

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА»**

В.В. ДМИТРИЕВ

**ФОРМИРОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ**

САМАРА 2005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В.В. ДМИТРИЕВ

ФОРМИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ
СВОЙСТВ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

САМАРА 2005

УДК 539.3 (075)

Дмитриев В.В. Формирование динамических свойств упругих конструкций: Учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. - Самара, 2005. - 72 с.

ISBN 5-7883-0336-2

Приведена методика расчета параметров колебаний упругих конструкций и формирования распределенных жесткостных и массовых характеристик, доставляющих требуемые собственные формы и частоты. В качестве расчетной модели рассматривается упругая балка с прямолинейной продольной осью и балка, состоящая из ряда прямолинейных участков сопряженных под произвольными углами.

Предназначено для выполнения расчетных работ по курсу "Динамика упругого тела", может быть использовано при решении прикладных инженерных задач, связанных с динамикой упругих конструкций.

Табл. 5. Ил. 15.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета.

Рецензенты: заместитель начальника отдела ЦСКБ,
канд. техн. наук Н.Н. Скалчихин,
канд. техн. наук, доц. В.П. Пересыпкин

ISBN 5-7883-0336-2

© В.В. Дмитриев, 2005.
© Самарский государственный
аэрокосмический университет,
2005.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Блок-схема формирования динамических свойств упругих конструкций.....	5
2. Уравнения колебаний упругой балки. Уравнения форм и частот.....	10
3. Определение собственных форм и частот упругих колебаний балки методом начальных параметров.....	16
3.1. Изгибные колебания	16
3.2. Продольные и крутильные колебания	23
3.3. Изгибно-продольные и изгибно-крутильные колебания.....	24
3.4. Вычисление приведенных масс.....	33
4. Расчет параметров упругих колебаний балки	35
5. Алгоритм расчета оптимального закона распределения жесткости в случае изгибных колебаний балки.....	39
6. Алгоритм расчета оптимального закона распределения жесткости в случае крутильных или продольных колебаний балки.....	45
7. Формирование законов распределений жесткости балки в случае изгибно-продольных или изгибно-крутильных колебаний.....	46
Список литературы.....	47
Приложение А. Формулы для вычисления жесткости, погонной массы и моментов инерции в сечениях балки.....	48
Приложение Б. Уравнения движения упругой балки в случае приложения распределенной системы внешних сил и моментов.....	57
Приложение С. Задание коэффициента демпфирования.....	65

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития техники, характеризующемся стремлением к созданию наиболее экономичной и наименее материалоемкой продукции, достаточно часто возникают проблемы, связанные с колебаниями упругой конструкции. Недостаточная проработанность вопросов по параметрам упругих колебаний конструкции на стадии проектирования приводит к тому, что в период отработки и сдачи в эксплуатацию возникает необходимость дополнительных изменений в конструкции, приводящих к увеличению времени разработки или к изменению основных характеристик продукции, снижающих её потребительские свойства.

В то же время развитие вычислительной техники позволяет проводить моделирование многих достаточно сложных механических процессов с целью выявления основных динамических свойств, удовлетворяющих или не удовлетворяющих заданным требованиям по тем или иным параметрам. При анализе упругих конструкций наиболее часто возникают проблемы, связанные с резонансными явлениями, уровнем ускорений или амплитуд колебаний на отдельных элементах конструкции или необходимостью ограничений упругих перемещений при данной системе внешних сил.

В этой связи актуальными задачами являются задачи анализа колебаний упругих конструкций и задачи синтеза параметров этих конструкций, соответствующих наиболее ранним этапам проектирования. Вопрос создания требуемых динамических свойств, в принципе, сводится к выбору или формированию распределений жесткости и массы по упругой конструкции, при которых данная упругая система имеет требуемые собственные частоты или формы колебаний отдельного тона (моды колебаний) или ряда тонов. Ниже рассматриваются задачи расчета параметров упругих колебаний прямолинейных балок и формирования требуемых собственных частот и форм такого класса балок с неоднородным распределением жёсткости и массы, а также балок, продольная ось которых не прямолинейна. Данное пособие предназначено для выполнения расчетных работ по курсу "Динамика упругого тела", может быть использовано при дипломном проектировании и при решении прикладных инженерных задач, связанных с динамикой упругих конструкций.

1 БЛОК-СХЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

При проектировании конструкции с требуемыми динамическими свойствами требуется выполнить ряд последовательных операций. На рис. 1.1 представлена укрупнённая блок-схема, отражающая основные операции и этапы такого процесса.

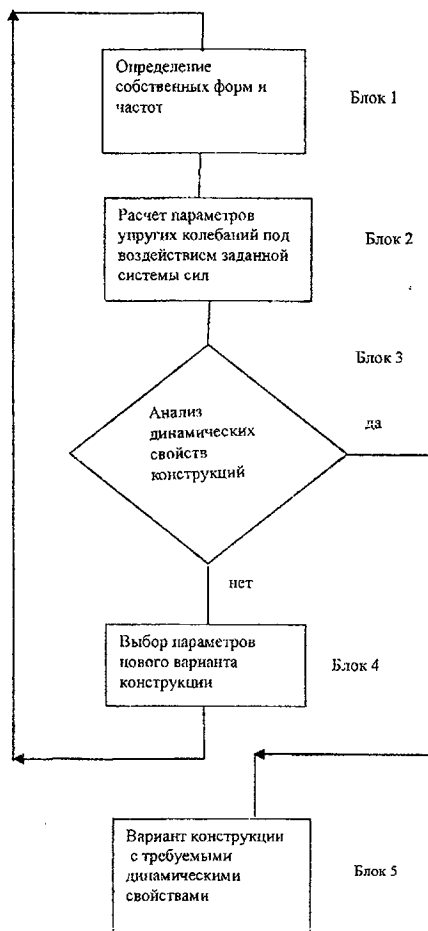


Рис. 1.1. Блок-схема процесса формирования требуемых динамических свойств упругой конструкции

Необходимо отметить, что этапу анализа динамических свойств упругой конструкции практически всегда предшествует появление некоторого предварительного варианта этой конструкции, полученного в результате предыдущих этапов проектирования. В данном варианте конструкции нашли отражение все основные решения по выбору конструктивно-компоновочных параметров, определяющих первоначальное распределение жесткостных и массовых характеристик. В частности, если в качестве расчетной модели принята балка, то это будут: длина балки, площадь поперечных сечений, материал, распределение масс в силовой части конструкции, граничные условия и система внешних нагрузок в виде распределений пассивных масс, сил и моментов.

Рассмотрим содержание работ по отдельным блокам процесса формирования динамических свойств.

В блоке 1, с использованием определенных для первоначального варианта распределенных масс и жесткостей, решается задача по определению собственных частот ω_i и собственных форм $f_i(x)$ для изгибных, $u(x)$ для продольных и $\varphi(x)$ для крутильных колебаний балки, характеризующих распределение амплитуд упругих колебаний по длине балки.

Кроме этого, в процессе решения данной задачи находятся:

$$f_i'(x) = \frac{df_i(x)}{dx} \quad - \text{производная формы изгибных колебаний};$$

$M_i(x) = EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2}$ – функция, характеризующая распределение изгибающего момента;

$$Q_i(x) = \frac{dM_i(x)}{dx} \quad - \text{функция, характеризующая распределение}$$

перерезывающей силы;

$$M_{kpi}(x) = GJ_p(x) \frac{df_i(x)}{dx} \quad - \text{функция, характеризующая}$$

распределение крутящего момента;

$N_i(x) = EF(x) \frac{df_i(x)}{dx}$ – функция, характеризующая распределе-

ние продольной силы.

Здесь $x \in [0, l]$, l – длина балки;

E – модуль упругости материала силовой части конструкции на растяжение (сжатие);

G – модуль упругости материала на кручение;

$J(x)$ – момент инерции сечения конструкции балки относительно поперечной оси, проходящей через нейтральную ось сечения;

$J_p(x)$ – полярный момент инерции сечения балки относительно продольной оси;

$F(x)$ – площадь поперечного сечения балки.

Данные константы и функции используются при анализе работы конструкции и оценке ее динамических свойств.

Количество определяемых собственных частот ω_i , где i – номер тона (или моды) колебаний, и соответствующих им собственных форм колебаний зависит от рассматриваемого диапазона частот в конкретном исследовании. Для балок это обычно находится в пределах первых пяти тонов.

В случае, если первоначальный вариант конструкции балки представлен только геометрическими характеристиками и материалом силовой части конструкции, необходимо вычислить соответствующие этому варианту распределения:

$m(x)$ – погонной массы, кг/м;

$j_p(x)$ – погонного полярного момента инерции массы относительно продольной оси, кгм²;

$EJ(x)$ – изгибной жесткости, Нм²;

$EF(x)$ – продольной жесткости, Н;

$GJ_p(x)$ – крутильной жесткости, Нм².

Примечания: 1. Формулы для вычисления массовых и жесткостных характеристик различного типа сечений балок приведены в приложении А 2. Методика определения собственных частот и форм упругих колебаний балки приведена в разд. 3.

В блоке 2, с учетом известных собственных частот и форм колебаний, составляется система дифференциальных уравнений движения упругой балки для выбранного количества тонов i и заданного распределения внешних сил P_k и моментов M_t , которая, например для изгибных колебаний, записывается в следующем виде (см. приложение Б и [1]):

$$M_{npi}(\ddot{q} + n\dot{q} + \omega^2 q) = \sum P_k f(x) + \sum M_t f'(x), \quad (1.1)$$

где k – число внешних сил;

t – число внешних моментов;

ω_i – собственная частота i -го тона колебаний балки;

q_i – обобщенная координата, характеризующая колебания балки с $f_i(x)$ формой;

M_{npi} – приведенная масса для i -го тона колебаний,

$$M_{npi} = \int_0^l m(x) f_i^2(x) dx;$$

n_i – коэффициент демпфирования, характеризующий рассеяние механической энергии колебаний;

$f_i(x_p)$ – значение формы i -го тона колебаний в месте приложения k -й силы;

$f_i(x)$ – значение производной от формы i -го тона колебаний в месте приложения t -го момента.

После составления системы уравнений находится её решение. В зависимости от характера приложения внешних сил и моментов и законов изменения их во времени возможны разные методы определения параметров колебаний упругой конструкции. В частности, универсальным методом является метод численного интегрирования (см. разд. 5) по каждой внешней силе и каждому внешнему моменту с последующим суммированием всех составляющих. В некоторых частных случаях приложения нагрузок (см. разд. 5) возможно нахождение аналитических решений, которые при наличии нескольких внешних сил, действующих одновременно, также должны суммироваться.

При действии внешних сил, изменяющихся по гармоническому закону, для оценки резонансных амплитуд и фаз колебаний существуют конечные формулы (см. разд. 4). Необходимо отметить, что в случае резонансных режимов движения упругой конструкции все особенности поведения конструкции обусловлены степенью близости частоты вынуждающей силы и собственных частот упругой конструкции, а также уровнем рассеяния энергии упругих колебаний. Для упругих конструкций на стадии первоначальных проектных работ, в расчетах и при формировании основных параметров конструкции в большинстве случаев применяется гипотеза вязкого трения, когда учет демпфирования осуществляется в приведенном в системе (1.1) виде. Применение такого подхода для систем с малым демпфированием приводит к вполне оправданным результатам. Более подробно методы учета рассеяния энергии упругих колебаний и способы задания коэффициента демпфирования приведены в приложении С.

В блоке 3 проводится анализ полученных результатов, сравнение их с требуемыми или допустимыми. При положительных результатах анализа-выход в блок 5. В случае неудовлетворительных результатов-выявление путей, определяющих достижение требуемых характеристик и переход к поиску нового варианта конструкции.

Переход к работам по блоку 4 означает, что первоначальный вариант конструкции балки должен быть подвергнут определённым, но в минимальной степени необходимым изменениям, позволяющим получить требуемый результат.

В большинстве случаев требования предъявляются к собственным частотам, т.е. необходимости их смещения в области низких или более высоких частот или к ограничениям линейных или угловых перемещений в отдельных сечениях балки. Поиск требуемого варианта конструкции балки как системы с распределёнными параметрами возможен путём изменения распределения погонной массы или, наоборот, только жесткости, или некоторого компромисса между этими распределениями и, в принципе, не имеет однозначного решения. Однако требование минимальности изменений по отношению к первоначальному варианту конструкции приводит к более обусловленным вариантам и поэтому поиск варианта, удовлетворяющего всем ограничениям, может осуществляться с исполь-

зованием методов оптимизации характеристик упругих тел, получивших в настоящее время определённое развитие [4, 5, 6]. Ниже, в разд. 5, 6, 7 приводятся методика и алгоритмы выбора оптимальных распределённых параметров упругой балки с требуемой собственной частотой и требуемыми формами колебаний. Эти алгоритмы позволяют проводить расчёты по целенаправленному формированию параметров конструкции балки. В качестве проектного параметра используется жёсткость. После выбора варианта распределения жёсткости по длине балки и соответствующего уточнения распределения массы цикл работ повторяется с блока 1.

2. УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ. УРАВНЕНИЯ ФОРМ И ЧАСТОТ

Расчетная модель в виде упругой балки принимается для упругих тел, имеющих один размер (длину) значительно больший, чем поперечные размеры. При анализе колебаний балок используется ряд гипотез и допущений:

- продольная ось балки прямолинейная;
- должно быть достаточное удлинение балки (отношение длины балки к поперечному размеру $l/d > 5$);
- упругие перемещения малы;
- поперечные сечения в процессе колебаний остаются плоскими;
- перемещения геометрических центров тяжести поперечных сечений при изгибных колебаниях балки происходят перпендикулярно продольной оси балки;
- изгибные, продольные и крутильные колебания балки не связаны между собой и удовлетворяют принципу суперпозиции малых колебаний - упругие перемещения являются суммой главных гармонических колебаний.

