ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра электроники твердого тела

М. Б. Шалимова

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия для самостоятельной работы студентов механико-математического факультета СамГУ по курсу общей физики

Самара
Издательство «Самарский университет»
2008

УДК 538.30
ББК 22.33
Ш 18

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры общей и теоретической физики СамГУ А.В. Горохов

Шалимова М.Б.
Ш 18 **Физические основы электрических и магнитных явлений**: учебное пособие для самостоятельной работы студентов механико-математического факультета СамГУ по курсу общей физики / М.Б. Шалимова; Федеральное агентство по образованию. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2008. – 56 с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов механико-математического факультета к тестовым и контрольным работам по курсу физики, а также для подготовки к лабораторным работам. В связи с этим краткое изложение теоретического материала дополнено примерами решения типовых задач по каждому рассмотренному вопросу. Для самостоятельной проверки студентами своих знаний предлагаются задания для самоконтроля в виде задач и тестовых вопросов.

УДК 538.30
БКК 22.30

Содержание

Введение

Изучение курса общей физики полезно начать со знакомства с государственным образовательным стандартом по этой дисциплине, который можно найти на сайте http://www.education.ru.

Для усвоения данной дисциплины требуется знание математики и физики в пределах школьной программы, а также владение теорией пределов, операциями дифференцирования, интегрирования, основными операциями векторного анализа, методами решения простых обыкновенных дифференциальных уравнений. К началу преподавания курса соответствующие математические дисциплины уже изучены студентами либо изучаются параллельно с данным курсом. В связи с этим при подготовке к лекциям необходимо постоянно использовать эти знания, стремиться к максимальному пониманию всех математических выкладок, утверждений, физических приближений.

При выполнении лабораторных работ необходимо усвоить основы теории изучаемого эффекта, используя методическое описание лабораторной работы, соответствующую литературу и конспекты лекций, разобраться в методике проводимого эксперимента, уяснить его цель, выписать в рабочую тетрадь необходимые расчетные формулы. Обработку результатов эксперимента рекомендуется проводить с использованием компьютерных программ Microsoft Excel, MATHCARD, MATLAB. Необходимо знать основные принципы оценки ошибок измерения. Отчет по лабораторной работе должен содержать заполненные таблицы измеренных физических величин, построенные графические зависимости, расчетные формулы и вычисленные значения физических параметров и характеристик, выводы, следующие из анализа полученных результатов. При подготовке к устному отчету по лабораторной работе рекомендуется ответить на контрольные вопросы, приведенные в методическом описании работы.

Студентам рекомендуется использовать Интернет-ресурсы, например сайт http://eqworld.impnet.ru.

Настоящее учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов к тестовым и контрольным работам по курсу физики, а также для подготовки к лабораторным работам. В связи с этим рассматриваются типичные задачи и методы их решения. Рекомендуется проверять свои знания с помощью заданий для самоконтроля.

Некоторые темы, например «Переменный ток», «Электрические колебания», не изучаются в лекционном курсе, а предназначены для самостоятельного изучения на физическом практикуме. Эти вопросы также включены в настоящее учебное пособие, что должно способствовать лучшему пониманию целей и задач при выполнении лабораторных работ по данной теме.

1. Закон Кулона

Электрический заряд является неотъемлемым свойством элементарных частиц, например электронов, протонов и т.д. Заряд всех элементарных частиц одинаков по абсолютной величине, что является опытным фактом. Знак элементарных частиц может быть как положительным, так и отрицательным. Например, атомы построены из протонов, электронов, нейтронов. Протоны несут положительный заряд, электроны – отрицательный, нейтрон не имеет заряда.

Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, и тело в целом будет нейтральным. Если в теле создать избыток частиц одного знака, тело окажется заряженным, т.е. электризуется. Электризовать тело можно, например трением, при этом всегда одно тело заряжается положительно, а другое – отрицательно, т. е. заряды передаются от одного тела к другому.

Наличие у тела электрического заряда проявляется в том, что такое тело взаимодействует с другими заряженными телами. Тела, несущие заряд одного знака (одноименные), отталкивают друг друга, заряженные разноименно – притягиваются.

Электростатика – это раздел физики, который занимается изучением физики неподвижных электрических зарядов.

Закон Кулона – основа электростатики, формулируется следующим образом: сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где k – коэффициент пропорциональности, q_1 и q_2 – величины зарядов, r – расстояние между ними.

Закон Кулона можно записать в векторной форме, которая определяет не только величину силы, но и ее направление.

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}.$$

Под $\vec{r}$ следует понимать вектор, проведенный от одного заряда к другому (рис. 1) и имеющий направление к тому из зарядов, к которому приложена сила $\vec{F}$.

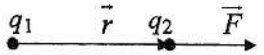


Рис. 1

Константу k в законе Кулона определяют выбором системы единиц.

Абсолютная электростатическая система единиц СГСЭ.

В этой системе длина измеряется в сантиметрах ($[r]$ = см), сила – в динах ($[F]$ = дина), а заряд измеряется в ***абсолютных электростатических единицах заряда*** – это такой заряд, который действует в вакууме на равный ему заряд, удаленный на расстояние в 1 см с силой в 1 дину ($[q]$ = СГСЭ-ед. заряда).

В СГСЭ $k=1$, т. е. закон Кулона записывается в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

В системе единиц измерения ***СИ*** расстояние измеряется в метрах ($[r]$ =м), сила в ньютонах (($[F]$ = Н), а заряд – в кулонах ($[q]$ = Кл).

В СИ

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

где ε_0 – электрическая постоянная, или абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума.

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м},$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \text{м/Ф}\ \ (\text{Ф – фарада}).$$

При погружении зарядов в однородный диэлектрик силы взаимодействия между телами уменьшаются в ε раз, где ε – диэлектрическая проницаемость среды. Закон Кулона в СИ запишется тогда в виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Примеры решения задач

Задача №1.1

Два электрических заряда притягиваются друг к другу в керосине с силой 7,8 Н. С какой силой они будут притягиваться, если их поместить в глицерин на расстояние, в два раза меньшее, чем в керосине? Диэлектрическая проницаемость керосина равна 2, глицерина – 39.

Дано:
$F_к = 7{,}8$ Н,
$r_к = 2\,r_г$,
$\varepsilon_к = 2$,
$\varepsilon_г = 39$

Найти
$F_г$

Решение:

По закону Кулона сила, с которой притягиваются два заряда в керосине, равна $F_к = \dfrac{9\cdot 10^9 q_1 q_2}{\varepsilon_к r_к^2}$;

в глицерине $F_г = \dfrac{9\cdot 10^9 q_1 q_2}{\varepsilon_г r_г^2}$.

Согласно условию задачи

$$\frac{F_к}{F_г} = \frac{\varepsilon_г r_г^2}{\varepsilon_к r_к^2} = \frac{\varepsilon_г r_г^2}{\varepsilon_к 4 r_г^2} = \frac{\varepsilon_г}{4\varepsilon_к}.$$

Отсюда находим

$$F_г = \frac{F_к \cdot 4\varepsilon_к}{\varepsilon_г},\quad F_z = \frac{7{,}8\text{Н}\cdot 8}{39} = 1{,}6 \text{ Н}.$$

Ответ:

$F_z = 1{,}6$ Н.

<u>*Задания для самоконтроля*</u>

1. Два точечных электрических заряда взаимодействуют в воздухе на расстоянии 0,4 м друг от друга с такой же силой, как в непроводящей жидкости на расстоянии 0,2 м. Определите диэлектрическую проницаемость непроводящей жидкости.

2. Два одноименных заряда 0,7 и 1,3 нКл находятся на расстоянии 6 см друг от друга. На каком расстоянии между ними нужно поместить третий заряд, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

2. Напряженность электрического поля

Напряженность электрического поля $\vec{E}$ численно равна силе, действующей на единичный точечный заряд, находящийся в данной точке поля. Направление $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{q}{r^3}\vec{r},$$

$$E = k\frac{q}{r^2}.$$

В СГСЭ напряженность измеряется в СГСЭ-единицах напряженности электрического поля – это напряженность в точке поля, в которой на заряд в одну электростатическую единицу действует сила в одну дину ($[E]$ = СГСЭ-ед. напряженности электрического поля).
В СИ $[E]$ = В/м (вольт на метр).

Очевидно, что на всякий точечный заряд q', помещенный в точку поля с напряженностью $\vec{E}$, будет действовать сила

$$\vec{F} = q'\vec{E}.$$

Выполняется ***принцип суперпозиции электрических полей***:

напряженность электрического поля $\vec{E}$ системы точечных зарядов q_1, q_2, … равна векторной сумме напряженностей полей, который создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных, т.е.

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = k\sum_i \frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i,$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, проведенный из заряда q_i в точку наблюдения.

Силовой линией, или линией напряженности электрического поля, называется линия в пространстве, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением вектора $\vec{E}$.

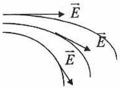


Рис. 2

Густота линий такова, что количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к поверхности площадки, будет равно численному значению вектора $\vec{E}$.

Примеры решения задач

Задача №2.1

Два заряда $6\cdot10^{-7}$ и $-2\cdot10^{-7}$ Кл расположены в керосине на расстоянии 0,4 м друг от друга. Определить напряженность поля в точке О, расположенной на середине отрезка прямой, соединяющей центры зарядов.

Дано:
$q_1 = 6\cdot10^{-7}$ Кл,
$q_2 = -2\cdot10^{-7}$ Кл,
$r = r_1 = r_2 =$
$= 2\cdot10^{-4}$ м,
$\varepsilon = 2$

Найти
E

Решение:

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, имеем $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$. Так как векторы $\vec{E_1}$ и $\vec{E_2}$ направлены по одной прямой и в одну сторону, то напряженность поля в точке О будет равна сумме модулей напряженностей $|E_1|$ и $|E_2|$:

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{9\cdot10^9(q_1+q_2)}{\varepsilon r^2}$$

$$E = \frac{9\cdot10^9\cdot8\cdot10^{-7}}{2\cdot4\cdot10^{-2}}\text{ Н/Кл} = 9\cdot10^4\text{ В/м.}$$

Ответ:
$E = 9\cdot10^4$ В/м.

