МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.Н. ПЕРОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ПРИЛОЖЕНИИ К ПРОБЛЕМАМ ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная математика

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2019

УДК 519.2(075)+539.3(075)
ББК 22.17я7+30.121я7
П 276

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. М. Д у п л я к и н,
д-р физ.-мат. наук, проф. В. П. Р а д ч е н ко

Перов, Сергей Николаевич

П 276 **Элементы теории вероятностей и математической статистики в приложении к проблемам прочности и надежности:** учеб. пособие / *С.Н. Перов*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2019. – 152 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1399-3

Содержание пособия направлено на формирование общекультурных и профессиональных компетенций, зафиксированных в федеральных государственных образовательных стандартах высшего образования в области проектирования ракет и ракетно-космической техники.

Учебное пособие включает краткие теоретические сведения по ключевым разделам теории вероятностей и математической статистики, примеры решения типовых задач, задания для самоконтроля знаний.

Предназначено для студентов, обучающихся по программам бакалавриата направления «Прикладная механика» и специальности «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов», в основных профессиональных образовательных программах которых представлены дисциплины (модули): теория вероятностей, математическая статистика и теория надежности.

УДК
519.2(075)+539.3(075)
ББК 22.17я7+30.121я7

ISBN 978-5-7883-1399-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшие профессиональные компетенции современных инженеров предусматривают способность использовать основные методы естественно-научных дисциплин, соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для выявления и исследования закономерностей, которым подчиняются реальные процессы разрушения конструкций сложных технических систем. Эти закономерности используются при проектировании и создании изделий ракетно-космической техники. В последнее время становится очевидной необходимость подготовки инженерных кадров, ориентирующихся в вопросах надежности, способных при проектировании и создании силовых конструкций учитывать случайную природу параметров конструкций и эксплуатационных нагрузок.

Разработкой методов изучения специфических **закономерностей**, наблюдаемых **в случайных явлениях на основе теоретической модели**, занимается математическая наука **теория вероятностей**. В отличие от теории вероятностей **математическая статистика** изучает **математические методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей**. Математическая статистика оперирует непосредственно результатами наблюдений за результатами опытов, которые представляют некоторую выборку из некоторой генеральной совокупности.

При большом числе наблюдений (опытов) влияние случайных воздействий в значительной степени нивелируется и получаемый результат оказывается практически предсказуемым. Это позволяет использовать вероятностные и математико-статистические методы исследования для анализа сложных технических систем. При оценке **прочности элементов конструкций и прогнозировании ресурса** могут использоваться **вероятностные расчеты на основе теории надежности**, учитывающей статистические данные о механических свойствах материалов, нагрузках и воздействиях. **Мерой надежности служит вероятность безотказной работы** конструкций в пределах назначенного срока эксплуатации. Соответственно мерой риска является вероятность наступления отказа в рамках назначенного срока эксплуатации (под отказом понимается достижение предельных состояний).

Данное учебное пособие содержит базовые теоретические сведения теории вероятностей, математической статистики и надежности, примеры решения типовых задач, задачи для самоконтроля и пример тестовых заданий для промежуточного контроля знаний. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе направления15.03.03 Прикладная механика и специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, в основных профессиональных образовательных программах которых представлены дисциплины или модули по изучению теории вероятностей, математической статистики и теории надежности.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Основные понятия алгебры событий на основе теории множеств

Опыт – осуществление определенных условий и действий, при которых наблюдается данное событие или явление.

Событие – качественный или количественный результат опыта, который осуществляется при определенных условиях. События могут обозначаться как $A, B, C, \ldots$

Достоверное событие не может не появиться в результате данного опыта.

Невозможное событие не может появиться в результате данного опыта.

Случайное событие – всякий факт, который в опыте со случайным исходом может произойти или не произойти.

Событие $\bar{A}$ называется **противоположным** по отношению к событию A, если оно происходит всегда, когда не происходит событие A.

Все возможные результаты данного опыта называются исходами. Множество исходов, благоприятных событию A, в соответствии с теорией множеств можно представить в виде специальных графических диаграмм – некоторой заштрихованной области на плоскости, как это показано на рис. 1.

Тогда незаштрихованная область будет соответствовать событию $\bar{A}$. Прямоугольник соответствует множеству всех возможных исходов Ω.

Суммой $\boldsymbol{A + B}$ двух событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно событие из A и B – логическая сумма, операция объединения множеств $\cup$ как показано на рис. 2.

Суммой нескольких событий является событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

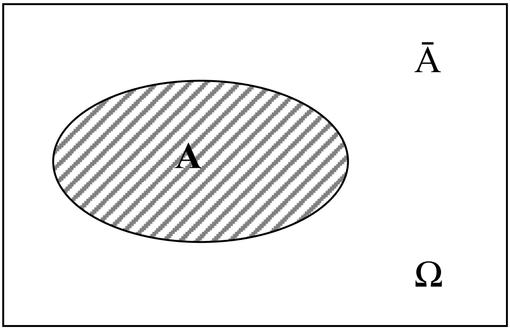


Рис. 1. Графическое изображение событий A и $\bar{A}$

Пример 1.1. Пусть по мишени делают два выстрела. Событие A – попадание после первого выстрела, событие B – попадание после второго выстрела. Тогда сумма $A + B$ – хотя бы одно попадание при двух выстрелах.

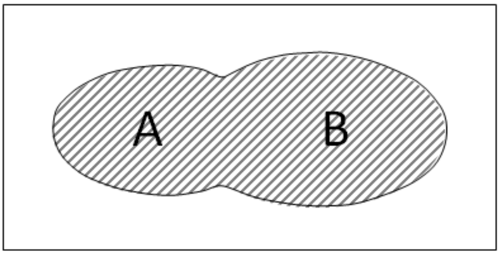


Рис. 2. Сумма событий A и B

Пример 1.2. Пусть при броске игральной кости фиксируется выпадение очков на верхней грани. Событие A_i – выпадение i очков. Тогда выпадение четного числа очков является суммой событий $A_2 + A_4 + A_6$.

Произведением $\boldsymbol{A \cdot B}$ двух событий является событие, состоящее в том, что одновременно произошли события A и B.

Геометрической иллюстрацией произведения событий A и B является пересечение областей, одновременно соответствующих исходам, благоприятным A и B, как это показано на рис. 3. Это логическое произведение, операция пересечения множеств $\cap$.

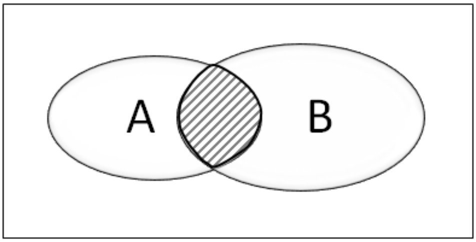


Рис. 3. Произведение событий *A* и *B*

Произведением нескольких событий называется событие, заключающееся в том, что все эти события произошли.

Пример 1.3. В примере 1.1 (два выстрела по мишени) событием $A{\cdot}B$ является попадание в обоих выстрелах.

Пример 1.4. Пусть событие *A* состоит в том, что из колоды карт извлекли карту бубновой масти, а событие *B* заключается в том, что это туз. Тогда событием $A{\cdot}B$ будет извлечение из колоды туза бубен.

Разностью $A \backslash B$ событий *A* и *B* является событие, состоящее в том, что событие *A* произошло, а событие *B* не произошло. Иллюстрацией разности событий является рис. 4.

Пример 1.5. В примере 1.1 разностью событий A\B будет попадание первым выстрелом при промахе во втором.

Пример 1.6. В примере 1.4 событием $A \backslash B$ является извлечение из колоды любой карты бубновой масти, кроме туза. Соответственно $B \backslash A$ – извлечение любого туза, кроме бубен.

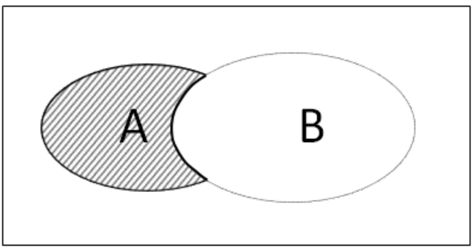


Рис. 4. Разность событий *A* и *B*

Два события называются **совместными**, если они оба могут произойти в результате одного опыта.

Два события называются **несовместными** в данном опыте, если в результате данного опыта они не могут появиться одновременно.

Пример 1.7. Попадания в обоих выстрелах в примере 1.1 являются совместными событиями.

Пример 1.8. События $A_1 - A_6$ в примере 1.2 являются несовместными.

При графическом изображении областей исходов опыта для несовместных событий они не будут иметь общих точек.

Произведение несовместных событий является невозможным событием.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют **полную группу**, если в результате опыта произойдет хотя бы одно из них.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega .$$

Два несовместных события, образующих полную группу, называются **противоположными**:

$$A + \overline{A} = \Omega .$$

Если в результате опыта может произойти только одно событие из полной группы событий, то такие события называются **элементарными событиями**.

Пример 1.9. В примере 2 при бросании игральной кости события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ образуют полную группу несовместных событий.

События называются **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие.

Пример 1.10. Появление любой карты при извлечении из колоды.

1.2. Определение и способы вычисления вероятности

Объективной математической числовой оценкой возможности реализации случайного события является **вероятность**.

Вероятностью события называется отношение количественной меры числа исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу исходов (классическое определение вероятности):

$$p = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где n – число возможных исходов опыта; m – число исходов, благоприятных данному событию.

Вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного события равна нулю.

Поскольку случайное событие происходит при некоторых, но не всех исходах опыта, то $0 < m < n$ и, следовательно, $0 < p < 1$. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Пример 1.11. Из ящика, в котором находится 7 белых и 3 черных шара, наудачу вынимается шар. Найти вероятность того, что он черный.

Решение. Извлечение каждого имеющегося в ящике шара является исходом опыта или элементарным событием. Эти события удовлетворяют всем условиям, позволяющим считать их схемой случаев. Поэтому число возможных исходов равно 10, а число исходов, благоприятных данному событию, равно 3 (общее количество черных шаров в ящике).

Следовательно $p = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$

Однако в сложных задачах классическое определение вероятности, которое, в конечном счете, выведено из более простого понятия равновозможности и теории азартных игр, оказывается недостаточным и заменяется статистическим определением.