Изгибные колебания

Уравнение изгибных колебаний балки, полученное из условия равновесия упругих внутренних усилий и сил инерции в сечении балки с координатой x , имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 . \quad (2.1)$$

В качестве решения этого уравнения может служить функция

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) f_i(x) , \quad (2.2)$$

где $f_i(x)$ – функция, зависящая только от x , называется формой колебаний и характеризует распределение амплитуд колебаний по длине балки ;

$q_i(t)$ – обобщённая координата, зависящая только от времени и характеризующая колебания некоторой точки конструкции, называемой точкой приведения, в которой значение $f_i(x)$ принято равным 1.

При свободных колебаниях балки $q_i(t) = \sin \omega_i t$, а решение (2.2) может быть представлено в виде

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \sin \omega_i t .$$

После подстановки (2.2) в (2.1) получим следующее уравнение форм и частот изгибных колебаний балки:



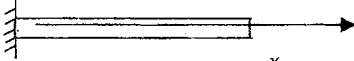
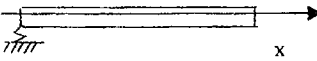
$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] - \omega_i^2 m(x) f_i(x) = 0 , \quad (2.3)$$

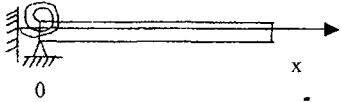
$$i=1,2,3,\dots,\infty.$$

Отсюда видно, что каждой собственной частоте ω_i соответствует конкретная функция $f_i(x)$, зависящая от распределений изгибной жёсткости $EJ(x)$ и погонной массы $m(x)$, кроме того, $f_i(x)$ должна удовлетворять условиям закрепления балки. В табл. 1 приведены наиболее часто встречающиеся расчетные случаи и соответствующие условиям закрепления балки граничные условия.

Примечание к табл. 1. Аналитические выражения граничных условий при $x=l$ для соответствующих условий закрепления записываются аналогично.

Таблица 1

Расчетная схема	Аналитическое выражение граничных условий при $x=0$
<p style="text-align: center;">$m(x)$ $EJ(x)$</p>  <p style="text-align: center;">0 x</p> <p>Конец балки свободен. Изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю</p>	$M = EJ \frac{d^2 f_i(0)}{dx^2} = 0 \quad \text{или} \quad f''_i(0) = 0$ $Q = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left[EJ(0) \frac{d^2 f_i(0)}{dx^2} \right] = 0$ <p style="text-align: center;">или $f'''_i(0) = 0$</p>
<p style="text-align: center;">$m(x)$ $EJ(x)$</p>  <p style="text-align: center;">0 x</p> <p>Конец балки шарнирно оперт. Прогиб и изгибающий момент равны нулю</p>	$f_i(0) = 0$ $f''_i(0) = 0$
<p style="text-align: center;">$m(x)$ $EJ(x)$</p>  <p style="text-align: center;">0 x</p> <p>Конец балки жестко закреплен. Прогиб и угол поворота сечения в точке закрепления равны нулю</p>	$f_i(0) = 0$ $f'_i(0) = 0$
<p style="text-align: center;">$m(x)$ $EJ(x)$</p>  <p style="text-align: center;">0 x</p> <p>Конец балки упруго закреплен. Прогиб равен перемещению точки опоры под действием перерезывающей силы. Изгибающий момент равен нулю</p>	$f_i(0) = \frac{Q(0)}{a} = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \left[EJ(0) \frac{d^2 f_i(0)}{dx^2} \right]$ $f'_i(0) = 0,$ <p style="text-align: center;">где a - коэффициент линейной жесткости опоры</p>

 <p data-bbox="157 306 497 455"> <i>Конiec балки упруго заделан. Прогиб равен нулю. Угол поворота сечения равен отношению изгибающего момента к жесткости опоры</i> </p>	$f_i(0) = 0,$ $f_i'(0) = \frac{M(0)}{k_\phi} = \frac{1}{k_\phi} \left[EJ(0) \frac{d^2 f_i(0)}{dx^2} \right],$ <p data-bbox="574 344 902 405"> <i>где k_ϕ - коэффициент угловой жесткости опоры в заделке</i> </p>
---	--

В случае неоднородного распределения $m(x)$ и $EJ(x)$ для нахождения собственных частот и форм колебаний балки применяются численные методы, в частности может быть применен метод начальных параметров в матричной форме [9]. В разд. 3 приведены расчетные формулы и алгоритм этого метода.

Продольные колебания

Продольные колебания балки происходят вследствие упругих растяжений и сжатий балки вдоль ее продольной оси, при этом сечения балки получают поступательные перемещения. Уравнение продольных колебаний балки, как результат равенства сил инерции в сечении с координатой x и приращения упругой продольной силы в этом же сечении, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EF(x) \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right] - m(x) \frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) так же, как и в случае изгибных колебаний балки, может быть представлено в виде бесконечной суммы произведений двух функций:

$$S(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) u_i(x), \quad (2.5)$$

где $u_i(x)$ – форма i -го тона колебаний,

$q_i(t)$ – обобщенная координата, определяющая перемещение сечения балки, принятого за точку приведения [$u_i(x)=1$].

В случае свободных колебаний $q_i(t)$ может быть представлена в виде $q_i(t)=\sin \omega_i t$, а решение (2.5) запишется в виде

$$S(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \sin \omega_i t \quad ,$$

и после подстановки в (2.4) получаем уравнения форм и частот в виде

$$\frac{d}{dx} \left[EF(x) \frac{d u_i(x)}{dx} \right] + \omega_i^2 m(x) u_i(x) = 0, \quad (2.6)$$

$$i=1,2,3,\dots,\infty.$$

Решение (2.6) при заданном распределении масс $m(x)$ и продольной жесткости $EF(x)$ должно удовлетворять соответствующим граничным условиям [см. табл. 2].

Крутильные колебания

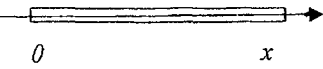
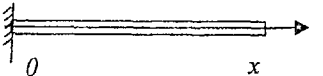
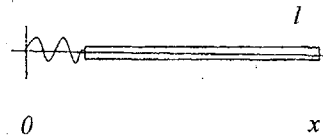
При крутильных колебаниях балки происходит поворот сечений относительно продольной оси балки, при этом на отдельных участках балки поворот происходит в одном направлении, например по часовой стрелке, а на других участках балки – в противоположном. Угол поворота сечения относительно продольной оси балки также зависит от двух координат x и t . Условие равновесия инерционных сил в некотором сечении и приращения упругого крутящего момента в этом же сечении приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_p(x) \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} \right] - j(x) \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.7)$$

Решение этого уравнения также может быть представлено в виде ряда

$$\Phi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \varphi_i(x) \quad , \quad (2.8)$$

Таблица 2

Расчетная схема и условия закрепления	Продольные колебания	Крутильные колебания
$m(x), EF(x), J(x), GF(x)$  Концы балки свободны	$\frac{du(0)}{dx} = 0,$ $\frac{du(l)}{dx} = 0$	$\frac{d\varphi(0)}{dx} = 0,$ $\frac{d\varphi(l)}{dx} = 0$
$m(x), EF(x), J(x), GF(x)$  Один конец балки закреплен, другой - свободен	$u(0) = 0,$ $\frac{du(l)}{dx} = 0$	$\varphi(0) = 0,$ $\frac{d\varphi(l)}{dx} = 0$
$m(x), EF(x), J(x), GF(x)$  На одном конце балки сосредоточенная упругость	$u(0) = \frac{P(0)}{K_x}$ $\frac{du(l)}{dx} = 0$ где K_x - коэффициент продольной жесткости в заделке	$\varphi(0) = \frac{M_k(0)}{K_l},$ $\frac{d\varphi(l)}{dx} = 0,$ где K_l - коэффициент крутильной жесткости в заделке

где $\varphi_i(x)$ – форма i -го тона колебаний, характеризующая распределение амплитуд и направление углов поворота сечений балки;

$q_i(t)$ – обобщенная координата, характеризующая угловые колебания сечения в точке приведения.

Уравнение (2.8) для случая свободных колебаний записывается в виде

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \sin \omega_i t$$

После подстановки (2.8) в (2.7) имеем уравнение форм и частот:

$$\frac{d}{dx} \left[GJ_p(x) \frac{d \varphi_i(x)}{dx} \right] + \omega_i^2 j(x) \varphi_i(x) = 0, \quad (2.9)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

Решение (2.9) должно удовлетворять соответствующим условиям закрепления на концах балки (см. табл. 2).

Анализ уравнений (2.3), (2.7), а также аналитических выражений для условий закрепления на концах балки показывает, что они по форме полностью идентичны, поэтому методика определения собственных форм и частот для этих видов колебаний одинакова и приведена в разд. 3.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ И ЧАСТОТ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

3.1. Изгибные колебания

Для поиска решения форм и частот (2.2) методом начальных параметров в матричной форме преобразуем формулу (2.3) к виду

$$f^{iv}(x) - k^4 f(x) = 0, \quad (3.1)$$

где $f^{iv}(x)$ – четвертая производная по x от функции $f(x)$,

$k^4 = \frac{\omega^2 m}{EJ}$ – в предположении, что на участке от 0 до x $m(x) = \text{const}$ и $EJ(x) = \text{const}$.

Примечания:

1. Здесь индекс i опущен, так как рассматривается решение в окрестности некоторого конкретного собственного тона.

2. Предполагаются известными и не равными нулю $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

Решение уравнения (3.1) ищется с использованием методов операционного исчисления. Для этого запишем изображение уравнения (3.1) в виде [2]

$$p^4 \left[Y(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} - \frac{f''(0)}{p^2} - \frac{f'''(0)}{p^3} \right] - k^4 Y(p) = 0, \quad (3.2)$$

где p – параметр преобразования по Карсону;

$Y(p)$ – изображение функции $f(x)$.

Из (3.2) имеем

$$Y(p) = f(0) \frac{p^4}{p^4 - k^4} + f'(0) \frac{p^3}{p^4 - k^4} + f''(0) \frac{p^2}{p^4 - k^4} + f'''(0) \frac{p}{p^4 - k^4},$$

Отсюда с учетом того, что

$$\frac{p^4}{p^4 - k^4} - \text{изображение функции } S(kx) = \frac{1}{2} (ch kx + \cos kx),$$

$$\frac{k^2 p^3}{p^4 - k^4} - \text{изображение функции } T(kx) = \frac{1}{2} (sh kx + \sin kx),$$

$$\frac{k^3 p^2}{p^4 - k^4} - \text{изображение функции } U(kx) = \frac{1}{2} (ch kx - \cos kx),$$

$$\frac{k^4 p}{p^4 - k^4} - \text{изображение функции } V(kx) = \frac{1}{2} (sh kx - \sin kx),$$

то решение уравнения (3.1) через функции Крылова $S(kx)$, $T(kx)$, $U(kx)$, $V(kx)$ можно записать в виде

$$f(x) = f(0) S(kx) + \frac{f'(0)}{k} T(kx) + \frac{f''(0)}{k^2} U(kx) + \frac{f'''(0)}{k^3} V(kx),$$

где

$$k = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 EJ}{m}}$$

Производные функций Крылова до 3-й производной приведены в табл. 3.

Таблица 3

Функции	Первая производная	Вторая производная	Третья производная
$S(kx)$	$kV(kx)$	$k^2U(kx)$	$k^3T(kx)$
$T(kx)$	$kS(kx)$	$k^2V(kx)$	$k^3U(kx)$
$U(kx)$	$kT(kx)$	$k^2S(kx)$	$k^3V(kx)$
$V(kx)$	$kU(kx)$	$k^2T(kx)$	$k^3S(kx)$

Можно получить зависимости, связывающие значения $f(x), f'(x), M(x), Q(x)$ с начальными условиями при $x=0$. С учетом того, что

$$M(x) = EJ(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = \frac{dM(x)}{dx},$$

а $M(0) = EJ(0)f''(0)$ и $f''(0) = \frac{M(0)}{EJ(0)}$ и $f'''(0) = \frac{Q(0)}{EJ(0)}$, эти

зависимости будут иметь вид

$$f(x) = f(0)S(kx) + f'(0)\frac{1}{k}T(kx) + \frac{M(0)}{EJ} \frac{1}{k^2}U(kx) + \frac{Q(0)}{EJ} \frac{1}{k^3}V(kx),$$

$$f'(x) = f(0)kV(kx) + f'(0)S(kx) + \frac{M(0)}{EJ} \frac{1}{k}T(kx) + \frac{Q(0)}{EJ} \frac{1}{k^2}U(kx),$$

$$M(x) = EJ f(0)k^2U(kx) + EJ f'(0)kV(kx) + M(0)S(kx) + \frac{Q(0)}{k}T(kx),$$

$$Q(x) = EJ f(0)k^3T(kx) + EJ f'(0)k^2U(kx) + M(0)kV(kx) + Q(0)S(kx).$$

В матричной форме эту систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(kx) & \frac{1}{k} T(kx) & \frac{1}{k^2 EJ} U(kx) & \frac{1}{k^3 EJ} V(kx) \\ kV(kx) & S(kx) & \frac{1}{k EJ} T(kx) & \frac{1}{k^3 EJ} V(kx) \\ EJk^2 U(kx) & EJkV(kx) & S(kx) & \frac{1}{k} T(kx) \\ EJk^3 T(kx) & EJk^2 U(kx) & kV(kx) & S(kx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

или

$$\eta(x) = A \eta(0). \quad (3.4)$$

Таким образом получено общее выражение, связывающее начальные параметры $f(0)$, $f'(0)$, $M(0)$, $Q(0)$ с соответствующими параметрами, характеризующими форму $f(x)$, производную от формы $f'(x)$, момент $M(x)$ и перерезывающую силу $Q(x)$ в сечении балки на расстоянии x от начала координат. При $x=l$ имеем

$$\eta(l) = A(l) \eta(0),$$

где матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} S(kl) & \frac{1}{k} T(kl) & \frac{1}{k^2 EJ} U(kl) & \frac{1}{k^3 EJ} V(kl) \\ kV(kl) & S(kl) & \frac{1}{k EJ} T(kl) & \frac{1}{k^2 EJ} U(kl) \\ EJk^2 U(kl) & EJkV(kl) & S(kl) & \frac{1}{k} T(kl) \\ EJk^3 T(kl) & EJk^2 U(kl) & kV(kl) & S(kl) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Матрицу (3.5) можно вычислить с использованием стандартных функций (процедур) для вычисления функций Крылова или следующих разложений функций $ch(kx)$, $sh(kx)$, $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ в ряд Тейлора:

$$\operatorname{sh}(kx) = 1 + \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} + \frac{(kx)^7}{7!} + \dots + \frac{(kx)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\operatorname{ch}(kx) = 1 + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^4}{4!} + \frac{(kx)^6}{6!} + \dots + \frac{(kx)^{2n}}{n!} + \dots,$$

$$\sin(kx) = kx - \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} - \frac{(kx)^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{(kx)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos(kx) = 1 - \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^4}{4!} - \frac{(kx)^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{(kx)^{2n}}{2n!} + \dots.$$

С учетом этого имеется возможность осуществлять перенос начальных условий через некоторый конечный участок длиной l , на котором масса $m(x)$ и жесткость $EJ(x)$ имеют постоянное значение. Данный прием позволяет перейти к рассмотрению балки, состоящей из нескольких участков, на каждом из которых жесткость и масса также имеют свои постоянные значения. Для примера рассмотрим представленную на рис. 3.1 консольную балку, состоящую из трех участков.