Задача №2.2

Два точечных заряда $q_1 = 2q$ и $q_2 = -q$ находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 3). Найти положение точки на прямой, проходящей через эти заряды, напряженность поля в которой равна нулю.

Дано:
$q_1 = 2q$
$q_2 = -q$
$r = d$

Найти
x

Решение:

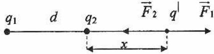


Рис. 3

В предполагаемую точку поля с нулевой напряженностью помещаем пробный положительный заряд $q^|$. Тогда заряды q_1 и q_2 будут действовать на этот заряд соответственно с силами F_1 и F_2, направленными, как показано на рисунке, при этом

$$F_1 = k\frac{q_1q^|}{(d+x)^2};\ F_2 = k\frac{q_2q^|}{x^2};\ F_1 = F_2;\quad k\frac{2qq^|}{(d+x)^2} = k\frac{qq^|}{x^2};$$

$$x^2 - 2d\cdot x - d^2 = 0;\ x_{1,2} = d \pm \sqrt{2d^2} = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)d;$$

$$x = x_1 = \left(1+\sqrt{2}\right)d;\ \ x_2 = \left(1-\sqrt{2}\right)d\ \text{ – отбросить.}$$

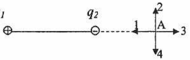
Ответ:
$x = \left(1+\sqrt{2}\right)d$.

Задания для самоконтроля

1. Два одинаковых по величине заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. В каком случае напряженность в точке, лежащей на половине расстояния между ними, больше: если эти заряды: а) одноименные; б) разноименные.

2. Расстояние d между двумя точечными зарядами q_1 = 8 нКл и q_2 = -5,3·10^{-9} Кл равно 40 см. Вычислить напряженность поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему равна напряженность, если второй заряд будет положительным?

3. Как будет направлена напряженность поля $\vec{E}$ в точке А, если $q_1 = +q$, $q_2 = -q$? а)1; б) 2; в) 3; г) 4.



3. Теорема Гаусса

Применение теоремы Гаусса чрезвычайно упрощает решение ряда задач электростатики. Рассмотрим элементарную поверхность площадью dS. Восстановим нормаль $\vec{n}$ к площадке, пусть она образует угол α с вектором напряженности электрического поля (рис. 4).

Выражение

$$\Phi = \int_S E_n dS = \int_S E\cos\alpha dS = \int_S \vec{E}\vec{n}dS$$

называется ***потоком вектора напряженности электрического поля через поверхность S***.

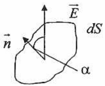


Рис. 4

Поток численно равен количеству силовых линий, пронизывающих поверхность S. Однако поток имеет знак. В случае замкнутых поверхностей направление нормали положительно, если она обращена наружу. Тогда, если вектор $\vec{E}$ выходит наружу, то поток положителен, если $\vec{E}$ направлен внутрь, то поток отрицателен. Следовательно, знак потока совпадает со знаком заряда, создающего электрическое поле.

Теорема Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E}\vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i .$$

В СГСЭ

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E}\vec{n} dS = 4\pi \sum_i q_i .$$

В диэлектриках, где электрические заряды находятся в *связанном* состоянии, для описания электрического поля вводится вектор электрической индукции $\vec{D}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} ,$$

где $\vec{P}$ – вектор поляризации, равен электрическому моменту единицы объема диэлектрика, ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Теорема Гаусса для диэлектриков формулируется следующим образом:

поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности *свободных* зарядов

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \oint_S \vec{D}\vec{n} dS = \sum_i q_i .$$

Если заряд распределен с некоторой объемной плотностью ρ,

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

то теорема Гаусса запишется в виде

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV ,$$

где интеграл в правой части равенства берется по объему V, охватываемому поверхностью S, по которой проводится интегрирование в левой части.

Примеры решения задач

Задача №3.1

Две концентрические металлические сферы радиусом $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -0{,}5$ нКл (Рис. 5). Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях: 1) $r_1 = 5$ см; 2) $r_2 = 9$ см; 3) $r_3 = 15$ см.

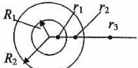


Рис. 5

Дано:	*Решение*:
$q_1 = 1$ нКл $q_2 = -0{,}5$ нКл $R_1 = 6$ см $R_2 = 10$ см $r_1 = 5$ см $r_2 = 9$ см $r_3 = 15$ см *Найти* E_1, E_2, E_3	По принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E}_2$, где $\vec{E_1}$ – напряженность поля, создаваемого первой сферой, $\vec{E_2}$ – второй сферой. Так как поле обладает центральной симметрией, то модуль напряженности поля $E = E_1 + E_2$. 1) Внутри шара радиусом $r_1 = 5$ см зарядов нет, поэтому $E_1 = 0$. 2) Внутри шара радиусом $r_2 = 9$ см находится заряд q_1, поэтому теорема Гаусса запишется в виде: $E_2 4\pi r_2^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_2^2} = 9\times10^9\,\frac{\text{м}}{\Phi}\,\frac{1\times10^{-9}\text{Кл}}{\left(9\times10^{-2}\text{м}\right)^2} = 1110\,\frac{\text{В}}{\text{м}} \cong 1{,}1\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

3) Внутри шара радиусом $r_3 = 15$ см находится заряд $q_1 + q_2$, поэтому теорема Гаусса запишется в виде: $E_3 4\pi r_3^2 = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$,

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{r_3^2} = 9\times10^9\,\frac{\text{м}}{\Phi}\,\frac{(1\text{-}0{,}5)\times10^{-9}\text{Кл}}{\left(15\times10^{-2}\text{м}\right)^2} = 199{,}9\,\frac{\text{В}}{\text{м}} \cong 200\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ:

$E_1 = 0$; $E_2 = 1{,}1$ кВ/м; $E_3 = 200$ В/м.

Задача №3.2

Эбонитовый сплошной шар радиусом $R = 5$ см несет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3 (рис. 6). Определить напряженность E и индукцию D электрического поля в точках:

1) на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии $r_2 = 10$ см от центра сферы. $\varepsilon_{эбонита} = 3$.

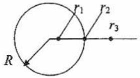


Рис. 6

Дано:
$R = 5$ см
$\rho = 10$ нКл/м^3
$r_1 = 3$ см
$r_2 = 5$ см
$r_3 = 10$ см
$\varepsilon_{эбонита} = 3$

Найти
E_1, E_2, E_3
D_1, D_2, D_3

Решение:
Сферическая поверхность радиуса r заключает в себе заряд $q(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$. По теореме Гаусса для диэлектриков:

$D(r)4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$, где $D(r) = \varepsilon_0\varepsilon E(r)$, откуда

$$D(r) = \rho\frac{r}{3},\ E(r) = \rho\frac{r}{3\varepsilon_0\varepsilon}.$$

1) Внутри шара на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра

$$D_1 = \rho\frac{r_1}{3} = \frac{10\times10^{-9}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\times0{,}03\text{м}}{3} = 0{,}1\ \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2},$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{0{,}1\times10^{-9}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}}{3\times8{,}85\times10^{-12}\frac{\Phi}{\text{м}}} = 3{,}78\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

2) На поверхности шара для $r_2 = 5$ см

$$D_2 = \rho\frac{r_2}{3} = \frac{10\times10^{-9}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\times0{,}05\text{м}}{3} = 167\ \frac{\text{пКл}}{\text{м}^2},$$

$$E_2^{/} = \frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{0{,}167\times10^{-9}\frac{Кл}{м^2}}{3\times8{,}85\times10^{-12}\frac{\Phi}{м}} = 6{,}28\ \frac{\text{В}}{\text{м}}\ (r \le R),$$

$$E_2^{//} = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{0{,}167\times10^{-9}\frac{Кл}{м^2}}{8{,}85\times10^{-12}\frac{\Phi}{м}} = 18{,}8\ \frac{\text{В}}{\text{м}}(r \ge R).$$

3) Вне шара на расстоянии r_3 = 10 см от центра заряд внутри сферы равен $q(R) = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$, тогда теорема Гаусса запишется в виде: $D_3(r_3)4\pi r_3^2 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$, откуда

$$D_3 = \rho\frac{R^3}{3r_3^2} = \frac{10\times10^{-9}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\times(0{,}05\text{м})^3}{3\times(0{,}1\text{м})^2} = 41{,}6\ \frac{\text{пКл}}{\text{м}^2},$$

$$E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_0} = \frac{41{,}6\times10^{-12}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}}{8{,}85\times10^{-12}\frac{\Phi}{\text{м}}} = 4{,}7\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ:
E_1 = 3,78 В/м, D_1 = 0,1 нКл/м^2; $E_2^{/}$ = 6,28 В/м, $E_2^{//}$ = 18,8 В/м, D_2 = 167 пКл/м^2; E_3 = 4,7 В/м, D_3 = 41,6 пКл/м^2.

Задания для самоконтроля

1. Полый стеклянный шар несет равномерно распределенный по объему заряд. Объемная плотность заряда ρ = 100 нКл/м^3. Внутренний радиус шара R_1 = 5 см, наружный – R_2 = 10 см. Вычислить напряженность E и индукцию D электрического поля в точках, отстоящих от центра сферы на расстоянии 1) r_1 = 3 см; 2) r_2 = 6 см; 3) r_3 = 12 см. Диэлектрическая проницаемость стекла 7,0.