Частота данного события p^*, статистическая вероятность, есть отношение числа появлений данного события M к числу всех произведенных опытов N:

$$p^* = \frac{M}{N}.$$

Вероятностью события при данных условиях опыта называется теоретическая частота события, около которой имеет тенденцию стабилизироваться действительная частота события при повторении опыта в данных условиях.

Статистическая вероятность случайного события, таким образом, является числовой характеристикой, которая обладает тем свойством, что при достаточно большой серии испытаний частота событий неограниченно приближается к этой характеристике.

Для существования статистической вероятности требуется два условия:

1) возможность производить неограниченное число опытов;

2) устойчивость относительных частот появления данного события в сериях достаточно большого числа опытов.

Геометрическая вероятность есть отношение геометрической меры доли исходов для события A к геометрической мере всех возможных исходов Ω: $p = \frac{S_A}{S_\Omega}$.

1.3. Основные формулы комбинаторики

Генеральной совокупностью называется счетное множество элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n – объем генеральной совокупности), из которого будут выделяться некоторые подмножества.

Выборкой из генеральной совокупности называется любая ее часть, подмножество $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (m – объем выборки), отличающаяся от других частей.

При формировании выборок (комбинаций) из генеральной совокупности используются теоремы и формулы целочисленной дискретной математики – комбинаторики. Будем использовать следующие две теоремы комбинаторики:

1. Если два взаимоисключающих друг друга действия могут выполняться соответственно m и n способами, то выполнить любое из этих действий можно $m + n$ способами.

2. Если одно за другим выполняется k действий: первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие можно выполнить n_2 способами, k-е действие можно выполнить n_k способами, тогда все k действий можно выполнить $n = n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$ способами.

На основе этих теорем составляются формулы для оценки количества разных комбинаций (выборок) по m элементов из всех n.

Размещения.

а) Количество упорядоченных выборок – **размещений с возвратами (повторениями элементов)** из n по m элементов:

$$N = n^m.$$

б) Количество упорядоченных **размещений без возврата (без повторений элементов)** из n по m:

$$A_n^m = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.2)$$

Перестановки (размещения из *n* по *n* элементов).

а) Количество упорядоченных выборок – **перестановок без повторений** из n по n:

$$P_n = A_n^n = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,1 = n!. \quad (1.3)$$

б) **Перестановки с повторами** $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ – это схема упорядоченных разбиений: n различных предметов случайным образом распределяются по k занумерованным ячейкам так, чтобы k-я ячейка содержала $n_k > 0$ предметов ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$):

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}. \quad (1.4)$$

Сочетания.

а) Неупорядоченная выборка – количество **сочетаний без повторений** из n по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \quad (1.5)$$

б) Неупорядоченная выборка – количество **сочетаний с повторениями** из n по m:

$$N = C_{n+m-1}^{m}. \qquad (1.6)$$

В формулах (1.2) – (1.6) используются следующие **свойства факториалов и сочетаний**:

$n! = 1 \cdot 2 \ldots n$; $(n+1)! = (n+1)\, n!$; $0! = 1$;

$C_n^m = C_n^{n-m}$, $C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$.

1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Вероятность $p(A+B)$ суммы двух событий A и B вычисляется по формуле:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB), \qquad (1.7)$$

где $p(A)$ – вероятность события A; $p(B)$ – вероятность события B; $p(AB)$ – вероятность того, что события A и B произойдут одновременно.

Если два события A и B являются несовместными, то вероятность $p(AB)$ равна нулю и, следовательно, вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$p(A+B) = p(A) + p(B).$$

Это соотношение можно распространить на случай суммы любого числа n несовместных событий A_i:

$$p\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} p(A_i).$$

Вероятность событий полной группы:

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1.$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1. \qquad (1.8)$$

В ряде задач проще искать не вероятность заданного события $p(A)$, а вероятность противоположного события $p(\bar{A})$. А затем найти требуемую вероятность по формуле (1.8).

Пример 1.12. Из урны, содержащей 3 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие, противоположное заданному в условиях задачи, заключается в том, что вынуто 5 шаров одного цвета. Поскольку белых шаров всего 3, то этот цвет может быть только черным. Общее число возможных исходов опыта найдем по формуле (1.5):

$$n = C_9^5 = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126 .$$

Множество исходов, благоприятных событию $\bar{A}$, равно числу возможных наборов по 5 шаров только из шести черных:

$$m = C_6^5 = 6 .$$

Тогда $p(\overline{A}) = \dfrac{6}{126} = \dfrac{1}{21}$, а $p(A) = 1 - \dfrac{1}{21} = \dfrac{20}{21}$.

Перед описанием правил умножения вероятностей введем понятие условной вероятности. Назовем **условной вероятностью *p (B/A)* события *B*** вероятность события *B* при условии, что событие *A* произошло. Понятие условной вероятности используется, когда появление события *A* изменяет вероятность появления события *B*.

Пример 1.13. Пусть событие *A* – извлечение из урны, в которой находится два белых и два черных шара, белого шара. Событие *B* – извлечение из урны второго белого шара. Если после первого раза шар возвращается в урну, то вероятность вынуть вторично белый шар не меняется: $p(A) = p(B) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$. Если первый шар в урну не возвращается, то осуществление события *A* приводит к тому, что в урне осталось три шара, из которых один белый. Поэтому $p\,(B/A) = \dfrac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B/A).$$

Можно показать, что

$$p(A)\cdot p(B/A)=p(B)\cdot p(A/B).$$

Событие B называется **независимым** от события A, если появление события A не изменяет вероятности B, то есть $p(B/A)= p(B)$. Если событие B не зависит от A, то и A не зависит от B. **Свойство независимости событий взаимно**. Формула умножения для независимых событий имеет вид:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B). \qquad (1.9)$$

Выполнение формулы (1.9) может служить определением независимых событий.

Пример 1.14. Для поражения цели необходимо попасть в нее дважды. Вероятность попадания первым выстрелом равна 0,2. Вероятность последующего попадания при промахах не меняется, но после первого попадания увеличивается до 0,5. Найти вероятность поражения цели первыми двумя выстрелами.

Решение. Пусть событие A – попадание при первом выстреле, событие B – попадание вторым выстрелом при условии попадания при первом выстреле.

Тогда $p(A) = 0{,}2$; $p(B/A) = 0{,}5$; $p(A\cdot B) = 0{,}2\cdot 0{,}5 = 0{,}1$.

Пример 1.15. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны 0,7 и 0,8 соответственно. Найти вероятности следующих событий:

A – два попадания при двух выстрелах;

B – хотя бы одно попадание;

C – ровно одно попадание при двух выстрелах;

D – ни одного попадания.

Решение. Пусть событие H_1 – попадание первого стрелка, событие H_2 – попадание второго. Тогда: $A = H_1 \cdot H_2$; $B = H_1 + H_2$; $C = H_1 \cdot \overline{H_2} + \overline{H_1} \cdot H_2$; $D = \overline{H_1} \cdot \overline{H_2}$.

События H_1 и H_2 являются совместными и независимыми. Поэтому теорему сложения вероятностей необходимо применять в общем виде (1.7), а теорему умножения вероятностей в виде (1.9). Следовательно:

$p(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$;

$p(B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$;

$p(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}38$;

$p(D) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

Необходимо отметить, что события B и D являются противоположными. Поэтому $p(B) = 1 - p(D)$.

Вероятность появления хотя бы одного из попарно независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна

$$p(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n,$$

где q_i – вероятность события, противоположного событию A_i.

Пример 1.16. Сколько нужно произвести бросков монеты, чтобы с вероятностью не менее 0,9 выпал хотя бы один герб?

Решение. Вероятность выпадения герба при одном броске равна вероятности противоположного события (выпадение цифры) и равна 0,5. Тогда вероятность выпадения хотя бы одного герба при n бросках равна $1 - (0{,}5)^n$. Тогда из решения неравенства $1 - (0{,}5)^n > 0{,}9$ получим $n > \log_2 10$, где n – целое число. Следовательно $n \geq 4$.

1.5. Полная вероятность. Формула Байеса

Пусть событие A может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий. При этих условиях события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются **гипотезами**. Вероятность события А, которое наступает совместно с гипотезами $H_1, H_2, \ldots, H_n$, равна:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A / H_i), \qquad (1.10)$$

где $p(H_i)$ – вероятность i-й гипотезы, а $p(A/H_i)$ – вероятность события A при условии реализации гипотезы H_i.

Формула (1.10) называется **формулой полной вероятности**.

Пример 1.17. Имеются четыре одинаковые урны с шарами. В первой из них 3 белых и 7 черных шаров, во второй 4 белых и 6 черных шаров, в третьей – 5 белых шаров, в четвертой – 10 черных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Пусть гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4 соответствуют выбору урны с соответствующим номером. По условиям задачи все гипотезы равновозможны. Поэтому $p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = p(H_4) = 0{,}25$. Найдем условные вероятности события A при реализации каждой из гипотез: $p(A/H_1) = 0{,}3$; $p(A/H_2) = 0{,}4$; $p(A/H_3) = 1$; $p(A/H_4) = 0$. Тогда

$p(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 0 = 0{,}425$.

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Вероятности этих гипотез известны до проведения опыта и равны соответственно $p(H_1), p(H_2), \ldots, p(H_n)$. Предположим, что произведен опыт, в результате которого появилось событие A.

Тогда вероятность каждой из гипотез в связи с появлением этого события определится по формуле:

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A / H_i)}{p(A)} = \frac{p(H_i) \cdot p(A / H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A / H_i)}, \qquad (1.11)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Формула (1.11) является следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности и называется **формулой Байеса,** или **теоремой гипотез**.

Пример 1.18. После одного выстрела каждого из двух стрелков, вероятности попаданий которых равны 0,7 и 0,8 соответственно, в мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

Решение. Пусть событие A – одно попадание при двух выстрелах. При двух выстрелах двух стрелков возможны следующие гипотезы: H_1 – первый попал, второй промахнулся; H_2 – первый промахнулся, второй попал; H_3 – оба попали; H_4 – оба промахнулись. Вероятности гипотез по теореме умножения вероятностей равны: $p(H_1)= 0,7\cdot 0,2 = 0,14$; $p(H_2) = 0,3\cdot 0,8 = 0,24$; $p(H_3) = 0,7\cdot 0,8 = 0,56$; $p(H_4) = 0,3\cdot 0,2 = 0,06$. Условные вероятности события A: $p(A/H_1) = p(A/H_2) = 1$; $p(A/H_3) = p(A/H_4) = 0$. Полная вероятность события A вычисляется по формуле (1.10): $p(A) = 0,14\cdot 1 + 0,24\cdot 1 + 0,56\cdot 0 + 0,06\cdot 0 = 0,38$. Гипотеза о вероятности попадания первого стрелка определяется по формуле Байеса:

$$p(H_1 / A) = \frac{0{,}14 \cdot 1}{0{,}38} \approx 0{,}368\,.$$

Аналогично можно посчитать вероятность гипотезы о попадании второго стрелка. Очевидно, что она будет равна $p(H_2/A)\approx 0{,}632$.

