. Grubb D.J., Laberge T.M. Additivity of quasi measures // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. No. 10. P. 3007–3012.
119. Gould G.G. Extension of vector–valued measures // Proc. London. Math. Soc. 1976. V. 3. No. 10. P. 685–704.
120. Grekas S. Measure-theoretic problems in topological dynamics // J. anal. math. 1995. No. 65. P. 207–220.
121. Grothendieck A. Sur les applicatios lineires faiblement compactes d'expaces du type C(K) // Canad. J. Math. 1953. V. 5. P. 129–173.
122. Gudder S. Generalized measure theory // Found. Phys. 1973. V. 3. No. 3. P. 399–411.
123. Hejcman G. Boundedness in uniform spaces and topological groups // Czech. Math. 1959. V. 9. P. 544–563.
124. Hejcman G. Boundedness and weak boundedness in topological vector groups // Colloq. Math. Soc. Topology. 4th. Budapest. 1978. V. 1. P. 591–605.

125. Hejcman G., Iosida K. Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. P. 46–66.

126. Hejcman G. Vector measures // Math. Scand. 1971. V. 28. P. 5–32.

127. Haydon R. A non reflextive Grothendieck spaces does not contain l_∞ // Israel J. Math. 1981. V. 40. P. 65–73.

128. Kalton N. Topologies on Riesz groups and applications to measure theoty // Proc. London. Math. Soc. 1974. V. 61. No. 28. P. 253–273.

129. Khurana S. Extension and regularity of group-valued Bari measures // Bull. Acad. Pollen. Sci. ser. math., astr., phys. 1974. V. 22. P. 891–895.

130. Khurana S. Convergend sequencies of regular measures // Bull. Acad. Pollen. Sci. ser. math., astr., phys. 1976. V. 24. No. 1. P. 37–42.

131. Khurana S. Extensions of exhastive submeasures // Bull. Acad. Pollen. Sci. ser. math., astr., phys. 1976. V. 24. No. 4. P. 213–216.

132. Khurana S. Convergent seguences of r-smooth measures // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 63. No. 1. P. 137–142.

133. Kupka J. Uniform boundedness principles for regular Borel vector measures // J. Anstral math. Soc. 1980. V. 129. No. 2. P. 206–218.

134. Kisynski J. On the generation of tight measures // Stud. Math. 1968. V. 30. P. 141–151.

135. Kisynski J. Remark on strongly additive set functions // Fund. Math. 1968. V. LXII. P. 327–332.

136. Kelly J.J., Strinivason P.P. Premeasures on lattices of sets // Math. Ann. 1977. V. 190. P. 233–241.

137. Knight J.E. Some remarks concerning finitely subadditive outer measures with applications // Int. J. Math. and Math. Sci. 1978. V. 21. No. 4. P. 653–670.

138. Labuda J. Sur guelgaes generalisattion des theorems de Nikodym et Vitali—Hahn—Saks // Bull. Sci. ser. sci. math., astr., phys. 1972. V. 20. P. 447–456.

139. Landers D., Rogge L. Couschy convergent seguences of regular measures with vales in topological group // Z. Wahrsheinlichkeitsth and verw. Gebit. 1972. V. 21. No. 3. P. 188–196.