4. Работа и энергия электростатического поля. Потенциал

Электростатическое поле является ***потенциальным***, т.е. работа сил поля равна разности потенциальных энергий между начальным и конечным положением тела и не зависит от формы траектории, по которой двигалось тело. Пусть заряд q является источником поля и в этом поле перемещается другой точечный заряд $q^{|}$ из точки 1 в точку 2 вдоль кривой 12. Работа сил поля будет:

$$A_{12} = \int_{12}\vec{F}d\vec{r} = q^{|}\int_{12}\vec{E}d\vec{r} = \frac{qq^{|}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = W_1 - W_2,$$

где r_1 и r_2 – радиусы-векторы начала и конца пути, W_1 и W_2 – потенциальные энергии в начальной и конечной точке. Следовательно, потенциальная энергия точечного заряда

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq^|}{r}.$$

Потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд, т.е.

$$\varphi = \frac{W}{q^|}.$$

Потенциал точечного заряда, записанный в СИ:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

в СГСЭ $\varphi = \dfrac{q}{r}$.

Тогда работу можно представить в виде

$$A_{12} = q^|(\varphi_1 - \varphi_2) = q^|\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ – ***разность потенциалов.***

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{12} \vec{E}d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

где $d\vec{r} \equiv d\vec{l}$ – вектор перемещения, E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление $d\vec{l}$. Для однородного электрического поля

$$\Delta\varphi = E\,d,$$

где d – расстояние между точками поля, между которыми разность потенциалов $\Delta\varphi$.

Циркуляцией вектора $\vec{E}$ вдоль пути L называется линейный интеграл вектора $\vec{E}$ вдоль какого-либо замкнутого пути L

$$\oint_L E_l dl.$$

Поскольку работа консервативной силы на замкнутом пути равна нулю, то на замкнутом контуре выполняется соотношение:

$$\oint_L E_l dl = 0 .$$

Таким образом, циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности, т. е.

$$\varphi = \sum_i \varphi_i .$$

В СИ за единицу потенциала принимается вольт ($[\varphi]$ = В). Один вольт – это потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного 1 кулону, нужно совершить работу в 1 джоуль, 1 Дж = 1 Кл×1 В.

В СГСЭ $[\varphi]$ = СГСЭ-ед. потенциала. 1 В = (1/300) СГСЭ-ед. потенциала.

Между напряженностью электрического поля и потенциалом существует связь:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

или

$$\vec{E} = -\nabla\varphi ,$$

где ∇ – оператор, или символический вектор набла,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} .$$

Эквипотенциальные поверхности – это поверхности равного потенциала. Потенциал может меняться только при переходе от одной эквипотенциальной поверхности к другой. Линии электрического поля нормальны к эквипотенциальной поверхности, поэтому эквипотенциальные поверхности могут служить для наглядного изображения картины поля. При этом чем гуще располагаются эквипотенциальные поверхности, тем быстрее изменяется потенциал при перемещении вдоль нормали к поверхности и тем больше в данном месте напряженность электрического поля $\vec{E}$.

Примеры решения задач

Задача №4.1

Электрический потенциал на поверхности металлического шара равен 120 В. Чему равны напряженность и потенциал внутри этого шара?

Дано:

$\varphi_ш = 120$ В.

Найти

$E_{вн}$; $\varphi_{вн}$

Решение:

Так как электрическое поле внутри заряженного проводника отсутствует, то напряженность поля внутри него равна нулю. Электрическое поле на поверхности шара находится в статическом, равновесном состоянии, т.е. разность потенциалов в любых двух точках, взятых на поверхности шара или внутри него, равна нулю, т.е. потенциалы всех точек проводника равны между собой. Следовательно, потенциал внутри металлического шара равен 120 В.

Ответ:

$E_{вн} = 0$; $\varphi_{вн} = 120$ В.

Задача №4.2

Металлическому шару радиусом 0,1 м сообщен заряд -5 нКл. Определить напряженность и потенциал электрического поля в центре шара.

Дано:

$r = 10^{-1}$ м,

$q = -5\cdot10^{-9}$ Кл,

$\varepsilon = 1$.

Найти

E; φ

Решение:

Напряженность электрического поля в центре шара равна нулю, т.е. $E = 0$, так как все заряды располагаются на поверхности шара.

Потенциал в центре шара равен потенциалу металлического шара на его поверхности, так как поверхность металлического шара эквипотенциальна. Поэтому запишем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \frac{9\cdot10^9 q}{\varepsilon r};$$

$$\varphi = \frac{9\times10^9\,\text{Н/м}^2\times\left(-5\times10^{-9}\right)\text{Кл}}{\text{Кл}^2\times10^{-1}\text{м}} = -450\ \text{В}.$$

Ответ:

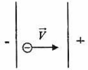
$E = 0$; $\varphi = -450$ В.

<u>Задания для самоконтроля</u>

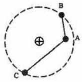
1. В точке поля с потенциалом $\varphi = 1000$ В находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Какой потенциальной энергией он обладает?

2. Положительные заряды $q_1 = 3\cdot10^{-6}$ Кл и $q_2 = 2\cdot10^{-8}$ Кл находятся в вакууме на расстоянии 1,5 м друг от друга. Определить работу, которую нужно совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния 1 м.

3. Чему равна работа A электрического поля по перемещению заряда $-q$? а) $A > 0$; б) $A < 0$; в) $A = 0$.



4. Сравните работы по перемещению заряда в электрическом поле из точки А в В (A_{AB}) и из А в С (A_{AC}): а) $A_{AB} > A_{AC}$; б) $A_{AB} < A_{AC}$; в) $A_{AB} = A_{AC}$.



5. Электрическая емкость. Конденсаторы

Проводник представляет собой тело, содержащее свободные электроны. Заряды электронов компенсированы положительными зарядами ионизированных атомов. Таким образом, проводник представляет собой систему зарядов, обладающих определенной конфигурацией. Такая система зарядов обладает потенциальной энергией и, следовательно, некоторым значением потенциала.

Свободные электроны в проводнике способны под действием электрических сил перемещаться, следовательно, потенциал тела изменится. Поэтому сначала определим понятие емкости уединенного проводника, т.е. такого проводника, вблизи которого нет никаких других тел, которые могли бы повлиять на распределение на нем зарядов.

Опыт показывает, что разные проводники, будучи заряжены одинаковым количеством электричества, принимают разные потенциалы; это указывает, что они отличаются друг от друга некоторым свойством, которое называется емкостью.

Емкость уединенного проводника есть физическая величина, численно равная количеству электричества, которое надо сообщить ранее не заряженному проводнику, чтобы потенциал его принял значение, равное единице:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \text{ или } C = \frac{dq}{d\varphi}.$$

В СИ емкость измеряется в фарадах ([C] = Ф), 1 Ф = 1 Кл/1 В.
В СГСЭ емкость измеряется в сантиметрах ([C] = см). 1 Ф= $9\cdot10^{11}$ см.

Конденсатор является примером системы, емкость которой фактически не зависит от окружающих тел, т. к. все поле сосредоточено лишь между обкладками конденсатора. Емкость конденсатора определяется как

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где q – заряд на обкладках, $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между обкладками. Емкость плоского конденсатора можно рассчитать по формуле:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где S – площадь обкладки, d – расстояние между обкладками.

Энергия электрического поля конденсатора

$$W = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2},$$

соответствующая плотность энергии поля плоского конденсатора определяется формулой

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Примеры решения задач

Задача №5.1

Обладает ли электрической емкостью незаряженный проводник?

Решение:

Электрическая емкость проводника зависит от его формы, размеров, площади внешней поверхности и от свойств окружающей среды, но не зависит ни от массы, ни от рода вещества, ни от заряда, т. е. незаряженный (нейтральный) проводник обладает электроемкостью.

Ответ: Да.

Задача №5.2

Напряженность электрического поля конденсатора электроемкостью 0,8 мкФ равна 1000 В/м. Определить энергию электрического поля конденсатора, если расстояние между его обкладками равно 1 мм.

Дано:
$C = 0{,}8\cdot10^{-6}$ Ф,
$E = 10^3$ В/м,
$d = 10^{-3}$ м.
Найти
W

Решение:

Так как энергия электрического поля конденсатора $W = \dfrac{C(\varphi_1-\varphi_2)^2}{2}$, а потенциал и напряженность связаны соотношением $\Delta\varphi = E\,d$, получим

$$W = \frac{Cd^2E^2}{2};$$

$$W = \frac{0{,}8\cdot10^{-6}\text{Ф}\cdot10^{-6}\text{м}^2\cdot10^6\text{В}^2}{2\text{м}^2} = 4\cdot10^{-7}\,\text{Дж}.$$

Ответ:
$W = 4\cdot10^{-7}$ Дж.

Задания для самоконтроля

1. Что произойдет с разностью потенциалов на пластинах заряженного конденсатора, если уменьшить расстояние между ними?

2. При сообщении металлическому шару, находящемуся в воздухе, заряда $2\cdot10^{-7}$ Кл его потенциал оказался равным 18 кВ. Определите радиус шара.

3. Какой электроемкостью обладает проводящий шар радиусом 20 см в воде, уединенный от других проводников?

6. Постоянный электрический ток

Если в проводнике создать электрическое поле, то носители заряда придут в упорядоченное движение: положительные в направлении поля, отрицательные против поля. Упорядоченное движение зарядов называется ***электрическим током***.

Его принято характеризовать ***силой тока*** – скалярной величиной, равной заряду, переносимому носителями через поперечное сечение проводника в единицу времени

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных носителей. За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные заряды. Ток, не изменяющийся со временем, называют постоянным (обозначается – I).

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Более детально электрический ток можно охарактеризовать с помощью ***вектора плотности тока*** $\vec{j}$.

Вектор $\bar{j}$ численно равен силе тока di через расположенную в данной точке перпендикулярную к направлению движения носителей площадку $dS_{\perp}$, отнесенной к величине этой площадки

$$j = \frac{di}{dS_{\perp}}.$$

Тогда сила тока равна потоку вектора плотности тока через поверхность S, т.е.

$$i = \int_S j dS_{\perp} = \int_S j_n dS,$$

где j_n – проекция вектора плотности тока на направление нормали к площадке dS.

Вектор плотности тока выражается через ***среднюю дрейфовую*** или ***упорядоченную скорость*** движения носителей заряда $\bar{v}$:

$$\vec{j} = en\vec{v},$$

де n – число носителей заряда в единице объема.
В СИ сила тока измеряется в амперах, $[I]$ = А,
в СГСЭ: $[I]$ = СГСЭ-ед. силы тока.