1.6. Схема повторения испытаний

Рассмотрим серию из n опытов, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p. Результат каждого опыта не зависит от результатов остальных. Такая постановка задачи называется **схемой повторения испытаний**. Вероятность того, что событие A в такой серии произойдет ровно k раз, определяется по **формуле Бернулли**:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \qquad (1.12)$$

где $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие A в данном опыте не произошло.

Пример 1.19. Для получения приза нужно собрать 5 товаров со специальным знаком на этикетке. Найти вероятность того, что придется купить 20 товаров, если этикетки с таким знаком имеют 10% изделий.

Решение. Из постановки задачи следует, что двадцатый купленный товар будет иметь специальный знак. Следовательно из предыдущих девятнадцати такие знаки имели четыре товара. Найдем вероятность такого события по формуле Бернулли (1.12):

$$p_{19}(4) = C_{19}^{4}\,(0{,}10)^4 \cdot (0{,}90)^{15} = 0{,}0798.$$

Тогда искомая вероятность: $p = 0{,}0798 \cdot 0{,}10 = 0{,}00798$.

Если при большом числе испытаний вероятность появления события A в данном опыте мала, а произведение $n \cdot p = \lambda$ сохраняет постоянное значение для разных серий опытов, то вероятность появления события A ровно k раз для массовых (n велико́) и редких (p мало́) событий можно определить по **формуле Пуассона**:

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}. \qquad (1.13)$$

Формула Пуассона (1.13) получается из формулы Бернулли при $n \longrightarrow \infty$ через второй замечательный предел.

Пример 1.20. При доставке заказчику число изделий, поврежденных при транспортировке, в среднем составляет 0,05%. Найти вероятность того, что при доставке крупной партии из 12000 изделий поврежденных окажется не более трех экземпляров.

Решение. Поскольку $n = 12000$ и $p = 0{,}0005$, $\lambda = n \cdot p = 6$:

$$p_n(0 \le m \le 3) = p_{1200}(0) + p_{1200}(1) + p_{1200}(2) + p_{1200}(3) = \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} +$$

$$+ \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} \approx 0{,}151.$$

Если вероятность p наступления события A в каждом опыте постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет m раз в n независимых опытах при достаточно большом числе n, приближенно может быть определена по **локальной формуле Муавра-Лапласа**:

$$p_{m,n} \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (1.14)$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – **функция Гаусса**; $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Чем больше число опытов n, тем точнее приближенная формула (1.14). В практических расчетах при значениях $npq \geq 20$ формула (1.14) используется как точная. Значения функции Гаусса определяются по таблицам, приведенным в Приложении 1.

Пример 1.21. В городе из каждых 100 семей 80 имеют по два телевизора. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют два телевизора.

Решение. Поскольку p = 0,8, q = 0,2, n =400, то npq = 64 > 20. Поэтому используем локальную формулу Муавра-Лапласа (1.14).

Поскольку $x = \frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-20}{\sqrt{4 \cdot 16}} = -\frac{20}{8} = -2{,}5$,

то $P_{300{,}400} \approx \frac{f(-2{,}5)}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \approx 0{,}0022$.

Если вероятность p наступления события A в каждом опыте постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число m наступления события A в n независимых опытах попадает в интервал от a до b включительно при достаточно большом числе n, приближенно может быть определена по **интегральной формуле Муавра-Лапласа**:

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx [\Phi(x_2) - \Phi(x_1)], \qquad (1.15)$$

где $x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – **функция Лапласа** для стандартного нормального нормированного распределения, табличные значения которой приводятся в Приложении 2.

Чем больше число опытов n, тем точнее формула (1.15). В практических расчетах при значениях $npq \geq 20$ формула (1.15) дает результаты с незначительной погрешностью.

Используются также другие разновидности функции Лапласа.

Например, нечетная функция $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ приводится в большом количестве учебников для высшей школы. Ее удобно применять на интервалах от 0 до *x*.

Удвоенную функцию $\Phi_1(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ удобно применять для симметричных интервалов.

Эти разновидности связаны друг с другом следующими соотношениями:

$\Phi(x) = \Phi_0(x) + 0{,}5$, $\Phi_1(x) = 2\Phi_0(x)$.

Табличные значения всех разновидностей приводятся в интернет ресурсах, справочной и учебной литературе.

Пример 1.22. По данным примера 1.21 определить вероятность того, что от 300 до 360 семей включительно имеют по два телевизора.

Решение. Поскольку $npq = 64 > 20$, применяем интегральную теорему Муавра-Лапласа. Определяем $x_1 = \frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5$, $x_2 = \frac{360 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5$.

Далее:

$$P_{400}(300 \le m \le 360) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi_0(5{,}0) - \Phi_0(-2{,}5)\right] \approx \frac{1}{2}(1 + 0{,}9876) = 0{,}9938.$$

2. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

2.1. Определение случайной величины

Случайной величиной называется величина, принимающая в результате опыта со случайным исходом то или иное значение, причем до опыта неизвестно, какое именно.

Случайные величины обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $(X, Y, Z, \ldots)$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами $(x_i, y_i, z_i, \ldots)$ или просто $(x, y, z, \ldots)$.

Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями. Эти значения можно расположить в определенном порядке и пронумеровать.

Пример 2.1. Число очков, выпавших на верхней грани при броске игральной кости; число выстрелов до первого попадания в цель; число товаров, которые были возвращены в магазин до истечения гарантийного срока; число хороших оценок в группе при сдаче экзамена по математике.

Случайная величина называется **непрерывной**, если множество ее значений является несчетным и целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный интервал.

Пример 2.2. Расстояние от центра мишени до пробоины при попадании; время до первого отказа электронного прибора с момента его включения.

Законом распределения случайной величины X называется любая функция (правило, график, таблица и т.п.), которая устанавливает соответствие между значениями случайной величины и вероятностями их наступления и которая позволяет определять вероятность попадания случайной величины в определенный интервал.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины (расположенные обычно по возрастанию значений $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$) и соответствующие им вероятности, называются **рядом распределения**.

Таблица 1. **Ряд распределения**

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Событие, заключающееся в том, что дискретная случайная величина примет одно из своих возможных значений, является достоверным. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1.$$

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде **многоугольника распределения**, который представляет собой ломаную линию, соединяющую точки плоскости с координатами (x_i, p_i).

Исчерпывающей характеристикой случайной величины является ее **функция распределения $F(x)$**. Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение меньше, чем x:

$$F(x) = p(X < x). \qquad (2.1)$$

Для дискретных случайных величин формула (2.1) преобразуется к виду:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

Функция распределения любой случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Функция распределения представляет собой вероятность. Следовательно она может принимать только те значения, которые принимает вероятность. Поэтому $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения является неубывающей функцией. То есть для любого $x_2 > x_1$, $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Если все возможные значения случайной величины X лежат на интервале $[a, b]$, то $F(X) = 0$ при $x \leq a$ и $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

4. Вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $[a, b]$ вычисляется по разнице значений функции распределения в точках, соответствующих границам интервала:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a). \qquad (2.2)$$

Пример 2.3. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны 0,7 и 0,8 соответственно. Пусть случайная величина X – число попаданий после двух выстрелов. Требуется составить ряд распределения, построить многоугольник распределения и функцию распределения для случайной величины X.

Решение. Дискретная случайная величина X может принимать три значения: 0, 1, 2. Вероятности этих событий найдены в примере 1.15. Ряд распределения будет иметь вид:

x_i	0	1	2
p_i	$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$	$0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}38$	$0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$

Соответственно многоугольник распределения показан на рис. 5, а функция распределения на рис.6.

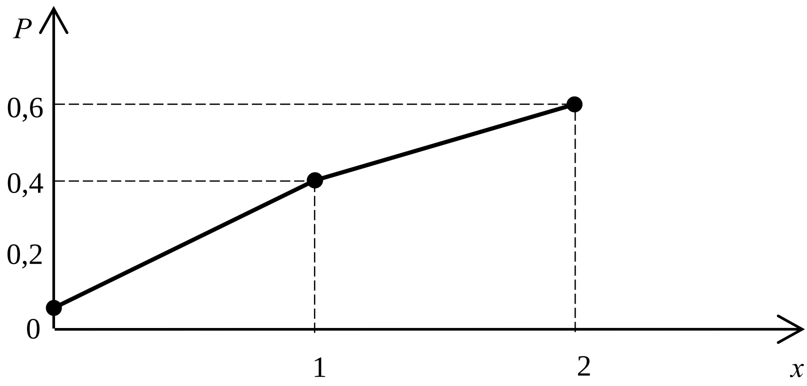


Рис. 5. Многоугольник распределения

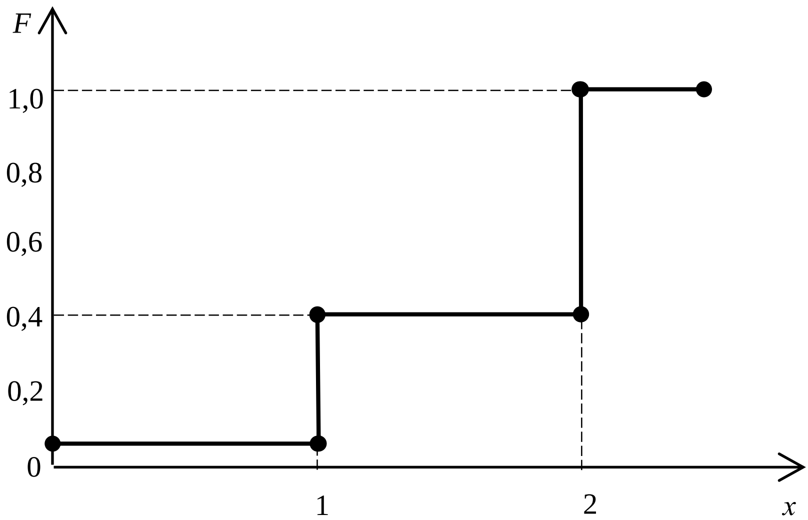


Рис. 6. Функция распределения

2.2. Законы распределения вероятностей дискретных случайных величин

В схеме независимых испытаний вероятность того, что событие A в произойдет ровно k раз, определяется по формуле Бернулли (1.12):

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Такой закон распределения называется **биномиальным**, поскольку правую часть (1.12) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона.

