Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П.Королева

В.В.Котляр

ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Учебное пособие

Самара 1993

УДК 523.8 + 535.8

Френелевские изображения : Учеб. пособие / В. В. Котляр ; НПЦ "Авиатор". Самара, 1993. 56 с. ISBN 5-7217-0001-7

Приводятся основные теоретические сведения о когерентных и некогерентных оптических системах для формирования изображения. Обсуждаются основные приближения Фурье-оптики. На основе френелевского приближения выводятся основные интегральные соотношения, связывающие комплексные амплитуды света в различных плоскостях оптической системы. Рассматриваются основные свойства когерентных и некогерентных френелевских изображений.

Предназначено для студентов специальности 01.02 специализаций "Компьютерная оптика" и "Обработка изображений" и других, изучающих курс "Формирование изображений оптическими системами".

Подготовлено на кафедре технической кибернетики.

Ил. 15. Библиогр.: 8 назв.

Рецензент доц. А. Г. Храмов

ISBN 5-7217-0001-7

I. Разложение светового поля по плоским волнам

Электромагнитное поле светового сигнала имеет две поперечные компоненты электрического и магнитного векторов. В скалярной теории обосновывается возможность независимого использования каждой компоненты электрического или магнитного векторов, поэтому мы в дальнейшем будем описывать световое поле комплексной функцией $V(\vec{x},t)$ и называть ее скалярной комплексной амплитудой светового поля, $\vec{x} = (x,y,z)$. Распространение светового поля в пространстве описывается волновым уравнением

$$(\nabla^2 - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) V(\vec{x},t) = 0 \quad . \qquad (1)$$

где c – скорость света в свободном пространстве,

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа или лапласиан.

Далее, пока не будет специально оговорено, будем рассматривать световое поле одной монохроматической составляющей, то есть будем считать, что свет имеет одну частоту электромагнитных колебаний ν и одну длину волны λ, $\nu\lambda = c$. Для такой монохроматической волны временная зависимость может быть выражена в явном виде

$$V(\vec{x}, t) = U(\vec{x}) e^{-i2\pi\nu t} . \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (I), получим уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2) U(\vec{x}) = 0 . \qquad (3)$$

описывающее распространение пространственной части комплексной амплитуды в пространстве, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света.

Далее представим функцию $U(\vec{x})$ как результат преобразования Фурье

$$U(x,y,z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A(\alpha,\beta,z) \exp\left[ik(\alpha x + \beta y)\right] d\alpha d\beta . \qquad (4)$$

Физически преобразование (4) - это разложение поля по плоским волнам в плоскости z (рис.I) , а частотные переменные α и β пропорциональны углам Эйлера ($\alpha = \sin\varphi$, $\beta = \sin\psi$), задающим направление распространения плоской волны, $A(\alpha,\beta,z)$ - амплитуда пространственного спектра плоских волн на плоскости z .

Наша цель теперь состоит в получении связи между амплитудой света на плоскости z $U(x,y,z)$ и амплитудой света на плоскости $z=0$ $U_o(x,y)$ [1]. Для этого подставим (4) в (3) и получим уравнение для $A(\alpha,\beta,z)$:

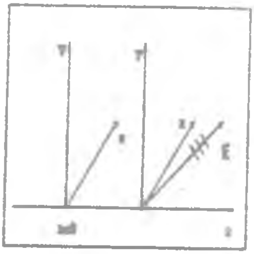

Рис. I

$$\frac{\partial^2 A(\alpha,\beta,z)}{\partial z^2} + k^2(1 - \alpha^2 - \beta^2) A(\alpha,\beta,z) = 0 , \qquad (5)$$

решение которого записывается в виде

$$A(\alpha,\beta,z) = A_o(\alpha,\beta)\, e^{\pm ikz\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} . \qquad (6)$$

Это - уравнение распространения плоских волн вдоль оси z.
Знак "+" перед квадратным корнем выбирается в случае, если волна приходит к плоскости z слева, знак "-" , если волна приходит справа.
Для направленных световых полей и пучков света от квазиточечных источ-

ников всегда известно направление распространения, и поэтому для определенности в дальнейшем будем выбирать знак "+".

Из (6) следует условие на пространственные частоты α и β :

$$\alpha^2 + \beta^2 < 1 \quad . \tag{7}$$

В случае, если $\alpha^2 + \beta^2 > 1$, то вместо (6) будем иметь

$$A(\alpha,\beta,z) = A_0(\alpha,\beta)\ e^{-kz\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}} \quad . \tag{8}$$

Амплитуда (8) описывает затухающие по экспоненте световые волны, которые не распространяются далее в пространстве по оси z , поэтому исключим их из рассмотрения.

Амплитуду спектра плоских волн в плоскости $z=0$ представим в виде интеграла Фурье

$$A_0(\alpha,\beta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_0(x,y)\ \exp\ [-ik(\alpha x + \beta y)]\ dxdy \ . \tag{9}$$

Далее, используя (4), (8) и (9) , получим

$$U(x,y,z) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} U_0(x',y')\ e^{-ik(\alpha x'+\beta y')}\ e^{ikz\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\ *$$

$$*\ e^{ik(\alpha x + \beta y)}\ d\alpha d\beta dx'dy' =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_0(x',y')\ H(x-x',\ y-y',\ z)\ dx'dy' \ , \tag{10}$$

где

$$H(x-x',y-y',z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikz\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\, e^{ik\,[\alpha(x-x')+\beta(y-y')]} d\alpha d\beta\ . \quad (11)$$

Интеграл (I0) является конечной целью. Он связывает комплексную амплитуду $U_0(x,y)$ в плоскости $z=0$ и комплексную амплитуду $U(x,y,z)$ в плоскости z (рис.I).

Далее покажем, как разложение поля по плоским волнам (I0) можно свести к интегралу Кирхгофа, который более часто используется в оптике. Рассмотрим комплексную амплитуду сферической волны

$$p(x,y,z) = \frac{e^{ikR}}{R}\ ,\quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2\ , \quad (12)$$

которая является частным решением уравнения Гельмгольца (3). Разложим ее в спектр плоских волн по формуле (4):

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_0(\alpha,\beta)\, e^{ikz\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\, e^{ik(\alpha x+\beta y)} d\alpha d\beta\ . \quad (13)$$

Так как сферическая волна в плоскости $z=0$ имеет амплитуду

$$p(x,y,0) = \frac{e^{ikr}}{r}\ ,\quad r^2 = x^2 + y^2\ , \quad (14)$$

то можно найти функцию $A_0(\alpha,\beta)$ из соотношения (I3):

$$A_0(\alpha,\beta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y,0)\, e^{-ik(\alpha x+\beta y)}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \; e^{-ikr\rho \cos(\varphi - \nu)} \, r\,dr\,d\varphi \quad , \qquad (15)$$

где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\alpha = \rho\cos\nu$, $\beta = \rho\sin\nu$.
Используя известные соотношения

$$\int_0^{2\pi} \exp(\, it\cos\varphi\,)\, d\varphi = 2\pi\, J_0(t) \quad , \qquad (16)$$

$$\int_0^{\infty} e^{iar}\, J_0(br)\, dr = (\, b^2 - a^2\,)^{-1/2} \;, \; b > a \;, \qquad (17)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка, получим вместо (I5) следующее выражение

$$A_0(\alpha,\beta) = \frac{-\,2\pi i}{k\,(\,1-\alpha^2-\beta^2)^{1/2}} \;. \qquad (18)$$

Итак, разложение сферической волны по плоским волнам имеет вид

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\; e^{ikz\,(\,1-\alpha^2-\beta^2)^{1/2}}}{i\,k\,(\,1-\alpha^2-\beta^2)^{1/2}} \; e^{ik(x\alpha + y\beta)}\, d\alpha\, d\beta \;. \qquad (19)$$

Левые части формул (II) и (I9) связаны между собой

$$2\pi H(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{ikR}}{R}\right] = ik\,\frac{e^{ikR}}{R}\,\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{2\pi}{2_R}\, e^{ikR}\,\frac{\partial R}{\partial z} \;. \qquad (20)$$

Условие сведения интеграла плоских волн (I0) к интегралу Кирхгофа (интегралу сферических волн) следующее:

$$k \gg 1/R \quad \text{или} \quad R \gg \lambda \;. \qquad (21)$$

Тогда приближенно можно заменить $R \approx z$ и $\frac{\partial R}{\partial z} \approx 1$, вторым слагаемым в (20) можно пренебречь, и приближенно получим вместо (20)

$$2\pi H(x,y,z) = k \frac{e^{ikR}}{R} , \tag{22}$$

из которого следует окончательное выражение для интеграла Кирхгофа

$$U(x,y,z) = k/2\pi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_0(x',y') \frac{e^{ikR}}{R} dx'dy' , \tag{23}$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} .$$

Физический смысл интеграла Кирхгофа (23) раскрывает принцип Гюйгенса-Френеля, который утверждает, что световое поле на плоскости z является суперпозицией (алгебраической суммой) сферических волн от вторичных точечных источников с учетом их амплитуды, расположенных на плоскости $z=0$.

Условия (21) в спектральной области эквивалентно условию

$$\alpha^2 + \beta^2 \ll 1 . \tag{24}$$

В этих спектральных переменных удобно выписать все часто встречающиеся в оптике приближения.

1. Приближение плоских волн (7) $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.
2. Приближение сферических волн (24) $\alpha^2 + \beta^2 \ll 1$.
3. Приближение геометрической оптики (лучевое приближение)

$$kz\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \approx kz \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{8} - \ldots \right] ,$$

$$kz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \ll \pi \quad \text{или} \quad \alpha^2 + \beta^2 \ll \lambda/z \ll 1 . \tag{25}$$

При условии (25) уравнение (6) для спектра плоских волн переходит в уравнение распространения лучей

$$A(\alpha,\beta,z) = A_0(\alpha,\beta)\ e^{ikz} \quad . \tag{26}$$

4. Приближение Френеля (приближение параболических волн)

$$kz\,\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{8} \ll \pi \qquad \text{или} \qquad \alpha^2+\beta^2 \ll \sqrt{4\lambda/z}\ . \tag{27}$$

При условии (27) разложение по сферическим волнам (23) переходит в разложение по параболическим волнам, а уравнение распространения спектра плоских волн (6) заменяется на следующее:

$$A(\alpha,\beta,z) = A_0(\alpha,\beta)\ \exp\left[ikz\ \left(1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\right] \quad .$$

5. Приближение Фраунгофера (приближение дальней зоны)

$$kz\,\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \gg \pi \qquad \text{или} \qquad \lambda/z \ll \alpha^2+\beta^2 \ll 1 \quad . \tag{28}$$

Соотношения между областями переменных (α,β), в которых выполняются перечисленные приближения, показаны на рис.2 и обозначены соответствующими цифрами.

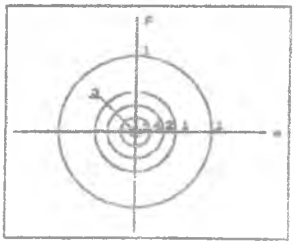

Рис.2

2. Параболическое приближение и гауссовы пучки

При рассмотрении пучков когерентного света от лазера, мод свободного пространства или гауссовых пучков, или любых других световых полей с небольшой расходимостью всегда можно выделить из комплексной амплитуды быстро меняющуюся от z составляющую, если ось z выбрана вдоль направления распространения:

$$U(x,y,z) = E(x,y,z)\, e^{ikz} . \tag{29}$$

Если далее подставить (29) в уравнение Гельмгольца (3), то получим уравнение для медленно меняющейся по z амплитуды $E(x,y,z)$:

$$\frac{\partial^2 E(x,y,z)}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial E(x,y,z)}{\partial z} + \nabla_\perp^2 E(x,y,z) = 0 . \tag{30}$$

где $\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ -поперечный лапласиан.