Основной закон постоянного тока – ***закон Ома***, который в интегральной форме имеет вид:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R},$$

где R – сопротивление определенного участка проводника, φ_1 и φ_2 – значения потенциала у начала и конца этого участка (считая по направлению тока).

Также закон Ома в интегральной форме может быть записан в виде:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl = IR.$$

Сопротивление в СИ измеряется в омах ($[R]$ = Ом), 1 Ом = 1 В/1 А. Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E},$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление вещества, σ – коэффициент электропроводности.

При прохождении по проводнику тока он нагревается, количество выделяющегося в проводнике за время t тепла определяется законом Джоуля – Ленца. ***Закон Джоуля – Ленца в интегральной форме***:

$$Q = RI^2t, \text{ или } \quad Q = \int_0^t Ri^2 dt,$$

если сила тока изменяется со временем.

В дифференциальной форме закон Джоуля – Ленца имеет вид:

$$w = \rho j^2 = \sigma E^2,$$

где w – удельная мощность тока, т. е. количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени.

Примеры решения задач

Задача №6.1

Через лампочку накаливания течет ток 0,8 А. Сколько электронов проводимости (свободных электронов) проходит через поперечное сечение волоска лампы в 1 с?

Дано:
$I = 0{,}8$ А,
$t = 1$ сек,
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.
Найти
N

Решение:

Сила тока, по определению $I = \frac{q}{t}$, откуда $q = I\,t$. Тогда

$$N = \frac{q}{e} = \frac{I \cdot t}{e}; \; N = \frac{0{,}8\text{А} \times 1\text{сек}}{1{,}6 \times 10^{-19}\text{Кл}} = 5 \cdot 10^{18}.$$

Ответ:
$N = 5 \cdot 10^{-18}$.

Задача №6.2

Определить скорость дрейфа электронов проводимости в медном проводнике, по которому проходит ток 5 А, если площадь его поперечного сечения 20 мм^2, концентрация электронов проводимости $n_0 = 9 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. За какое время электрон переместится по проводнику на 1 см? Электрический ток постоянный.

Дано:
$I = 5$ А,
$n_0 = 9 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$,
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ К,
$S = 2 \cdot 10^{-5}$ м^2,
$l = 10^{-2}$ м.
Найти
v, t

Решение:
Скорость дрейфа электронов проводимости определим из формулы $I = jS = en_0Sv$: $v = \dfrac{I}{en_0S}$;

$$v = \frac{5\text{А}}{1{,}6\times10^{-19}\text{Кл}\times9\times10^{28}\text{м}^{-3}\times2\times10^{-5}\text{м}^2} = 1{,}74 \cdot 10^{-5}\ \text{м/с} =$$

$= 0{,}0174$ мм/с.

Принимая среднюю скорость дрейфа электронов проводимости постоянной в постоянном токе, получим

$$t = \frac{l}{v};\quad t = \frac{10^{-2}\text{м}}{1{,}74\times10^{-5}\text{м/с}} = 575\ \text{с} = 9\ \text{мин. } 35\ \text{сек.}$$

Ответ:
$v = 0{,}0174$ мм/с; $t = 9$ мин. 35 сек.

Задания для самоконтроля

1. Определите сопротивление резистора, включенного в электрическую сеть с напряжением 220 В, чтобы по нему протекал ток не более 2 А.
2. Сколько электронов проводимости проходит каждую секунду через поперечное сечение вольфрамовой нити лампочки мощностью 70 Вт, включенной в сеть с напряжением 220 В?

7. Электродвижущая сила. Напряжение. Обобщенный закон Ома. Правила Кирхгофа

Для поддержания постоянного тока необходима непрерывная затрата энергии. Вся энергия электростатического поля, согласно закону Джоуля – Ленца, в конечном счете переходит в джоулево тепло. Согласно закону сохранения энергии в стационарном поле, вся энергия, выделяющаяся в цепи тока, должна непрерывно возмещаться за счет других видов энергии – механической, химической, тепловой и т.д. Поэтому для поддержания постоянного тока необходимо, чтобы на всем протяжении электрической цепи либо на отдельных ее участках действовали электродвижущие силы неэлектростатического происхождения. Эти силы называют ***сторонними*** $\vec{F}^{стр}$. Сторонние силы совершают работу над перемещающимися по цепи зарядами.

Величина, равная работе сторонних сил, отнесенной к единице положительного заряда, называется ***электродвижущей силой (э.д.с.)***

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}.$$

В СИ э. д. с. измеряется в вольтах $[\mathcal{E}] = \text{В}$.

Работа сторонних сил в замкнутой цепи (на всем ее протяжении)

$$A = \oint_L \vec{F}^{cmp} d\vec{l} = \oint_L q\vec{E}^{cmp} d\vec{l} = q\oint_L E_l dl,$$

где $\vec{E}^{cmp} = \dfrac{\vec{F}^{cmp}}{q}$ – напряженность поля сторонних сил. Тогда

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \oint_L E_l^{cmp} dl$$

– э. д. с. в замкнутой цепи равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.

На участке цепи 1 – 2 э. д. с. будет:

$$\mathcal{E} = \int_1^2 E_l^{cmp} dl = \int_1^2 \vec{E}^{cmp} d\vec{l}.$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля: $\vec{F}_E = q\vec{E}$, следовательно, результирующая сила, действующая на заряд в любой точке цепи:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}^{cmp} = q\left(\vec{E} + \vec{E}^{cmp}\right),$$

этой силой совершается работа

$$A_{12} = q\int_1^2 E_l\, dl + q\int_1^2 E_l^{cmp} dl = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + q\mathcal{E}_{12}.$$

Для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$, тогда

$$A = q\ \mathcal{E}_{12}.$$

Мощность, развиваемая источником э. д. с.

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathcal{E}\frac{dq}{dt} = \mathcal{E} \cdot I.$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется ***падением напряжения***, или просто ***напряжением U*** на данном участке цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \ .$$

С учетом сторонних сил получим ***обобщенный закон Ома*** в интегральной форме:

$$IR_{12} = \int_1^2 E_l \, dl + \int_1^2 E_l^{стр} dl = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \ .$$

В дифференциальной форме обобщенный закон Ома имеет вид:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^{стр}\right).$$

I правило Кирхгофа:

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю $\sum\limits_k I_k = 0$.

Узлом цепи называется точка, где сходится больше двух проводников (рис. 7).

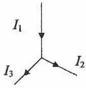


Рис. 7

II правило Кирхгофа:

Сумма электродвижущих сил в любом замкнутом контуре равна сумме произведений сил токов в отдельных участках этого контура на их сопротивление

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k \ .$$

Примеры решения задач

Задача №7.1

Э. д. с. источника электрической энергии равна 100 В. При внешнем сопротивлении 49 Ом сила тока в цепи 2 А. Найти падение напряжения внутри источника и его внутреннее сопротивление.

Дано:

$\mathcal{E}$=100 В,
R = 49 Ом,
I = 2 А.
Найти
$U_{внутр}$; r

Решение:

Закон Ома для полной цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$, откуда получим

$\mathcal{E} = I{\cdot}R + I{\cdot}r$, или $U_{внутр}$ = 100 В – 2 А·49 Ом = 2 В;

$r = \dfrac{U_{внутр}}{I}$; r = 2 В/2 А = 1 Ом.

Ответ:

$U_{внутр}$ = 2 В; r = 1 Ом.

Задача №7.2

Источник тока с э. д. с. 120 В и внутренним сопротивлением 2 Ом замкнут на внешнее сопротивление 58 Ом. Определить полную и полезную мощности источника тока.

Дано:

$\mathcal{E}$=120 В,
r = 2 Ом,
R = 58 Ом.
Найти
$P_{полн}$; $P_{полезн}$

Решение:

Полная мощность источника тока $P_{полн} = I{\cdot}\mathcal{E}$, полезная мощность $P_{полезн} = I^2R$. По закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.\ \text{Тогда}\ P_{полн} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r};$$

$$P_{полн} = \frac{120\times120\text{В}^2}{60\text{Ом}} = \ = 240\ \text{Вт};$$

$$P_{полезн} = \frac{\mathcal{E}^2R}{(R+r)^2},\ P_{полезн} = \frac{120\times120\text{В}^2\times58\text{Ом}}{60\times60\text{Ом}} = 232\ \text{Вт}.$$

Ответ:

$P_{полн}$ = 240 Вт; $P_{полезн}$ = 232 Вт.

<u>Задания для самоконтроля</u>

1. Определите э. д. с. источника тока, если при перемещении электрического заряда 10 Кл сторонняя сила совершает работу в 120 Дж.

2. Определите стоимость электрической энергии, потребляемой лампой мощностью 100 Вт за 200 час. горения. Стоимость 1 кВт·час энергии 0,2 руб.

8. Постоянное магнитное поле

В пространстве, окружающем токи, возникает поле, которое называется ***магнитным полем***. Магнитное поле проявляется по силам, действующим на внесенные в него проводники, по которым течет ток. Так, два параллельных провода, по которым текут токи одного направления, взаимно притягиваются. Если токи имеют противоположные направления, то проводники отталкиваются.

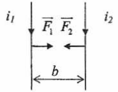


Рис. 8

Рассмотрим проводники, которые находятся в пустоте.

Сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из параллельных проводников, пропорциональна величине токов i_1 и i_2 в них и обратно пропорциональна расстоянию b между ними

$$F_1 = k\frac{2i_1i_2}{b}.$$

В СИ коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

В ***абсолютной электромагнитной системе*** единиц измерений СГСМ коэффициент пропорциональности $k = 1$. В СГСМ сила тока измеряется в ***абсолютных электромагнитных единицах силы тока*** $[i]$ = СГСМ-ед. силы тока. Данная система используется только для измерения чисто магнитных величин, все коэффициенты пропорциональности в ней равны единице.