Пример 2.4. Составить ряд распределения и построить функцию распределения случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

Решение. Сделаем вычисления соответствующих вероятностей по формуле (1.12):

$p(X = 0) = 1 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^5 = 0{,}00032;$

$p(X = 1) = 5 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^4 = 0{,}00640;$
$p(X = 2) = 10 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}05120;$
$p(X = 3) = 10 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}20480;$
$p(X = 4) = 5 \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^1 = 0{,}40960;$
$p(X = 5) = 1 \cdot (0{,}8)^5 \cdot (0{,}2)^0 = 0{,}32768.$

Тогда ряд распределения будет иметь следующий вид:

x	0	1	2	3	4	5
p	0,00032	0,00640	0,05120	0,20480	0,40960	0,32768

Функция распределения дискретной случайной величины *X* показана на рис. 7.

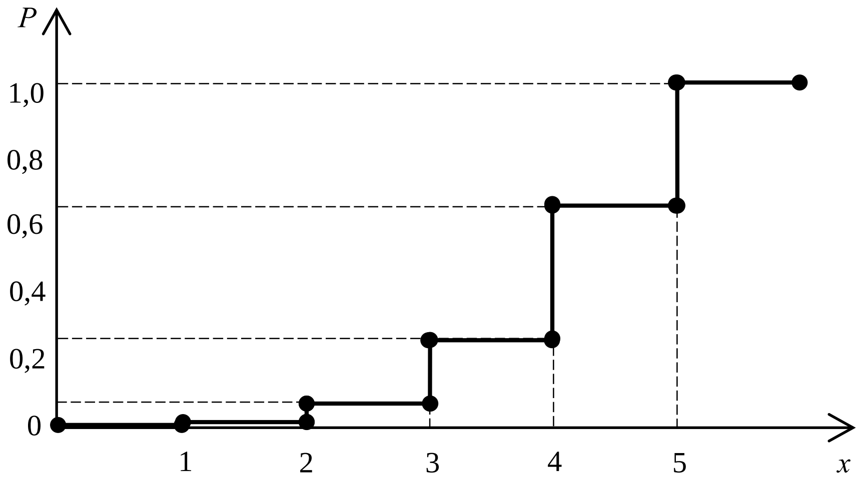


Рис. 7. Функция распределения биномиального закона распределения

2.3. Распределение Пуассона. Простейший поток событий

Пусть дискретная случайная величина *X* принимает только целые неотрицательные значения *0, 1, 2, … , m, …*, последовательность которых не ограничена. Случайная величина *X* будет распределенной по **закону Пуассона**, если вероятность того, что она примет значение m, выражается формулой

$$p_n(X = m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a},$$

где a – некоторая положительная величина, которая имеет смысл частоты и является параметром закона Пуассона.

Как всегда, сумма всех вероятностей равна единице:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(X = m) = 1.$$

Закон Пуассона называют законом редких явлений и часто используют при количественных оценках параметров **потока событий**. Потоком событий называется последовательность однородных событий, которые следуют одно за другим в некоторые случайные моменты времени.

Поток событий характеризуется средним числом событий в единицу времени или **интенсивностью** λ.

Поток событий называется **регулярным**, если события следуют одно за другим через равные интервалы времени. У **стационарного** потока событий его интенсивность не зависит от времени $\lambda(t) = \lambda$. Поток событий является **потоком без последствий**, если число событий, попадающих на один из непересекающихся участков времени, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на элементарный участок времени Δt двух и более событий намного меньше вероятности попадания на этот участок одного события.

Стационарный, ординарный поток без последствий называется **простейшим** или **стационарным пуассоновским** потоком событий.

Регулярный поток событий не является простейшим, поскольку моменты появления событий в нем жестко фиксированы.

При суперпозиции достаточно большого числа n независимых, стационарных, ординарных потоков без последствий получается близкий к простейшему поток с интенсивностью λ, которая определяется как сумма интенсивностей составляющих потоков, т.е.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ .$$

Пусть случайная величина X определяется числом событий, попадающих на произвольный промежуток времени τ с интенсивностью потока λ. При таких условиях случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda\tau$:

$$P(X = m) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} , \tag{2.3}$$

где m – число событий на всем временном промежутке τ.

Пример 2.5. Пусть в кол-центр крупного предприятия поступают телефонные звонки, которые являются простейшим потоком с интенсивностью λ = 1,1. Определить вероятность того, что за три минуты:

1) не придет ни одного вызова;

2) придет ровно два вызова;

3) придет хотя бы один вызов.

Решение. Обозначим через X случайную величину – число вызовов за три минуты. Эта случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda\tau = 1{,}1 \cdot 3 = 3{,}3$.

1. Вероятность того, что не придет ни одного вызова (m = 0), определяется по формуле (2.3):

$$P(X = 0) = \frac{(3{,}3)^0}{0!} e^{-3{,}3} = 0{,}037.$$

2. Вероятность того, что придет ровно два вызова (m=2):

$$P(X = 2) = \frac{(3{,}3)^2}{2!} e^{-3{,}3} = 0{,}201.$$

3. Вероятность того, что придет хотя бы один вызов:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}037 = 0{,}963.$$

2.4. Законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин

Из четвертого свойства функции распределения следует, что для непрерывной случайной величины вероятность каждого ее отдельного значения равна нулю:

$$P(X = a) = F(a) – F(a) = 0.$$

Для непрерывных случайных величин функция распределения (2.1) является одним из видов задания закона распределения. Вторым способом задания закона распределения непрерывной случайной величины является **функция плотности вероятности** (**плотность распределения**, **плотность вероятности**, **дифференциальная функция распределения**).

Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины $f(x)$ является производной функции распределения и определяется по формуле:

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Функция плотности вероятности любой непрерывной случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Функция плотности вероятности является функцией неотрицательной, поскольку функция распределения является неубывающей функцией:

$$f(x) \geq 0. \qquad (2.4)$$

2. Для функции плотности вероятности должно выполняться условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1. \qquad (2.5)$$

3. Функцию распределения непрерывной случайной величины всегда можно определить через функцию плотности вероятности по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad (2.6)$$

4. Вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $[a, b]$ вычисляется по формуле

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad (2.7)$$

Если все возможные значения непрерывной случайной величины сосредоточены в интервале $[a,b]$, то все интегралы вычисляются в этих пределах, поскольку вне интервала $[a, b]$ $f(x) \equiv 0$.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в практических приложениях законы распределения непрерывных случайных величин: **равномерный**, **показательный**, **нормальный**.

2.4.1. Равномерный закон распределения

Функция распределения равномерного закона задается следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < a; \\ (x-a)/(b-a), \text{ если } a \le x \le b; \\ 1, \text{ если } x > b. \end{cases}$$

График функции распределения показан на рис. 8.

Легко можно получить функцию плотности вероятности равномерного закона:

$$f(x) = \begin{cases} \text{const} \quad \text{при} \quad a \le x \le b; \\ 0 \quad \text{при} \quad x < a, \quad x > b. \end{cases} \qquad (2.8)$$

График функции плотности вероятности равномерного закона показан на рис. 9. Максимальная ордината определяется из условия нормировки (2.5).

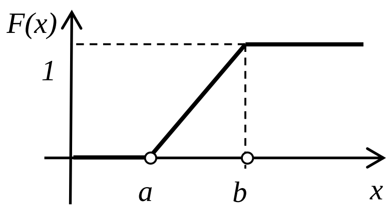


Рис. 8. Функция распределения равномерного закона

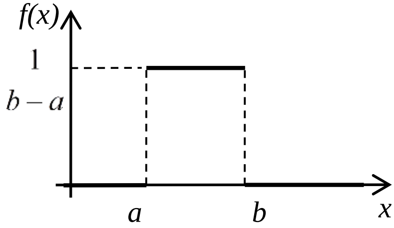


Рис. 9. Функция плотности вероятности равномерного закона

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал [α, β] определяется соотношением (2.2), а если выполняется условие ($a \le \alpha < \beta \le b$), эту вероятность можно вычислить по соотношению

$$p(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Пример 2.6. Автобусы по некоторому маршруту идут с интервалом в восемь минут. Найти вероятность того, что пассажиру на остановке придется ожидать автобуса не более двух минут.

Решение. Время ожидания является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале [0, 8]. Тогда $p(0 \le x \le 2) = \frac{2-0}{8-0} = 0{,}25$.

2.4.2. Показательный закон распределения

Функция плотности вероятности показательного закона распределения записывается в виде:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x};\ 0 \le x < \infty, \qquad (2.9)$$

где λ – параметр распределения.

На рис. 10 показан примерный вид функции плотности вероятности.

Функция (2.9) удовлетворяет условию нормировки (2.5) для любого параметра λ, т.е.

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Функция распределения показательного закона может быть найдена по формуле (2.6) и имеет вид:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_0^x e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Примерный вид функции распределения показательного закона показан на рис. 11.

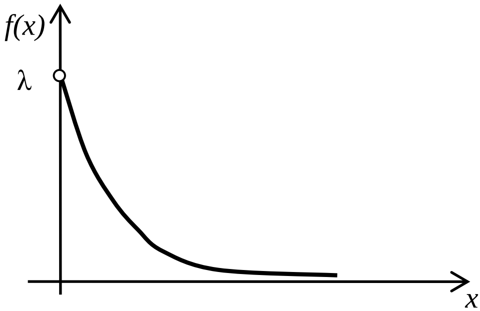


Рис. 10. Функция плотности вероятности показательного закона

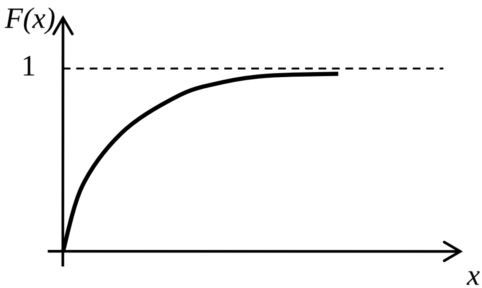


Рис. 11. Функция распределения показательного закона

Вероятность попадания показательно распределенной случайной величины в заданный интервал (a, b) определяется по формуле

$$p(a < x < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Пусть T – непрерывная случайная величина, соответствующая времени безотказной работы некоторого устройства. Тогда функция $F(t) = p(T < t)$ определяет вероятность отказа за время t. Следовательно вероятность безотказной работы или **функция надежности** равна:

$$H(t) = p(T > t) = 1 - F(t).$$

Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством

$$H(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность отказов.