Пусть медленно меняющаяся амплитуда удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right| \ll 2k \left|\frac{\partial E}{\partial z}\right| , \tag{31}$$

тогда вместо (30) получим параболическое (или параксиальное) уравнение распространения света

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial z} + \nabla_\perp^2 \right) E(x,y,z) = 0 . \tag{32}$$

Далее получим некоторые простые результаты, ограничиваясь одномерным случаем. Представим комплексную амплитуду через действительную амплитуду и фазу :

$$E(x,z) = A\, e^{i\varphi}\ , \quad A = |E|\ , \quad \varphi = \arg E \tag{33}$$

и подставим (33) в уравнение (32). Получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2k \dfrac{\partial A}{\partial z} + A \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \dfrac{\partial A}{\partial x} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} - A \left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^2 - 2k\, A \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{34}$$

Первое уравнение системы (34) можно представить через функцию интенсивности света $I(x,z) = A^2\,(x,z)$:

$$k \frac{\partial I(x,z)}{\partial z} + I(x,z) \frac{\partial^2 \varphi(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial I(x,z)}{\partial x} \frac{\partial \varphi(x,z)}{\partial x} =$$

$$= k\, I_z(x,z) + [I(x,z)\varphi_x(x,z)]_x = 0\ , \tag{35}$$

где введены обозначения : $I_z = \dfrac{\partial I}{\partial z}$, $\varphi_{xx} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ и т.д.

Решение уравнения (35) при $I \neq 0$ можно получить в виде

$$\varphi\,(x,z) = \varphi_o(z) - k\int_o^x I^{-1}(x',z)dx' \int_o^{x'} I_z(x'',z)dx'' + \varphi_1(z)\int_o^x I^{-1}(x',z)dx'\ , \tag{36}$$

где $\varphi_o(z)$, $\varphi_1(z)$ - постоянные величины для каждого фиксированного z. Решение (36) показывает, что при любом z фаза светового поля $\varphi(x,z)$ связана однозначно с интенсивностью $I(x,z)$ и ее производной $I_z(x,z)$.

Покажем, что определенные интегралы

$$
\int_{-\infty}^{\infty} I(x,z)\,dx = J_0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x,z)\, I(x,z)\,dx = J_1 \, ,
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \{ \varphi_x^2(x,z)\, I(x,z) + A_x^2\,(x,z) \}\,dx = J_2 \, , \tag{37}
$$

где подстрочными индексами обозначены соответствующие производные, являются инвариантами для уравнения (32), то есть J_o, J_1 и J_2 не зависят от z. Действительно,

$$
J_{oz} = \int_{-\infty}^{\infty} I_z(x,z)\,dx = -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_x(x,z) I(x,z)]_x\,dx =
$$

$$
= -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} d\,[\varphi_x(x,z) I(x,z)\,] = -\frac{1}{k}\,[\varphi_x I\,]\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \, .
$$

Последнее равенство следует из ограниченности полной энергии света и стремления поэтому интенсивности $I(x,z)$ к нулю при $x \to \mp\infty$ для любого фиксированного z. Инвариант J_o – это полная энергия светового поля в любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Для второго инварианта J_1 доказательство также основано на интегрировании по частям:

$$
J_{1z} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xz}\, I\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x\, I_z\,dx = -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x\,(\varphi_x\, I)_x\,dx +
$$

$$
+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{zx}\, I\,dx = -\frac{1}{k}\left[\varphi_x^2\, I\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x\, I\,\varphi_{xx}\,dx\right] + \tag{38}
$$

$$
+ \left[\varphi_z\, I\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - 2\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_z\, A\, A_x\,dx\right] .
$$

Первые слагаемые в квадратных скобках равны нулю, так как $I \to 0$ при $x \to \mp\infty$. Для производной фазы по z в последнем интеграле в (38) воспользуемся вторым уравнением системы (34), тогда вместо (38) получим:

$$J_{1z} = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x \varphi_{xx} I\, dx - \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} (A^{-1}A_{xx} - \varphi_x^2) A\, A_x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} A_{xx} A_x\, dx + \frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x^2 I_x\, dx + \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x \varphi_{xx} I\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} d\, A_x^2 + \frac{1}{2k}(\varphi_x^2 I)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x \varphi_{xx} I dx + \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x \varphi_{xx} I dx = 0.$$

Аналогично, но более громоздко, доказывается, что производная третьего инварианта J_2 по z также равна нулю.

Используя далее инварианты (37) и вводя понятие среднего радиуса пучка света

$$R^2(z) = J_0^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, I(x,z)\, dx \quad , \qquad (39)$$

можно показать, что имеет место уравнение

$$\frac{d^2R^2(z)}{dz^2} = 2\gamma^2 \quad , \qquad \gamma^2 = J_2\,(k^2 J_1)^{-1} \quad , \qquad (40)$$

где γ – постоянная, независящая от z. Уравнение (40) имеет общее решение вида:

$$R^2(z) = \gamma^2 z^2 + R_0^2 \, . \qquad (41)$$

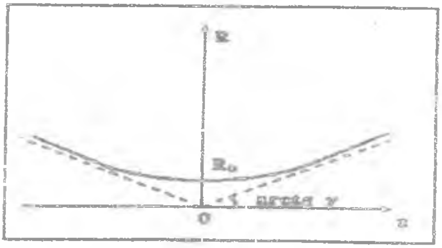

Рис. 3

Уравнение (4I) справедливо для любых параксиальных световых пучков, распространяющихся в свободном пространстве. Из него следует, что при $z=0$ пучок имеет минимальный средний радиус R_o (рис.3), а при $z \gg R_o/\gamma$ радиус растет линейно $R(z) \approx \gamma z$ с коэффициентом расходимости γ.

С помощью системы уравнений (34) могут быть получены также гауссовые моды свободного пространства. Для этого будем искать такие световые пучки, которые распространяются сохраняя вид функции комплексной амплитуды, а изменяется только их масштаб. Пусть такие пучки описываются комплексной амплитудой:

$$E(x,z) = \frac{E_o(x/\sqrt{B(z)})}{B^{(n+1)/2}(z)} . \tag{42}$$

Подставляя это выражение в одномерное параксиальное уравнение распространения вида

$$2ik \frac{\partial E(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 E(x,z)}{\partial^2 x} = 0 , \tag{43}$$

получим

$$\frac{d^2 E_o(\alpha)}{d^2\alpha} + [-ik \frac{dB(z)}{dz}]\alpha \frac{dE_o(\alpha)}{d\alpha} + (n+1)[-ikB(z)]E_o(\alpha) = 0 . \tag{44}$$

Пусть $-ik \dfrac{dB(z)}{dz} = 2$, тогда $B(z) = a^2 + 2iz/k$, (45)

где a – радиус "перетяжки" гауссового пучка, что будет выяснено в дальнейшем. С учетом (45) вместо (44) получим:

$$\frac{d^2 E_o(\alpha)}{d^2\alpha} + 2\alpha \frac{dE_o(\alpha)}{d\alpha} + 2(n+1) E_o(\alpha) = 0 , \tag{46}$$

где $\alpha = x\,[B(z)]^{-1/2}$.

Проверим, что пучок Гаусса-Эрмита с комплексной амплитудой

$$E_0(\alpha) = e^{-\alpha^2} H_n(\alpha) , \qquad (47)$$

где $H_n(x)$ - полином Эрмита n-го порядка, удовлетворяет уравнению (46). Действительно, первая и вторая производные в (46) будут иметь вид:

$$E_{0\alpha} = [-2\alpha H_n(\alpha) + \frac{d}{d\alpha} H_n(\alpha)]\, e^{-\alpha^2} ,$$

$$E_{0\alpha\alpha} = [\,-2H_n(\alpha) + 4\alpha^2 H_n(\alpha) - 4\alpha \frac{d}{d\alpha} H_n(\alpha) + \frac{d^2}{d\alpha^2} H_n(\alpha)\,]\, e^{-\alpha^2} .$$

После их подстановки в уравнение (46) и использования рекуррентных соотношений

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x) , \quad H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) , \qquad (48)$$

получим вместо уравнения (46) тождество.

Итак, частное решение (42) в виде моды Гаусса-Эрмита уравнения (43) окончательно записывается в виде:

$$E_n(x,z) = e^{-x^2/B(z)} H_n(x/\sqrt{B(z)})\, B^{-(n+1)/2}(z) , \quad B(z) = a^2 + 2iz/k. \qquad (49)$$

Из (49) следует, что существуют такие световые пучки, которые распространяются в пространстве вдоль оси z так, что сохраняется их вид, а изменяется только масштаб. Так как многочлены Эрмита представляют собой полную систему ортогональных функций, то любое решение уравнения (43) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений (49).

Аналогичные результаты можно получить для аксиально-симметричных световых полей (пучков). Для этого параболическое уравнение (32) запишем в цилиндрических координатах

$$2ik \frac{\partial E(r,\vartheta,z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} E \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} = 0 , \qquad (50)$$

где $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, $z=z$. Для аксиальных пучков $E(x,y,z) = E(r,z)$ и вместо (50) получим уравнение

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = 0 , \quad r^2 = x^2 + y^2 . \qquad (51)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде специальной комбинации переменных [3]

$$E(r,z) = \frac{E_o}{(1 + i D)^{m+1}} W \left\{ \frac{r^2}{a^2(1 + iD)} \right\} , \qquad (52)$$

где $D = 2z/(ka^2)$ – френелевский параметр, a – эффективный радиус пучка при $z = 0$, E_o – постоянная. Структура решения (52) напоминает решение (44), то есть оно строится в виде модовых пучков, распространяющихся в пространстве , сохраняя подобие.

Подставим (52) в (5I) и получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $W(r)$:

$$\tau \frac{d^2 W(\tau)}{d \tau^2} + (1 + \tau) \frac{dW(\tau)}{d \tau} + (m + 1) W(\tau) = 0 , \qquad (53)$$

где $\tau = \dfrac{r^2}{a^2(1 + iD)}$, $m = 0,1,2,...$

Частными решениями уравнения (53) являются функции Гаусса-Лагерра

$$W_m(\tau) = e^{-\tau} L_m(\tau) \quad , \qquad (54)$$

где $L_m(x)$ - полином Лагерра порядка m [2]. Так как эти полиномы составляют полную ортогональную систему функций, то общее решение уравнения (53) может быть представлено в виде их линейной комбинации

$$E(r,z) = \exp\left[-\frac{r^2}{a^2(1+iD)}\right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{(1+iD)^{m+1}} L_m\left\{\frac{r^2}{a^2(1+iD)}\right\} . \qquad (55)$$

Из (55) при $m = 0$ получается комплексная амплитуда гауссова пучка

$$E_0(r,z) = C\left[1 + \frac{2iz}{ka^2}\right]^{-1} \exp\left\{-(r/a)^2\left(1+\frac{2iz}{ka^2}\right)^{-1}\right\} . \qquad (56)$$

Из (56) видно, что радиус гауссового пучка растет с расстоянием в соответствии с формулой

$$R(z) = a\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{ka^2}\right)^2} , \quad a = R(0) . \qquad (56*)$$

Сравните формулы (56*) и (4I). Радиус кривизны G волнового фронта гауссового пучка меняется с расстоянием следующим образом

$$G(z) = a\frac{\sqrt{1+D^2}}{\sqrt{D}} , \quad D = \frac{2z}{ka^2} . \qquad (57)$$

3. Когерентные френелевские изображения

Вернемся к параболическому уравнению (32) и подставим в него амплитуду $E(x,y,z)$ в виде преобразования Фурье

$$E(x,y,z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A(\xi,\eta,z)\, e^{i(x\xi + y\eta)}\, d\xi\, d\eta \quad . \tag{58}$$