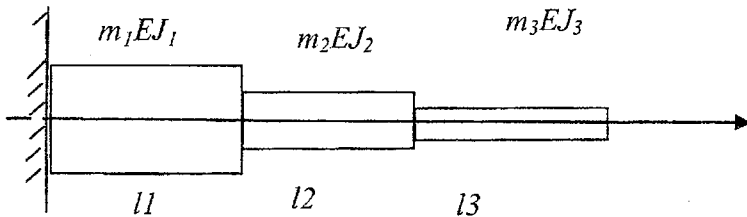


Рис. 3.1. Консольная балка, состоящая из трех участков с однородными массовыми и жесткостными характеристиками на каждом участке

Процесс переноса начальных условий состоит в том, что при некотором заданном значении ω определим $k = \frac{m\omega^2}{EJ}$ для каждого участка:

$$k_1 = \frac{m_1 \omega^2}{EJ_1}, \quad k_2 = \frac{m_2 \omega^2}{EJ_2}, \quad k_3 = \frac{m_3 \omega^2}{EJ_3}, \quad k_1 l_1, \quad k_2 l_2, \quad k_3 l_3$$

и вычислим матрицы A_1, A_2, A_3 для каждого участка.

Представив, что $\eta(0)$ вектор начальных условий в точке $x=0$, получим $\eta(l_1) = A_1 \eta(0)$, теперь $\eta(l_1)$ — есть вектор начальных условий для участка 2, тогда $\eta(l_2) = A_2 \eta(l_1)$, и для третьего участка $\eta(l_3) = A_3 \eta(l_2)$. Подставив в последнее выражение $\eta(l_2), \eta(l_1)$, имеем

$$\eta(l_3) = A_3 A_2 A_1 \eta(0).$$

Т.е. матрица переноса начальных условий получается путем последовательного перемножения матриц A каждого участка. Обобщение на n -е количество участков балки будет выглядеть так:

$$\eta(l_n) = \prod_{j=1}^n A_j \eta(0) = \bar{A} \eta(0). \quad (3.6)$$

Таким образом, представив эпюры массы и жесткости балки с неоднородным распределением этих характеристик в виде достаточно малых участков, на которых погонную массу и жесткость можно считать постоянными, получим связь между начальными параметрами $f(0), f'(0), M(0), Q(0)$ на левом конце балки с соответствующими параметрами на правом конце балки. Помимо этого, необходимо учитывать, что ряд параметров, в зависимости от условий закрепления на концах балки, может иметь нулевые значения. В частности, для рассматриваемой консольной балки при $x=0$ имеем

$$f(0)=0 \text{ и } f'(0)=0, \text{ а на правом конце } M(l) \text{ и } Q(l)=0.$$

В этом случае из следующего соотношения

$$\begin{pmatrix} f(l_3) \\ f'(l_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{41} & \bar{a}_{42} & \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \bar{a}_{33} \cdot M(0) + \bar{a}_{34} \cdot Q(0) = 0, \\ \bar{a}_{43} \cdot M(0) + \bar{a}_{44} \cdot Q(0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Решение системы (3.8) существует только тогда, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.9)$$

Для нахождения корней характеристического уравнения можно применить метод прогонки по оси частот. В этом случае первоначальное значение ω_0 выбирается таким образом, чтобы ω_0 было заведомо меньше первого собственного значения.

Далее с каким-то шагом по оси частот $\Delta\omega$ проводятся вычисления матриц при $\omega_0 + \Delta\omega$, $\omega_0 + \Delta\omega + \Delta\omega$ и т.д. и анализ условия (3.9). На рис. 3.2 приведен график характерного изменения величины определителя в таком процессе.

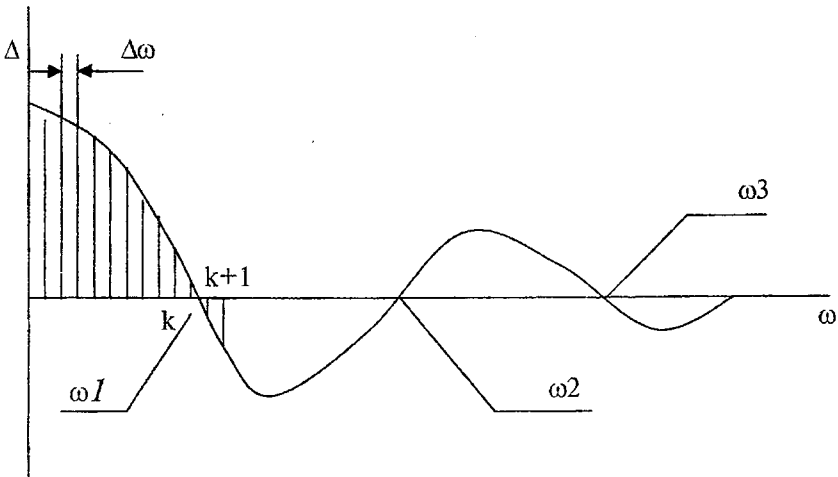


Рис. 3.2. Поиск корней определителя

Как только на каком-то шаге $k+1$ произойдет изменение знака определителя Δ , то это свидетельствует о том, что значение (ω_j)

первой собственной частоты находится на интервале $[\omega_k, \omega_{k+1}]$. Для нахождения ω_j можно использовать метод деления отрезка пополам.

Выбираем новое значение частоты $C_0 = \frac{\omega_k + \omega_{k+1}}{2}$, находим

$\Delta(c_0)$. В случае, если $\Delta(c_0) = 0$, то $c_0 = \omega_l$, если же $\Delta(c_0) \neq 0$, то выбираем отрезок $\omega_k + c_0$ или $\omega_{k+1} - c_0$, на концах которого определитель имеет противоположные значения, и процедура деления отрезка пополам повторяется. Если на каком-то j -м шаге окажется $\Delta(c_j) = 0$, то $c_j = \omega_l$, или процедура поиска корня продолжается,

пока $\frac{|c_{j+1} - c_j|}{c_{j+1}} \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность вычисления корня.

На практике обычно принимают $\varepsilon = 0,001 \div 0,01$.

После нахождения ω_l процесс движения по оси частот продолжается до нахождения необходимого количества корней. После определения собственных частот ω_i находятся соответствующие распределения $f(x)$, $f'(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ как результат определения векторов $\eta(x)$ при соответствующем значении ω_i :

$$\eta_i(l_n) = A_n(\omega_i) \eta_i(l_{n-1}),$$

где $A_n(\omega_i)$ – матрица переноса для n -го участка балки, вычисленная при $\omega = \omega_i$.

Для задания начальных условий $M(0), Q(0)$ следует использовать одно из первых двух уравнений из (3.7). В частности, если принять $f(l) = 1$, то из первого уравнения (3.7) можно выразить $M(0)$, а затем, используя любое из соотношений (3.8), найти $Q(0)$.

3.2. Продольные и крутильные колебания

Процедура определения собственных частот и соответствующих им форм для этих видов колебаний остается такой же, как и для изгибных колебаний, с учетом того, что матрица переноса A будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{vmatrix} \cos(ax) & \frac{1}{aEF} \sin(ax) \\ -EF a \sin(ax) & \cos(ax) \end{vmatrix}$$

– для продольных колебаний,

$$A = \begin{vmatrix} \cos(cx) & \frac{1}{cGJ_p} \sin(cx) \\ -GJ_p c \sin(cx) & \cos(cx) \end{vmatrix}$$

– для крутильных колебаний.

Соответственно вектора

$$\eta(x) = \begin{vmatrix} u(x) \\ P(x) \end{vmatrix} \quad \text{– для продольных колебаний.}$$

$$\eta(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ M(x) \end{vmatrix} \quad \text{– для крутильных колебаний,}$$

где $u(x)$ – форма продольных колебаний,

$\varphi(x)$ – форма крутильных колебаний,

$P(x)$ – функция, характеризующая распределение продольной силы,

$M(x)$ – функция, характеризующая распределение крутящего момента.

Соответственно

$$a^2 = \frac{\omega^2 m(x)}{EF}, \quad \text{и} \quad c^2 = \frac{\omega^2 j(x)}{GJ_p}.$$

3.3 Изгибно-продольные и изгибно-крутильные колебания

Сложные формы колебаний балок возникают в случае, когда отдельные участки балки сопрягаются между собой под некоторым углом. В зависимости от того, в какой плоскости происходит

изгиб, возникают изгибно-продольные или изгибно-крутильные формы колебаний. В частности, на рис. 3.3 приведен пример конструкции балки, у которой в случае перемещений точек конструкции при колебаниях в плоскости XOZ возникают изгибно-продольные формы колебаний, а в случае перемещения точек конструкции в плоскостях, параллельных плоскости XOY , возникают изгибно-крутильные формы колебаний.

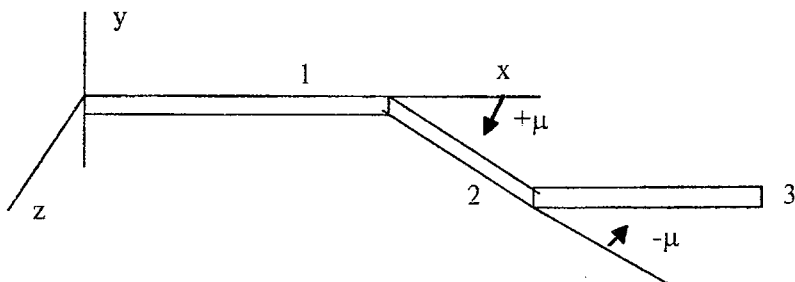


Рис. 3.3. Пример конструкции балки, приводящей к появлению сложных форм колебаний

Для определения собственных форм и частот такого типа конструкций также может быть использован метод начальных параметров, с учетом того, что вектор краевых условий имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ f(x) \\ f'(x) \\ M(x) \\ Q(x) \\ N(x) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{-- для изгибно-продольных} \\ \text{форм колебаний} \end{matrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ f(x) \\ f'(x) \\ M(x) \\ Q(x) \\ M_k(x) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{-- для изгибно-крутильных} \\ \text{форм колебаний} \end{matrix} \quad (3.11)$$

В данном векторе в соответствии с принятыми обозначениями:

- $u(x)$ – продольная составляющая формы колебаний,
- $f(x)$ – изгибная составляющая формы колебаний,

$f'(x)$ – производная от изгибной составляющей формы колебаний,
 $\varphi(x)$ – угол поворота сечения при крутильных колебаниях,
 $M(x)$ – функция, характеризующая распределение изгибающего момента в сечениях балки,

$Q(x)$ – функция, характеризующая распределение перерезывающей силы в сечениях балки,

$N(x)$ – функция, характеризующая распределение продольной силы в сечениях балки,

$M_k(x)$ – функция, характеризующая распределение крутящего момента в сечениях балки.

С учетом этого процесс переноса начальных условий через участок балки, испытывающий изгибно-продольные колебания, может быть представлен в виде соотношения $\eta(x)=R\eta(0)$, где x - длина участка, а матрица R имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos(ax) & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(ax)/EFa \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ -EFa \sin(ax) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(ax) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Здесь a_{11}, \dots, a_{44} – компоненты матрицы R , равные соответственно:

$$a_{11}=S(kx); \quad a_{12}=T(kx)/k; \quad a_{13}=U(kx)/k^3EJ; \quad a_{14}=V(kx)/k^3EJ;$$

$$a_{21}=kV(kx); \quad a_{22}=S(kx); \quad a_{23}=T(kx)/kEJ; \quad a_{24}=U(kx)/k^2EJ;$$

$$a_{31}=EJk^2U(kx); \quad a_{32}=EJkV(kx); \quad a_{33}=S(kx); \quad a_{34}=T(kx)/k;$$

$$a_{41}=EJk^3T(kx); \quad a_{42}=EJk^2U(kx); \quad a_{43}=EJkV(kx); \quad a_{44}=S(kx),$$

$$\text{где } k = \left[\omega^2 m / EJ \right]^{1/4}, \quad a = \left[\omega^2 m / EF \right]^{1/2},$$

а функции Крылова $S(kx) = 1/2[\text{ch}(kx) + \cos(kx)]$;

$T(kx) = 1/2[\text{sh}(kx) + \sin(kx)]$; $U(kx) = 1/2[\text{ch}(kx) - \cos(kx)]$;

$V(kx) = 1/2[\text{sh}(kx) - \sin(kx)]$.