2.4.3. Нормальный закон распределения

Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону, записывается в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.10}$$

где m_x и σ_x – параметры распределения. Таким образом, нормальный закон распределения является двухпараметрическим. Функция (2.10) обладает всеми свойствами функции плотности вероятности (2.4) – (2.7). Кроме того, график функции симметричен относительно прямой $x = m_x$, а при $x = m_x$ функция (2.10) достигает своего максимального значения:

$$f(x = m_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}.$$

Примерный вид функции плотности вероятности нормального закона представлен на рис. 12.

Нормальный закон распределения в теории вероятностей и математической статистике играет особую роль, поскольку к нормальному распределению приближается распределение тех случайных величин, которые формируются под действием большого количества независимых или почти независимых факторов, влияние каждого из которых незначительно.

Нормальным законом распределения часто пользуются для замены реальных законов распределения, даже если они заведомо не являются нормальными из-за простоты (описывают всего два параметра m_x и σ_x). И если случайная величина распределена нормально, то распределение считается нормальным и после линейного преобразования случайной величины (включая операции дифференцирования и интегрирования).

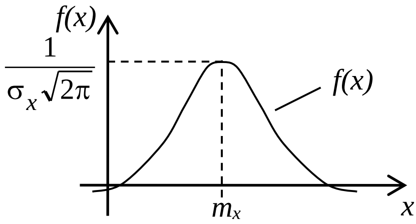


Рис. 12. Функция плотности вероятности нормального закона распределения

Функция распределения нормального закона записывается в виде (см. рис. 13):

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]dx\,.$$

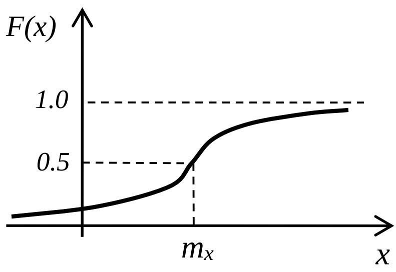


Рис. 13. Функция распределения нормального закона

Сделаем замену переменных:

$$t=\frac{x-m_x}{\sigma_x},\qquad x=\sigma_x\cdot t+m_x\,.$$

Тогда

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Здесь

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (2.11)$$

протабулированная функция Лапласа (Приложение 2).

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

$$\Phi(-\infty) = 0; \ \Phi(0) = \tfrac{1}{2}; \ \Phi(\infty) = 1; \ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону на интервал *(a, b)*, будет определяться по соотношению

$$P(a < x < b) = \Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right). \qquad (2.12)$$

Пример 2.7. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x = 5$, $\sigma_x = 4$. Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (7, 15).

Решение. В соответствии с формулой (2.12) получим:

$$P(7 < x < 15) = \Phi\left(\frac{15 - 5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{7 - 5}{4}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(0{,}5) = 0{,}9938 -$$

$$- 0{,}6915 = 0{,}3023.$$

Определим вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал ($m_x - 3\sigma_x$, $m_x + 3\sigma_x$) с использованием формулы (2.12):

$$P(m_x - 3\sigma_x < x < m_x + 3\sigma_x) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}9986 - 0{,}0014 = 0{,}9973.$$

Из этого можно сделать вывод, что с вероятностью 0,9973 отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превосходит $3\sigma_x$.

Полученный результат позволяет сформулировать **правило «трех сигм»**: на практике можно считать, что все возможные значения нормально распределенной случайной величины лежат в интервале ($m_x - 3\sigma_x$, $m_x + 3\sigma_x$).

Для решения задач с нормальным законом распределения кроме функции Лапласа (2.11) на практике часто используется нечетная функция Лапласа:

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (2.13)$$

Функции (2.11) и (2.13) связаны соотношением:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} + \Phi_0(u).$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на симметричный интервал длиной 2ε относительно математического ожидания m_x равна:

$$P(m_x - \varepsilon < X < m_x + \varepsilon) = P(| X - m_x |< \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

2.5. Двумерные случайные величины. Двумерный закон распределения

Двумерной случайной величиной *(X, Y)* называется совокупность одномерных случайных величин *X* и *Y*, которые принимают значения в результате проведения одного и того же опыта. В зависимости от типа компонент *X* и *Y* различают дискретные, непрерывные и смешанные двумерные случайные величины. Двумерная случайная величина может быть геометрически показана либо как случайная точка на плоскости с координатами *(x, y)*, либо как случайный вектор, направленный из начала координат в точку *(x, y)* (рис. 14).

Двумерная функция распределения двумерной случайной величины вычисляется как вероятность совместного выполнения двух событий:

$$F(x,y) = P(X<x,\ Y<y).$$

Геометрическая интерпретация двумерной функции распределения – вероятность попадания конца вектора в бесконечный квадрант, показанный на рис. 15 заштрихованной областью.

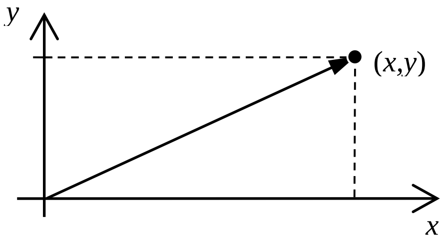


Рис.14. Геометрическая интерпретация двумерной случайной величины

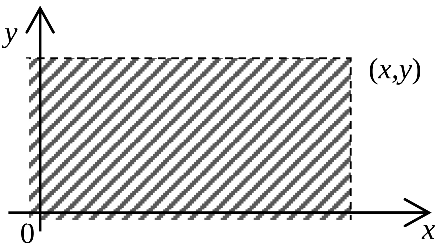


Рис. 15. Геометрическая интерпретация двумерной функции распределения

Функция распределения любой двумерной случайной величины обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x,y) \le 1$.
2. $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$.
3. $F(\infty,\infty)=1$.
4. $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$, *если* $x_2 > x_1$; $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$, *если* $y_2 > y_1$.
5. $F(x,\infty) = P(X<x) = F_x(x)$; $F(\infty,y) = P(Y<y) = F_y(y)$.
6. Вероятность попадания в прямоугольную область (рис. 16): $P(a<X<b;c<Y<d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$.

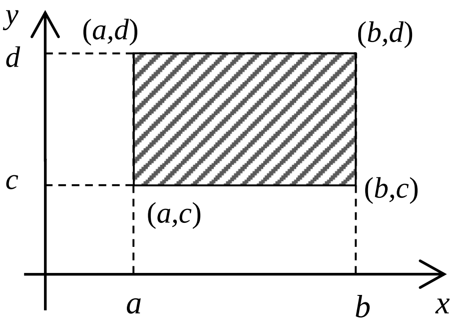


Рис. 16. Прямоугольная область

В статистике применяются двумерные дискретные случайные величины. Двумерная случайная величина *(X, Y)* является дискретной, если множества значений ее компонент Ω_x и Ω_y представляют собой счетные множества. Исчерпывающими характеристиками таких величин являются двумерная функция распределения и матрица распределения.

Матрица распределения представляет собой таблицу (табл. 2), которая содержит компоненты случайной величины $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, значения компоненты $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ и вероятности возможных пар значений $p_{ij} = P(X=x_i,Y=y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Таблица 2. **Матрица распределения**

$x_i \setminus y_j$	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

Матрица распределения обладает следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

$$p_i = p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}, i = 1,\ldots,n. \qquad (2.14)$$

$$p_j = p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ j = 1,\ldots,m. \qquad (2.15)$$

Двумерная плотность вероятности непрерывной двумерной случайной величины определяется соотношением:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Функция плотности вероятности любой двумерной случайной величины обладает следующими свойствами:

1) $f(x,y) \geq 0$ – функция неотрицательная;
2) условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1;$$

3) условие согласованности:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \quad f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx;$$

4) интегральное соотношение:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Случайные величины X и Y независимы друг от друга, если закон распределения любой из них не зависит от закона распределения другой. Для непрерывных независимых случайных величин выполняются следующие соотношения:

$$F(x,y) = F_x(x) \cdot F_y(y); \qquad (2.16)$$

$$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y). \qquad (2.17)$$

Для дискретных независимых случайных величин справедливо:

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j. \qquad (2.18)$$

Если соотношения (2.16) – (2.18) не выполняются хотя бы в одной точке, величины X и Y являются зависимыми.

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные ряды распределения для дискретных составляющих X и Y определяются по формулам:

$$p_{i/j} = p(X = x_i / Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p(Y = y_j)}, i = 1, ..., n; \quad (2.19)$$

$$p_{j/i} = p(Y = y_j / X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p(X = x_i)}, j = 1, ..., m. \quad (2.20)$$

По матрице распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X, Y) можно найти два одномерных ряда вероятностей семейства (2.14) и (2.15) и два семейства условных рядов вероятностей (2.19) и (2.20).

Условные плотности вероятности для непрерывных компонентов X и Y определяются по формулам:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)};$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}.$$

Условные законы распределения обладают всеми свойствами одномерных законов распределения.

Если случайные величины X и Y независимы, условные законы распределения равны соответствующим безусловным:

$$p_{i/j} = p_i, \ i = 1, ..., \ n;$$

$$p_{j/i} = p_j, \ j = 1, ..., \ m.$$

$$f(x/y) = f_x(x);$$

$$f(y/x) = f_y(y).$$

2.6. Многомерные случайные величины. Многомерный закон распределения

Многомерной (*n*-мерной) случайной величиной или **случайным вектором** $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется совокупность одномерных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые принимают некоторые значения в результате проведения опыта. В зависимости от типа компонент $X_1, X_2, \ldots, X_n$ различают дискретные, непрерывные и смешанные многомерные случайные величины. Трехмерная случайная величина может быть геометрически показана как случайная точка в пространстве с координатами (x, y, z), либо как случайный вектор, направленный из начала координат в точку (x, y, z) (рис. 17).