Тогда получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $A(\xi,\eta,z)$:

$$2ik\,\frac{dA}{dz} - k^2(\xi^2 + \eta^2)\,A = 0 \quad . \tag{59}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$A(\xi,\eta,z) = A_o(\xi,\eta)\,\exp\left[-\frac{iz}{2k}\,(\xi^2 + \eta^2)\right] , \tag{60}$$

где $$A_o(\xi,\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} E_o(x,y)\, e^{-i(x\xi + y\eta)}\, dxdy \quad .$$

Подставляя (60) в (58) и используя известный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax^2}\, e^{ibx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\exp\left[\frac{ib^2}{4a}\right] , \tag{61}$$

получим

$$E(x,y,z) = \frac{\pi k}{z}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} E_o(x',y')\,\exp\left[\frac{ik}{2z}\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\right]dx'dy' . \tag{62}$$

Последнее преобразование называется преобразованием Френеля [4] и будет нами использовано многократно в дальнейшем. Преобразование Френеля можно также получить из интеграла Кирхгофа (23), используя параксиальное приближение (27). Это будет соответствовать замене сферических волн в принципе Гюйгенса-Френеля на параболические волны. Итак, мы получили выражение (62), которое описывает распространение монохроматического когерентного светового поля в параксиальном приближении вдоль оси z. Заметим, что это преобразование Френеля легко свести к преобразованию Фурье. Действительно:

$$E(x,y,z) = \frac{\pi k}{z}\, e^{ik(x^2+y^2)/2z} \iint_{-\infty}^{\infty} E_0(x',y')\, e^{ik(x'^2+y'^2)/2z} * \tag{63}$$

$$* \exp\left[-ik(xx'+yy')/z\right] dx'dy' \ .$$

Из (63) видно, что преобразование Френеля есть, с точностью до экспоненциального фактора параболической волны, преобразование Фурье от исходного светового поля, умноженного также на экспоненциальный фактор параболической волны. Соотношение (63) часто используется для численного расчета, чтобы вычислять преобразование Френеля через алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Для того чтобы далее получать френелевские изображения, воспользуемся известным из геометрической оптики уравнением тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \ , \tag{64}$$

где a – расстояние от объекта до линзы, b – расстояние от линзы до изображения, f – фокусное расстояние линзы (рис. 4). Если $a > f$, то изображение действительное, перевернутое и масштабно измененное в b/a раз.

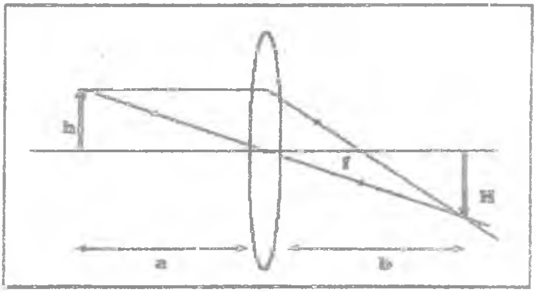

Рис. 4

Получим далее с помощью преобразования Френеля связь комплексных амплитуд в плоскости объекта $F_0(u,v)$ и в плоскости изображения $F_1(x,y)$ [5]. Комплексная амплитуда света в плоскости перед линзой находится с помощью преобразования Френеля (рис. 5):

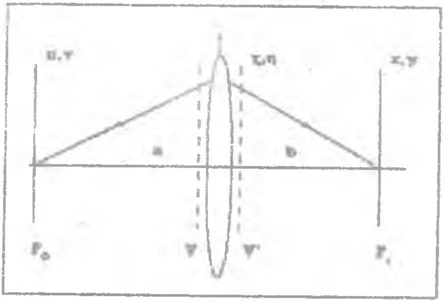

Рис. 5

$$U(\xi,\eta) = \frac{k}{a}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_0(u,v) * $$

$$* \exp\left[\frac{ik}{2a}\{(\xi-u)^2+(\eta-v)^2\}\right]dudv . \quad (65)$$

Функция пропускания тонкой сферической линзы в параксиальном приближении

$$\tau(\xi,\eta) = P(\xi,\eta)\exp\left[\frac{-ik}{2f}(\xi^2+\eta^2)\right] , \quad (66)$$

$$P(\xi,\eta) = \begin{cases} 1, & (\xi,\eta)\in\Omega \\ 0, & (\xi,\eta)\notin\Omega \end{cases}$$ - функция зрачка линзы,

Ω - форма апертуры линзы или форма диафрагмы, ограничивающей линзу. Тогда поле в плоскости за линзой будет равно:

$$U'(\xi,\eta) = \tau(\xi,\eta)\,U(\xi,\eta) . \quad (67)$$

Далее с помощью преобразования Френеля находится комплексная амплитуда света в плоскости (x,y), отстоящей на расстоянии b от линзы:

$$F_1(x,y) = \frac{k}{b}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} U'(\xi,\eta)\exp\left[\frac{ik}{2b}\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\}\right]d\xi\, d\eta . \quad (68)$$

Подставляя в (68) выражения (65)-(67), получим

$$F_i(x,y) = \frac{k^2}{ab} \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} F_o(u,v) P(\xi,\eta)\, e^{\frac{ik}{2}\varphi(u,v,\xi,\eta)}\, du\,dv\,d\xi\,d\eta \quad . \qquad (69)$$

где $$\varphi(u,v,\xi,\eta) = \frac{(\xi-u)^2+(\eta-v)^2}{a} - \frac{\xi^2+\eta^2}{f} + \frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{b} =$$

$$= \frac{u^2+v^2}{a} + \frac{x^2+y^2}{b} + \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{f}\right)(\xi^2+\eta^2) - \qquad (70)$$

$$- 2\left[\xi\left(\frac{u}{a}+\frac{x}{b}\right) + \eta\left(\frac{v}{a}+\frac{y}{b}\right)\right] .$$

С учетом уравнения линзы (64) окончательно получим

$$F_i(x,y) = \frac{k^2}{ab} e^{\frac{ik}{2b}(x^2+y^2)} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_o(u,v) e^{\frac{ik}{2a}(u^2+v^2)}\, \Omega\left(x+\frac{b}{a}u,\ y+\frac{b}{a}v\right) du\,dv, \quad (71)$$

где

$$\Omega(x+bu/a,\, y+bv/a) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\xi,\eta) \exp\left[\frac{-ik}{b}\{\xi(x+bu/a)+\eta(y+bv/a)\}\right] d\xi\, d\eta . \quad (72)$$

Функция $\Omega(x,y)$ называется функцией импульсного отклика оптической системы или функцией размытия точки. Она равна Фурье-образу от функции зрачка линзы. В функцию зрачка (66) могут также входить аберрации линзы, которые приводят к фазовым модуляциям волнового фронта. При учете аберраций функция зрачка становится комплексной.

Проанализируем подробнее формулы (71) и (72). Пусть в плоскости объекта находится точечный источник света

$$F_o(u,v) = A\,\delta(u)\delta(v) \quad .$$

тогда в плоскости изображения сформируется световое поле, пропорциональное функции импульсного отклика (в этом заключается ее физический смысл)

$$F_1(x,y) = \frac{Ak^2}{ab} \cdot e^{\frac{ik}{2b}(x^2+y^2)} \Omega(x,y) \quad . \qquad (73)$$

Если переобозначить

$$F_1'(x,y) = F_1(x,y) \exp\left[\frac{-ik}{2b}(x^2+y^2)\right]$$

$$F_0'(u,v) = F_0(u,v) \exp\left[\frac{ik}{2a}(u^2+v^2)\right]$$

то можно интегральное преобразование ([illegible]) представить в виде интеграла свертки

$$F_1'(x,y) = \frac{k^2}{[illegible]} \iint\limits^{\infty} F_0'(u,v)\, \Omega(u + ax/b,\ v + ay/b)\, dudv \ . \qquad (74)$$

Если функция импульсного отклика зависит от разности (суммы) переменных, как это имеет место в нашем случае (72), то говорят, что оптическая система изопланатическая. В более общем случае, когда отсутствует параксиальное приближение, структура решения сохраняется, но вместо (74) следует использовать

$$F_1'(x,y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_0'(u,v)\, \Omega(u,v;x,y)\, dudv \ . \qquad (75)$$

Последнее выражение, связывающее комплексные амплитуды света в плоскостях объекта и его изображения, верно для любой когерентной оптической системы. Но выражение для функции импульсного отклика (72) в этом случае уже не имеет места.

В качестве примеров найдем функции импульсного отклика для трех простых случаев: для линзы с неограниченной апертурой и для линз, ограниченных квадратной и круглой апертурами.

I. Неограниченная линза:

$$\Omega(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx\xi/b}\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky\eta/b}\, d\eta = \left(\frac{b}{k}\right)^2 \delta(x)\delta(y). \quad (75^*)$$

2. Квадратная диафрагма: $P(\xi,\eta) = \mathrm{rect}(\xi/w)\,\mathrm{rect}(\eta/w)$.

$$\Omega(x,y) = \int_{-w}^{w} e^{-ikx\xi/b}\, d\xi \int_{-w}^{w} e^{-iky\eta/b}\, d\eta =$$

$$= 4w^2\, \mathrm{sinc}\left[\frac{kwx}{b}\right] \mathrm{sinc}\left[\frac{kwy}{b}\right] , \quad (76)$$

где $\mathrm{sinc}(x) = \sin x / x$ (рис. 6). Первый ноль функции sinc равен

$$x_o = \lambda b/(2w) . \quad (77)$$

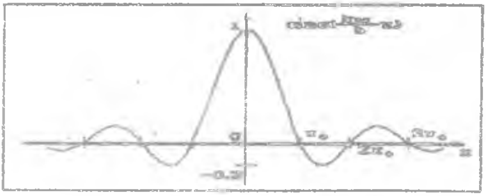

Рис. 6

3. Круглая диафрагма: $P(\xi,\eta) = P(\xi^2 + \eta^2) = P(r) = \mathrm{circl}\ (r/R)$.

$$\Omega(\rho) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} r dr \exp\left[ikr\rho \cos(\varphi - \nu)/b \right] =$$

$$= \int_0^R J_0(kr\rho/b)\, r dr = 2\pi R^2 J_1(kR\rho/b)\,(kR\rho/b)^{-1} , \qquad (78)$$

где $\xi = r \cos\varphi$, $\eta = r \sin\varphi$, $x = \rho\cos\nu$, $y = \rho\sin\nu$.

График функции $2J_1(r)/r$ показан на рис.7 . Первый ноль этой функции равен

$$\rho_0 = 1.22\, \lambda b/(2R) . \qquad (79)$$

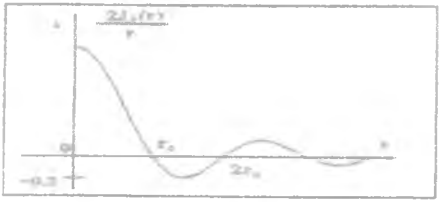

Рис. 7

Из приведенных примеров видно, что ограничение линзы диафрагмами приводит к уширению изображения точки, то есть вместо бесконечно узкой δ-функции (75*) получаются функции (76) или (78), ширины которых (при определении ширины функции как расстояния до ее первого нуля) равны соответственно: $2x_0$ и $2\rho_0$. Из формул (77) и (79) также видно, что функция импульсного отклика уширяется пропорционально длине волны света и расстоянию от линзы до плоскости изображения , но обратно пропорционально линейному размеру ограничивающей апертуры (R или w).