Здесь так же, как и ранее:

m -погонная масса;

EJ - жесткость на изгиб;

EF -жесткость на растяжение (сжатие).

В случае изгибно-крутильных колебаний процесс переноса начальных условий через участок балки с постоянными параметрами также может быть представлен в виде $\eta(x) = K \eta(0)$, где вектор $\eta(x)$ по составу параметров соответствует (3.11), а матрица K имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos(cx) & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(cx)/GJ_p \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ -GJ_p * c * \sin(cx) & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(cx) \end{pmatrix}$$

Здесь также a_{11}, \dots, a_{44} соответствуют (3.12), а коэффициент

$$c = \left[\omega^2 j / GJ_p \right]^{1/2},$$

где j – полярный момент инерции массы в сечении балки относительно продольной оси;

GJ_p – жесткость балки на кручение.

В отличие от балок, у которых продольная ось прямолинейна, для рассматриваемого класса балок в точках поворота продольной оси происходит преобразование ряда кинематических и силовых

параметров. В частности, при изгибно- продольных колебаниях в момент перехода с участка 1 на участок 2 (см. рис. 3.3) происходит преобразование продольных перемещений в поперечные и, соответственно, поперечных в продольные. Схема таких преобразований для линейных составляющих формы колебаний представлена на рис. 3.4.

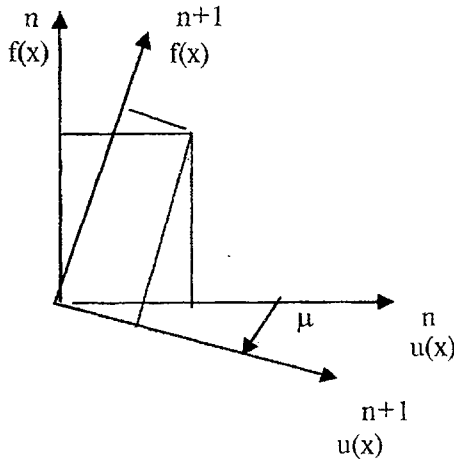


Рис. 3.4. Схема преобразования поперечной $f(x)$ и продольной $u(x)$ составляющих формы колебаний при повороте продольной оси балки на угол μ на стыке n - го и $n+1$ - го участка балки

В соответствии с этой схемой связь между линейными компонентами вектора (3.10) до и после поворота оси выражается следующими соотношениями:

$${}^{n+1} f(x) = {}^n f(x) \cos(\mu) + {}^n u(x) \sin(\mu),$$

$${}^{n+1} u(x) = {}^n f(x) \{-\sin(\mu)\} + {}^n u(x) \cos(\mu).$$

Кроме кинематических параметров, при переходе через точку поворота продольной оси происходит соответствующая трансформация перерезывающей и продольной сил, которая также определяется аналогичными уравнениями:

$$Q(x)^{n+1} = Q(x)^n \cos(\mu) + N(x)^n \sin(\mu),$$

$$N(x)^{n+1} = Q(x)^n \{-\sin(\mu)\} + N(x)^n \cos(\mu).$$

С учетом этого при изгибно-продольных колебаниях балки переход с n -го участка балки на $n+1$ -й через сечение, в котором произошел поворот продольной оси балки на угол μ , в векторно-матричной форме может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline u(x^{\circ}) \\ \hline f(x^{\circ}) \\ \hline f'(x^{\circ}) \\ \hline M(x^{\circ}) \\ \hline Q(x^{\circ}) \\ \hline N(x^{\circ}) \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} = \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \cos \mu & -\sin \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sin \mu & \cos \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\mu) & \sin(\mu) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\mu) & \cos(\mu) & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline u(x) \\ \hline u(x) \\ \hline f(x) \\ \hline M(x) \\ \hline Q(x) \\ \hline N(x) \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Здесь координата x соответствует концу участка n , а координата x° соответствует началу участка $n+1$.

Это можно представить в виде

$$\eta(x^{\circ})^{n+1} = \text{Пр}(\mu) \eta(x)^n, \quad (3.13)$$

где матрица $\text{Пр}(\mu)$ обеспечивает трансформацию вектора начальных параметров при повороте продольной оси балки на угол μ в случае изгибно-продольных колебаний.

Для изгибно-крутильных колебаний при повороте продольной оси на угол μ происходит трансформация углов поворота сечений и соответствующих моментов сил, которая определяется следующими соотношениями:

$$\varphi(x^\circ) = \varphi(x) \cos(\mu) - f'(x) \sin(\mu),$$

$$f'(x^\circ) = \varphi(x) \sin(\mu) + f'(x) \cos(\mu)$$

– для параметров, характеризующих углы поворота сечений, и

$$M(x^\circ) = M(x) \cos(\mu) + M_k(x) \sin(\mu),$$

$$M_k(x^\circ) = -M(x) \sin(\mu) + M_k(x) \cos(\mu)$$

– для параметров, характеризующих изгибающий и крутящий моменты.

Процедура переноса вектора начальных параметров через точку поворота оси на угол μ в векторно-матричной форме в этом случае представляется в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi(x^\circ) \\ f(x^\circ) \\ f'(x^\circ) \\ M(x^\circ) \\ Q(x^\circ) \\ M_k(x^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mu) & 0 & -\sin(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\mu) & 0 & \cos(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\mu) & 0 & \sin(\mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\mu) & 0 & \cos(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ f(x) \\ f'(x) \\ M(x) \\ Q(x) \\ M_k(x) \end{pmatrix}$$

Аналогично (3.13) запишем это в виде

$$\eta_k(x^\circ) = \Pi_k(\mu) \eta_k(x),$$

где $\Pi_k(\mu)$ – матрица перехода в случае изгибно-крутильных колебаний;

$\eta_K(x)$ – вектор начальных параметров при изгибно-крутильных колебаниях, соответствующих концу участка, предшествующего точке поворота продольной оси балки;

$\eta_K(x^\circ)$ – вектор начальных параметров после перехода через точку поворота;

n – номер участка балки.

С учетом изложенного, например для балки, представленной на рис. 3.3, формула переноса начальных параметров от $x = 0$ до конца балки при двух поворотах продольной оси для случая изгибно-продольных колебаний будет иметь следующий вид:

$$\eta(L) = R^3 \Pi(-\mu) R^2 \Pi(\mu) R^1 \eta(0),$$

где L – общая длина балки.

Обобщение такого подхода на n участков балки и m точек поворота продольной оси может быть представлено как

$$\eta(L) = A \eta(0),$$

где матрица A представляет собой результат последовательного перемножения $n + m$ матриц перехода.

Примечание. Формирование матриц поворота Π должно производиться с учетом принятого положительного направления отсчета угла поворота продольной оси.

Так же как и для прямолинейных балок, условия для нахождения собственных частот ищут с учетом граничных условий на концах балки. Например, для консольной балки, в случае изгибно-продольных колебаний, с учетом того, что на левом конце равны нулю перемещения и угол поворота сечения, а на правом конце перерезывающая сила, изгибающий момент и продольная сила, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} u(L) &= A_{14} M(0) + A_{15} Q(0) + A_{16} N(0), \\ f(L) &= A_{24} M(0) + A_{25} Q(0) + A_{26} N(0), \\ f'(L) &= A_{34} M(0) + A_{35} Q(0) + A_{36} N(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= A_{44} M(0) + A_{45} Q(0) + A_{46} N(0), \\
 0 &= A_{54} M(0) + A_{55} Q(0) + A_{56} N(0), \\
 0 &= A_{64} M(0) + A_{65} Q(0) + A_{66} N(0).
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Для существования решения системы необходимо равенство нулю определителя минора третьего порядка, составленного из коэффициентов матрицы A второй группы уравнений (3.14):

$$\begin{vmatrix}
 A_{44} & A_{45} & A_{46} \\
 A_{54} & A_{55} & A_{56} \\
 A_{64} & A_{65} & A_{66}
 \end{vmatrix} = 0.
 \tag{3.15}$$

Это условие удовлетворяется при некоторых дискретных значениях параметра ω , входящего в выражения для k , a и c в коэффициентах, входящих в матрицы. Данным значениям соответствуют собственные частоты упругой системы. Нахождение собственных частот осуществляется путем последовательного задания значений ω аналогично методу, приведенному в разд. 3.1.

Задаваясь конкретным значением частоты ω с последующим вычислением всех матриц переноса по участкам балки, на которых распределение погонной массы $m(x)$ и жесткости $EJ(x), EF(x)$ или $GJ_k(x)$ имеет постоянное значение, с вычислением коэффициентов общей матрицы A и нахождением определителя минора (3.15) необходимо, последовательно двигаясь по оси частот ω , контролировать знак определителя Δ . В случае, когда на следующем шаге изменения частоты произошло изменение знака определителя, нахождение собственной частоты производится методом деления отрезка пополам до того момента, когда при двух последующих вычислениях определителя разность между значениями частоты ω на этих шагах вычислений будет удовлетворять заданному требованию по точности определения собственной частоты (см. разд. 3.1).

После нахождения первого значения собственной частоты, продолжая движение по оси частот, аналогичным образом находится необходимое количество следующих собственных частот. При известных собственных частотах построение распределений форм колебаний $f(x), u(x), \varphi(x)$ и функций, характеризующих распределение

перерезывающих и продольных сил, изгибающих и крутящих моментов, осуществляется путем последовательного переноса через достаточно малые участки балки вектора начальных параметров $\eta(0)$ при значениях частоты, равных найденным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, и так далее.

Для формирования вектора $\eta(0)$, кроме имеющихся краевых условий, следует использовать свойство собственных форм колебаний - собственные формы определяются с точностью до постоянного множителя. С учетом этого можно принять значение $f(x)$ в любом сечении балки равным некоторой константе. В частности, для консольного закрепления балки принимаем $f(L) = a$ или $f(L) = 1$. Из второго уравнения системы (3.14) выразим $N(0)$ в виде

$$N(0) = [1 - A_{24} M(0) - A_{25} Q(0)] / A_{26}.$$

Далее, подставляя $N(0)$ в любые два уравнения из уравнений второй группы системы (3.14), находят $M(0)$ и $Q(0)$.

В случае, когда при $x = L$ конец балки закреплен, в качестве дополнительного условия для формирования вектора $\eta(0)$, с учетом возможности нормировки формы можно один из параметров $M(0)$ или $Q(0)$ выбрать в виде произвольной константы. Например, $M(0) = EJ(0) f''(0)$ принять $M(0) = EJ(0)$ или $Q(0) = EJ(0) f'''(0)$ принять $Q(0) = EJ(0)$, а для нахождения остальных начальных параметров использовать конкретные условия закрепления на концах балки в виде аналогичных системе (3.14). В частности, для случая заделки при $x = 0$ и при $x = L$ и изгибно-крутильных колебаниях балки имеем $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $\varphi(L) = 0$, $f(L) = 0$, $f'(L) = 0$, и из уравнения $\eta(L) = A\eta(0)$ находим остальные параметры вектора $\eta(0)$.

3.4. Вычисление приведенных масс

Аналитическое выражение для определения приведенной массы в соответствии с приложением Б имеет вид

$$M_{npi} = \int_0^l m(x) f_i^2(x) dx.$$

При определении M_{npi} для уравнений (1.1) следует руководствоваться тем, что погрешность нахождения приведенных масс по каждому тону колебаний прямо пропорционально входит в погрешность решения этих уравнений. В случае, когда невозможно аналитическое нахождение приведенной массы, а это практически всегда следует при неоднородном распределении жесткости и массы, процесс интегрирования заменяется нахождением суммы:

$$M_{npi} = \sum_k m(x_k) f_i^2(x_k) ,$$

где $m(x_k)$ – погонная масса на некотором интервале длины балки, где $m(x)$ может быть принята постоянной,

$f_i(x_k)$ – среднее значение формы на этом же интервале,

$$f(x_k) = \frac{f_k^{нач} + f_k^{кон}}{2} ;$$

$f_k^{нач}$ – значение формы вначале;

$f_k^{кон}$ – значение формы в конце интервала Δx_k ;

k – количество интервалов, на которые можно разделить общую длину балки.

Очевидно, что чем меньше длина интервала, тем меньше погрешность определения упругих перемещений при колебаниях конструкции. Кроме того, чем для более высшего тона колебаний определяется приведенная масса, тем на более короткие интервалы должны разбиваться эпюры масс и форм.

В этой связи целесообразно еще на стадии подготовки исходных данных по участкам переноса начальных условий, по методу, изложенному в предыдущем разделе, выбирать Δx таким, чтобы погрешность в вычислении M_{npi} была приемлема. Малое количество участков приводит к значительной погрешности в вычислении M_{npi} , а большое количество – к большому объему вычислений. Можно рекомендовать выбор $\Delta x = (0.01 \div 0.05)l$, однако в случае сложных эпюр $m(x)$ и учета большого числа тонов колебаний могут потребоваться специальные исследования по обоснованию выбора Δx_k .

При определении приведенных масс для сложных изгибно-продольных и изгибно-крутильных форм колебаний необходимо учитывать, что инерционные силы возникают от перемещения масс по двум компонентам. Например, при изгибно-продольных колебаниях с некоторой собственной частотой масса, находящаяся в некотором сечении, перемещается по двум взаимно перпендикулярным направлениям: $f(x)$ - поперечная, по отношению к продольной оси балки, составляющая и $u(x)$ - продольная составляющая. В этом случае формула для определения приведенной массы имеет вид

$$M_{np} = \sum_k m(x_k) [f^2(x_k) + u^2(x_k)],$$

где $f(x_k)$, $u(x_k)$ – также средние значения на k -м участке длины балки.

Для изгибно-крутильных колебаний приведенная масса определяется по формуле

$$M_{np} = \sum_k [m(x_k) f^2(x_k) + j(x_k) \varphi^2(x_k) / \rho_k^2],$$

где $j(x_k)$ – погонный момент инерции массы относительно продольной оси на k -м участке балки, $\varphi(x_k)$ – среднее значение формы крутильных колебаний на этом участке, $\rho_k = j(x_k) / m(x_k)$ – среднее расстояние всех масс от продольной оси в сечении x_k .

4. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Линейные поперечные или продольные упругие перемещения балки в точке приведения, при действии соответствующих сил по данным направлениям, могут быть получены в результате решения уравнения вида

$$M_{npi} (\ddot{q}_i + n_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i) = P f_i(x_p), \quad (4.1)$$

где M_{npi} – приведенная масса i -го тона колебаний балки;

ω_i – круговая собственная частота i -го тона колебаний балки,

$f_i(x)$ – форма колебаний балки (для изгибных или продольных)

с собственной частотой ω_i ,

q_i – обобщенная координата, характеризующая упругие перемещения балки в точке приведения (в точке, где $f_i(x)$ принята равной 1);

x_p – точка приложения силы P ;

n_i – коэффициент демпфирования упругих колебаний.

В случае приложения к балке в некотором сечении момента сил, приводящего к появлению изгибных колебаний, уравнение для определения упругих поперечных перемещений записывается в виде

$$M_{npi}(\ddot{q}_i + n_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i) = M f_i'(x_m). \quad (4.2)$$

Здесь M – момент внешних сил,

$f_i'(x_m)$ – производная от формы изгибных колебаний в точке приложения момента внешних сил.

Упругое перемещение в любой точке длины балки, отличной от точки приведения, определяется по формуле

$$Y(x, t) = \sum_i q_i f_i(x_i) \quad \text{– для поперечных перемещений}$$

и

$$X(x, t) = \sum_i q_i u_i(x_i) \quad \text{– для продольных перемещений.}$$

Углы поворота сечения в точке приведения при крутильных колебаниях балки определяются по формуле

$$J_{npi}(\ddot{q}_i + n_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i) = M k \varphi_i(x_m), \quad (4.3)$$

где q_i – обобщенная координата, характеризующая угол поворота сечения балки;

$\varphi_i(x_m)$ – форма i -го тона крутильных колебаний в сечении, где приложен момент внешних сил;

J_{npi} – приведенный момент инерции i -го тона крутильных колебаний.

Определение углового перемещения в любом сечении балки производится путем умножения обобщенной координаты q на форму в этом сечении.

Таким образом, для определения упругих перемещений необходимо решить уравнения (4.1), (4.2), (4.3) при заданных законах изменения внешних сил и моментов.

Для конструкций, имеющих относительно малый уровень диссипативных сил и работающих в условиях нестационарных переходных процессов, упругие перемещения следует определять по формуле [8]

$$q(t) = \frac{1}{\omega M_{np}} \int_0^t P(\eta) f(x) \sin \omega(t - \eta) d\eta \quad (4.4)$$

или, при численном интегрировании, в виде следующей суммы:

$$q(t) = \frac{1}{\omega M_{np}} \sum_{j=1}^n P(\eta_j) \Delta\eta_j \sin \omega(t - \eta_j), \quad (4.5)$$

где η_j – текущее время, относящееся к времени действия нагрузки $P(t)$ (см. рис. 4.1) на интервале от 0 до T ;

j – число элементарных интервалов времени $\Delta\eta_j$, на которые разбивается интервал времени действия нагрузки и в пределах которых действие силы заменяется действием от импульса силы.

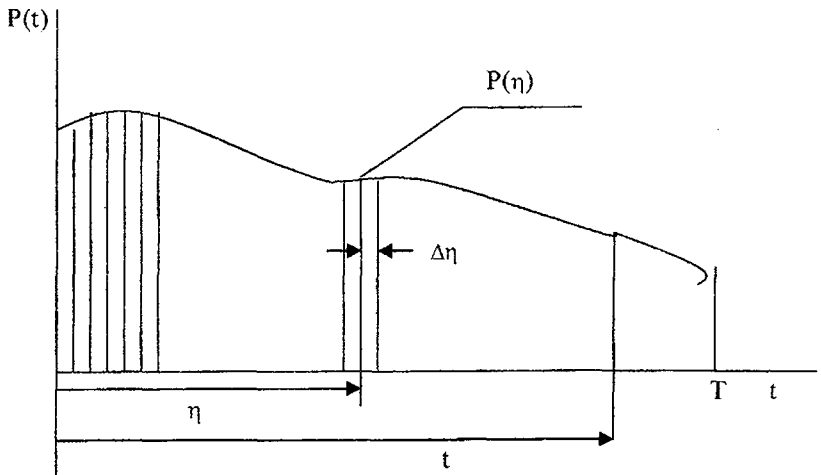


Рис. 4.1. Схема разделения интервала времени действия нагрузки на элементарные интервалы

После окончания действия внешней нагрузки, при $t > T$ упругие перемещения точки приведения представляют собой свободные колебания, определяемые решением уравнений (4.4), (4.5) при начальных условиях, соответствующих моменту времени T :

$$q(t) = q(T) \cos \omega t + \frac{\dot{q}(T)}{\omega} \sin \omega t.$$

Аналитическое определение перемещений по уравнению возможно в некоторых случаях для достаточно простых законов изменения нагрузки во времени [8]:

- мгновенное приложение постоянной силы,
- при действии нагрузки, возрастающей по линейному закону. Однако упругие перемещения в большинстве случаев переходных процессов при произвольном изменении нагрузки во времени могут быть получены с использованием формулы (4.5).

Для установившихся процессов наибольший интерес представляет решение уравнений типа (4.1) при периодически изменяющейся внешней нагрузке. В этом случае, если представить

$$P(t) = P^\circ \sin pt,$$

где P° – амплитуда внешней вынуждающей силы,

p – частота вынуждающей силы, то общий вид решения уравнения при условии, что коэффициент демпфирования для случая вязкого сопротивления можно представить $n = 2\beta = \Delta\omega/\pi$, имеет вид

$$q(t) = \frac{P^\circ}{M_{np} \omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{p^2}{\omega^2}}} \sin\left(pt - \arctg \frac{4\beta^2}{\omega^2 - p^2}\right).$$

В этом выражении $\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{p^2}{\omega^2}}}$ представляет

собой коэффициент усиления для амплитуды вынужденных колебаний по отношению $q = P^\circ / M_{np} \omega^2$ – статического перемещения в сечении x от действия силы P° , а угол $\arctg 4\beta^2 / (\omega^2 - p^2)$ есть

угол фазового запаздывания упругих перемещений по отношению к вынуждающей силе.

5. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ В СЛУЧАЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

При проектировании упругих конструкций с учетом требований к динамическим характеристикам (получение заданных амплитуд и частот упругих колебаний) наиболее часто возникает задача разработки конструкции с заданной собственной частотой. Практически это означает, что заданная или требуемая частота колебаний должна находиться ниже или выше частоты анализируемого первоначального варианта конструкции.

В случае, если речь идет об уменьшении частоты, то целесообразным требованием является требование минимального изменения конструкции по отношению к первоначальному варианту. В случае, когда необходимо увеличить частоту, то, помимо этого соображения, актуальным является требование минимизации дополнительной массы, которую необходимо израсходовать на увеличение жесткости конструкции. Данные обстоятельства приводят к задачам поиска некоторого оптимального варианта упругой конструкции [2 - 6].

Для балочных конструкций, учитывая наличие первоначального варианта и то, что в большинстве случаев балки несут на себе значительные пассивные массы по сравнению с массой силовой части конструкции, образующей жесткость, при решении задач оптимизации конструкции целесообразно, как показывает опыт, в качестве проектного параметра выбрать жесткость.

Здесь необходимо отметить, что более общей является задача поиска варианта, обеспечивающего увеличение частоты с условием минимального приращения массы силовой части конструкции. Однако выбор жесткости в качестве проектного параметра, в случае необходимости нахождения наиболее критичных элементов и сечений конструкции, не противоречит такой постановке. Кроме того,

реализация нового закона распределения жесткости по длине балки возможна даже при сохранении существующего распределения погонной массы $m_0(x)$ за счет применения материалов с более высоким модулем упругости или за счет увеличения момента инерции сечения, путем изменения геометрических характеристик сечения, если это относится к изгибным или крутильным формам колебаний. В этом случае необходимо, чтобы функционал

$$I = \int_0^l |\Delta B(x)| dx \rightarrow \min \quad (5.1)$$

при $B(x) \in B^*$,

где $\Delta B(x) = B(x) - B_0(x)$,

$B(x)$ – варьируемая эпюра жесткости,

$B_0(x)$ – эпюра жесткости первоначального варианта конструкции,

B^* – множество допустимых эпюр жесткости конструкции.

Рассмотрим задачу в случае изгибных колебаний балки. Требуется найти такое распределение $EJ(x) = B(x)$, которое обеспечивает минимум функционала (5.1) при фиксированном значении собственной частоты i -го тона:

$$\omega_i = \text{const} . \quad (5.2)$$

В такой постановке задача является вариационной задачей на условный экстремум. Последнее условие с помощью соотношения Релея запишем в виде

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^l B(x) \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\int_0^l m(x) f^2(x) dx} , \quad (5.3)$$

где $f(x)$ – собственная форма рассматриваемого i -го тона колебаний. Расширенный функционал для задачи на условный экстремум запишется в следующем виде [6, 7]:

$$J_1 = \int_0^l \{|B(x) - B_0(x)| - \lambda F(x)\} \rightarrow \min, \quad (5.4)$$

$$B(x) \in B^*,$$

где $\lambda = \text{const}$ – множитель Лагранжа, а функция $F(x)$ – правая часть соотношения (5.3).

Необходимым условием экстремума функционала (5.4) является равенство нулю первой вариации функционала $\delta J_1 = 0$.

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 m(x) f(x) &= 0 \\ B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \delta \frac{d(x)}{dx} \Big|_0^l &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] \delta f(x) \Big|_0^l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

и условие оптимальности в виде

$$1 - \frac{\lambda \left[\frac{d^2 f(x)}{dx} \right]^2}{\int_0^l m(x) f^2(x) dx} = 0. \quad (5.6)$$

В системе (5.5) первое уравнение представляет собой уравнение собственных форм и частот, а следующие два – граничные условия.

Получить решение системы (5.5), (5.6) в замкнутой форме невозможно, однако после некоторых преобразований можно построить итеративный процесс по подбору решения, удовлетворяющего условию (5.6). С учетом того, что собственные формы в результате решения системы (5.5) определяются с точностью до произвольного

постоянного множителя, путем соответствующего нормирования $f(x)$ можно получить

$$\int_0^l m(x) f^2(x) dx = 1 .$$

В этом случае (5.6) принимает вид

$$\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]^2 = |f''(x)|^2 = \frac{1}{\chi} = \text{const} , \quad (5.7)$$

что означает, что оптимальной конструкцией балки является конструкция, у которой на участках изгиба удельная потенциальная энергия изгиба будет постоянной и равной максимально возможной при данной собственной форме.

Умножим правую и левую части (5.7) на $B^2(x)$, извлечем корень и запишем в виде

$$B(x) = hB(x) |f''(x)| ,$$

где h – некоторая константа.

Правая часть этого выражения есть изгибающий момент, из этого следует, что оптимальная эпюра жесткости должна быть пропорциональна изгибающему моменту при условии, что кривизна формы будет постоянной. С учетом этого можно получить следующую рекуррентную формулу для назначения новой жесткости, при которой выполняется условие оптимальности (5.7):

$$B(x)^{k+1} = hB(x)^k |f''(x)| , \quad (5.8)$$

где k - номер приближения,

h - константа или множитель, обеспечивающий пропорциональное увеличение эпюры жесткости на каждом шаге итерации ($h \geq 1$).

С использованием (5.8) строится следующий алгоритм формирования оптимальной эпюры жесткости, при которой собственная частота будет равна заданной.

1. Производится расчет спектра форм и частот первоначального варианта конструкции балки с использованием $m_0(x)$ и $B_0(x)$.

2. Для тона колебаний, частоту которого необходимо увеличить, строится распределение по длине балки удельной потенциальной энергии f''^2 . Это распределение может быть получено путем деления функции $M(x)$, полученной в результате решения задачи определения собственных форм и частот (см. разд. 3), на эпюру жесткости и возведения во вторую степень.
3. Находится $f''^2(x)_{\max}$ путем последовательного перебора и определения максимального значения.
4. Производится нормировка эпюры $f''^2_{\max} = 1$.
5. По рекуррентной формуле (5.8) строится эпюра жесткости для следующего шага $k+1$ с учетом соотношений (5.9):

$$\left. \begin{aligned} B^{k+1}(x) &= h B^k(x) f''^2(x) \text{ , если } h |f''(x)|^2 < 1, \\ B^{k+1}(x) &= h B^k(x) f''^2(x)^2 \text{ , если } h |f''(x)|^2 > 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Так формируется эпюра жесткости при отсутствии ограничений на область изменения жесткости сверху. В случае существования ограничения на область изменения жесткости сверху $B(x)_{\max}$ соотношения (5.9) дополняются следующим соотношением:

$$B^{k+1}(x) = B(x)_{\max} \text{ , если } h B^k(x) \left| \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right| > B(x)_{\max} \text{ ,}$$

где h – шаг вариации эпюры жесткости следует принимать в пределах $1,05 \div 1$.

6. Производится расчет спектра собственных форм и частот $k+1$ варианта.
7. Строится распределение $f''^2(x)$ и производится проверка условия оптимальности эпюры (на участке, где новые жесткости превышают первоначальный вариант и находятся внутри области допустимых изменений жесткости). Если условие оптимальности $f''^2(x) = 1$ на этом участке не выполняется, то расчет повторяется с п.5 при новом h меньшем, чем принятое на данном шаге итерации.
8. Полученное значение частоты сравнивается с требуемым, и если $\omega < \omega_{\text{треб}}$, то производится расчет с новым значением $h > 1,05$ начиная с п.3.

9. Вычисления повторяются до тех пор, пока не выполнится условие $\omega \geq \omega_{\text{треб}}$.