Система СГСЭ используется для измерения только чисто электрических величин. В этой системе коэффициент

$$k = \frac{1}{c^2},$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – электромагнитная постоянная, ее значение совпадает со скоростью света в пустоте.

Гауссова система является комбинированной и предназначена для измерения как магнитных, так и электрических величин. В ней единицы измерения электрических величин совпадают с единицами СГСЭ-системы, а магнитных величин – с единицами СГСМ-системы. Поэтому в гауссовой системе во все формулы, содержащие наряду с магнитными величинами силу тока или заряд, входит по одному множителю $1/c$ на каждую стоящую в формуле величину i или q. В гауссовой системе закон взаимодействия токов имеет вид:

$$F_1 = \frac{1}{c^2}\frac{2i_1 i_2}{b}.$$

Рассмотрим контур в виде прямоугольной рамки с током, подвешенной на нити. Пусть S – площадь рамки, восстановим нормаль $\vec{n}$ к данной рамке.

Магнитным моментом контура называется величина $\vec{p}_m = IS\vec{n}$.

Его следует рассматривать как вектор, направление которого совпадает с направлением положительной нормали к рамке с током.

Магнитное поле оказывает на такой контур ориентирующее действие, т. е. в магнитном поле на рамку с током действует момент пары сил M, причем в данной точке поля на все рамки с одним и тем же магнитным моментом действует одинаковый момент пары сил M.

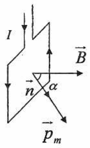


Рис. 9

Магнитной индукцией $\vec{B}$ называют физическую величину

$$\vec{B} = k^{|}\frac{M_{max}}{p_m} = k^{|}\frac{M_{max}}{IS},$$

где $k^{|}$ – некоторый коэффициент пропорциональности, M_{max} - максимальный момент пары сил (когда угол $\alpha = \pi/2$).

За направление вектора $\vec{B}$ принимается направление положительной нормали к рамке с током, принимающей положение устойчивого равновесия в магнитном поле.

В СИ единица магнитной индукции – тесла [B] = Тл, в гауссовой и СГСМ – системах магнитная индукция измеряется в гауссах [B] = Гс, причем 1 Тл = 10^4 Гс.

Магнитное поле удобно представлять с помощью линий магнитной индукции. За ***линию магнитной индукции*** принимается такая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора магнитной индукции в этой точке.

Рис. 10

Выполняется ***принцип суперпозиции магнитных полей***.

Магнитные поля отдельных элементарных участков тока векторно складываются, причем каждый элемент тока возбуждает поле, совершенно не зависящее от наличия других токов.

Согласно ***закону Био – Савара – Лапласа*** элемент тока длины dl возбуждает магнитное поле dB:

$$d\vec{B} = k\frac{i\left[d\vec{l}\vec{r}\right]}{r^3},$$

где k – коэффициент пропорциональности, i – сила тока, $d\vec{l}$ – вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, в какую течет ток, $\vec{r}$ – вектор, проведенный от элемента тока в ту точку, в которой определяется $d\vec{B}$.

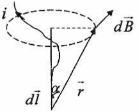


Рис. 11

Магнитное поле, создаваемое током, текущим по бесконечному прямолинейному проводу, определяется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R},$$

где R – расстояние от проводника то точки, где определяется величина магнитной индукции. Направление вектора магнитной индукции определяется по правилу ***правого винта***, или ***правого буравчика***: если поступательное движение буравчика сопоставить с направлением тока, то вращение его рукоятки укажет направление линий магнитной индукции.

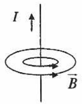


Рис. 12

Магнитная индукция в центре кругового тока направлена вдоль оси симметрии и равна $B = \frac{\mu_0 i}{2R}$, где R – радиус кругового тока.

Линии магнитной индукции всегда замкнуты, при этом циркуляция вектора $\vec{B}$ отлична от нуля, если контур, по которому берется циркуляция, охватывает ток.

При обходе по контуру, охватывающему ток, циркуляция вектора $\vec{B}$ равна $\mu_0 i$:

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 i.$$

Если контур тока не охватывает, то циркуляция вектора $\vec{B}$ равна нулю.

Магнитной индукции нельзя приписать потенциал, который был бы связан с ней однозначно. После каждого обхода по контуру, охватывающему ток, и возвращения в первоначальную точку, он получал бы приращение, равное $\mu_0 i$. Следовательно, магнитное поле является ***вихревым***, или ***соленоидальным***.

Замкнутость линий магнитной индукции математически выражается в ***теореме Гаусса для вектора магнитной индукции***.

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю

$$\Phi_B = \oint_S B_n dS = 0 .$$

Для характеристики магнитного поля в веществе вводится вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} ,$$

где $\vec{J}$ – вектор намагничивания.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ формулируется следующим образом: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по некоторому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых этим контуром

$$\oint_L H_l dl = \sum i .$$

Макроскопические токи – это токи, текущие по проводам.

Если ток распределен по сечению провода с некоторой плотностью $\vec{j}$, то теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ запишется в виде:

$$\oint_L H_l dl = \int_S j_n dS .$$

Интеграл в правой части берется по произвольной поверхности, ограниченной контуром, по которому берется циркуляция в левой части.

В изотропной среде $\vec{H}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{B}$ и связано с ним зависимостью

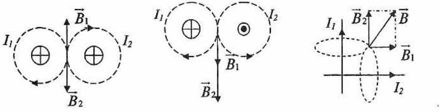
$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где μ – магнитная проницаемость вещества.

Примеры решения задач

Задача №8.1

По двум длинным прямолинейным проводам, находящимся на расстоянии $l = 5$ см друг от друга в воздухе, текут токи по 10 А в каждом. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого токами в точке, лежащей посередине между проводами, для случаев: а) провода параллельны, токи текут в одном направлении; б) провода параллельны, токи текут в противоположных направлениях; в) провода перпендикулярны, направление токов указано на рисунке.



а) б) в)

Дано:
$l = 5$ см,
$I = 10$ А
Найти
B

Решение:

По принципу суперпозиции $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

а) Модуль $B_1 = B_2 = \mu_0 I/2\pi r$, $B = B_1 - B_2 = 0$.

б) $B = B_1 - B_2 = 2\,B_1 = \mu_0 I/\pi r$, где $r = l/2$, $B = 2\mu_0 I/\pi l$,

$$B = \frac{2\times 4\pi\times 10^{-7}\text{Гн/м}\times 10\text{А}}{\pi\times 0{,}05\text{м}} = 16\cdot 10^{-5}\ \text{Тл} = 160\ \text{мкТл}.$$

в) $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2}B_1$, $B = \dfrac{\sqrt{2}\times 4\pi\times 10^{-7}\text{Гн/м}\times 10\text{А}}{\pi\times 0{,}05\text{м}} =$

$= 1{,}13\cdot 10^{-4}$ Тл $= 113$ мкТл.

Ответ:

а) $B = 0$; б) $B = 160$ мкТл; в) $B = 113$ мкТл.

Задача №8.2

С какой силой взаимодействуют два параллельных проводника длиной $l = 0{,}5$ м каждый, по которым текут токи 10 и 40 А в одном направлении, если они находятся в воздухе на расстоянии 0,5 м друг от друга?

Дано:
$l = 0{,}5$ м,

Решение:

Сила взаимодействия двух проводников с токами, рас-

$I_1 = 10$ А,
$I_2 = 40$ А,
$r = 0{,}5$ м,
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Или $4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2
Найти
F

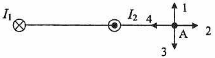
положенных на расстоянии r друг от друга, равна

$$F = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi r}; F = \frac{4\pi \times 10^{-7} \text{Н/А}^2 \times 1 \times 400 \text{А}^2 \times 0{,}5\text{м}}{2\pi \times 0{,}5\text{м}} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$$

Ответ:
$F = 8 \cdot 10^{-5}$ Н.

Задания для самоконтроля

1. Если сила тока $I_1 = 0{,}5 I_2$, то как направлен вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в точке А: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4 ?



2. На каком расстоянии от прямолинейного провода, по которому течет ток 12 А, индукция магнитного поля равна $6 \cdot 10^{-6}$ Тл?

9. Действие магнитного поля на токи и заряды. Электромагнитная индукция

Закон Ампера: на элемент тока $d\vec{l}$ в магнитном поле действует сила

$$d\vec{F} = ki\left[d\vec{l}\vec{B}\right].$$

Модуль силы $dF = kiB\,dl\sin\alpha$, где α – угол между $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.
В СИ $k = 1$, в гауссовой системе $k = 1/c$.

Магнитное поле действует на элемент тока и на весь проводник с током. В проводнике происходит упорядоченное движение зарядов, следовательно, магнитное поле действует на отдельные движущиеся заряды. Общее действие этих зарядов передается проводнику, по которому они перемещаются.

На один заряд действует ***сила Лоренца***

$$\vec{F} = ke\left[\vec{v}\vec{B}\right].$$

В произвольном электромагнитном поле на заряд также действует сила электрического поля, равная $e\vec{E}$, тогда общая сила, записанная в СИ, будет:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\left[\vec{v}\vec{B}\right].$$

Так как сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости заряженной частицы, она работы над частицей не совершает. Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, изменить ее энергию нельзя.

Другое действие магнитного поля заключается в том, что оно вызывает появление электрических токов. Это явление называется ***электромагнитной индукцией***, а возникающие токи называются ***индукционными***.

Причиной появления индукционного тока является изменение магнитного потока через поверхность некоторого проводящего контура. Величина индукционного тока не зависит от способа, которым вызывается изменение потока магнитной индукции

$$\Phi_B = \int_S B_n dS = \int_S \vec{B}\vec{n} dS,$$

а определяется лишь скоростью изменения потока, т. е. $d\Phi/dt$.

Ленц установил правило, с помощью которого можно найти направление индукционного тока.