Из рассмотренных конкретных случаев можно сделать общий вывод о том, что из-за дифракции когерентного света на диафрагме изображение объекта оказывается "размытым", так как уширяется изображение каждой точки объекта. Если линза имеет неограниченную апертуру или такую, что можно пренебречь дифракционными эффектами, то из (7I) и (75) следует:

$$F_1(x,y) = k^2(ab)^{-1}\, e^{ik(x^2+y^2)/2b} \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(u,v)\, e^{ik(u^2+v^2)/2a} \times$$

$$* \; (b/a)^2 \, \delta(x + bu/a)\delta(y + bv/a)dudv =$$

$$= ab^{-1} e^{ik(x^2 + y^2)} F_o(-ax/b, -ay/b). \qquad (80)$$

Из (80) следует, что модули комплексных амплитуд света на объекте и в изображении равны с точностью до масштабного множителя

$$|F_i(x,y)| = ab^{-1}|F_o(-ax/b, -ay/b)| \, . \qquad (81)$$

В этом случае изображение тождественно объекту, только перевернуто и масштабно изменено.

Оптические системы характеризуются своим поперечным разрешением, которое связано с размерами апертуры линзы. По критерию Рэлея две точки в плоскости изображения разрешаются, если "провал" интенсивности составляет более 20% от максимального значения интенсивностей в изображении этих точек. На рис. 8 показана поясняющая схема.

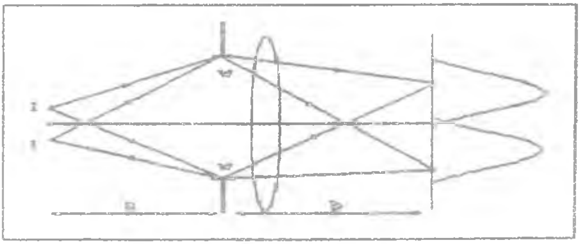

Рис. 8

Пусть в объектной плоскости имеется два точечных источника, разделенных расстоянием $2l$:

$$F_o(u) = \delta(u - l) + \delta(u + l) \, , \qquad (82)$$

тогда изображения этих источников будут пропорциональны функциям размытия точки (73), которая для линзы, ограниченной диафрагмой с радиусом w, равна функции sinc (76). Ширина каждого изображения пропорциональна $\lambda b/w$ (77), а расстояние между максимумами интенсивности двух изображений равно $2bl/a$. Тогда условие хорошего разрешения изображений двух точек можно записать в виде

$$2bl/a \gg \lambda b/w \quad . \tag{83}$$

То есть расстояние $2l$ между источниками должно быть много больше ширины функции импульсного отклика, но вычисленной не в плоскости изображения, а в плоскости объекта:

$$2l \gg \frac{\lambda a}{w} \quad . \tag{84}$$

Рассмотрим далее как преобразуется пространственный спектр светового поля при переходе из плоскости объекта в плоскость изображения. Для этого от обеих частей уравнения (74) следует вычислить преобразование Фурье

$$\mathbb{F}_i(\xi,\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_i^{\cdot}(\alpha,\beta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\alpha d\beta =$$

$$= \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} F_o^{\cdot}(u,v) e^{-i(u\xi + v\eta)}\, \Omega(u-\alpha, v-\beta)\, e^{-i[(u-\alpha)\xi + (v-\beta)\eta]}\, du dv d\alpha d\beta =$$

$$= \mathbb{F}_o(\xi,\eta)\, \mathbb{F}_\Omega(-\xi,-\eta) \quad , \qquad \alpha = -ax/b \; , \; \beta = -ay/b \quad , \tag{85}$$

где $\mathbb{F}_i$, $\mathbb{F}_o$ и $\mathbb{F}_\Omega$ – Фурье-образы от функций $F_i^{\cdot}$, $F_o^{\cdot}$ и Ω соответственно. Из (72) следует, что Фурье-образ от функции импульсного отклика пропорционален функции зрачка :

$$H(\xi,\eta) = \mathbb{F}_\Omega(-\xi,-\eta) = P(\xi,\eta) \quad , \tag{86}$$

где $H(\xi,\eta)$ – частотно-передаточная функция оптической системы. С учетом (86) окончательно получим, что пространственный спектр изображения равен пространственному спектру объекта, умноженному на функцию зрачка:

$$F_i(\xi,\eta) = F_o(\xi,\eta)\, P(\xi,\eta) . \qquad (87)$$

Из (87) видно, что размытие изображения происходит из-за того, что диафрагма (зрачок оптической системы) ограничивает (фильтрует) высокие пространственные частоты объекта, которые поэтому не дают вклада в изображение. То есть при получении изображения с помощью оптических систем с ограниченным зрачком происходит потеря информации об объекте.

Рассмотрим кратко, как описываются аберрации оптических систем, которые на практике приводят к еще большей потере информации об объекте при получении его изображения. При формировании изображения в каждую точку его от плоскости линзы распространяется сходящаяся сферическая волна. Аберрации линзы – это деформации сферического фронта волны. В рамках Фурье-оптики или параксиального приближения аберрации описываются с помощью представления функции зрачка в виде

$$P(\xi,\eta) = A(\xi,\eta) \exp\,[i\varphi(\xi,\eta)] , \qquad (88)$$

где $$\varphi(\xi,\eta) = \varphi(r,\theta) = \sum_{m,n=1}^{N} C_{mn}\, r^m \cos^n \theta .$$

Первичные аберрации или аберрации Зейделя (малые деформации сферического фронта) имеют свои названия:

$\varphi_1 = r\cos\theta$ – дисторсия , $\varphi_2 = r^2$ – кривизна поля, $\varphi_3 =$

$= r^2\cos^2\theta$ – астигматизм , $\varphi_4 = r^3\cos\theta$ – кома , $\varphi_5 = r^4$ –

– сферическая аберрация, (r,θ) – полярные координаты в плоскости линзы. Более общее описание аберраций принято проводить с помощью ортогональных полиномов Цернике, линейной комбинацией которых можно представить любые деформации волнового фронта:

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{m,n=1}^{N} C_{mn} R_n^m (r) \cos(m\theta) \quad , \tag{89}$$

где $$V_n^m (r,\theta) = R_n^m (r) e^{im\theta}$$ – полиномы Цернике ,

$R_n^m (r)$ – радиальные полиномы, удовлетворяющие условию ортогональности:

$$\int_0^1 R_n^m (r) R_s^m (r) r dr = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{mn} \, . \tag{90}$$

δ_{mn} – символ Кронекера. Эти полиномы представимы в виде ряда

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{K} (-1)^s \frac{(n - s)! \, r^{n-2s}}{s! \, (\frac{n+m}{2} - s)! \, (\frac{n-m}{2} - s)!} \quad , \tag{91}$$

где $K = (n-m)/2$. При $m=0$ и $n = 2p$ радиальные полиномы равны полиномам Лежандра $P_n(r)$:

$$R_{2s}^0 (r) = P_s(2r^2-1) \quad . \tag{92}$$

4. Изображения случайных полей

Когерентное световое поле отражаясь от поверхности объекта, обладающего микронеровностями (шероховатостями), приобретает случайные деформации волнового фронта и становится промодулированным по фазе. По мере распространения в пространстве фазовая модуляция поля переходит в амплитудную модуляцию, и отраженное от объекта когерентное световое поле приобретает пятнистую структуру в распределении интенсивности, спекл-структуру. Такое поле далее мы будем называть случайным световым полем и описывать также комплексной амплитудой $F(x,y)$, но амплитуда и фаза которой являются случайными полями от аргументов .

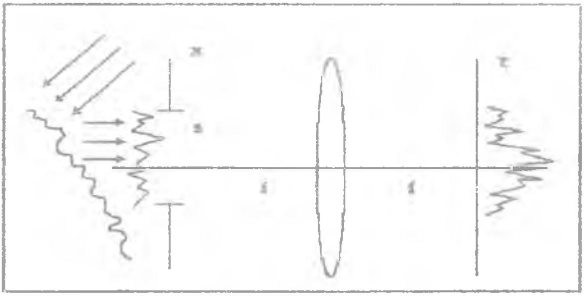

Рис. 9

Получим выражения для средней интенсивности и корреляционной функции амплитуды в фокальной плоскости линзы (рис. 9) [6,7]. Пусть случайное световое поле, которое образуется при отражении плоской монохроматической волны от шероховатой поверхности или при прохождении через прозрачный диффузор (случайно рассеивающий объект), ограничено диафрагмой S , пропускание которой описывается формулой

$$P(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \in S \end{cases}$$

и которая расположена на близком расстоянии перед линзой (рис. 9).

Тогда комплексная амплитуда света в фокальной плоскости линзы, расположенной на фокусном расстоянии (f - длина фокуса) за линзой, описывается Фурье-преобразованием от исходной амплитуды поля $F_o(x,y)$:

$$F_в(\xi,\eta) = \frac{k}{f}\, e^{ik(\xi^2+\eta^2)/2f} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(x,y)F_o(x,y)\, e^{-ik(x\xi+y\eta)/f}\, dxdy. \quad (93)$$

Корреляционная функция амплитуды по определению

$$G(\xi,\eta;\xi',\eta') = \langle F_в(\xi,\eta)\, F^*_в(\xi',\eta') \rangle \quad , \qquad (94)$$

где <...> - знак усреднения по реализациям статистически подобных случайных полей. Предположим, что исходное поле статистически однородное, то есть его корреляционная функция зависит от разности аргументов

$$K(x-x',\, y-y') = \langle F_o(x,y)\, F^*_o(x',y') \rangle \quad . \qquad (95)$$

Тогда корреляционная функция светового поля в фокусе линзы (94) будет

$$G(\xi,\eta;\xi',\eta') = \frac{k^2}{f^2}\, e^{ik[(\xi^2-\xi'^2)+(\eta^2-\eta'^2)]/2f} \,*$$

$$* \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} P(x,y)P^*(x',y')K(x-x',y-y')\, e^{ik(\xi x-\xi' x'+\eta y-\eta' y')/f}\, dxdydx'dy'. \qquad (96)$$

Перейдем к разностным переменным

$$\xi-\xi' = \Delta_\xi \quad , \quad \eta-\eta' = \Delta_\eta \quad , \quad \xi+\xi' = 2\Sigma_\xi \quad , \quad \eta+\eta' = 2\Sigma_\eta \quad .$$

$$x-x' = \Delta_x \;, \quad y-y' = \Delta_y \;, \quad x+x' = 2\Sigma_x \;, \quad y+y' = 2\Sigma_y \;,$$

тогда вместо (96) будем иметь

$$G(\Delta_\xi,\Delta_\eta;\Sigma_\xi,\Sigma_\eta) = \frac{k^2}{f^2} e^{ik(\Delta_\xi\Sigma_\xi + \Delta_\eta\Sigma_\eta)/f} \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\Sigma_x+\Delta_x/2,\ \Sigma_y+\Delta_y/2) *$$

$$* P^*(\Sigma_x-\Delta_x/2,\ \Sigma_y-\Delta_y/2)\ K(\Delta_x,\Delta_y)\ e^{-ik(\Delta_\xi\Sigma_x+\Delta_x\Sigma_\xi+\Delta_\eta\Sigma_y+\Delta_y\Sigma_\eta)/f} d\Delta_x d\Delta_y d\Sigma_x d\Sigma_y . \tag{97}$$

Предположим, что масштаб корреляционной функции $K(x,y)$ или средний радиус корреляции исходного поля r_k много меньше, чем масштаб функции зрачка $P(x,y)$ или размер диафрагмы, т.е. в отверстие формы S попадает много периодов модуляции случайного поля. Тогда приближенно можно считать, что

$$P(\Sigma_x+\Delta_x/2,\Sigma_y+\Delta_y/2)P^*(\Sigma_x-\Delta_x/2,\Sigma_y-\Delta_y/2) \approx |\ P(\Sigma_x,\Sigma_y)\ |^2 = P(\Sigma_x,\Sigma_y).$$