Для иллюстрации на рис.5.1 (а,б) приведены процессы последовательной оптимизации эпюры жесткости для балки со свободными концами в случае отсутствия ограничения на область изменения жесткости сверху (а) и в случае, когда на область изменения жесткости наложено ограничение сверху $B(x)_{\text{max}}$ (б).

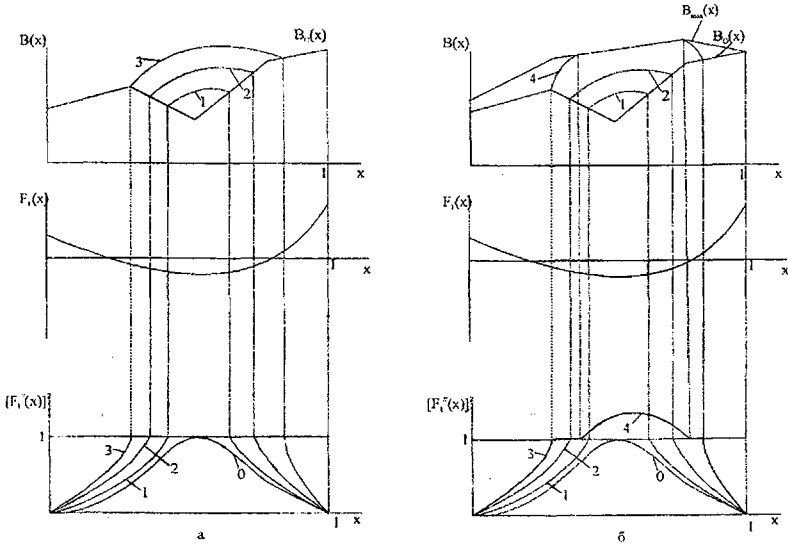


Рис. 6.1. Процессы оптимизации эпюр жесткости для l -го тона колебаний балки со свободными концами без ограничения сверху на область варьирования жесткостью (а) и с ограничением сверху (б); 0-первоначальный вариант, 1,2,3 - последовательные шаги оптимизации

В случае постановки задачи о поиске варианта конструкции с заданным уровнем амплитуд колебаний можно использовать этот же алгоритм с учетом того, что на каждом шаге оптимизации необходимо оценивать уровень амплитуд, т.е. решать систему (1.1). В этом случае выход из алгоритма поиска осуществляется по выполнению требований к величинам упругих перемещений.

В случае, когда для формирования динамических свойств требуется понижение частоты по сравнению с первоначальным вариантом

конструкции, данный алгоритм, с точки зрения поиска минимального изменения конструкции [анализ распределения $f''(x)$], указывает области (в районе максимальных значений $[f''(x)]^2$, где уменьшение жесткости определяет градиент снижения частоты.

6. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ В СЛУЧАЕ КРУТИЛЬНЫХ ИЛИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Анализ проведенных в разд. 2.2, 2.3 уравнений движения при продольных и крутильных формах упругих колебаний балки показывает, что они по виду полностью совпадают, поэтому выводы относительно формирования оптимальных распределений параметров балки также полностью совпадают, однако всегда надо иметь в виду, что при продольных колебаниях используется погонная масса $m(x)$, а при крутильных колебаниях распределение полярного момента инерции массы относительно продольной оси $J(x)$ и соответственно продольная жесткость $EF(x)$ и крутильная жесткость $GJ_p(x)$.

Аналогичная, как и для изгибных форм колебаний, постановка задачи о поиске оптимального распределения жесткости для рассматриваемых форм колебаний приводит к тому, что критерием оптимальности является

$$\left[\frac{d\varphi(x)}{dx} \right]^2 = \text{const} , \quad (6.1)$$

а формулой для назначения новой жесткости

$$B^{k+1}(x) = hB^k(x) \left| \frac{d \varphi(x)}{dx} \right| ,$$

где $\varphi(x)$ – форма крутильных (продольных) колебаний,

$B(x)$ – жесткость крутильная (продольная)

Во всех остальных моментах алгоритм поиска оптимального варианта конструкции полностью соответствует случаю изгибных колебаний.

7. ФОРМИРОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЖЕСТКОСТИ БАЛКИ В СЛУЧАЕ ИЗГИБНО-ПРОДОЛЬНЫХ ИЛИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

При упругих изгибно-продольных или изгибно-крутильных формах колебаний, характерных для балок, продольная ось которых непрямолинейна, вопрос формирования требуемых динамических свойств с помощью соответствующих распределений жесткостных характеристик должен решаться в результате анализа распределений удельной потенциальной энергии упругих деформаций по каждой составляющей $[f''(x)]^2$ и $[u'(x)]^2$ для изгибно-продольных или $[f''(x)]^2$ и $[\varphi'(x)]^2$ для изгибно-крутильных форм колебаний. Анализ распределений $[f''(x)]^2$, $[u'(x)]^2$ и $[\varphi'(x)]^2$ должен выявить участки конструкции, изменение жесткости на которых в наибольшей мере влияет на процесс формирования требуемых динамических свойств конструкции как для первоначального варианта конструкции балки, так и для вариантов, отвечающих поставленным требованиям к динамическим характеристикам по изгибной, продольной или крутильной жесткости.

Окончательное решение по выбору того или иного варианта доработки конструкции должно быть принято по выявлению ведущего фактора, определяющим образом влияющего на решение поставленной задачи, или как результат компромисса между возможными доработками по всем эшюрам жесткости с учетом приращения массы на реализацию требуемой жесткости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян К.А., Раппопорт И.М. Динамика ракет. -М.: Машиностроение, 1969. - 378с.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний. -М.: Наука, 1965. - 559с.
3. Болтянский В.Т. Математические методы оптимального управления. -М.: Наука, 1968. - 308с.
4. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. - Киев: Наукова думка, 1975. - 275с.
5. Данилин А.И., Дмитриев В.В. Инженерный алгоритм проектирования балочных конструкций с заданными частотными характеристиками//Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. 1987. №2. -С. 39-43.
6. Троицкий В.А., Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел. -М.: Наука, 1982. - 432 с.
7. Титов Б.А., Вьюжанин В.А., Дмитриев В.В. Формирование динамических свойств упругих космических аппаратов. -М.: Машиностроение, 1995. - 303с.
8. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций. - Л.: Судпромгиз, 1963. - 404с.
9. Вибрации в технике: Справочник. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. -М.: Машиностроение, 1981. - 456с.

Формулы для вычисления жесткости, погонной массы и моментов инерции в сечениях балки

Конструктивно-компоновочная схема любого варианта балки, для которого необходимо определить параметры упругих колебаний, должна содержать данные по основным геометрическим характеристикам (длина балки, конфигурация и размеры поперечных сечений по всей длине балки), условия закрепления на концах балки, характеристики материала (плотность, модуль упругости), из которого изготовлена силовая часть конструкции, а также данные по расположению масс, не участвующих в создании жесткостных характеристик балки. Для примера рассмотрим вариант конструктивно-компоновочной схемы консольной балки, приведенной на рис. 1А, состоящей из двух участков с различными конфигурациями поперечных сечений и несущей нагрузку в виде распределенной m_1 и сосредоточенной M_2 масс.

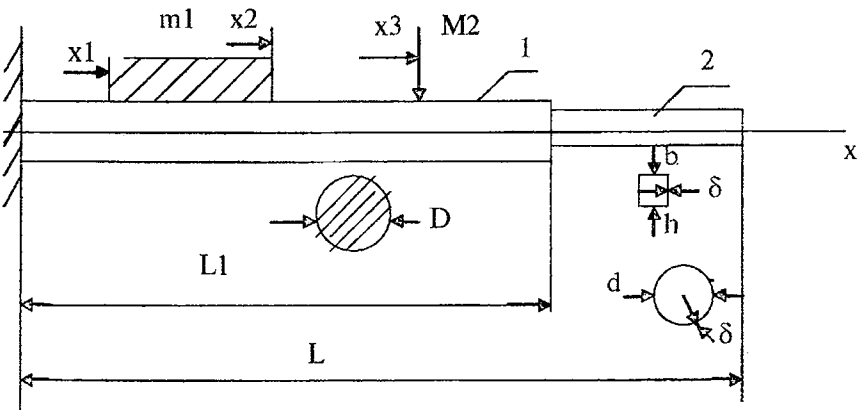


Рис. 1А. Пример конструктивно-компоновочной схемы балки

Участок 1 - сечение представляет собой круг диаметром D . Участок 2 - сечение представляет собой круговое кольцо диаметром d , толщиной δ или прямоугольник с высотой h , шириной b и толщиной δ .

1. Вычисление распределенной массы $m(x)$

1.1. Находим $m(x)$ силовой части участка 1-й балки:

$$m(x) = \rho \frac{\pi D^2}{4},$$

где ρ - плотность материала конструкции балки.

В табл. 1А приведены характеристики металлов, наиболее часто используемых при создании конструкции летательных аппаратов.

На интервале x_1-x_2

$$m(x) = m(x) + mI(x).$$

Сосредоточенную массу M_2 распределяем на некоторый достаточно малый участок балки Δl , равный, например, шагу переноса граничных условий из метода начальных параметров (см. разд. 3):

$$m(x)_{\Delta l} = m_1(x) + \frac{M_2}{\Delta l}.$$

1.2. Находим $m(x)$ силовой части участка 2-й балки:

$m(x) = \pi d \delta \rho$ - для случая, когда в сечении кольцо,

$m(x) = 4h \delta \rho$ - для случая, когда в сечении полый квадрат.

1.3 Строится $m(x)$ по всей длине балки.

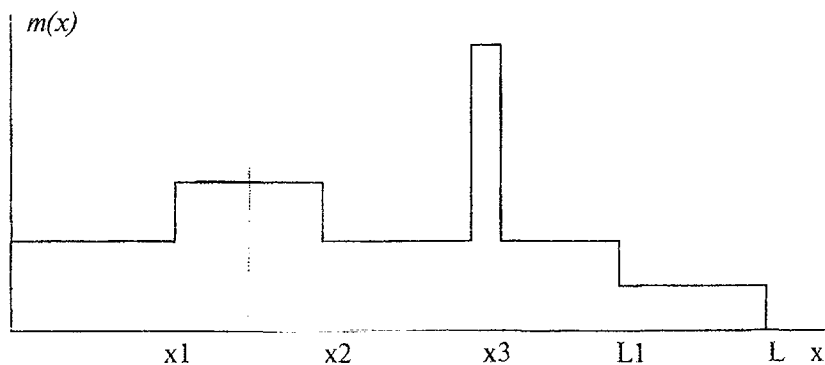


Рис. 2А. Эпюра распределенной (погонной) массы

2. Вычисление погонного полярного момента инерции массы относительно продольной оси $j_p(x)$

Полярным моментом инерции в некотором сечении x будет сумма произведений масс точек тела или элементарных объемов масс, расположенных в данном сечении, на квадрат расстояния от центра тяжести каждой массы до продольной оси балки:

$$j_p(x) = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 ,$$

где n - количество элементарных объемов масс, расположенных в данном сечении,

r_i - расстояние от центра тяжести i -й массы до продольной оси.

Для некоторых сечений (круг, кольцо) имеются конечные формулы, связывающие момент инерции с основными геометрическими параметрами сечения и распределенной, погонной массой. Для сечений сложной геометрической формы момент инерции следует определять путем численного интегрирования по всей площади поперечного сечения балки с разделением на ряд элементарных объектов как по площади, так и по расположению масс.

2.1. На 1-м участке полярный момент инерции силовой части конструкции (сплошного кругового сечения) равен

$$j_p(x) = \frac{m_1(x) D^2}{4} .$$

2.2. На интервале x_1-x_2 к $j_{p1}(x)$ добавляется момент инерции от пассивной массы $M_1(x)$:

$$j(x) = j_{p1}(x) + j_p(m1),$$

где $j_p(m1)$ - должен определяться с учетом конфигурации расположения масс в данном сечении относительно продольной оси.

2.3. Аналогичный подход должен быть применен и в сечении x_3 :

$$j_p(m3) = j_{p3}(m) + M2 r^2 .$$

2.4. На 2-м участке, если сечение представляет полный квадрат со стороной h или прямоугольник со сторонами h и b и толщиной

δ , момент инерции определяется путем численного суммирования моментов инерции элементарных объемов масс, расположенных в сечении, а в случае кольцевого сечения по формуле

$$j_{p2}(m) = m_2(x) \frac{d^2}{4} .$$

Далее строится эпюра распределения полярного момента инерции по всей длине балки аналогично эпюре распределения масс.

3. Вычисление изгибной жесткости $EJ(x)$

Изгибная жесткость балки в каждом сечении определяется как произведение модуля упругости материала на растяжение E на геометрический момент инерции сечений J_z относительно поперечной оси ($z-z$), лежащей в плоскости сечения и проходящей через продольную ось балки (рис. 3А).

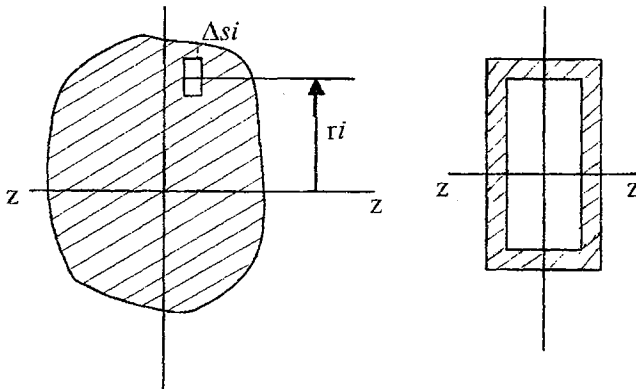


Рис. 3А. Примеры сечений с различной конфигурацией

Для рассматриваемого на рис. 1А примера на участке 1, где в сечении сплошной круг,

$$J(x) = \frac{\pi D^4}{64} ,$$

и поскольку по всей длине участка 1 диаметр одинаковый, то

$$EJ(x) = \frac{E D^4}{64} \pi .$$

На участке 2, если сечение представляет собой кольцо толщиной δ , то момент инерции сечения

$$J_{zz}(x) = \frac{\pi d^3 \delta}{8}$$

и соответственно

$$EJ_z(x) = E \frac{\pi d^3 \delta}{8} .$$

Для сечений произвольной формы момент инерции сечения определяется путем суммирования произведений площадей элементарных площадок, на которые можно разбить всю площадь поперечного сечения, на квадрат расстояния от центра площади каждой элементарной площадки до оси, относительно которой определяется момент инерции (см. рис. 3А):

$$J(x) = \Delta s i \cdot r^2 i .$$

Аналогичным образом определяются жесткости на всех участках балки. В табл. 2А для некоторых наиболее часто встречающихся конфигураций сечений приводятся формулы для вычисления моментов инерции в зависимости от геометрических параметров сечения.