140. Landers D., Rogge L. Eguicontinuity and convergence of measures // Manuscripta Math. 1971. V. 5 P. 123–131.
141. Landers D., Rogge L. The Hahn—Vitali—Saks and the uniform boundedness theorems in topological groups // Manuscr. Math. 1970. V. 4. P. 351–359.
142. Lipecki Z. Extensions of additive set functions with values a topological group // Manscr. Math. 1974. V. 20. No. 1. P. 19–27.
143. Marcus S. Antomic measure and Darbousi property // Rev. Pures. Apl. 1962. P. 327–332.
144. Mikusinsky J. On a theorem of Nikodym bounded measures // Bull. Acad. Polon. Sci. ser. sci. math., astr., phys. 1971. V. 19. No. 6. P. 441–444.
145. Mussiul R. Absolute continuity and the range o qroup–valued measures // Bull.Acad. Polon. Sci. ser. sci. math., astr., phys. 1973. V. 21. No. 2. P. 105–113.
146. Molto'A. On uniform boundedness properties in ex haustive additive set function spaces // Proc. Royal. Soc. Edinburgh. 1981. Sect. A90. P. 175–184.
147. Molto' A. On the Vitali–Hahn–Saks theorem // Proc. Royal. Soc. Edinburgh. 1981. Sect. A90. P. 163–173.
148. Morales P. Boundedness for uniform semigroup-valued set functions // Lecture Notes in Mathematics. 1984. V. 1089. P. 153–164.
149. Morales P., Lucia P. Eguivalence of Brooks Jewet, Vitali—Hahn—Saks and Nikodym convergence theorem for uniform semigroup–valued additive functions on a Boolen ring // Recirche di mathematica. 1986. V. 35. No. 1. P. 75–87.
150. Pap E. O diagonalnoj theoremi // Матем. вестник. 1973. Вып. 10. №4. С. 391–399.
151. Pap E. A generalization of a theorem of Diedonne for K-triangular set functions // Actn. sci. math. 1986. V. 50. P. 159–167.
152. Pap E. Regular null-additive monotone set functions // Зб. рад. Прир.-мат. фак. Сер. мат. Унив. Новом Саду. 1995. Т. 25. №2. С. 93–101.
153. Pap E. Ne-additive mere // 9 Kongr. mat. Jugosl. Petrovac. May 22–27. 1995. Rez.: YUMC'95. Podgorica. 1995. C. 75–76.

154. Ptak P. States on orthomodular posets (Recent results in non-commutative measure theory): «Teor. Misura e anal. reale», Crado, 19 sett. 2 ott., 1993 // Rend. Ist. mat. Univ. Trieste. 1986. 26, Suppl. P. 265–287.

155. Адольф В.А., Климкин В.М. О равностепенной непрерывности // Новосибирск, 1984. 14 с. Рукопись представлена ред. СМЖ. Деп. в ВИНИТИ. N 6019-84.

156. Агафонова Л.В., Климкин В.М. Теорема Никодима для треугольных функций множества // Сиб. матем. журн. 1974. Т. 15. С. 669–774.

157. Алякин В.А., Климкин В.М. О векторных субмерах I. Казань, 1980. 16 с. Рукопись представлена ред ред. журнала Изв. вузов. Математика. Деп. в ВИНИТИ. №3930-80.

158. Алякин В.А., Климкин В.М. О векторных субмерах II. Казань, 1980. 14 с. Рукопись представлена ред ред. журнала Изв. вузов. Математика. Деп. в ВИНИТИ. №3931-81.

159. Арешкин Г.А., Алексюк В.Н., Климкин В.М. О некоторых свойствах векторнозначных мер // Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. Л., 1971. Т. 404. С. 298–321.

160. Климкин В.М. Об одной теореме Никодима // Ученые записки Пермского пединститута. 1968. Т. 71. С. 102–110.

161. Климкин В.М. О некоторых свойствах векторнозначных мер и о предельном переходе под знаком интеграла // Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. Л., 1970. Т. 464. С. 166-187.

162. Климкин В.М. О некоторых свойствах непрерывных внешних мер // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. Л., 1970. Т. 464. С. 187–204.

163. Климкин В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности семейства векторнозначных мер // Ученые записки Красноярского пединститута. 1970. Вып. 2. С. 45–57.

164. Климкин В.М. О продолжении векторнозначной меры I // Известия вузов. Математика. 1971. №5(108). С. 46–53.

165. Климкин В.М. Некоторые признаки равностепенной абсолютной непрерывности семейства масс // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. Л., 1971. Т. 404. С. 380–396.