Это равенство будет нарушаться только в точках, близких к краям диафрагмы S. При таком предположении интегралы в (97) разделяются, и мы будем иметь:

$$G(\Delta_\xi,\Delta_\eta;\Sigma_\xi,\Sigma_\eta) = \frac{k^2}{f^2} e^{ik(\Delta_\xi\Sigma_\xi+\Delta_\eta\Sigma_\eta)/f} * \tag{98}$$

$$* \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\Sigma_x,\Sigma_y)\ e^{-ik(\Sigma_x\Delta_\xi+\Sigma_y\Delta_\eta)} d\Sigma_x d\Sigma_y \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(\Delta_x,\Delta_y) e^{-ik(\Delta_x\Sigma_\xi+\Delta_y\Sigma_\eta)} d\Delta_x d\Delta_y .$$

Проанализируем полученное выражение (98). Фазовый экспоненциальный множитель перед интегралами не влияет на модуль корреляционной функции. Заметим, что несмотря на то, что исходное поле было статистически однородным (95), световое поле в фокусе линзы не является однородным, так как корреляционная функция $G(\xi,\eta)$ зависит и от разности, и от суммы своих аргументов (98). Модуль корреляционной функции является приводимой функцией, т.е. он представим в виде произведения

$$| G (\Delta_\xi ,\Delta_\eta ;\Sigma_\xi ,\Sigma_\eta) | = |G_1(\Delta_\xi ,\Delta_\eta)| \; |G_2(\Sigma_\xi ,\Sigma_\eta)| \quad , \tag{99}$$

где

$$G_1(\Delta_\xi ,\Delta_\eta) = \frac{k}{f} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\Sigma_x ,\Sigma_y) e^{-ik(\Sigma_x\Delta_\xi +\Sigma_y\Delta_\eta)/f} d\Sigma_x d\Sigma_y \; , \tag{100}$$

$$G_2(\Sigma_\xi ,\Sigma_\eta) = \frac{k}{f} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} E(\Delta_x ,\Delta_y) e^{-ik(\Delta_x\Sigma_\xi +\Delta_y\Sigma_\eta)} d\Delta_x d\Delta_y \; . \tag{101}$$

Функция G_1, зависящая только от разности переменных, является Фурье-образом от функции зрачка или от апертурной функции диафрагмы, ограничивающей исходное световое поле (100), а функция G_2, зависящая только от суммы аргументов, является Фурье-образом от корреляционной функции исходного поля (101). Масштаб функции G_1 определяется линейным размером D диафрагмы S и примерно равен $2\lambda f/D$, а масштаб функции G_2 по порядку величины равен $\lambda f/r_k$. И так как по предположению

$$D \gg r_k \quad , \text{ то } \quad 2\lambda f/D \ll \lambda f/r_k \; ,$$

т.е. корреляционная функция G случайного поля в фокусе линзы имеет два характерных масштаба: быстрые осцилляции с периодом $2\lambda f/D$, амплитуда которых спадает с ростом ξ и η и имеет огибающую функцию, спадающую на расстоянии $\lambda f/r_k$.

Пример I. В качестве примера найдем корреляционную функцию поля со следующими параметрами:

$$P(x) = \mathrm{rect}\,(2x/D) \quad , \qquad K(x) = \exp\,[-(x/r_k)^2] \; . \tag{102}$$

Согласно (98) получим

$$G(\xi-\xi',\xi+\xi') = \frac{k}{f}\, e^{ik(\xi^2-\xi'^2)/2f} \int\limits_{-D/2}^{D/2} e^{-ik(\xi-\xi')x/f}\, dx \; *$$

$$* \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/r_k)^2}\, e^{-ik(\xi+\xi')x/2f}\, dx = \frac{kDr_k}{f}\, e^{ik(\xi^2-\xi'^2)/2f} \; *$$

$$* \; \mathrm{sinc}\left[kD(\xi-\xi')/2f\right] \exp\left[-\,(kr_k/2f)^2 \left(\frac{\xi+\xi'}{2}\right)^2\right] \; . \tag{103}$$

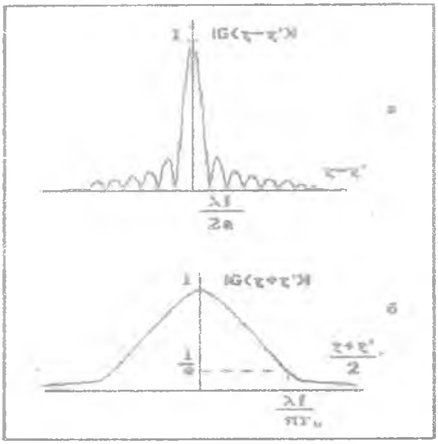

Рис. 10

График модуля функции (103) от разности аргументов показан на рис.10,а , а график от суммы аргументов - на рис.10,б. Средняя интенсивность случайного светового поля определяется так:

$$I(\xi,\eta) = G\;(\xi=\xi',\eta=\eta') ,$$

и с учетом (98) равна:

$$I(\xi,\eta) = \frac{k^2}{f^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(\Delta_x,\Delta_y) \; *$$

$$* \; \exp[-ik(\xi\Delta_x+\eta\Delta_y)/f]\; d\Delta_x d\Delta_y . \tag{104}$$

Окончательно реализацию интенсивности случайного поля в фокусе линзы можно представить себе как неоднородный случайный процесс со средним радиусом корреляции, равным $2\lambda f/D$, и с огибающей, которая спадает на расстоянии $\lambda f/2r_k$ (рис. II).

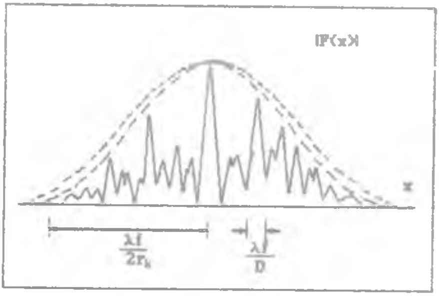

Рис. II

Пример 2. Пусть на входе в Фурье-анализатор (рис. 9) имеет место случайное световое поле, описываемое как белый шум, т.е. δ-коррелированное:

$$K(\Delta_x,\Delta_y) = I_o\delta(\Delta_x)\delta(\Delta_y) ,$$

тогда средняя интенсивность в фокусе линзы будет согласно (I04) постоянной:

$$I(\xi,\eta) = I_o \frac{k^2}{f^2} = const , \qquad (105)$$

что означает, что только δ-коррелированное однородное случайное поле остается однородным случайным полем в фокусе линзы. Но оно уже не будет δ- коррелировано, если размер диафрагмы D конечен. Если же $D \to \infty$, то поле в фокусе линзы будет так же белым шумом, как и исходное световое поле. Корреляционная функция в фокусе линзы для исходного δ-коррелированного поля имеет вид

$$G(\Delta_\xi,\Delta_\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} J_o(x,y)\, e^{-ik(x\Delta_\xi+y\Delta_\eta)/f} dxdy , \qquad (106)$$

где $J_o(x,y) = \frac{k^2}{f^2} I_o P(x,y)$ - приведенная интенсивность δ-коррелированного поля, а само соотношение (I06) выражает теорему Ван-Циттерта--Цернике, которая гласит, что корреляционная функция спектра чисто случайного светового поля равна Фурье-спектру от плоской волны, заполняющей ограничивающую диафрагму.

<u>Пример 3.</u> Пусть на входе в Фурье-анализатор (рис. 9) имеет место статистически изотропное случайное поле с корреляционной функцией

$$< F_o(x,y)\, F_o^*(x',y') > = K\,\left((x-x')^2+(y-y')^2 \right) = K(r) \quad , \tag{107}$$

тогда средняя интенсивность в плоскости пространственного спектра (в фокальной плоскости линзы) будет также статистически изотропной. Из (I04) будем иметь в этом случае

$$I(\xi,\eta) = \frac{k^2}{f^2} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \;\; K(r)\, e^{-ikr\rho \cos(\varphi-\theta)} =$$

$$= \frac{k^2}{f^2} \int_0^{\infty} K(r)\, J_o(kr\rho/f)\, r dr = I(\rho) \quad , \tag{108}$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\Delta_x = r\cos\theta$, $\Delta_y = r\sin\theta$, $\xi = \rho\cos\varphi$, $\eta = \rho\sin\varphi$, $J_o(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Далее получим выражение для средней интенсивности спектра для светового поля, представляющего собой произведение детерминированной функции $g(x)$ и случайной составляющей $F_o(x)$. Для простоты рассмотрим одномерный случай:

$$I(\xi) = < F_s(\xi)\, F_s^*(\xi) > = \frac{k}{f} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x) g^*(x') < F_o(x) F_o^*(x') > *$$

$$* \, e^{-ik(x-x')\xi/f} dx dx' = \frac{k}{f} \iint_{-\infty}^{\infty} g(\Sigma+\Delta/2)\, g^*(\Sigma-\Delta/2)\, K(\Delta)\, e^{-ik\xi\Delta} d\Sigma d\Delta \quad , \tag{109}$$

где $\Sigma = (x+x')/2$, $\Delta = x-x'$, $K(\Delta)$ – корреляционная функция однородного случайного поля. Введем автокорреляционную функцию детерминированной части исходного поля:

$$\Omega(\Delta) = \frac{k}{f}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\Sigma+\Delta/2)\, g^{*}(\Sigma-\Delta/2)\, d\Sigma \qquad , \tag{110}$$

тогда вместо (I09) будем иметь

$$I(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\Delta)\,\Omega(\Delta)\, e^{-ik\xi\Delta/f}\, d\Delta \ . \tag{111}$$

Из (III) видно, что средняя интенсивность пространственного спектра комбинированного светового поля является Фурье-образом от произведения функции автокорреляции детерминированной части на корреляционную функцию случайной части исходного светового поля.

В спектральных координатах выражение (III) записывается в виде интеграла свертки:

$$I(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Delta\, e^{-ik\xi\Delta/f} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_{k}(w) e^{iw\Delta}\, dw \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_{\Omega}(w') e^{iw'\Delta}\, dw' =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_{k}(w)\, \mathbb{F}_{\Omega}(w')\, \delta(w + w' - k\xi/f)\, dw\, dw' = \tag{112}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_{k}(w)\, \mathbb{F}_{\Omega}(k\xi/f - w)\, dw \quad ,$$

где $\mathbb{F}_k$ и $\mathbb{F}_\Omega$ - спектральные плотности корреляционных функций $K(x)$ и $\Omega(x)$ соответственно. Из (II2) видно, что средняя интенсивность пространственного спектра для комбинированного поля равна свертке спектров автокорреляции детерминированной части поля и корреляционной функции случайной части поля.

Пример 4. Найдем корреляционную функцию комплексной амплитуды гауссового случайного поля. Гауссово поле $g(x)$ однозначно характеризуется заданием дисперсии, среднего значения и функции корреляции:

$$\langle g(x)\rangle = a(x), \quad \langle g^2(x)\rangle = \sigma^2(x) \ , \quad \langle g(x)g^*(x')\rangle = G(x,x') \ .$$

Для однородного гауссового поля будем иметь

$$a(x) = a_0 \ , \quad \sigma^2(x) = \sigma^2, \quad G(x,x') = G(x-x') \ .$$

Такое поле формируется сразу за фазовым диффузором со статистически однородными микронеровностями, если его осветить плоской монохроматической волной (рис. I2).

Функция пропускания такого диффузора имеет вид

$$T(x) = e^{i\varphi(x)} \ ,$$

где $\varphi(x) = k(n-1)z(x)$, k – волновое число света, n – показатель преломления материала диффузора, $z(x)$ – функция, описывающая изменение высоты рельефа.