Многомерная функция распределения многомерной случайной величины вычисляется как вероятность совместного выполнения n событий:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

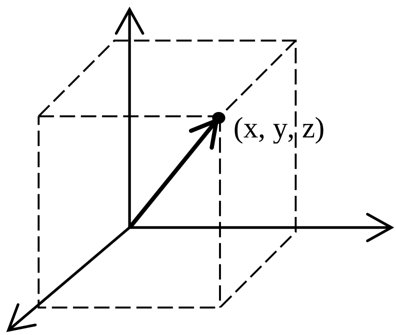


Рис.17. Геометрическая интерпретация трехмерной случайной величины

Геометрической интерпретацией трехмерной функции распределения является вероятность попадания конца вектора в бесконечный куб, показанный на рис. 18 заштрихованной областью.

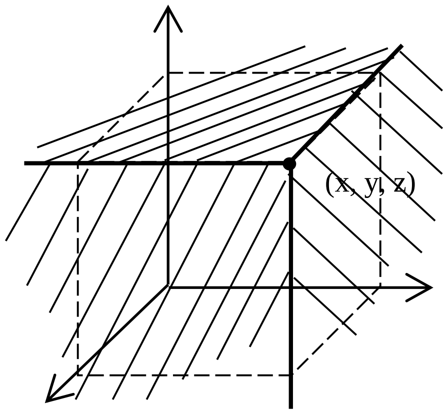


Рис. 18. Геометрическая интерпретация
трехмерной функции распределения

Функция распределения любой *n*-мерной случайной величины обладает следующими свойствами:

1) функция распределения является неотрицательной функцией, т.е. $0 \le F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 1$;

2) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, если хотя бы одна величина $x_i \to -\infty, (i = 1,2,\ldots,n)$;

3) функция распределения является неубывающей функцией по каждому из аргументов, т.е. $F(x_1, x_2, \ldots, x_{i2}, \ldots, x_n) \ge F(x_1, x_2, \ldots, x_{i1}, \ldots, x_n)$, для любых $x_{i2} > x_{i1}$, ($i = 1,2, \ldots, n$);

4) для функции распределения выполняется условие согласованности, т.е. $F_{1,2,\ldots,m}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{1,2,\ldots,n}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, для любых $m = 1, 2, \ldots, n-1$;

5) условие нормировки для функции распределения формулируется таким образом, что если все аргументы функции распределения стремятся к $+\infty$, она равна единице: $F_{1,2,\ldots,n}(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1$.

Геометрической интерпретацией функции распределения является некоторая поверхность, обладающая указанными свойствами.

Плотность вероятности непрерывной *n*-мерной случайной величины определяется как смешанная частная производная *n*-го порядка:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Функция плотности вероятности любой n-мерной случайной величины обладает следующими свойствами:

1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ – функция неотрицательная;
2) условие нормировки:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1;$$

3) условие согласованности для функции плотности вероятности:

$$f_{1,2,\dots,m}(x_1, \dots, x_m) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{(n-m)} f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n;$$

4) функция плотности вероятности связана с функцией распределения интегральным соотношением:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n}}_{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Функция плотности вероятности n-мерной случайной величины связана с условными функциями плотности вероятности составляющих следующим соотношением:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2 / x_1) \cdot f(x_3 / x_1 x_2) \dots f(x_n / x_1 x_2 \dots x_{n-1}).$$

Соответственно, если составляющие случайного вектора являются независимыми случайными величинами, то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n).$$

3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Исчерпывающими характеристиками случайных величин являются их законы распределения. Для дискретных случайных величин это функция распределения или ряд распределения, а для непрерывных случайных величин – функция распределения или функция плотности вероятности. Однако во многих практических задачах нет необходимости характеризовать случайную величину исчерпывающим образом, а достаточно указать ее числовые характеристики. Значения числовых характеристик являются неслучайными (постоянными) величинами. Знание числовых характеристик существенно облегчает решение многих задач теории вероятности.

3.1. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Модой дискретной случайной величины *Mo* называется ее наиболее вероятное значение. Распределения дискретных случайных величин могут быть одномодальными, полимодальными, антимодальными. Их примеры показаны на рис. 19.

Одной из важнейших числовых характеристик случайной величины является **математическое ожидание.** Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется конечная или бесконечная сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n + \ldots . \tag{3.1}$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины иногда называется взвешенным средним, поскольку оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

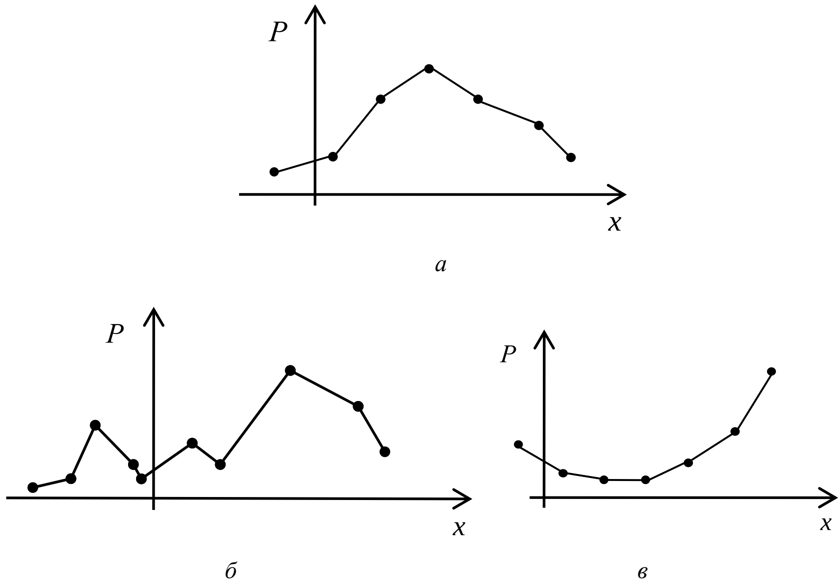


Рис. 19. Мода дискретных случайных величин:
а – одномодальное распределение; б – полимодальное распределение;
в – антимодальное распределение

Пример 3.1. Пусть имеется партия из двенадцати деталей, четыре из которых бракованные. Найти математическое ожидание и моду случайной величины X – числа стандартных деталей среди трех отобранных.

Решение. Из условия задачи следует, что случайная величина X принимает значения 0, 1, 2 или 3. Определим соответствующие вероятности для дискретной случайной величины по формулам (1.1) и (1.9):

$$p(0)=\frac{C_8^0\cdot C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{1\cdot 4}{220}=\frac{4}{220},\qquad p(1)=\frac{C_8^1\cdot C_4^2}{C_{12}^3}=\frac{8\cdot 6}{220}=\frac{48}{220},$$

$$p(2)=\frac{C_8^2\cdot C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{28\cdot 4}{220}=\frac{112}{220},\qquad p(3)=\frac{C_8^3\cdot C_4^0}{C_{12}^3}=\frac{56\cdot 1}{220}=\frac{56}{220}.$$

Построим ряд распределения случайной величины X:

X_i	0	1	2	3
p_i	0,0182	0,2182	0,5091	0,2545

Определим математическое ожидание случайной величины X по формуле (3.1):

$$M(X) = 0\cdot 0{,}0182 + 1\cdot 0{,}2182 + 2\cdot 0{,}5091 + 3\cdot 0{,}2545 = 2{,}0.$$

Мода и математическое ожидание иногда называются характеристиками положения и имеют размерность случайной величины.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание постоянной C равно самой постоянной:

$$M(C) = C. \tag{3.2}$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$$M(C\cdot X) = C\cdot M(X). \tag{3.3}$$

3. Математическое ожидание двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X\cdot Y) = M(X)\cdot M(Y). \tag{3.4}$$

При этом необходимо отметить, что две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не зависит от значений, которые принимает другая случайная величина.

Свойство (3.4) справедливо для произведения любого числа независимых случайных величин.

4. Математическое ожидание суммы двух несовместных случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y). \tag{3.5}$$

Для описания поведения случайной величины недостаточно знания ее математического ожидания. В практических задачах важно располагать характеристикой рассеяния случайной величины относительно математического ожидания. Такой характеристикой является **дисперсия** случайной величины, которая вычисляется как математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D_x = D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - M(X))^2.$$

Из определения дисперсии следует, что она принимает неотрицательные значения. Размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины.

Пример 3.2. Определить дисперсию случайной величины X из примера 3.1.

Решение. Решение задачи проиллюстрировано в таблице.

1	X_i	0	1	2	3
2	p_i	0,0182	0,2182	0,5091	0,2545
3	$X_i - M(X)$	-2,0	-1,0	0,0	1,0
4	$(X_i - M(X))^2$	4,0	1,0	0,0	1,0
5	$p_i \cdot (X_i - M(X))^2$	0,0728	0,2182	0,0	0,2545

Суммируя значения, расположенные в пятой строке данной таблицы, получим: $D(X) = 0{,}5455$.

Другая формула для вычисления дисперсии имеет вид:

$$D(X) = M(X^2) - M^{\,2}(X). \tag{3.6}$$

Дисперсия обладает следующими свойствами.

1. $D(C) = 0$. (3.7)
2. $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$. (3.8)
3. $D(X \pm C) = D(X)$. (3.9)
4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, (3.10)

т.е. дисперсия суммы нескольких независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Более удобной характеристикой рассеяния случайной величины является среднее квадратическое отклонение – корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \tag{3.11}$$

Размерность среднего квадратического отклонения соответствует размерности случайной величины.

Пример 3.3. Определить среднее квадратическое отклонение случайной величины X из примера 3.1.

Решение. $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}5456} = 0{,}7386$.

3.2. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Медианой непрерывной случайной величины *Me* называется такое значение, для которого выполняется следующее равенство:

$$P(x < Me) = P(x > Me) = 0{,}5.$$

Схематичное определение медианы показано на рис. 20.

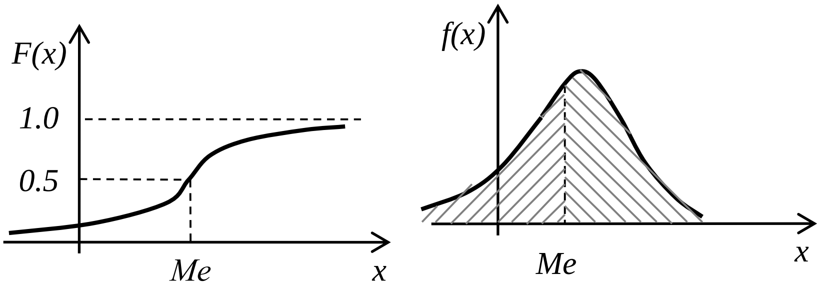


Рис. 20. Медиана случайной величины

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется интегральным соотношением:

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \qquad (3.12)$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины аналогично дискретной случайной величине и обладает свойствами (3.2) – (3.5).