4. Вычисление крутильной жесткости $GJ_p(x)$

Модуль жесткости на кручение равен

$$G = \frac{E}{1 + \mu} ,$$

где μ - коэффициент Пуассона, равный 0,3.

С учетом приведенных в табл. 2А формул для полярного момента инерций сечения для круга и кольца крутильная жесткость для балки на рис. 1А будет:

на первом участке

$$G J_p(x) = G \pi D / 32 ,$$

на втором участке

$$G J_p(x) = G \pi D \delta / 4 ,$$

если сечение будет в виде кольца толщиной δ .

5. Вычисление продольной жесткости EF

На первом участке

$$EF(x) = E \frac{\pi D^2}{4} ,$$

на втором участке

$$EF(x) = E \pi D \delta .$$

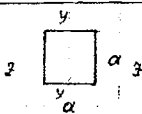
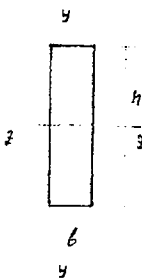
Таблица 1А

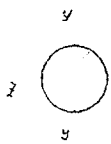
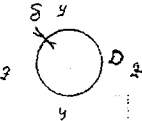
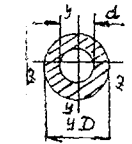
Характеристики основных конструкционных материалов

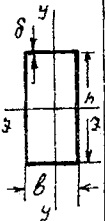
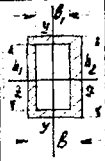
Материал	Плотность ρ , кг /м ³	Модуль упругости E , Н / м ²
Сталь	7900	$2.1 \cdot 10^6$
Чугун	7400	$1.3 \cdot 10^6$
Бериллий	2000	$1.3 \cdot 10^6$
Алюминий	2700	$0.7 \cdot 10^6$
Титан	4500	$1.2 \cdot 10^6$

Таблица 2А

Формулы для вычисления моментов инерции сечений

Форма поперечного сечения	Площадь сечения F , m^2	Момент инерции относительно оси z	Момент инерции относительно оси y	Полярный момент инерции сечения	Примечание
	a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$0,141a^4$	
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{dh^3}{12}$	$\beta * h b^3$	<p>для</p> <p>$\frac{h}{b} = 1,2$ $\beta = 0,166$</p> <p>$\frac{h}{b} = 1,25$ $\beta = 0,172$</p> <p>$\frac{h}{b} = 1,5$ $\beta = 0,196$</p> <p>$\frac{h}{b} = 2$ $\beta = 0,230$</p> <p>$\frac{h}{b} = 3$ $\beta = 0,263$</p> <p>$\frac{h}{b} = 5$ $\beta = 0,292$</p>

Форма поперечного сечения	Площадь сечения $F, \text{ м}^2$	Момент инерции относительно оси Z	Момент инерции относительно оси Y	Полярный момент инерции сечения	Примечание
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	
	$\pi D \delta$	$\frac{\pi D^3 \delta}{8}$	$\frac{\pi D^3 \delta}{8}$	$\frac{\pi D^3 \delta}{4}$	
	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{64}$	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{64}$	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{64}$	

Форма поперечного сечения	Площадь сечения $F, \text{ м}^2$	Момент инерции относительно оси z	Момент инерции относительно оси y	Полярный момент инерции сечения	Примечание
	$2\delta(b+h)$	$\frac{\delta h^3}{6} \left(3\frac{b}{h}+1\right)$	$\frac{\delta b^3}{6} \left(3\frac{h}{b}+1\right)$	J_p определяется численным интегрированием путем разбиения площади сечения на ряд элементарных площадок	
	$b h - b_1 h_1$	$\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{b^3 h^3 - b_1^3 h_1^3}{12}$		

Уравнения движения упругой балки в случае приложения распределенной системы внешних сил и моментов

В общем случае на балку как на элемент силовой конструкции может действовать переменная по времени внешняя нагрузка в виде системы непрерывно распределённых сил и моментов [1]. Рассмотрим, как наиболее сложный, случай изгибных колебаний балки. На рис.1Б представлен элемент балки, который совершает малые поперечные колебания относительно положения равновесия в плоскости XOY .

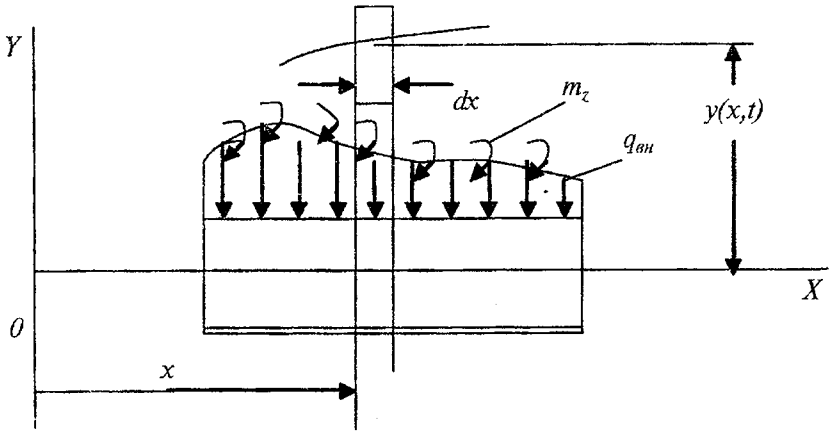


Рис.1Б. Упругие перемещения балки под действием внешней нагрузки

Пренебрегая силами инерции, возникающими от поворота сечений балки, что вполне допустимо при малых амплитудах колебаний, можно записать условия равновесия некоторого выделенного элементарного отрезка балки длиной dx , нагруженного распределенными внешними силами и моментами:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = q_{вн} + q_{ин} ; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial x} = Q(x) - m_z ;$$

$$E J(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = M(x) ,$$

(1Б)

где $Q(x)$ - перерезывающая сила, возникающая в сечениях балки;
 $M(x)$ - изгибающий момент;
 $EJ(x)$ - изгибная жёсткость;
 $q_{ин}$ - инерционные силы, которые обеспечивают равновесие выделенного элемента в силу принципа Даламбера,

$$q_{ин} = -m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} . \quad (2Б)$$

Внешние сосредоточенные силы в распределённой нагрузке учитываются следующим образом. Если представить (рис. 2Б), что внешняя сила P приложена к балке в некоторой достаточно малой области ε длины балки, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$q_{вн} = P \delta(x_p),$$

где δ - дельта-функция, а x_p - координата приложения силы.

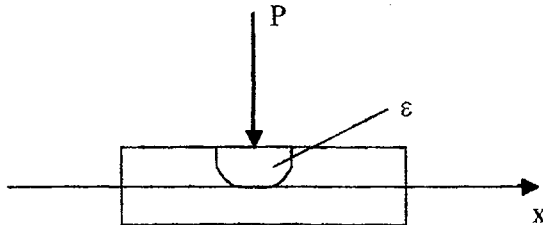


Рис. 2Б. Действие внешней сосредоточенной силы P

Аналогичный подход к сосредоточенному моменту приводит к записи распределённого внешнего момента в виде

$$m_z = M_{вн} \delta(x_{M_{вн}}) .$$

Из первого уравнения (1Б) имеем

$$m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = q_{вн} ,$$

а из второго и третьего уравнения этой же системы можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \right] - Q(x) = -m_z . \quad (3.Б)$$

При известных собственных формах функцию $y(x,t)$ можно записать в виде

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t) f_i(x).$$

Подставив этот ряд в (2.Б) и (3.Б), получим

$$m(x) \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} - \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = P^k \delta(x_p), \quad (4Б)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] S_i(t) - Q(x) = -M_{\text{вн}}^t \delta(x_{M_{\text{вн}}}),$$

где $k=1,2,3,\dots,K$,

$t=1,2,3,\dots,T$, K, T -число внешних сил и моментов.

Умножим первое уравнение (4Б) на $f_j(x)$, а второе на $-\left(\frac{df_j(x)}{dx}\right)$ и

проинтегрируем по переменной x в пределах от 0 до l :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l f_j(x) f_i(x) dx \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} + \int_0^l f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} dx =$$

$$= P^k \int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx ,$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] dx S_i(t) +$$

$$+ \int_0^l \left[Q(x) \frac{df_j(x)}{dx} \right] dx = -M_{\text{вн}}^t \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \delta(x_{\text{Мвн}}) dx .$$

Сложив эти уравнения, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l f_j(x) f_i(x) dx \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} + \int_0^l f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} dx - \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] dx S_i(t) + \\ & + \int_0^l \left[f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} dx(x) + Q(x) \frac{df_j(x)}{dx} \right] dx = \\ & = P^k \int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx - M_{\text{вн}}^t \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \delta(x_{\text{Мвн}}) dx . \end{aligned} \quad (5Б)$$

Далее, если иметь в виду, что функция $f_j(x)$ удовлетворяет уравнению форм и частот

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 f_j(x) m(x) = 0 \quad (6Б)$$

и соответствующим граничным условиям для различных типов закрепления, то, если провести интегрирование уравнения (6.Б) в пределах от 0 до x , получим

$$\frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] = \omega^2 \int_0^x f_j(x) m(x) dx$$

для балки с незакрепленным левым концом, или

$$\frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] - Q(0) = \omega_j^2 \int_0^x f_j(x) m(x) dx \quad (7Б)$$

для случая, когда при $x=0$ имеется заделка или шарнир.

Это следует из

$$\int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] dx = \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] \Big|_0^l =$$

$$= -Q(0) + \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right].$$

Для общности будем рассматривать только последнее уравнение.

Умножим правую и левую части этого уравнения на $\frac{df_j(x)}{dx}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l :

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_i(x)}{dx^2} \right] dx = - \int_0^l Q(x) \frac{d f_i(x)}{dx} dx =$$

$$= \omega_i^2 \int_0^l \frac{d(x)}{dx} \int_0^x f(x) m(x) dx dx. \quad (8.Б)$$

Теперь, если иметь в виду, что

$$\frac{d}{dx} \left[f_j(x) \int_0^x m(x) f_i(x) dx \right] = \frac{df_j(x)}{dx} \int_0^x m(x) f_i(x) dx +$$

$$+ f_j(x) f_i(x) m(x),$$

и проинтегрировать это выражение в пределах от 0 до l , то получим

$$\left[f_j(x) \int_0^x m(x) f_i(x) dx \right] \Big|_0^l = \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \int_0^x m(x) f_i(x) dx dx +$$

$$+ \int_0^l f_j(x) f_i(x) m(x) dx .$$

Из последнего имеем

$$\int_0^l \frac{f_j(x)}{dx} \int_0^x m(x) f_i(x) dx dx = f_j(x) \int_0^x m(x) f_i(x) dx \Big|_0^l -$$

$$- \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx .$$

После подстановки этого выражения в правую часть (7.Б) получим

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] dx - Q(0) f_j(x) \Big|_0^l =$$

$$= -\omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx + \omega_i^2 \left[\int_0^l m(x) f_i(x) dx \right] f_j(x) \Big|_0^l = 0 .$$

С учетом (7Б) и того, что $\frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] f_j(x) \Big|_0^l = 0$

при любых сочетаниях граничных условий, уравнение (8.Б) заменим:

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} [EJ(x)] dx - Q(0) f_j(x) \Big|_0^l =$$

$$= -\omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx + \omega_i^2 Q(0) f_j(x) \Big|_0^l = 0 .$$

После сокращения имеем

$$\int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EJ(x) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \right] dx = -\omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx .$$

Теперь, если во второй член уравнения (5Б) подставить левую часть последнего равенства, то (5Б) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l f_j(x) f_i(x) m(x) dx \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx S(t) + \\ & + \int_0^l \left[f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{df_j(x)}{dx} Q(x) \right] dx = P^{\kappa} \int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx + \\ & + M'_{\text{вн}} \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \delta(x_{\text{Мвн}}) dx . \end{aligned} \quad (9Б)$$

Если учесть, что

$$\int_0^l \left[f_j(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{df_j(x)}{dx} Q(x) \right] dx = Q f_j(x) \Big|_0^l = 0 \quad \text{при}$$

любых сочетаниях граничных условий, то (9Б) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l f_j(x) f_i(x) m(x) dx \frac{d^2 S_i(t)}{dt^2} + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx S(t) = \\ & = P^{\kappa} \int_0^l f_j(x) \delta(x_p) dx + M'_{\text{вн}} \int_0^l \frac{df_j(x)}{dx} \delta(x_{\text{Мвн}}) dx . \end{aligned}$$

Данное уравнение с учетом свойства ортогональности собственных форм

$$\int_0^l m(x) f_j(x) f_i(x) dx = 0 \text{ при } i \neq j ,$$

$$\int_0^l f_j(x) \delta(x - x_p) dx = f_j(x_p) ,$$

$$\int_0^l \frac{d}{dx} f_j(x) \delta(x - x_{Мен}) dx = \frac{d f_j(x_{Мен})}{dx}$$

преобразуется к виду

$$M_{npj} [\ddot{S}_j(t) + \omega_j^2 S_j(t)] = P^k f(x_p^k) + M^t \frac{df_j(x_{Мен}^T)}{dx} , \quad (10Б)$$

где $M_{npj} = \int_0^l m(x) f_j^2(x) dx$ - приведенная масса балки при колебаниях с собственной частотой ω_j и формой $f_j(x)$.