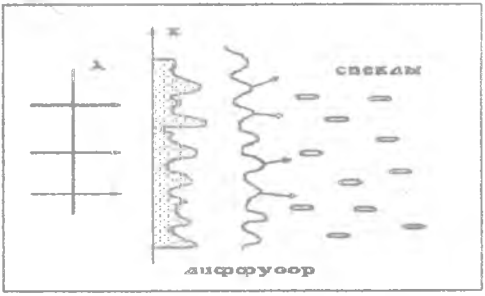

Рис. I2

Корреляционная функция поля вычисляется по формуле:

$$G(x-x') = \langle e^{i\varphi(x)}\, e^{-i\varphi(x')}\rangle = 1 + i\varphi(x) - i\varphi(x') -$$

$$- \langle\varphi^2(x)\rangle - \langle\varphi^2(x')\rangle + 2\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle + i\langle\varphi(x)\varphi^2(x')\rangle/2 -$$

$$- i\langle\varphi(x')\varphi^2(x)\rangle/2 + \ldots . \qquad (113)$$

При условии, что $\langle\varphi(x)\rangle = 0$, $\langle\varphi^2(x)\rangle = \sigma^2/2$, $\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \sigma^2\rho(x-x')/2$ и с учетом того, что все корреляционные слагаемые в (II3) нечетной степени равны нулю, вместо (II3) получим

$$G(x-x') = \exp[-\sigma^2\{1-\rho(x-x')\}] \quad . \tag{114}$$

Формула (II4) часто используется для расчета корреляционной функции гауссового поля в плоскости спектра или в плоскости изображения.

Далее получим корреляционную функцию случайного светового поля в плоскости изображения. Исходя из полученных ранее формул (7I),(72) и (74) для комплексной амплитуды света в плоскости изображения, получим выражения для корреляционной функции поля в изображении,т.е. далее мы будем рассматривать характеристики когерентного изображения объектов со случайными микронеоднородностями (изображения шероховатых поверхностей или диффузоров). Перепишем еще раз формулу (74) для амплитуды света в плоскости изображения (опуская штрихи):

$$F_i(x,y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_o(u,v)\,\Omega(u-x,v-y)\,dudv \ , \tag{115}$$

здесь также сделана замена $ax/b \Rightarrow -x$, Ω - функция импульсного отклика линзы. Пусть теперь функция $F_o(u,v)$ есть комплексная амплитуда случайного светового поля с функцией корреляции

$$K(u,v;u',v') = \langle F_o(u,v)F_o^*(u',v')\rangle \quad , \tag{116}$$

тогда для функции корреляции в плоскости изображения будем иметь

$$\begin{aligned} G_i(x,y;x',y') &= \langle F_i(x,y)F_i^*(x',y')\rangle = \\ &= \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} K(u,v;u',v')\Omega(u-x,v-y)\Omega^*(u'-x',v'-y')dudvdu'dv' \ . \end{aligned} \tag{117}$$

Пусть объектное световое поле статистически однородное, т.е.

$$K(u,v;u',v') = K(u-u',\ v-v') \quad ,$$

тогда вместо (II7) в разностных координатах

$$u-u' = \Delta_u \ , \ v-v' = \Delta_v \ , \ u+u' = 2\Sigma_u \ , \ v+v' = 2\Sigma_v \ ,$$

$$x-x = \Delta_x \ , \ y-y' = \Delta_y \ , \ x+x' = 2\Sigma_x \ , \ y+y' = 2\Sigma_y$$

будем иметь

$$G(\Delta_x,\Delta y;\Sigma_x,\Sigma_y) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} K(\Delta_u,\Delta_v)\ \Omega(\Sigma_u-\Sigma_x+\Delta_u/2 - \Delta_x/2 \ , \ \Sigma_v-\Sigma_y+\Delta_v/2-\Delta_y/2) *$$

$$* \ \Omega^*(\Sigma_u-\Sigma_x-\Delta_u/2+\Delta_x/2 \ , \ \Sigma_v-\Sigma_y-\Delta_v/2+\Delta_y/2) \ \ d\Delta_u d\Delta_v d\Sigma_u d\Sigma_v \ . \qquad (118)$$

Введя автокорреляционную функцию импульсного отклика

$$W(\Delta_\xi,\Delta_\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega(\xi+\Delta_\xi/2 \ ,\eta+\Delta_\eta/2)\ \Omega^*(\xi-\Delta_\xi/2,\eta-\Delta_\eta/2)\ d\xi\, d\eta \ , \qquad (119)$$

где $\xi = \Sigma_u - \Sigma_x$, $\eta = \Sigma_v - \Sigma_y$, $\Delta_\xi = \Delta_u - \Delta_x$, $\Delta_\eta = \Delta_v - \Delta_y$,

получим вместо (II8)

$$G(\Delta_x,\Delta_y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(\Delta_u,\Delta_v)\ W(\Delta_u-\Delta_x, \ \Delta_v-\Delta_y)\ d\Delta_u d\Delta_v \ . \qquad (120)$$

Таким образом, функция автокорреляции случайного поля в плоскости изображения зависит только от разности переменных, т.е. изображение однородного случайного поля также однородно. Из (I20) видно, что корреляционная функция поля в изображении равна свертке корреляционной функции объектного поля с автокорреляцией импульсного отклика линзы.

Средняя интенсивность в изображении постоянная:

$$I(x,y) = G(0,0) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(\xi,\eta)W(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = const\ . \qquad (121)$$

Проанализируем формулу (I20).

I. Пусть в объектной плоскости изображающей системы находится δ-коррелированное случайное световое поле

$$K(\Delta_u,\Delta_v) = I_o\delta(\Delta_u)\delta(\Delta_v)\ ,$$

тогда в плоскости изображения сформируется световое поле, пропорциональное автокорреляционной функции импульсного отклика

$$G(\Delta_x,\Delta_y) \approx W(\Delta_x,\Delta_y)\ . \qquad (122)$$

Функция импульсного отклика для линзы, ограниченной зрачком $P(x) = rect(2x/D)$, с учетом (76) равна:

$$\Omega(x) = D\ sinc(kDx/2b)\ ,$$

где b – расстояние от линзы до плоскости изображения, D – размер апертуры линзы, тогда автокорреляция импульсного отклика будет равна:

$$W(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega(x)\ \Omega^*(x-\xi)\ dx = D^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} sinc(kDx/2b)\ *$$

$$*\ sinc\left[kD(x-\xi)/2b\right]dx = D^2 sinc(kD\xi/2b)\ . \qquad (123)$$

Из (I23) следует окончательное выражение для корреляции поля в изображении:

$$G(\Delta_x) \approx D^2 sinc(kD\Delta_x/2b)\ .$$

На рис.I3 графически проиллюстрированы последние соотношения. На рис.I3,а показано, как формируется функция импульсного отклика $\Omega(x)$.

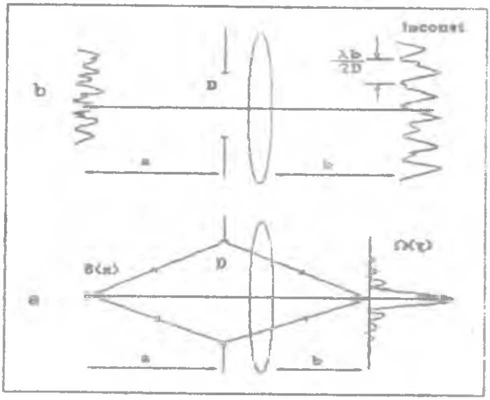

Рис. I3

На рис.I3,б показано, что изображение случайного однородного поля также однородно и имеет постоянную среднюю интенсивность.

2. Аналогичный результат получается, если ширина корреляционной функции исходного поля S_k, равная радиусу корреляции r_k, много меньше ширины автокорреляционной функции импульсного отклика линзы S_w, которая равна $\lambda f/D$, т.е. $S_k \ll S_w$. В этом случае микроструктура шероховатой поверхности, сформировавшей исходное случайное поле с радиусом корреляции r_k, не будет разрешаться оптической системой, а в плоскости изображения сформируется случайное световое поле с функцией корреляции (I22), масштаб которой полностью определяется шириной функции импульсного отклика линзы.

3. Если же, наоборот, $S_k \gg S_w$, то линза разрешаёт микроструктуру поверхности, и корреляционная функция поля в плоскости изображения пропорциональна корреляционной функции исходного поля

$$G(\Delta_x,\Delta_y) \approx K(b\Delta_x/a\ ,\ b\Delta_y/a) \qquad (124)$$

и ее масштаб равен радиусу корреляции объектного поля, умноженному на фактор увеличения: $S_G \approx br_k/a$.

Рассмотрим случайный транспарант, расположенный вплотную к линзе. Введем понятия, характерные для описания некогерентных оптических систем. Оптическая передаточная функция (ОПФ) системы равна автокорреляции функции зрачка линзы

$$H(x,y) = P(\xi,\eta)*P^*(\xi,\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\xi,\eta)P^*(\xi-x,\eta-y)d\xi\, d\eta \;. \qquad (124.1)$$

Фурье-образ ОПФ называется функцией размытия точки (ФРТ)

$$S(\xi,\eta) = \mathbb{F}\Big[H(x,y)\Big] = |\Omega(\xi,\eta)|^2 \;, \qquad (124.2)$$

где

$$\Omega(\xi,\eta)= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\exp\,[-ik(x\xi+y\eta)/f]dxdy$$ – функция импульсного отклика линзы.

Случайный фильтр пусть имеет пропускание в виде:

$$\tau(\xi,\eta) = \tau_o + \tau_i(\xi,\eta) \;, \qquad (124.3)$$

где $\tau_o=\langle\tau(\xi,\eta)\rangle$, $\langle\tau_i(\xi,\eta)\rangle=0$, $\sigma^2= \langle\tau^2(\xi,\eta)\rangle-\tau_o$.

Для корреляционной функции однородного случайного фильтра получим:

$$G(\xi-\xi',\eta-h')= \langle\tau(\xi,\eta)\tau^*(\xi',\eta')\rangle = \tau_o^2 + \sigma^2 K(\xi-\xi',\eta-\eta') \;,$$

где $K(\xi,\eta)$ – корреляционная функция для пропускания $\tau_1(\xi,\eta)$.
Усредненная ОПФ системы "линза+транспарант" будет равна:

$$\langle H(x,y)\rangle = \langle(H_o\tau)*(H_o^*\tau^*)\rangle = H_o(x,y)G(x,y) \;. \qquad (124.4)$$

Из (I24.4) видно, что усредненная ОПФ равна произведению ОПФ линзы без транспаранта на корреляционную функцию пропускания транспаранта. Используя (I24.3), можно проанализировать как случайный транспарант искажает изображение.

5. Частично когерентное изображение

Рассмотрение случайных полей позволяет органично перейти к рассмотрению более общего случая световых полей с частичной когерентностью или изображений источников частично когерентного света.

Введем некоторые предварительные понятия. Поле от частично когерентного источника света по-прежнему описывается комплексной амплитудой в точке пространства P и в момент времени t : $U(P,t)$.
Это световое поле обладает некоторой спектральной плотностью, которая имеет ширину, равную спектру излучения источника – $\Delta\nu$:

$$U(P,\nu) = \int_0^\infty U(P,t)\, e^{-2\pi i\nu t}\, dt \quad . \tag{125}$$

Если ширина спектра $\Delta\nu$ много меньше средней частоты излучения $\bar{\nu}$:

$$\Delta\nu \ll \bar{\nu} \quad , \qquad \bar{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \nu\, U(P,\nu)\, d\nu \quad ,$$

то говорят, что световое поле – квазимонохроматическое, и все предыдущие формулы верны для такого поля, если заменить волновой вектор k или длину волны λ на их средние значения : $\bar{k}$ или $\bar{\lambda}$.