166. Климкин В.М. О продолжении векторнозначных мер // Труды Зонального объединения математических кафедр пединститутов Сибири. Красноярск: Изд-во Красноярского пед. ин-та, 1972. Вып. 1. С. 84–90.

167. Климкин В.М. О продолжении векторнозначной меры II // Известия вузов. Математика. 1973. №6(133). С. 52–57.

168. Климкин В.М. О некоторых свойствах треугольных функций множества // Известия вузов. Математика. 1975. №1(152). С. 108–110.

169. Климкин В.М. Об одном классе функций множества и его применении в теории векторных мер // Известия вузов. Математика. 1975. №1(152). С. 116–118.

170. Климкин В.М. Некоторые вопросы теории векторнозначных мер // Известия вузов. Математика. 1975. №7(158). С. 54–63.

171. Климкин В.М. Векторнозначные меры в топологической группе // Матем. заметки. АН СССР. 1975. Т. 17. №5. С. 789–796.

172. Климкин В.М. Конечно-аддитивные функции множества в топологической группе // Матем. заметки. АН СССР. 1977. Т. 21. №6. С. 847–854.

173. Климкин В.М. О некоторых свойствах абсолютно-треугольных функций множества I: Межв. сб. науч. тр. Ульян. госпединститута им. И.Н. Ульянова. Ульяновск, 1977. Т. 21. Вып. 9. С. 71–83.

174. Климкин В.М. Некоторые свойства треугольных функций множества // Известия вузов. Математика. 1978. №2(189). С. 36–44.

175. Климкин В.М. Регулярные неаддитивные функции множества // Функциональный анализ и дифференциальные уравнения: Научные труды Куйб. госпединститута им. В. В. Куйбышева. Куйбышев, 1978. Т. 226. С. 64–69.

176. Климкин В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности семейства регулярных функций множества: Межвуз. сб. Ульян. госпединститута им. И.Н. Ульянова. Ульяновск, 1978. Т. 21. Вып. II. С. 69–81.

177. Климкин В.М. О некоторых свойствах абсолютно-треугольных функций множества II: Межвуз. сб. Ульян. госпединститута им. И. Н. Ульянова. Ульяновск, 1978. Т. 21. Вып. 9. С. 82–88.

178. Климкин В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности // Матем. заметки. АН СССР. 1979. Т. 25. №2. С. 199–209.

179. Климкин В.М. Регулярные конечно-аддитивные функции множества в топологической группе // Мера и интеграл. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1982. Вып. 1. С. 34–38.

180. Климкин В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности. СМЖ АН СССР. 1985. №3. 18 с. Деп. в ВИНИТИ. №6019-84.

181. Климкин В.М., Свистула М.Г. Ограниченность семейства K-внешних мер со значениями в топологической группе. СМЖ АН СССР. 1985. №4. 23 с. Деп. в ВИНИТИ. №7856-В.

182. Климкин В.М. Равномерная ограниченность регулярных функций множества // I Всемирный Конгресс Общества Бернулли. Математическая статистика и теория вероятностей. Ташкент, 1986. 4 с.

183. Климкин В.М. О сходимости последовательности функций множества // VI Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Вюльнюс, 1986. С. 46–47.

184. Климкин В.М. Принцип равномерной ограниченности в обобщенной теории меры // ДАН СССР. 1987. Т. 295. №4. С. 796–798.

185. Климкин В.М. Введение в теорию функций множества: Учебное пособие. Саратов: Изд-во Саратовского госуниверситета. Куйб. филиал, 1988. 208 с.

186. Климкин В.М. Равномерная ограниченность семейства слабо регулярных функций множества I // ДАН СССР. 1989. Т. 309. №6. С. 1297–1300.

187. Климкин В.М. Равномерная ограниченность семейства неаддитивных функций множества // Матем. сб. 1989. Т. 180. №3. С. 385–397.