Для симметричных, модальных распределений всегда $M(X) = Mo(X) = Me(X)$.

Общее определение дисперсии непрерывной случайной величины такое же, как и дискретной, а формула для ее вычисления имеет вид:

$$D_x = D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X). \qquad (3.13)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины аналогично дискретной случайной величине обладает свойствами (3.6) – (3.10).

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины вычисляется по формуле (3.11).

Пример 3.4. Пусть непрерывная случайная величина *X* распределена на интервале [2, 4] и имеет следующую функцию плотности вероятности:

$$f(x) = -\frac{3}{4}(x^2 - 6x + 8).$$

Требуется определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

Решение.

$$M(X) = -\frac{3}{4}\int\limits_{2}^{4} x(x^2 - 6x + 8)dx = 3;$$

$$D(X) = -\frac{3}{4}\int\limits_{2}^{4} x^2(x^2 - 6x + 8)dx - 9 = 0{,}2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 0{,}4472.$$

Наиболее общими числовыми характеристиками случайных величин являются начальные $\alpha_k(X)$ и центральные $\mu_k(X)$ моменты порядка *k*. Формулы для их определения имеют вид:

$$a_k(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx; \qquad (3.14)$$

$$\mu_k(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^k f(x)dx. \qquad (3.15)$$

Если все возможные значения непрерывной случайной величины не выходят за пределы интервала $[a, b]$, то интегралы в формулах (3.12) – (3.15) вычисляются в этих пределах.

Анализ формул (3.12) – (3.15) показывает, что математическое ожидание есть начальный момент первого порядка, а дисперсия – центральный момент второго порядка случайной величины.

Другими важными числовыми характеристиками непрерывных случайных величин являются коэффициент асимметрии A_x и эксцесс E_x, значения которых вычисляются по формулам:

$$A_x = \frac{\mu_3(x)}{\sigma_x^3}; \qquad E_x = \frac{\mu_4(x)}{\sigma_x^4} - 3.$$

Схематичная графическая иллюстрация коэффициента асимметрии и эксцесса непрерывных случайных величин показана на рис. 21.

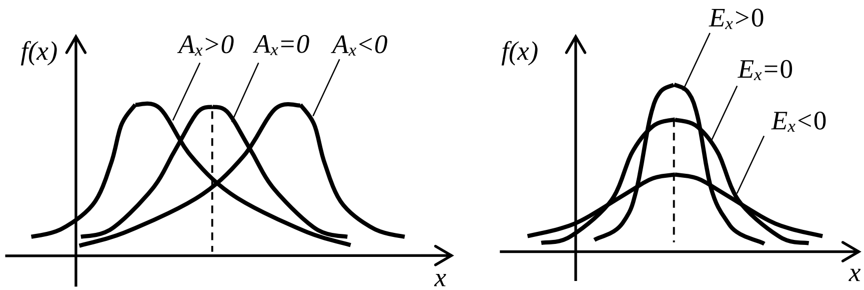


Рис. 21. Схематические графики:
а – коэффициент асимметрии; *б* – эксцесс случайной величины

Числовые характеристики случайных величин, имеющих некоторые стандартные законы распределения, представлены в табл. 3.

Таблица 3. **Числовые характеристики стандартных законов распределения**

№ п/п	Законы распределения	Формула	Параметры распределения	$m_x=M(X)$	$\sigma_x^2=D(X)$	A_x	E_x
1	Биномиальное распределение	(1.12)	p, q	np	npq	-	-
2	Распределение Пуассона	(1.13)	λ	λ	λ	-	-

Окончание табл. 3

3	Равномерное распределение	(2.8)	a, b	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	-1,2
4	Показательный закон распределения	(2.9)	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	2	6
5	Нормальное распределение	(2.10)	m_x, σ_x	m_x	$\sigma_x{}^2$	0	0

3.3. Числовые характеристики двумерных случайных величин

Наиболее общими числовыми характеристиками системы двух случайных величин являются начальные $\alpha_{k,s}(X, Y)$ и центральные $\mu_{k,s}(X, Y)$ моменты порядка $r=k+s$. Формулы для их определения имеют вид:

$$\alpha_{k,s}(X,Y) = M(X^k \cdot Y^s); \tag{3.16}$$

$$\mu_{k,s}(X, Y) = M((X - M(X))^k \cdot (Y - M(Y))^s). \tag{3.17}$$

Для дискретных случайных величин эти формулы следует переписать в следующем виде:

$$\alpha_{k,s}(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij};$$

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))^k (y_j - M(Y))^s p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин формулы (3.16) и (3.17) примут вид интегралов:

$$\alpha_{k,s}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y) dxdy;$$

$$\mu_{k,s}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k (y - M(Y))^s f(x,y) dxdy.$$

Очевидно, что $M(X)=\alpha_{1,0}$; $M(Y)=\alpha_{0,1}$; $D(X)=\mu_{2,0}$; $D(Y)=\mu_{0,2}$.

3.4. Ковариация (корреляционный момент) и коэффициент корреляции

Ковариацией (корреляционным моментом) системы двух случайных величин называется второй смешанный центральный момент:

$$K_{xy}=\mu_{1,1}=M\big((X-M(X))\cdot(Y-M(Y))\big) \tag{3.18}$$

Для дискретных случайных величин формула (3.18) запишется в виде:

$$K_{xy}=\sum_i\sum_j(X_i-M(X))\cdot(Y_j-M(Y))p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин корреляционный момент можно найти по формуле:

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))(y-M(Y))f(x,y)dxdy.$$

Размерность корреляционного момента равна произведению размерностей случайных величин X и Y. Поэтому более удобной безразмерной характеристикой коррелированности двух случайных величин является **коэффициент корреляции**:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Для независимых случайных величин X и Y $K_{xy}=0$ и, следовательно, $r_{xy}=0$.

Понятия коррелированности и зависимости не являются эквивалентными. Величины могут быть зависимыми, но при этом некоррелированными.

Важное свойство коэффициента корреляции – его модуль для любых случайных величин не превышает единицы $|r_{xy}| \le 1$.

3.5. Числовые характеристики многомерных случайных величин

Наиболее общими числовыми характеристиками системы n случайных величин являются начальные $\alpha_{r_1,r_2,\dots,r_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и центральные $\mu_{r_1,r_2,\dots,r_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ моменты порядка $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$. Формулы для их определения имеют вид:

$$\alpha_{r_1,r_2,\dots,r_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = M(X_1^{r_1} \cdot X_2^{r_2} \dots X_n^{r_n}).$$

$$\mu_{r_1,r_2,\dots,r_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = M\left\{\left[X_1 - M(X_1)\right]^{r_1} \dots \left[X_n - M(X_n)\right]^{r_n}\right\}.$$

Для дискретных случайных величин эти формулы следует переписать в следующем виде:

$$\alpha_{r_1,r_2,\dots,r_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_i \sum_j \dots \sum_l x_{1i}^{r_1} \cdot x_{2i}^{r_2} \dots x_{nl}^{r_n} \cdot p_{ij\dots l}. \qquad (3.19)$$

$$\mu_{r_1,r_2,\dots,r_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \\ = \sum_i \dots \sum_l [x_{1i} - M(X_1)]^{r_1} \dots [x_{nl} - M(X_n)]^{r_n} \, p_{i\dots l}. \qquad (3.20)$$

Для непрерывных случайных величин формулы (3.19) и (3.20) примут вид интегралов:

$$\alpha_{r_1,r_2,\dots,r_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} x^{r_1} \cdot x^{r_2} \dots x^{r_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$\mu_{r_1,\dots,r_n}(x_1,\dots,x_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - M(X_1)]^{r_1} \dots [x_{nl} - M(X_n)]^{r_n} \cdot f(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Очевидно, что начальные моменты первого порядка $\alpha_{r_i=1, r_{j\neq i}=0} = m_{x_i}, i = 1,...,n,$ а центральные моменты второго порядка $\mu_{r_i=1, r_{j\neq i}=0} = D_{x_i}, i = 1,...,n.$

3.6. Ковариационная и корреляционная матрицы

Для многомерной (n-мерной) непрерывной случайной величины или случайного вектора $X = (X_1, X_2, \ldots , X_n)$ можно записать соотношения для определения n^2 значений ковариаций (корреляционных моментов):

$$K_{x_i x_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j}) f(x_1,...,x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_{x_i}) \cdot (x_j - m_{x_j}) f(x_i, x_j) dx_i dx_j .$$

Размерность ковариации $K_{x_i x_j}$ определяется как произведение размерностей случайных величин X_i и X_j. Совокупность ковариаций (корреляционных моментов) образует ковариационную матрицу:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{11} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (3.21)$$

В матрице (3.21) элементы $K_{ij} = K_{x_i x_j}$.

Для всех $i = j, K_{x_i x_j} = D_{x_i}$, а для всех $i \neq j, K_{x_i x_j} = K_{x_j x_i}$, $i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,n.$

Следовательно, матрица (3.21) симметрична относительно главной диагонали, а на главной диагонали расположены дисперсии соответствующих случайных величин.

Во многих практических задачах удобнее пользоваться корреляционной матрицей, элементами которой являются соответствующие безразмерные коэффициенты корреляции:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{11} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3.22)$$

Матрица (3.22) также является симметричной относительно главной диагонали, а безразмерные коэффициенты корреляции вычисляются по соотношению:

$$r_{ij} = \frac{K_{x_i x_j}}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}.$$

4. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

При решении практических задач удобно представить исследуемую(ые) случайную(ые) величину(ы) как функцию случайных аргументов, законы распределения которых известны. Это дает возможность установить закон(ы) распределения исследуемой(ых) случайной(ых) величины(н).

4.1. Функция одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называется функцией случайного аргумента X:

$$Y = \varphi(X). \tag{4.1}$$

Пример 4.1. Пусть дискретная случайная величина X задана рядом распределения, представленным в таблице.

X	4,0	6,0	8,0	10,0
p	0,10	0,15	0,35	0,40

Построим ряд распределения случайной величины Y, которая вычисляется по соотношению

$$Y = 2 \cdot X^2 - 10.$$

При вычислении значений Y в формулу, задающую функции, подставляются соответствующие значения X, а вероятности соответствующих значений X и Y равны.