Если ввести понятие временной когерентности светового поля τ_c как временной задержки , в течение которой поле остается полностью когерентным, то она оказывается обратно пропорциональной ширине спектра поля:

$$\tau_c \approx 1/\Delta\nu \quad , \tag{126}$$

т.е. чем уже частотный спектр светового излучения, тем большее время в данной точке поле остается когерентным (ниже будут введены эти понятия более формально).

Функция взаимной когерентности определяется как усредненное по статистически подобным реализациям произведение амплитуд поля в разных точках пространства и в разные моменты времени:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle U(P_1, t+\tau)\, U^*(P_2, t) \rangle \quad . \tag{127}$$

Вводится также нормированная функция когерентности, которую называют комплексной степенью когерентности:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\, \Gamma_{22}(0)}} \quad , \tag{128}$$

$0 \le \gamma_{12} \le 1$. При $\gamma_{12} = 1$ – свет называется полностью когерентным, а при $\gamma_{12} = 0$ – свет полностью некогерентный. Реальные световые поля находятся в промежутке между этими двумя идеальными состояниями. Если формально ввести понятие временной когерентности как

$$\tau_c = \int_0^\infty |\gamma_{12}(\tau)|^2 \, d\tau \quad .$$

то для полностью когерентного света время когерентности будет бесконечно большим: $\tau_c \to \infty$, а для полностью некогерентного света : $\tau_c = 0$. Для квазимонохроматического света, который мы будем рассматривать в дальнейшем, выражения (I27) и (I28) принимают вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= J_{12}\, e^{-2\pi i \bar{\nu} \tau} , \\ \gamma_{12}(\tau) &= \mu_{12}\, e^{-2\pi i \bar{\nu} \tau} , \end{aligned} \tag{129}$$

где $J_{12} = \Gamma_{12}(0) = \langle U(P_1, t)\, U^*(P_2, t) \rangle$ – взаимная интенсивность и $\mu_{12} = \gamma_{12}(0)$ – комплексный коэффициент когерентности.

Нетрудно показать, что уравнения для распространения взаимной интенсивности аналогичны уравнению Гельмгольца (3):

$$\nabla_1^2 J_{12} + \bar{k}^2 J_{12} = 0 \quad , \quad \nabla_2^2 J_{12} + \bar{k}^2 J_{12} = 0 \quad , \qquad (130)$$

где ∇_1^2, ∇_2^2 – лапласианы в точках P_1 и P_2 соответственно. Следовательно, в параксиальном приближении для функции взаимной интенсивности можно записать уравнение распространения через преобразование Френеля (62) :

$$U(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x',y')\, h(x-x',\, y-y')\, dx'dy' \ ,$$

$$h(x,y) = k/z \exp\left[ik(x^2+y^2)/2z\right] \ .$$

$$J(x,y;x',y') = \langle U(x,y,z)U^*(x',y',z)\rangle =$$

$$= \iiiint_{-\infty}^{\infty} J_0(\xi,\eta;\xi',\eta')h(x-\xi,y-\eta)h^*(x'-\xi',y'-\eta')d\xi d\eta d\xi' d\eta' \ , \qquad (131)$$

где $J_0(\xi,\eta,\xi',\eta')$ – функция взаимной интенсивности в плоскости $z=0$. Из (131) видно, что уравнение распространения для функции взаимной интенсивности квазимонохроматического света совпадает с уравнениями для корреляционной функции случайного поля (94), (95). Поэтому можно сделать вывод, что световое поле, порожденное пространственным источником частично-когерентного квазимонохроматического света, описывается так же, как случайное световое поле, сформировавшееся после отражения когерентного монохроматического света от шероховатой поверхности.

Теорема Ван-Циттерта-Цернике для частично-когерентного света формулируется следующим образом. Пусть исходное поле - чисто некогерентное, то есть взаимная интенсивность при $z=0$ имеет вид:

$$J_0(\xi,\eta;\xi',\eta') = I(\xi,\eta)\,\delta(\xi-\xi')\,\delta(\eta-\eta') \,. \qquad (132)$$

Подставив (I32) в (I3I), получим

$$J(x,y;x',y') = \frac{k^2}{z^2}\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} I(\xi,\eta)\delta(\xi-\xi')\delta(\eta-\eta') \,*$$

$$*\; e^{ik[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]/2z}\, e^{-ik[(\xi'-x')^2+(\eta'-y')^2]/2z}\, d\xi\, d\eta\, d\xi'\, d\eta' =$$

$$= \frac{k^2}{z^2}\, e^{ik[(x^2-x'^2)+(y^2-y'^2)]/2z} \,*$$

$$*\iint\limits_{-\infty}^{\infty} I(\xi,\eta)\, e^{ik[\xi(x-x')+\eta(y-y')]}\, d\xi\, d\eta \,. \qquad (133)$$

Итак, взаимная интенсивность света на расстоянии z от источника полностью некогерентного света равна, с точностью до экспоненциального фазового множителя, Фурье-образу от распределения интенсивности по источнику.

Рассмотрим далее дифракцию частично-когерентного света на транспаранте (рис. I4) [8]. Получим выражение для средней интенсивности на расстоянии z от транспаранта в параксиальном приближении. Функция взаимной интенсивности на выходе транспаранта J_t связана с взаимной интенсивностью на входе J_i

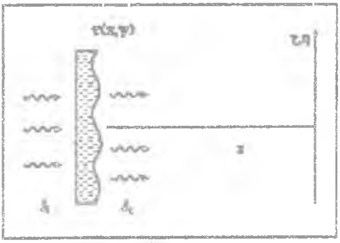

Рис.I4

очевидным соотношением

$$J_t(x,y,x',y') = \tau(x,y)\tau^*(x',y')\, J_i(x,y,x',y') \quad , \qquad (134)$$

где $\tau(x,y)$ – комплексная функция пропускания транспаранта.

Далее можно записать

$$I(\xi,\eta) = \frac{k^2}{z^2}\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} J_t(x,y,x',y')h(x-\xi,y-\eta)h^*(x'-\xi,y'-\eta)dxdydx'dy' =$$

$$(135)$$

$$=\frac{k^2}{z^2}\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} J_i(x,y,x',y')\tau(x,y)\tau^*(x',y')h(x-\xi,y-\eta)h^*(x'-\xi,y'-\eta)dxdydx'dy'.$$

Если размер источника D много больше площади когерентности $S_c = \pi r_c^2$, r_c – радиус когерентности поля, который равен его радиусу корреляции r_k , то источник называется квазиоднородным, и его взаимная интенсивность представима через коэффициент когерентности в виде

$$J_i(x,y,x',y') = A(x,y)A^*(x',y')\mu_i(x-x',y-y') \approx$$

$$\approx I(\Sigma_x , \Sigma_y)\, \mu_i(\Delta_x , \Delta_y) \quad . \qquad (136)$$

Суммарно-разностные переменные. Σ и Δ были введены ранее. Пусть яркость источника света постоянная , т.е. $I(\Sigma_x , \Sigma_y) = I_o$, тогда вместо (135) получим

$$I(\xi,\eta) = I_o(k/z)^2\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\Sigma_x-\Delta_x/2 ,\Sigma_y-\Delta_y/2)\, \tau^*(\Sigma_x+\Delta_x/2 ,\Sigma_y+\Delta_y/2)\, *$$

$$* \mu_i(\Delta_x,\Delta_y)\, \exp\left[i\frac{k}{z}(\xi\Delta_x + \eta\Delta_y - \Sigma_x\Delta_x - \Sigma_y\Delta_y)\right] d\Delta_x d\Delta_y d\Sigma_x d\Sigma_y \quad . \qquad (137)$$

Чтобы пренебречь зависимостью в показателе экспоненты в (I37) от суммарных аргументов,надо потребовать выполнения неравенств

$$\frac{2\pi}{\lambda z}\Sigma_x\Delta_x < \pi/2 \quad , \quad \frac{2\pi}{\lambda z}\Sigma_y\Delta_y < \pi/2 \qquad \text{или}$$

$$z > 2Dd_c/\lambda \quad , \tag{138}$$

где D - диаметр апертуры транспаранта, d_c - диаметр зоны когерентности излучения.

При условии (I38) вместо (I37) получим

$$I(\xi,\eta) = I_0(k/z)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} W(\Delta_x,\Delta_y)\,\mu_i(\Delta_x,\Delta_y)\, e^{ik(\xi\Delta_x+\eta\Delta_y)/z}\, d\Delta_x d\Delta_y , \tag{139}$$

где

$$W(\Delta_x,\Delta_y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\Sigma_x-\Delta_x/2,\ \Sigma_y-\Delta_y/2)\,\tau^*(\Sigma_x+\Delta_x/2,\ \Sigma_y+\Delta_y/2)\, d\Sigma_x d\Sigma_y ,$$

$W(x,y)$- функция автокорреляции пропускания транспаранта. Выражение (I39) составляет содержание теоремы Шелла и означает, что средняя интенсивность частично-когерентного света на расстоянии z от транспаранта равна Фурье-образу от комплексного коэффициента когерентности в плоскости $z=0$, умноженного на функцию автокорреляции пропускания объекта. Условие (I38) означает, что если $d_c > D$, то $z > 2D^2/\lambda$, и плоскость наблюдения находится в зоне Фраунгофера (в дальней зоне) для апертуры всего объекта. Если $d_c < D$, то $z > 2Dd_c/\lambda$, и плоскость наблюдения находится в дальней зоне для каждой ячейки когерентности источника.

Рассмотрим два частных случая, следующих из формулы (I39).

I. При когерентном освещении объекта $\mu_i(\Delta_x,\Delta_y) = I_0$, тогда

имеет место условие $d_c > D$, и получим формулу для распределения интенсивности когерентного света в дальней зоне дифракции

$$I(\xi,\eta) = I_o(k/z)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} W(\Delta_x,\Delta_y)\, e^{ik(\xi\Delta_x+\eta\Delta_y)/z}\, d\Delta_x d\Delta_y =$$

$$=I_o(k/z)^2 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x,y)\, e^{ik(x\xi+y\eta)/z}\, dxdy \right|^2 . \qquad (140)$$

2. В другом крайнем случае при полностью некогерентном освещении объекта $d_c \ll D$, тогда ширина функции автокорреляции объекта S_w пропорциональна D, а ширина коэффициента когерентности μ_1 пропорциональна d_c, т.е. $W \approx D^2$ и вместо (I39) получим

$$I(\xi,\eta) = I_o\pi D^2(k/z)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \mu_1(\Delta_x,\Delta_y)\, e^{ik(\xi\Delta_x+\eta\Delta_y)/z}\, d\Delta_x d\Delta_y \quad . \qquad (141)$$

В промежуточном случае выражение (I39) в частотных обозначениях можно переписать в виде свертки

$$I(x,\eta) = \mathrm{const}\; \mathbb{F}_w \circledast \mathbb{F}_\mu \quad , \qquad (142)$$

где $\mathbb{F}_w$, $\mathbb{F}_\mu$ – Фурье-образы автокорреляции объекта и коэффициента когерентности, $\circledast$ – знак интеграла свертки. Заметим, что $\mathbb{F}_w = |\tau(x,y)|^2$.