При выводе уравнения (10Б) не учитывалось влияние рассеивания энергии колебаний, сопровождающее любой реальный процесс. Учет демпфирования колебаний производится путем введения в уравнение колебаний типа (10Б) дополнительного члена, который бы обуславливал затухание собственных колебаний и ограничивал амплитуду колебаний при вынужденном характере движения. О способе и условиях задания коэффициента демпфирования при проведении исследований, связанных с анализом механических колебаний упругих конструкций, приведены материалы в приложении С данного пособия.

Задание коэффициента демпфирования

При проведении исследований, связанных с анализом колебаний упругих конструкций, коэффициент демпфирования в уравнениях колебаний вводится с целью получения результатов, адекватных реальным процессам, так как практически все колебательные процессы в природе с течением времени затухают. Затухание колебаний происходит в результате работы сил трения :

- при взаимодействии колеблющегося объекта с окружающей средой,
- на поверхностях контакта при относительных перемещениях элементов конструкции и сил сопротивления внутри материала конструкции в зонах деформации этих элементов во время колебаний.

Физические процессы, в результате которых происходит рассеяние энергии упругих колебаний, зависят от конкретной реализации колеблющейся конструкции, от параметров процесса колебаний и внешних условий.

Задание конкретного значения коэффициента демпфирования зависит от целей исследования и должно учитывать особенности работы упругой конструкции в рассматриваемых диапазонах амплитуд и частот колебаний. Например, для определения нагрузок на конструкцию при больших амплитудах колебаний или для определения границ устойчивости движения при малых амплитудах колебаний могут быть приняты разные модели учета демпфирования.

Здесь следует отметить, что степень рассеяния энергии колебаний в значительной мере определяется работой реальной конструкции при колебаниях. В то же время при получении предварительных оценок работы конструкции и проведении проектных исследований многие параметры конструкции бывают еще не сформированы. В таких случаях следует использовать имеющиеся данные по демпфированию колебаний подобных конструкций при работе в аналогичных условиях или принять модель, обеспечивающую минимальное демпфирование, априори предполагая некоторый худший результат по длительности затухания колебаний или по величине амплитуды установившихся колебаний. Кроме

того, следует иметь в виду, что при практическом моделировании колебаний упругих систем целесообразно применение наиболее простых моделей демпфирования, так как силы демпфирования часто имеют малые значения по сравнению с упругими силами или силами инерции.

В настоящее время при анализе колебаний упругих конструкций используются две модели демпфирования. В первой модели силы демпфирования принимаются пропорциональными скорости упругого перемещения - вязкое демпфирование, а во второй модели силы демпфирования пропорциональны перемещению - конструкционное демпфирование.

Модель вязкого демпфирования дает хороший результат при рассмотрении неустановившихся динамических режимов, в то же время установлено, что для большей части конструкций, а также для материалов, из которых выполнена конструкция, уровень энергии рассеиваемой за один цикл колебаний не зависит от темпа деформирования конструкции при колебаниях (т. е. от частоты колебаний), но зависит от амплитуды. В этой связи необходимо отметить, что использование модели конструкционного демпфирования более целесообразно при исследовании установившихся динамических режимов.

Длительность колебательного процесса во времени зависит от соотношения между работой демпфирующих сил за период колебаний и величиной потенциальной энергии упругих колебаний, и чем больше эта величина, тем меньше длительность процесса колебаний.

Если рассматривать колебательный процесс в координатах q и F , где $F = kq$ - упругая восстанавливающая сила, то при наличии демпфирующих сил имеется нарушение однозначности в нарастании и спаде упругой силы в процессе одного периода колебаний. Это выражается в появлении петли гистерезиса, площадь которой позволяет оценить уровень энергии, рассеиваемой за один цикл колебаний [9].

Отношение рассеянной энергии к максимальной потенциальной или к максимальной кинетической энергии, возникающей в процессе данного цикла колебаний, называют коэффициентом поглощения:

$$\psi = \frac{\Delta W}{W \max}$$

В случае, когда в течение одного периода движение мало отличается от гармонического и перемещение можно представить в виде

$$q(t) = \bar{q} \cos \omega t,$$

где \bar{q} – средняя амплитуда за данный цикл колебаний, а силу трения принять в виде $n\dot{q}$, что соответствует гипотезе вязкого демпфирования, то работа сил трения за цикл будет

$$\Delta W = \int_0^T n\dot{q} dt = n\bar{q}^2 \omega^2 \int_0^T \sin^2 \omega t = \pi n\bar{q}^2 \omega.$$

На рис. 1С это изображается площадью петли гистерезиса.

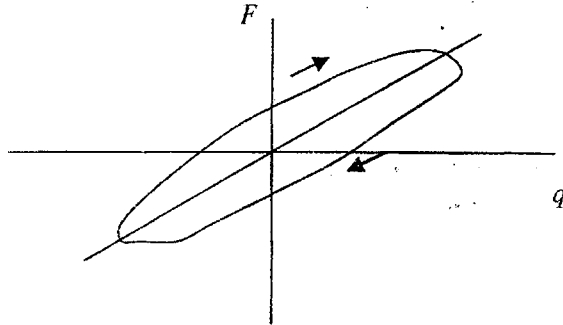


Рис. 1С. Петля гистерезиса в случае вязкого трения

Максимальная потенциальная энергия упругой деформации при колебаниях равна

$$W = \bar{q}^2 k / 2,$$

отсюда коэффициент поглощения $\psi = 2\pi \frac{b}{k} \omega$. Как видно, при вязком демпфировании коэффициент поглощения не зависит от амплитуды и прямо пропорционален частоте колебаний.

Вид петли гистерезиса для конструкционного трения приведен на рис. 2С.

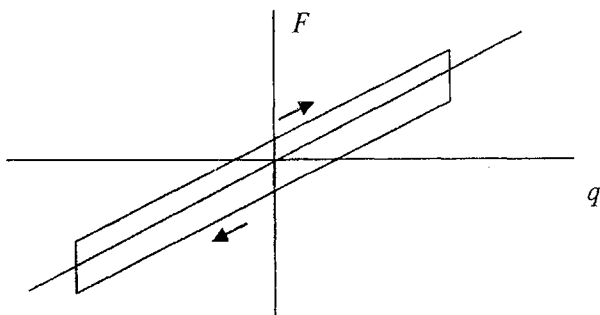


Рис. 2С. Петля гистерезиса в случае конструкционного демпфирования, обусловленного сухим трением.

В случае, если уравнения движения упругого тела имеют вид

$$m_{np}(\ddot{q} + 2b\dot{q} + \omega^2 q) = 0, \quad (1C)$$

то решение этого уравнения для случая свободных колебаний с демпфированием в общем случае имеет вид

$$q_i(t) = e^{-\frac{b_i}{m_{np}}t} \left(q_{0i} \cos \omega_{di}t + \frac{\dot{q}_{0i}}{\omega_i} \sin \omega_{di}t \right),$$

где q_{0i} - начальное отклонение обобщенной координаты от невозмущенного положения,

\dot{q}_{0i} - значение скорости изменения обобщенной координаты в начальный момент времени,

ω_{di} - собственная круговая частота демпфированной системы.

В данном случае амплитуда колебаний уменьшается от цикла к циклу по экспоненциальному закону (рис. 3С):

$$q_{\max} = e^{-\frac{b_i}{m_{np}}t}$$

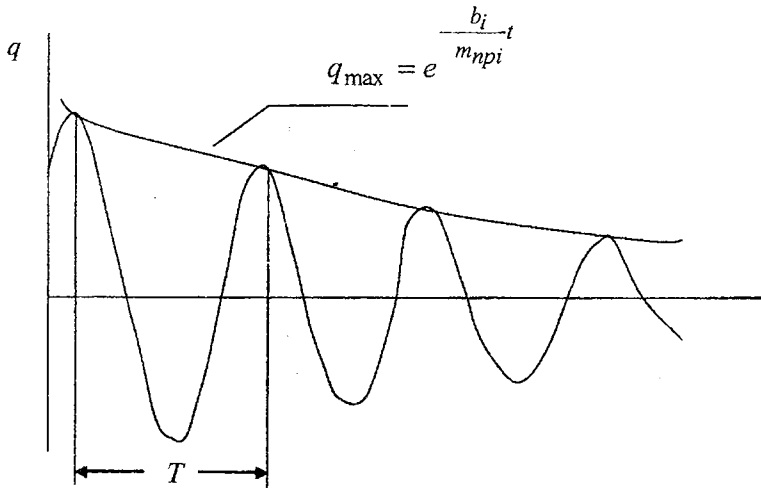


Рис. 3С. Свободные колебания упругой системы по некоторой обобщенной координате q

Связь между собственными частотами демпфированной и недемпфированной систем определяется выражением

$$\omega_{di}^2 = \omega^2 - 2b^2.$$

Как правило, упругие конструкции, если они не содержат специальных демпфирующих устройств, имеют достаточно низкий коэффициент демпфирования, лежащий в диапазоне 0-0,1. При таком уровне демпфирования, как видно из анализа последнего соотношения, собственные частоты демпфированной и недемпфированной систем практически совпадают, поэтому при анализе динамики упругих систем обычно используют значение собственной частоты, полученное без учета демпфирования.

Для учета экспериментальных данных по демпфированию упругих колебаний используются записи переходных процессов, аналогичных приведенному на рис. 3С, по которым определяется логарифмический декремент колебаний по формуле

$$\Delta = \ln \frac{q_{нк}}{q_{кк}},$$

где $q_{нк}$ и $q_{кк}$ — начальная и конечная амплитуды на T_k -м периоде колебаний. При известном логарифмическом декременте колебаний второй член уравнения (1С) записывается в виде (см. также уравнение 1.1)

$$2b = \frac{\Delta \omega_i}{\pi}.$$

Использование модели конструкционного демпфирования приводит к записи уравнения движения в комплексной форме:

$$m_{np}i[\ddot{q}_i + kq(1+iG)] = Pf(x_p),$$

где сила конструкционного демпфирования пропорциональная упругому перемещению, может быть представлена в следующем виде:

$$F = i G k q.$$

Здесь i — мнимая единица,

G — коэффициент конструкционного демпфирования, а k — приведенная жесткость, равная $M_{np} \cdot \omega^2$.

В связи с тем, что при установившихся колебаниях на собственной частоте рассматриваемой упругой системы силы вязкого и конструкционного демпфирования должны быть равны, то связь между коэффициентами вязкого и конструкционного демпфирования будет выглядеть следующим образом:

$$2b\omega m_{np} = G m_{np} \omega^2$$

$$\text{или } \Delta \omega m_{np} / \pi = G m_{np} \omega^2 / \omega, \text{ откуда } G = \Delta / \pi.$$

Таким образом, в зависимости от задач, стоящих в каждом конкретном исследовании, следует выбирать соответствующую мо-

дель демпфирования. Однако необходимо еще раз отметить, что в связи с тем что в большинстве реальных конструкций уровень проявляемых при колебаниях демпфирующих сил мал, то для первоначальных этапов формирования конструкции упругой системы и исследования динамических свойств, в силу необходимости учета феномена затухания колебаний, следует рекомендовать более простую модель учета демпфирования в виде

$$F = b \dot{q}$$

с последующим возможным уточнением модели демпфирования по результатам анализа работы конструкции при колебаниях и результатов экспериментальных исследований.

Зависимость логарифмического декремента колебаний от амплитуды колебаний в соответствии с [9] для многих конструкционных материалов и образцов конструкций имеет вид, представленный на рис. 4С.

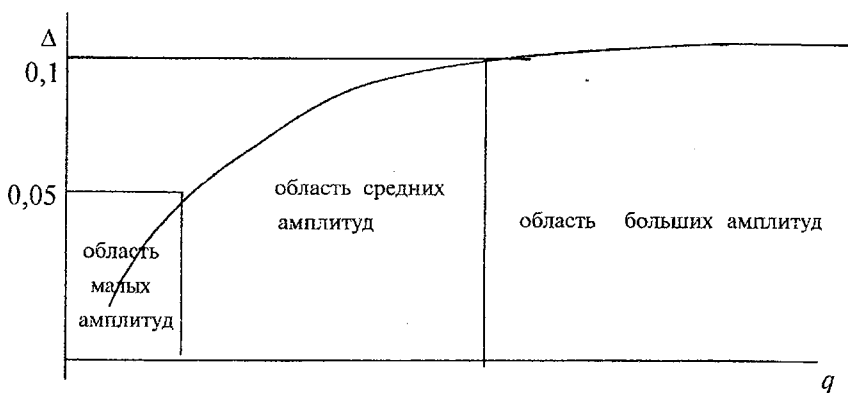


Рис. 4С. Зависимость логарифмического декремента колебаний упругой конструкции от амплитуды колебаний

На рис. 4С возможные значения амплитуд колебаний разбиты на три области - малые, средние и большие амплитуды. Для каждой области существует свой какой-то средний уровень величин логарифмического декремента колебаний. В зависимости от того, в каком диапазоне амплитуд предполагается работа исследуемой конструкции, выбираются соответствующие значения декремента. В частности, для первоначальной оценки уровня амплитуд колебаний рекомендуется принимать декремент близким к минимальным значениям из диапазона 0,01 - 0,05.

Учебное издание

Дмитриев Вячеслав Васильевич

ФОРМИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

Редактор Т. К. Кретьнина
Компьютерная верстка О. А. Ананьев

Подписано в печать 25.04.2005 г. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр.- отт. 4,3. Уч. — изд. л. 4,5.

Тираж 150 экз. Заказ 42. Арт.С-8/2005.

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.