Правило Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Для создания тока в цепи необходимо наличие э. д. с., следовательно, при изменении магнитного потока Φ в контуре возникает ***электродвижущая сила индукции*** $\mathcal{E}_i$. Ее величина была определена Фарадеем:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ – поток вектора магнитной индукции через поверхность, охватываемую контуром. Это ***основной закон электромагнитной индукции***, или ***закон Фарадея***.

Если контур составлен из нескольких витков, как, например, в катушках, то каждый виток может быть сцеплен с различными потоками. Наводимая в катушке э. д. с. будет равна сумме э. д. с. в отдельных витках

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\left(\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots\right).$$

Сумма потоков, сцепленных с отдельными витками катушки, называется ее ***потокосцеплением***.

В СИ магнитный поток измеряется в веберах $[\Phi]$ = Вб. 1 вебер – это поток через поверхность в 1 м^2, пересекаемую нормальными к ней линиями магнитной индукции B = 1 Тл.

При скорости изменения магнитного потока 1Вб/сек в контуре индуцируется э. д. с. =1 В.

В гауссовой системе $[\Phi]$ = Мкс (максвелл). 1 Мкс = 1 Гс·см^2.

Примеры решения задач

Задача №9.1

Проводник, активная длина которого 0,4 м, движется со скоростью 10 м/сек под углом 30° к линиям индукции однородного магнитного поля. Определить индукцию магнитного поля, если на концах проводника возникла э. д. с., равная 2 В.

Дано:
l = 0,4 м,
v = 10 м/сек,
α = 30°,
$\mathcal{E}_I$ = 2 В.
Найти
B

Решение:
В проводнике, движущемся в магнитном поле, возникает э. д. с. индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S B_n dS\right) = -\int_S \frac{\partial(B_n S)}{\partial t} = Blv\sin\alpha \text{, откуда}$$

$$B = \frac{2\text{В}}{0{,}4\text{м}\times 10\text{м/сек}\times 0{,}5} = 1\text{Тл}.$$

Ответ:
B = 1 Тл.

Задача №9.2

Прямолинейный проводник, активная длина которого 0,2 м, помещен перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определить силу тока, проходящего по проводнику, если магнитное поле с индукцией 4 Тл действует на него с силой 2,4 Н.

Дано:
l = 0,2 м,
B = 4 Тл,
α = 90°,
F = 2,4 Н.
Найти
I

Решение:
Из закона Ампера $F = I \cdot B \cdot l \cdot \sin\alpha$ находим

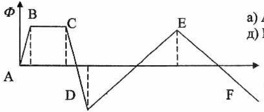
$$I = \frac{F}{Bl\sin\alpha};\ I = \frac{2{,}4\text{Н}}{4\text{Н}(\text{А}\times\text{м})\times 0{,}2\text{м}\times 1} = 3\text{ А}.$$

Ответ:
I = 3 А.

Задания для самоконтроля

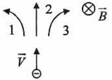
1. Электрон влетает в однородное магнитное поле, индукция которого 0,5 Тл, со скоростью 20000 км/с перпендикулярно линиям индукции. Определите силу, с которой магнитное поле действует на электрон.

2. На рисунке показана зависимость величины потока магнитной индукции от времени. На каком участке э.д.с. электромагнитной индукции положительна и максимальна?



а) AB; б) BC; в) CD; г) DE; д) EF

3. Отрицательно заряженная частица влетает в однородное магнитное поле с магнитной индукцией B, направленной перпендикулярно плоскости рисунка. В каком направлении она будет двигаться: а) 1; б) 2; в) 3?



10. Явление самоиндукции. Энергия магнитного поля

При всяком изменении силы тока в контуре в нем возникает э. д. с. индукции, которая вызывает дополнительный ток в контуре. Это явление называется ***самоиндукцией***, а дополнительные токи, вызываемые э. д. с. самоиндукции – ***экстратоками самоиндукции***.

Магнитный поток, пронизывающий контур, пропорционален току в контуре, т. е.

$$\Phi = Li,$$

где L – индуктивность контура. Индуктивность зависит от формы, размеров контура, а также от магнитной проницаемости среды, в которой он находится.

В СИ индуктивность измеряется в генри $[L]$ = Гн.

Применяя к явлению самоиндукции основной закон электромагнитной индукции, получим для э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где n – число витков на единицу длины соленоида, V – объем пространства, заключенного внутри соленоида, μ – относительная магнитная проницаемость среды.

Энергия магнитного поля, заключенная в пространстве внутри соленоида, может быть найдена по формуле

$$W = \frac{Li^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V,$$

где H – напряженность магнитного поля.

Плотность энергии магнитного поля соленоида будет:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Примеры решения задач

Задача №10.1

Через катушку без сердечника, имеющую длину 15,7 см, площадь поперечного сечения 5 см^2 и обмотку из 500 витков, проходит ток 20 А. Определить э. д. с. самоиндукции, которая возникает в катушке, если ток исчезнет (уменьшится до нуля) за 0,002 с.

Дано:

$l = 15{,}7 \cdot 10^{-2}$ м,

$S = 5 \cdot 10^{-4}$ м^2,

$n = 500$,

$I_0 = 20$ А,

$I_t = 0$,

$\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ с,

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Или $4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2,

$\mu = 1$.

Найти

$\mathcal{E}$.

Решение:

Э. д. с. самоиндукции, возникающая в катушке при изменении силы тока в ней, равна $\mathcal{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$; где L – индуктивность катушки, вычисляемая по формуле

$L = \frac{\mu_0 \mu n^2 S}{l}$. Вычисляя, находим э. д. с. самоиндукции:

$$\mathcal{E} = -L\frac{\mu_0 \mu n^2 S(I_t - I_0)}{l \Delta t};$$

$$\mathcal{E} = \frac{4 \times 3{,}14 \times 10^{-7} \text{Н/А}^2 \times 25 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-4} \text{м}^2 \times 20 \text{А}}{15{,}7 \times 10^{-2} \text{м} \times 2 \times 10^{-3} \text{сек}} = 10 \text{ В}.$$

Ответ:

$\mathcal{E} = 10$ В.

Задача №10.2

Определить индуктивность катушки, если при прохождении тока 2 А энергия магнитного поля в ней была равна 1 Дж.

Дано:
$I = 2$ А,
$W = 1$ Дж
Найти
L

Решение:

Энергия магнитного поля в катушке с током $W = \dfrac{Li^2}{2}$,

откуда $L = \dfrac{2W}{I^2}$; $L = 2$ Дж/4 А^2 = 0,5 Ом×с = 0,5 Гн.

Ответ:
$L = 0{,}5$ Гн.

<u>*Задания для самоконтроля*</u>

1. Требуется изготовить катушку длиной 6,28 см и площадью поперечного сечения 40 см^2 с индуктивностью 0,02 Гн. Сколько витков должна иметь эта катушка?

2. Определите энергию магнитного поля катушки индуктивностью 0,8 Гн, когда по ней проходит ток 4 А.

11. Переменный ток

Закон Ома и правила Кирхгофа остаются справедливыми для мгновенных значений изменяющегося тока и напряжения, если только их изменения происходят не слишком быстро (***квазистационарные токи***).

Сопротивление, не обладающее индуктивностью и емкостью, называется ***активным***.

Если к зажимам **активного сопротивления** приложено напряжение, изменяющееся по закону $U = U_m \cos\omega t$, то ток через сопротивление при выполнении условия квазистационарности определяется законом Ома

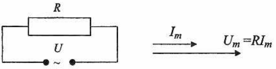


Рис. 13

$$i = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R}\cos\omega t = I_m \cos\omega t.$$

Таким образом, между амплитудными значениями силы тока и напряжения U_m имеется соотношение

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

Напряжение и ток в рассматриваемом случае изменяются синфазно (рис. 13).

Если подать переменное напряжение на концы **индуктивности** с пренебрежимо малым сопротивлением и емкостью, то в индуктивности начнет течь переменный ток, вследствие чего возникнет э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_S = -L\frac{di}{dt}.$$

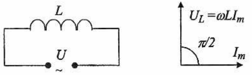


Рис. 14

Обобщенный закон Ома

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

при условии $R = 0$, $U = \varphi_1 - \varphi_2$, $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_S$ запишется в виде:

$$L\frac{di}{dt} = U_m \cos\omega t = U_L,$$

где U_L – падение напряжения на индуктивности. После интегрирования выражения $di = LU_m \cos\omega t dt$ получим

$$i = \frac{U_m}{\omega L}\sin\omega t = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

где $I_m = \dfrac{U_m}{\omega L}$.

Роль сопротивления в данном случае играет величина $X_L = \omega L$, которую называют ***реактивным индуктивным сопротивлением***, или просто ***индуктивным сопротивлением***. Если L взять в генри, а ω – в сек$^{-1}$, то X_L будет выражено в Омах.

Падение напряжения на индуктивности

$$U = U_m \cos\omega t = \omega L I_m \cos\omega t$$

опережает по фазе ток, текущий через индуктивность, на $\pi/2$ (рис. 14).

Если переменное напряжение подано на **емкость** C, то напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = U_m \cos\omega t .$$

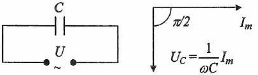


Рис. 15

Тогда

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(U_m \cos\omega t\right) = -\omega C U_m \sin\omega t = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\quad I_m = \omega C U_m = \dfrac{U_m}{\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)}.$

Величина $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ называется ***реактивным емкостным сопротивлением*** или просто ***емкостным сопротивлением***. Если C взять в фарадах, а ω в сек$^{-1}$, то X_L будет выражено в Омах.

Падение напряжения на емкости:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos\omega t .$$

Падение напряжения на емкости отстает по фазе от текущего через емкость тока на π/2 (рис. 15).

В цепи, состоящей из активного сопротивления R, емкости C и **индуктивности** L, падения напряжений U_R, U_L и U_C в сумме должны быть равны приложенному к цепи напряжению U.