Получим далее выражение для взаимной интенсивности в фокусе линзы. Опять предполагаем, что свет квазимонохроматический : $\Delta\nu \ll \bar{\nu}$. Распространение взаимной интенсивности до линзы,расположенной на фокусном расстоянии f от источника частично-когерентного света, описывается преобразованием Френеля (поясняющая схема показана на рис.I5):

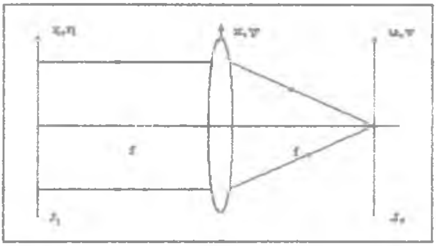

Рис. I5

$$J_z(x,y,x',y') = (k/f)^2 * e^{-i\frac{k}{2f}[(x'^2+y'^2)-(x^2+y^2)]} * \iiiint_{-\infty}^{\infty} J_0'(\xi,\eta,\xi',\eta') * e^{-i\frac{k}{2f}[(\xi'^2+\eta'^2)-(\xi^2+\eta^2)]} * e^{i\frac{k}{f}(x'\xi'+y'\eta'-x\xi-y\eta)} d\xi d\eta d\xi' d\eta' . \quad (143)$$

После прохождения светом линзы, согласно (I34), получим

$$J_z'(x,y,x',y') = J_z(x,y,x',y') \exp\left[\frac{ik}{2f}(x'^2+y'^2-x^2-y^2)\right] . \quad (144)$$

В фокальной плоскости линзы взаимная интенсивность рассчитывается как результат преобразования Френеля от взаимной интенсивности J_z' :

$$J_f(u,v,u',v') = (k/f)^2 e^{i\frac{k}{2f}(u'^2+v'^2-u^2-v^2)} * \iiiint_{-\infty}^{\infty} J_z(x,y,x',y') e^{i\frac{k}{f}(u'x'+v'y'-ux-yv)} dxdydx'dy' . \quad (145)$$

Вычислим промежуточный интеграл:

$$S = \iiiint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2f}(x'^2+y'^2-x^2-y^2)} e^{i\frac{k}{f}[x'(\xi'+u') + y'(\eta'+v')]} .$$

$$* \, e^{-i\frac{k}{f}\left[x(\xi+u)+y(\eta+v)\right]} dxdydx'dy' = (2\pi f/k)^2 \, *$$

$$* \exp\left[\frac{ik}{2f}(\xi'+u')^2+(\eta'+v')^2-(\xi+u)^2-(\eta+v)^2\right]. \qquad (146)$$

Подставив (I43), (I46) в (I45), окончательно получим

$$J_f(u,v,u',v') = (k/f)^2 \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} J_0'(\xi,\eta,\xi',\eta') \, *$$

$$* \exp\left[\frac{ik}{f}(\xi'u' + \eta'v' - \xi u - \eta v)\right] d\xi d\eta d\xi' d\eta' \qquad (147)$$

Итак, взаимные интенсивности частично-когерентного света на плоскостях входа и выхода Фурье-анализатора (рис. I5) связаны четырехмерным преобразованием Фурье. Сравните формулу (I47) с формулой (96).
Условие квазимонохроматичности света, т.е. условие того, что максимальная разность хода двух лучей в системе будет много меньше, чем длина когерентности света, записывается в виде

$$D_0 D_f/f \ll l_c \qquad , \qquad (148)$$

где $l_c = \tau_c c$ – длина когерентности света, c – скорость света, τ_c – – время когерентности света, D_0 и D_f – линейные размеры источника в плоскости объекта и области пространственного спектра в фокальной плоскости линзы соответственно.

Из (I47) легко получить выражение для средней интенсивности света в фокальной плоскости линзы для источника частично-когерентного света

$$I_f(u,v) = J_f(u=u',v=v') = (k/f)^2 \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} J_0'(\xi,\eta,\xi',\eta') \, *$$

$$* \exp\left[ik/f \ \{ \ u(\xi'-\xi) + v(\eta'-\eta) \ \} \right] d\xi d\eta d\xi' d\eta' \ . \qquad (149)$$

Если источник света однородный

$$J_o'(\xi,\eta,\xi',\eta') = I_o \mu_o(\xi'-\xi,\eta'-\eta) \quad .$$

то вместо (I49) можно записать

$$I_f(u,v) = I_o S_o (k/f)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mu_o(x,y) \ e^{ik(xu+yv)/f} \ dxdy \quad , \qquad (150)$$

где S_o – площадь источника, I_o – постоянная интенсивность излучения источника. Итак, средняя интенсивность частично-когерентного света в фокусе линзы пропорциональна двухмерному Фурье-преобразованию от комплексного коэффициента когерентности однородного источника. Сравните формулы (I50) и (I04) и формулы (I50) и (I33).

Получим далее выражения для функций взаимной интенсивности и средней интенсивности для частично-когерентного света в плоскости изображения (оптическая схема такая же, как на рис. 5).

Перепишем формулы (I43)-(I45), только вместо фокусного расстояния будем использовать расстояние от источника до линзы a и расстояние от линзы до источника b, удовлетворяющие уравнению для тонкой линзы $a^{-1} + b^{-1} = f^{-1}$. Итак, до линзы :

$$J_z(x,y,x',y') = (k/a)^2 \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} J_o'(\xi,\eta,\xi',\eta') \ * \qquad (151)$$

$$* \exp\left[ik/2a \ \{ (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - (x'-\xi')^2 - (y'-\eta')^2 \} \right] d\xi d\eta d\xi' d\eta' .$$

После линзы:

$$J_z'(x,y,x',y') = J_z(x,y,x',y') \ e^{-i\frac{k}{2f}[(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)]} \quad . \qquad (152)$$

В плоскости изображения

$$J_i(u,v,u',v') = (k/b)^2 \iiiint_{-\infty}^{\infty} J_2'(x,y,x',y') \, *$$

$$* \exp\left\{ik/2b\left[(x-u)^2+(y-v)^2-(x'-u')^2-(y'-v')^2\right]\right\} dxdydx'dy' \; . \qquad (153)$$

Подставив (I5I) и (I52) в (I53) и воспользовавшись уравнением линзы (64), получим

$$J_i(u,v,u',v') = \iiiint_{-\infty}^{\infty} J_o'(\xi,\eta,\xi',\eta')\, \Omega(u,v,\xi,\eta) \, *$$

$$* \, \Omega^*(u',v',\xi',\eta') \, d\xi d\eta d\xi' d\eta' \; . \qquad (154)$$

где $\Omega(u,v,\xi,\eta) = k^2/ab \; e^{ik(\xi^2+\eta^2)/2a} \; e^{ik(u^2+v^2)/2b} \, *$

$$* \iint_{-\infty}^{\infty} P(x,y) \; e^{-ik\,[x(u+b\xi/a) + y(v+b\eta/a)]/b} \, dxdy \qquad (155)$$

- функция импульсного отклика линзы, отличающаяся от (72) тем, что в нее включены факторы параболической волны (сравните выражения (I54), (7I) и (II8)). Условие квазимонохроматичности, при котором верна эта формула, имеет вид

$$\frac{D_o^2}{4a} + \frac{D_i^2}{4b} \ll l_c \; , \qquad (156)$$

где D_o и D_i - линейные размеры источника и его изображения.

Неравенство (156) получено при условии, что максимальная разность хода двух лучей в системе много меньше длины когерентности (сравните условие (156) с условием (148)).

Из (155) легко получить выражение для средней интенсивности в плоскости изображения частично-когерентного источника света:

$$I_i(u,v) = J_i(u=u',v=v') = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} J_o(\xi,\eta,\xi',\eta') *$$

$$* \, \Omega(u,v,\xi,\eta)\, \Omega^*(u,v,\xi',\eta')\, d\xi d\eta d\xi' d\eta' \quad . \qquad (157)$$

Пусть в объектной плоскости находится транспарант с функцией пропускания $\tau_o(\xi,\eta)$, который освещается частично-когерентным светом с функцией взаимной интенсивности $J_o(\xi,\eta,\xi',\eta')$. Тогда вместо (157) можно записать

$$I_i(u,v) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_o(\xi,\eta)\tau^*_o(\xi',\eta')J_o(\xi,\eta,\xi',\eta')\Omega(\xi,\eta,u,v) *$$

$$* \, \Omega^*(\xi',\eta',u,v)\, d\xi d\eta d\xi' d\eta' \quad . \qquad (158)$$

Заметим, что формулы (155) и (158) верны для любой оптической системы, а не только для тонкой линзы. При этом следует иметь в виду, что функция Ω уже является функцией импульсного отклика не линзы, а произвольной оптической системы.

Рассмотрим предельные случаи для степени когерентности света.

I. Пусть объект освещается полностью некогерентным светом

$$J_o(\Delta_\xi,\Delta_\eta) = I_o\delta(\xi-\xi')\delta(\eta-\eta') \quad ,$$

и пусть оптическая система является изопланатической (пространственно-инвариантной)

$$\Omega(\xi,\eta,u,v) = \Omega(\xi-u,\eta-v) \quad ,$$

тогда вместо (I58) получим

$$I_1(u,v) = I_o \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\tau_o(\xi,\eta)|^2 |\Omega(\xi-u,\eta-v)|^2 d\xi\, d\eta \quad , \qquad (159)$$

где

$$I_o\ |\tau(\xi,\eta)|^2\ - \qquad ;$$

- интенсивность на объекте, $|\Omega(x,y)|^2$ - интенсивность функции размытия точки. Из (I59) видно, что некогерентная оптическая система линейна по интенсивности.

Передаточная функция некогерентной оптической системы, таким образом, равна Фурье-преобразованию от функции интенсивности импульсного отклика:

$$H(\alpha,\beta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\Omega(x,y)|^2\, e^{2\pi i(\alpha x+\beta y)}\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\xi,\eta)\ P^*(\xi-\alpha,\eta-\beta)\ d\xi\, d\eta \quad , \qquad (160)$$

где $P(\xi,\eta)$ - функция зрачка оптической системы.

Из (I60) видно, что частотно-передаточная функция некогерентной оптической системы равна свертке функции зрачка. Сравните выражение (I60) с формулой (86) для передаточной функции когерентной системы.

2. Полностью когерентное освещение объекта

$$J_o(\xi,\eta) = I_o$$

приводит к следующей формуле для интенсивности изображения:

$$I_1(u,v) = I_o\ \left| \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_o(\xi,\eta)\ \Omega(u-\xi,v-\eta)\ d\xi\, d\eta\ \right|^2 . \qquad (161)$$

Формула (161) обычна для когерентных оптических систем (сравните ее с формулой (74)). Она показывает, что когерентная система линейна по амплитуде, в отличие от некогерентной оптической системы, которая линейна по интенсивности.

Таким образом, понятно, что рассмотрение таких идеальных систем, как полностью когерентная и полностью некогерентная, удобно из-за линейности таких систем (по амплитуде или по интенсивности), хотя реальные частично-когерентные световые поля и оптические системы описываются нелинейными соотношениями, которые и затрудняют их всесторонний анализ.

В данном пособии мы привели только основные интегральные соотношения, связывающие характеристики световых полей на разных плоскостях в пространстве и в оптической системе, без которых нельзя обойтись при анализе конкретных оптических систем.

Библиографический список

1. Зверев В.А. Радиооптика. М.: Сов. радио, 1975.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике . М.: Наука, 1968.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.Л. Теория волн. М.: Наука, 1979.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
5. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970.
6. Бакут П.А., Мандросов В.И., Матвеев Н.И., Устинов Н.Д. Теория когерентных изображений. М.: Радио и связь, 1987.
7. Ахманов С.А., Дьяков Ю.С., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1984.
8. Гудмен Дж. Статистическая оптика. М.: Мир, 1988.

ОГЛАВЛЕНИЕ

К о т л я р Виктор Викторович

ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Редактор Е. Д. А н т о н о в а
Тех.редактор Г. А. У с а ч е в а
Корректор Н. С. К у п р и я н о в а

Подписано в печатьI3.07.93.Формат 60x84 I/I6.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. п. л. 3,25. Усл. кр.-отт. 3,37. Уч.-изд. л. 3,0.
Тираж 60 экз. Заказ 398/56. Арт. С - 26/93.

Научно-производственный центр "Авиатор".
44300I Самара, ул. Ульяновская, I8.

Участок оперативной полиграфии НПЦ "Авиатор".
44300I Самара, ул. Ульяновская, I8