188. Климкин В.М. Об одной обратной задаче теории меры // Саратов: Обзорные лекции XIII Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах. Изд-во Саратовского университета. Куйб. филиал, 1989. С. 169–180.
189. Климкин В.М., Срибная Т. А. Исчерпываемость регулярной функции множества в топологическом пространстве // Мат. заметки. РАН. 1991. Т. 50. №5. С. 43–47.
190. Климкин В.М. О некоторых свойствах регулярных функций множества // Матем. сб. 1992. Т. 183. №6. С. 155–176.
191. Климкин В. М., Срибная Т. А. Продолжение квазитреугольной субмеры // Известия вузов. Математика. 1992. №2. С. 42–48.
192. Климкин В.М., Свистула М. Г. Равномерная ограниченность семейства слабо регулярных неаддитивных функций множества // ДАН СССР. 1993. Т. 330. №5. С. 554–555.
193. Климкин В.М., Свистула М.Г. О свойстве Дарбу для неаддитивных функций множества // Труды XI Российского коллоквиума по современному групповому анализу и задачи математического моделирования. Саратов: Изд-во Саратовского университета. 1993. С. 199–203.
194. Климкин В.М., Свистула М. Г. Равномерная ограниченность семейства слабо регулярных функций множества на σ-топологических пространствах // Фундаментальные проблемы математики и механики. М.: Изд-во Московского университета, 1994. С. 55–57.
195. Klimkin W.M. The criterion of uniform continuity of family of weakly regular set functions // 4th international conference on function spaces. 1995. Zielona Gora. Poland (тезисы).
196. Климкин В.М. Об одной теореме Витали–Хана–Сакса // Мера и интеграл. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1995. Вып. 2. С. 112–118.
197. Климкин В.М., Срибная Т.А. Аналоги теорем Брукса–Джеветта, Никодима и Витали–Хана–Сакса для неаддитивных соответствий // Дифференциальные уравнения и их приложения. Самара: Изд-во СамГУ, 1995. 1 с.
198. Климкин В.М. Об одной теореме Витали–Хана–Сакса // Дифференциальные уравнения и их приложения: Саранск: Изд–во Морд. гос. ун-та, 1996. 1 с.

199. Климкин В.М. Равномерная непрерывность многозначных функций множества // Дифференциальные уравнения и их приложения. Самара: Изд-во СамГУ, 1996. 1 с.

200. Климкин В.М., Срибная Т.А. Сходимость последовательности слабо регулярных функций множества // Матем. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 1. С. 103–110.

201. Климкин В.М., Свистула М.Г. Аналоги теоремы Дарбу для неаддитивных функций множества: // Межд. семинар, посвященный 10-летию Самарского муниципального университета Наяновой. Самара, 1998. С. 60–61.

202. Климкин В.М., Клепнев Д.Э. О равномерной непрерывности семейства слабо регулярных неаддитивных функций множества: 6-я Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Обозрение прикладной и промышленной математики. Серия «Вероятность и статистика». Т. 6. Вып. 1. Научное изд-во «ТВП». М., 1999. Т. 6. Вып. 1. С. 153–154.

203. Климкин В.М., Клепнев Д.Э. Равномерная непрерывность семейства слабо регулярных неаддитивных функций множества // ДАН РАН. 2000. Т. 237.

204. Рашкин Л.Д. Композиционно треугольные функции множества: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1984. 129 с.

Оглавление

Учебное издание

Климкин Виктор Михайлович

Избранные главы теории меры

Компьютерная верстка, макет В.И. Никонова

Подписано в печать 11.10.10. Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная.
Печать оперативная. Усл.-печ. л. 8,75. Уч.-изд. л. 7,12.
Typeset by $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$. Тираж 100 экз. Заказ № 1924.
Издательство «Универс групп»,
Отпечатано с готового оригинал-макета на УОП СамГУ