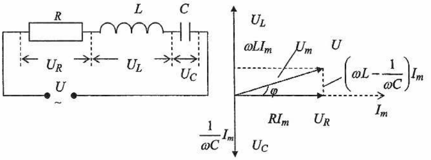


Рис. 16

Сложив векторы, изображающие U_R, U_L и U_C, получим вектор, изображающий U (его длина равна U_m). Этот вектор образует с осью токов угол φ, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Угол φ дает разность фаз между напряжением U и силой тока i. Как следует из рис. 16, амплитуда тока равна

$$I_m=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Таким образом, в цепи течет ток

$$i=I_m\cos(\omega t-\varphi),$$

где φ и I_m определены выше.

Величина $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}$ называется ***полным сопротивлением цепи***. Величина $X=X_L-X_C=\omega L-\dfrac{1}{\omega C}$ называется ***реактивным сопротивлением***.

При $\omega L>\dfrac{1}{\omega C}$ ток отстает от напряжения, при $\omega L<\dfrac{1}{\omega C}$ ток опережает напряжение. При частоте $\omega_{рез}=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ изменения тока и напряжения происходят синфазно, т. к. $\omega L=\dfrac{1}{\omega C}$.

При этой частоте полное сопротивление цепи Z имеет наименьшее значение, равное R. Соответственно сила тока достигает наибольшего (возможного при данном U_m) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи. Падения напряжения на емкости U_C и индуктивности U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется ***резонансом напряжений***, а частота $\omega_{рез}=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – ***резонансной частотой***.

Явление резонанса напряжений характерно тем, что полное сопротивление цепи оказывается чисто активным (ток и напряжение изменяются синфазно) и имеет наименьшую возможную при данных параметрах цепи величину.

Мгновенное значение мощности, выделяемой в цепи переменного тока

$$P(t)=U(t)i(t)=U_m\cos\omega t\, I_m\cos(\omega t-\varphi).$$

Данное выражение преобразуется к виду

$$P(t)=\frac{1}{2}U_mI_m\cos\varphi+\frac{1}{2}U_mI_m\cos(2\omega t-\varphi).$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение $P(t)=P$. Так как среднее значение $\cos(2\omega t-\varphi)$ равно нулю,

$$P=\frac{U_mI_m}{2}\cos\varphi.$$

Если ток в цепи не совершает механической работы, средняя мощность выделяется на активном сопротивлении в виде тепла. Так как

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z},$$

то с учетом того, что $U_m/Z = I_m$, получим **среднее значение мощности**

$$P = \frac{RI_m^2}{2}.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Данная величина называется ***действующим значением силы тока***. Аналогично $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ называется ***действующим значением напряжения***. Тогда формула для средней мощности примет вид

$$P = UI\cos\varphi,$$

где $\cos\varphi$ – ***коэффициент мощности***.

Примеры решения задач

Задача №11.1

Как изменится индуктивное сопротивление катушки, если ее включить в цепь переменного тока с частотой 10 кГц вместо 50 Гц?

Дано:	*Решение:*
$\nu_1 = 50$ Гц,	Используя формулу индуктивного сопротивления катушки $X_L = 2\pi\nu L$, находим
$\nu_1 = 10000$ Гц	$\dfrac{X_{l_2}}{X_{l_1}} = \dfrac{2\pi\nu_2 L}{2\pi\nu_1 L} = \dfrac{\nu_2}{\nu_1}$; $\dfrac{X_{l_2}}{X_{l_1}} = \dfrac{10000\text{Гц}}{50\text{Гц}} = 200$.
Найти X_{l2}, X_{l1}	*Ответ:* $X_{l2} : X_{l1} = 200$.

Задача №11.2

Конденсатор электроемкостью 0,5 мкФ включен в сеть переменного тока. Определить период колебаний переменного тока, если емкостное сопротивление конденсатора равно 20 Ом.

Дано:	*Решение*:
$C = 5\cdot10^{-5}$ Ф,	Из формулы емкостного сопротивления выразим T:
$X_C = 20$ Ом	$T = 2\pi\, C\, X_C$;
Найти	$T = 6{,}28\cdot5\cdot10^{-5}$ Ф$\cdot$20 Ом = 6,28 мс.
T	*Ответ*:
	$T = 6{,}28$ мс.

<u>Задания для самоконтроля</u>

1. Катушка индуктивностью 0,8 Гн включена в сеть промышленного переменного тока. Определите индуктивное сопротивление катушки.

2. Определите частоту переменного тока, если конденсатор электроемкостью 500 мкФ имеет емкостное сопротивление 0,3 Ом.

12. Электрические колебания. Колебательный контур

Электрические колебания могут возникать в цепи, содержащей индуктивность и емкость. Такая цепь называется ***колебательным контуром***. Если активное сопротивление цепи равно нулю, то полная энергия, слагающаяся из энергии электрического поля $\frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2$ и энергии магнитного поля $\frac{1}{2}Li^2$, не расходуется на нагревание и будет оставаться постоянной – это **идеальный** контур. Во время колебаний внешнее напряжение к контуру не приложено, поэтому падение напряжения на емкости $U_C = \frac{q}{C}$ и на индуктивности $U_L = L\frac{di}{dt}$ в сумме должны дать нуль:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Если ввести обозначение $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, получим

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решением этого уравнения является формула

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой ω_0, называемой ***собственной частотой*** контура.

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем 1/С:

$$U = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Выражение для силы тока

$$i = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Для **реального** контура уравнение колебаний можно получить, исходя из того, что сумма падений напряжения на емкости, индуктивности и активном сопротивлении должна быть равна нулю:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

Введя обозначение $\beta = \frac{R}{2L}$, получим

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, решение уравнения имеет вид

$$q = q_{m0} e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ – частота затухающих колебаний.

Напряжение на конденсаторе

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha) = U_{m0}\cos(\omega t + \alpha),$$

сила тока

$$i = \dot{q} = q_{m0}e^{-\beta t}\left[-\beta\cos(\omega t + \alpha) - \omega\sin(\omega t + \alpha)\right].$$

Введя угол ψ, определяемый условиями

$$\cos\psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \sin\psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

можно записать

$$i = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha + \psi).$$

Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на π/2.

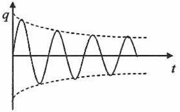


Рис. 17

График функции $q = q(t)$ изображен на рис. 17, графики для напряжения и силы тока имеют аналогичный вид.

Затухание колебаний принято характеризовать ***логарифмическим декрементом затухания***

$$\lambda = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T,$$

где $a(t)$ – амплитуда соответствующей величины.

Колебательный контур часто также характеризуют его ***добротностью*** Q

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Вынужденные электрические колебания реализуются в колебательном контуре, если включить последовательно с элементами контура переменную э. д. с. Приравняв сумму падений напряжения на элементах контура приложенному напряжению, получим

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=U_m\cos\omega t,$$

что приводит к уравнению

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=\frac{U_m}{L}\cos\omega t.$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q=q_m\cos(\omega t-\psi),$$

где $q_m=\dfrac{\left(\dfrac{U_m}{L}\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+4\beta^2\omega^2}}$, $\operatorname{tg}\psi=\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$, можно преобразовать к виду $q_m=\dfrac{U_m}{\omega\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$, $\operatorname{tg}\psi=\dfrac{R}{\dfrac{1}{\omega C}-\omega L}$.

Общее решение получится, если к частному решению прибавить общее решение соответствующего однородного уравнения $q=q_{m0}e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha)$. Оно содержит экспоненциальный множитель, поэтому по прошествии с начала колебаний достаточного времени становится очень малым и им можно пренебречь. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются функцией $q=q_m\cos(\omega t-\psi)$.

Напряжение на конденсаторе определяется как

$$U_C=\frac{q_m}{C}\cos\left(\omega t-\psi\right)=U_m\cos\left(\omega t-\psi\right),$$

где $U_{Cm}=\dfrac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$.

Ток в контуре

$$i=\dot{q}=\omega q_{m0}\sin\left(\omega t-\psi\right)=I_m\cos\left(\omega t-\psi+\frac{\pi}{2}\right),$$

где амплитуда тока имеет значение $I_m = \omega q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$.

Резонансная частота для заряда q и напряжения на конденсаторе U_C равна

$$\omega_q = \omega_U = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \le \omega_0 .$$

Резонансные кривые для U_C изображены на рис. 18, максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше $\beta = R/2L$, т. е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

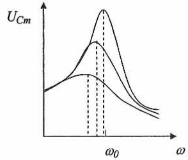


Рис. 18

Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при $\omega L - 1/\omega C = 0$, следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура ω_0.

Примеры решения задач

Задача №12.1

Составить уравнение гармонического колебания силы тока в колебательном контуре, если амплитудное значение силы тока равно 0,35 А и период колебания 0,0005 с. Начальная фаза колебания равна нулю.

Дано:
$I_m = 0{,}35$ А,
$T = 5\cdot 10^{-4}$ сек,
$\varphi_0 = 0$.
Найти
$i(t)$

Решение:
Уравнение гармонического колебания тока в колебательном контуре

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) = 0{,}35 \sin\frac{2\pi t}{5\cdot 10^{-4}} =$$

$= 0{,}35\ \sin(4\pi\cdot 10^3)t = 0{,}35\ \sin 12560t$.

Ответ:
$i = 0{,}35\ \sin 12560t$.

Задача №12.2

В колебательном контуре совершаются незатухающие электромагнитные колебания. Определить силу тока в контуре при $t = 0{,}002$ с от начала отсчета, если заряд конденсатора изменяется по гармоническому закону $Q = 2 \cdot 10^{-5} \sin 500\,\pi t$.

Дано:
$Q = 2 \cdot 10^{-5} \sin 500\,\pi t$,
$t = 2 \cdot 10^{-3}$ сек.
Найти
i

Решение:
Найдем производную от заряда и запишем уравнение гармонического колебания силы тока в колебательном контуре, а затем вычислим мгновенное значение силы тока при $t = 0{,}002$ с:

$$i = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 500\pi \cos 500\pi t = 0{,}01\pi \cos 500\pi t.$$

При $t = 0{,}002$ с

$i = 0{,}01\cos 500\pi \cdot 0{,}002 = 0{,}01\pi\cos\pi = -0{,}01\pi$, $i = -0{,}0314$ А.

Ответ:
$i = -0{,}0314$ А.

<u>*Задания для самоконтроля*</u>

1. В колебательном контуре совершаются незатухающие электромагнитные колебания. Напишите уравнение изменения силы тока в контуре, если заряд конденсатора изменяется по гармоническому закону $Q = 2 \cdot 10^{-5} \sin 1000\,\pi t$.

2. Изменение силы тока в колебательном контуре происходит по закону $i = 0{,}6 \sin 628t$. Определите амплитудное значение силы тока, период собственных колебаний контура и силу тока при $t = 0{,}01$ с.

13. Произвольное электромагнитное поле

Электрическое поле может быть как потенциальным, так и вихревым. **Электростатическое поле** с напряженностью $\vec{E}_q$ порождается неподвижными зарядами и является потенциальным, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Циркуляция вектора $\vec{E}_q$ по любому контуру равна нулю:

$$\oint_L E_{ql} dl = 0.$$

Вихревое электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_B$ возбуждается переменным магнитным полем, линии напряженности такого поля всегда замкнуты. Циркуляция вектора $\vec{E}_B$ по замкнутому контуру отлична от нуля и равна э. д. с. индукции

$$\mathcal{E}_i = \oint_L E_{Bl} dl .$$

В свою очередь э. д. с. индукции определяется законом Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S B_n dS = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n dS .$$

В общем случае электрическое поле может слагаться из поля $\vec{E}_q$, создаваемого зарядами, и поля $\vec{E}_B$, обусловленного изменяющимся со временем магнитным полем $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$. Циркуляция вектора полного поля

$$\oint_L E_l dl = \oint_L E_{ql} dl + \oint_L E_{Bl} dl = \mathcal{E}_i ,$$

что приводит к ***первому уравнению Максвелла в интегральной форме***:

$$\oint_L E_l dl = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n dS .$$

Интеграл в левой части берется по произвольному замкнутому контуру, а в правой части – по произвольной поверхности, опирающейся на этот контур.

Однако не только переменное магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля, но существует и обратное явление – всякое изменение электрического поля вызывает появление **вихревого магнитного поля**.

Вихревое магнитное поле создается как током проводимости, так и током смещения.

Ток проводимости – это ток, текущий по проводящей среде, например в металлическом проводнике. ***Ток смещения*** может протекать и в диэлектрической среде и представляет из себя переменное электрическое поле.

Таким образом, в отличие от постоянного тока, переменные токи могут существовать и в разомкнутых контурах. При этом токи проводимости в металлическом проводнике замыкаются токами смещения в диэлектрике. Следовательно, линии полного тока должны быть всегда замкнуты.

Плотность тока смещения выражается через вектор электрической индукции

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

В общем случае электрическое поле может быть неоднородным и зависеть не только от времени, но и от координат, поэтому используется частная производная. Плотность полного тока складывается из плотности тока смещения и тока проводимости

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Сила полного тока

$$i_{полн} = \int\limits_S \left(j_{полн}\right)_n dS = \int\limits_S j_n dS + \int\limits_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_n dS.$$

Тогда по теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$\oint\limits_L H_l dl = i_{полн},$$

что приводит к ***третьему уравнению Максвелла в интегральной форме***:

$$\oint\limits_L H_l dl = \int\limits_S j_n dS + \int\limits_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_n dS.$$

Интеграл в левой части берется по произвольному замкнутому контуру, а в правой части – по произвольной поверхности, опирающейся на этот контур.

Таким образом, система уравнений Максвелла в интегральной форме имеет вид:

$$\oint_L E_l dl = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n dS,$$
$$\oint_S B_n dS = 0,$$
$$\oint_L H_l dl = \int_S j_n dS + \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_n dS,$$
$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV.$$

Первое уравнение Максвелла выражает закон электромагнитной индукции Фарадея; второе уравнение – это теорема Гаусса для вектора электрической индукции; третье уравнение отражает тот факт, что вихревое магнитное поле создается как токами проводимости, так и током смещения и четвертое уравнение – это теорема Гаусса для вектора электрической индукции.

Можно преобразовать уравнения Максвелла в такую форму, чтобы все величины относились к одной и той же точке поля. Для такого преобразования используются теорема Стокса и теорема Остроградского – Гаусса.

Теорема Стокса используется для преобразования линейного интеграла по замкнутому контуру в интеграл по поверхности

$$\oint_L H_l dl = \int_S \left(\mathrm{rot}\vec{H}\right)_n dS,$$

где $\mathrm{rot}\vec{H}$ – ***ротор***, или вихрь вектора $\vec{H}$, $\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right)_n$ – это проекция вектора $\vec{H}$ на направление нормали к площадке S. $\mathrm{rot}\vec{H}$ – это векторная функция поля в рассматриваемой точке, т.е. его величина зависит от ориентации контура, по которому рассчитывается циркуляция в данной точке. В декартовой системе координат $\mathrm{rot}\vec{H}$ можно записать с помощью определителя

$$rot\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

Можно также записать $\mathrm{rot}\vec{H} = \left[\nabla\vec{H}\right]$, т. е. рассматривать его как векторное произведение оператора ∇ на $\vec{H}$, где ∇ – оператор, или символический вектор набла,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

С использованием теоремы Стокса первое и третье уравнения Максвелла запишутся в виде:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Теорема Остроградского – Гаусса используется для преобразования интеграла по поверхности в интеграл по объему

$$\oint\limits_S D_n dS = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{D}dV,$$

где $\mathrm{div}\vec{D}$ – ***дивергенция***, или расхождение вектора $\vec{D}$. Можно также записать $\mathrm{div}\vec{D} = \nabla\vec{D}$, т. е. рассматривать дивергенцию как скалярное произведение вектора $\vec{D}$ и символического вектора набла.

Дивергенция – скалярная функция координат, она определяется поведением векторной функции $\vec{D}(x, y, z)$ в окрестности рассматриваемой точки поля. С использованием теоремы Остроградского – Гаусса второе и четвертое уравнения Максвелла запишутся в виде:

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{D} = \rho.$$

В СИ уравнения Максвелла в дифференциальной форме выглядят следующим образом

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho.$$

Данную систему необходимо дополнить соотношениями

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E},\ \vec{B}=\mu_0\mu\vec{H},\ \vec{j}=\sigma\vec{E}.$$

В гауссовой системе уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\
&\mathrm{div}\vec{B}=0,\\
&\mathrm{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\\
&\mathrm{div}\vec{D}=4\pi\rho.
\end{aligned}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\ \vec{B}=\mu\vec{H},\ \vec{j}=\sigma\vec{E}.$$

Задания для самоконтроля

1. Следующая система уравнений Максвелла описывает: а) стационарные электрические и магнитные поля; б) электромагнитные поля в отсутствие свободных зарядов; в) электромагнитные поля в отсутствие токов.

$$rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad rot\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$div\vec{B}=0 \qquad div\vec{D}=\rho$$

Ответы к заданиям для самоконтроля

1. Закон Кулона

    1) $\varepsilon_ж = 4$. 2) 3,57 см от большего заряда.

2. Напряженность электрического поля

    1) Разноименные. При одноименных точечных зарядах напряженность будет равна нулю. 2) 2,99 кВ/м. 3) а.

3. Теорема Гаусса

    1) $E_1 = 0$, $D_1 = 0$; $E_2 = 13{,}6$ В/м, $D_2 = 843$ пКл/м^2; $E_3 = 229$ В/м, $D_3 = 2{,}02$ нКл/м^2.

4. Работа и энергия электростатического поля. Потенциал

    1) 10 мкДж. 2)$1{,}8\cdot10^{-4}$ Дж. 3) а. 4) в.

5. Электрическая емкость. Конденсаторы

    1) Уменьшится. 2) 10 см. 3) $C = 1{,}8$ нФ.

6. Постоянный электрический ток

    1) $R_{min} = 110$ Ом. 2) $N = 2\cdot10^{18}$.

7. Электродвижущая сила. Напряжение. Обобщенный закон Ома. Правила Кирхгофа

    1) 12 В. 2) 80 руб.

8. Постоянное магнитное поле

    1) а. 2) $r = 0{,}4$ м.

9. Действие магнитного поля на токи и заряды. Электромагнитная индукция

    1) $F_л = 1{,}6\cdot10^{-12}$ Н. 2) в.

10. Явление самоиндукции. Энергия магнитного поля

    1) n = 500. 2) 6,4 Дж.

11. Переменный ток

    1) $X_L = 251{,}2$ Ом. 2) $\nu = 1{,}06$ кГц.

12. Электрические колебания. Колебательный контур

    1) $i = 4\pi\cdot10^{-2}\cos 1000\,\pi t$. 2) $I_m = 0{,}6$ А; $T = 0{,}01$ с; $i = 0$.

13. Произвольное электромагнитное поле

    1) в.

Список учебной литературы

Основная

1. Савельев, И.В. Курс физики: в 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика /И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

2. Савельев, И.В. Курс общей физики: в 5 кн. Кн. 2. Электричество и магнетизм /И.В. Савельев. – М.: АСТ, 2002. – 336 с.

3. Савельев, И.В. Курс общей физики: Учебное пособие для вузов: в 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2006. – 496 с.

4. Савельев, И.В. Курс общей физики: в 3 т. Т. 2. Электричество / И.В.Савельев. – М.: Наука, 1973. – 431 с.

5. Калашников, С.Г. Электричество / С.Г. Калашников. – М.: Наука, 1985. – 576 с.

Дополнительная

1. Детлаф, А.А. Курс физики. / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 2002. – 718 с.

2. Тамм, Л.Е. Основы теории электричества / Л.Е.Тамм. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

3. Сивухин, Д.В. Общий курс физики: Учебное пособие для вузов: в 5 т. Т. 3. Электричество / Д.В. Сивухин. – Физматлит; МФТИ, 2002. – 656 с.

4. Савельев, И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.