Y	22,0	62,0	118,0	190,0
p	0,10	0,15	0,35	0,40

Если при этом разным значениям аргумента X соответствуют одинаковые значения Y, то вероятности значений аргумента, при которых функция принимает одно и то же значение, складываются.

Пример 4.2. Ряд распределения дискретной случайной величины X имеет следующий вид:

X	0,0	1,0	2,0	3,0
p	0,10	0,15	0,35	0,40

Пусть случайная величина Y определяется соотношением $Y = X^2 - 2X$. Тогда ряд распределения случайной величины Y получится в виде:

Y	-1,0	0,0	3,0
p	0,15	0,45	0,40

Если X – непрерывная случайная величина с функцией плотности вероятности $f_x(x)$, случайная величина Y определяется формулой (4.1), а $\varphi(X)$ – монотонная дифференцируемая функция, то плотность распределения случайной величины Y можно вычислить по соотношению:

$$f(y) = f_x(\psi(y))\,|\,\psi'(y)\,|,$$

где $\psi(y)$ – функция, обратная по отношению к функции $\varphi(X)$.

Другой важной практической задачей является определение математического ожидания функции случайного аргумента (4.1) по закону распределения случайной величины X.

Для дискретной случайной величины X формула для определения математического ожидания случайной величины Y имеет вид:

$$m_y = M(Y) = M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\,p_i.$$

Пример 4.3. Определить математическое ожидание случайной величины Y для примера 4.1.

Решение:

$M(Y) = 22 \cdot 0{,}10 + 62 \cdot 0{,}15 + 118 \cdot 0{,}35 + 190 \cdot 0{,}40 = 128{,}8.$

Если X – непрерывная случайная величина, то математическое ожидание Y определяется интегралом:

$$m_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx. \qquad (4.2)$$

Если случайная величина X распределена на промежутке (a, b), интегрирование в формуле (4.2) требуется проводить в указанных пределах.

4.2. Функция двух случайных аргументов

Если каждой паре значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то случайная величина Z называется **функцией двух случайных аргументов** X и Y:

$$Z = \varphi(X,Y).$$

Пусть случайная величина Z является суммой случайных величин X и Y. Требуется определить ее закон распределения, если известны законы распределения каждого из слагаемых.

В случае, когда X и Y – дискретные независимые случайные величины, то для определения закона распределения $Z = X + Y$ нужно найти все возможные значения Z и соответствующие им вероятности.

Пример 4.4. Законы распределения дискретных случайных величин X и Y представлены в таблицах.

X	-2	1	3
p	0,3	0,4	0,3

Y	0	1	2
p	0,2	0,5	0,3

Требуется составить закон распределения случайной величины $Z=X+Y$.

Решение. Просуммируем возможные значения X и Y, а соответствующие вероятности перемножим. Полученные значения разместим в табличной форме.

Z	-2+0= = -2	-2+1= = -1	-2+2= = 0	1+0= = 1	1+1= = 2	1+2= = 3	3+0 = = 3	3+1= = 4	3+2= = 5
p	0,3·0,2= = 0,06	0,3·0,5= = 0,15	0,3·0,3= = 0,09	0,4·0,2= = 0,08	0,4·0,5= = 0,20	0,4·0,3= = 0,12	0,3·0,2= = 0,06	0,3·0,5= = 0,15	0,3·0,3= = 0,09

Значения случайной величины $Z = 3$ повторяются дважды. Поэтому соответствующие вероятности складываются. Получим ряд распределения, представленный в последующей таблице:

Z	-2	-1	0	1	2	3	4	5
p	0,06	0,15	0,09	0,08	0,20	0,18	0,15	0,09

В случае, когда X и Y – непрерывные случайные величины, то для определения функции плотности вероятности случайной величины $Z = X + Y$ можно воспользоваться следующим соотношением:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(z-y, y)dy. \qquad (4.3)$$

Здесь $f_{xy}(x, y)$ – совместная функция плотности вероятности случайных величин X и Y.

В случае, когда X и Y – непрерывные независимые случайные величины, то для определения функции плотности вероятности случайной величины Z можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z-x)dx; \\ f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y) f_y(y)dy. \end{gathered} \qquad (4.4)$$

Здесь $f_x(x)$, $f_y(y)$ – функции плотности распределения случайных величин X и Y соответственно.

Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин называется **композицией**, и тогда соотношения (4.3) и (4.4) кратко записываются в виде:

$$f(z) = f_1(x) \cdot f_2(y). \qquad (4.5)$$

Пусть случайная величина Z является произведением случайных величин X и Y. Требуется определить ее закон распределения, если известны законы распределения каждого из слагаемых.

В случае, когда X и Y – дискретные независимые случайные величины, то для определения закона распределения $Z = X \cdot Y$ нужно найти все возможные значения Z и соответствующие им вероятности.

Пример 4.5. Законы распределения дискретных случайных величин X и Y представлены в таблицах.

X	-2	1	3
p	0,3	0,4	0,3

Y	0	1	2
p	0,2	0,5	0,3

Требуется составить закон распределения случайной величины $Z=X \cdot Y$.

Решение. Перемножим возможные значения X и Y и соответствующие вероятности. Полученные значения разместим в табличной форме.

Z	-2·0= = 0	-2·1= =-2	-2·2= = -4	1·0= = 0	1·1= = 1	1·2= = 2	3·0= = 0	3·1= = 3	3·2= = 6
p	0,3·0,2= = 0,06	0,3·0,5= = 0,15	0,3·0,3= = 0,09	0,4·0,2= = 0,08	0,4·0,5= = 0,20	0,4·0,3= = 0,12	0,3·0,2= = 0,06	0,3·0,5= = 0,15	0,3·0,3= = 0,09

Значения случайной величины $Z = 0$ повторяются трижды. Поэтому соответствующие вероятности складываются. Получим ряд распределения, представленный в последующей таблице:

Z	-4	-2	0	1	2	3	6
p	0,09	0,15	0,20	0,20	0,12	0,15	0,09

В случае, когда X и Y – непрерывные случайные величины, то для определения функции плотности вероятности случайной величины $Z = X \cdot Y$ можно воспользоваться следующим соотношением:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{xy}\left(x, \frac{z}{x}\right)}{|x|} dx.$$

Здесь $f_{xy}(x,y)$ – совместная функция плотности вероятности случайных величин X и Y.

В случае, когда X и Y – непрерывные независимые случайные величины, то для определения функции плотности вероятности случайной величины Z можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_x(x)\cdot f_y\left(\frac{z}{x}\right)}{|x|}dx,$$

где $f_x(x)$, $f_y(y)$ – функции плотности распределения случайных величин X и Y соответственно.

4.3. Двумерный нормальный закон распределения

Двумерным нормальным законом распределения называется распределение вероятностей двумерной случайной величины (X, Y), если совместная функция плотности вероятности имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\frac{(y-m_y)}{\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}.$$

Таким образом, двумерный нормальный закон распределения определяется пятью параметрами: m_x и m_y – математические ожидания случайных величин X и Y соответственно; σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения случайных величин X и Y соответственно; r – коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

Если случайные величины X и Y некоррелированы, т.е. $r = 0$, то из формулы (4.5) получим:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\cdot\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\cdot\exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Из некоррелированности составляющих нормально распределенной двумерной случайной величины следует их независимость.

Для нормально распределенных случайных величин понятия независимости и некоррелированности равносильны.

4.4. Линейная регрессия

Пусть случайные величины X и Y являются зависимыми и составляют двумерную случайную величину (X, Y). Предположим, что одну из этих случайных величин можно приближенно представить как линейную функцию другой, например:

$$Y = \varphi(X) \approx \beta + \alpha X. \quad (4.6)$$

В формуле (4.6) параметры α и β подлежат определению, например с помощью **метода наименьших квадратов**.

Функция $\varphi(X) = \beta + \alpha X$ является **наилучшим приближением** для Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M(Y - \varphi(X))^2$ принимает наименьшее возможное значение.

При этом функция $\varphi(X)$ называется **среднеквадратической регрессией** Y на X.

Линейная среднеквадратическая регрессия Y на X имеет следующий вид:

$$\varphi(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)\,.$$

Здесь m_x и m_y – математические ожидания случайных величин X и Y соответственно; σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения случайных величин X и Y соответственно; $r = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ – коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

Коэффициент $\alpha = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется **коэффициентом регрессии** ***Y* на *X***.

Прямая линия, описываемая уравнением

$$Y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x),$$

называется **прямой среднеквадратической регрессии *Y* на *X***.

Величина $\sigma_y^2(1-r^2)$ называется остаточной дисперсией *Y* относительно *X* и характеризует величину ошибки, допускаемой при замене *Y* на $\varphi(X)=\beta+\alpha X$. Если коэффициент корреляции $r = \pm1$, то остаточная дисперсия равна нулю. В этом случае равенство (4.6) является точным. Следовательно при $r = \pm1$ случайные величины *Y* и *X* связаны между собой линейной функциональной зависимостью.

Аналогично можно получить прямую среднеквадратической регрессии *X* на *Y*:

$$X-m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-m_y)\,.$$

4.5. Линейная корреляция

Для любой двумерной случайной величины *(X, Y)* можно ввести **условное математическое ожидание *Y* при *X=x*** или **условное математическое ожидание *X* при *Y=y***.

Для дискретных случайных величин условное математическое ожидание определяется по формуле

$$M(Y\mid X=x)=\sum_{j=1}^{m} y_j\,p(y_j\mid x_j).$$

Для непрерывных случайных величин условное математическое ожидание определится по зависимости

$$M(Y\mid X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y f(y\mid x)\,dy.$$

Функцией регрессии *Y* на *X* называется условное математическое ожидание:

$$M(Y\mid x)=\psi_x(x).$$

Аналогично определяется условное математическое ожидание и функция регрессии *X* на *Y*.

$$M(X\mid y)=\psi_y(y).$$

Если обе функции регрессии *X* на *Y* и *Y* на *X* являются линейными функциями, то случайные величины *X* и *Y* связаны **линейной корреляционной зависимостью**.

При этом графики линейных функций регрессии являются прямыми линиями, которые совпадают с прямыми среднеквадратической регрессии.

Если двумерная случайная величина *(X, Y)* распределена нормально, то случайные величины *X* и *Y* связаны линейной корреляционной зависимостью.

Уравнения прямых регрессии будут иметь вид:

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x), \quad x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y).$$

5. ЦЕПИ МАРКОВА

Теория марковских случайных процессов является составной частью общей теории случайных процессов. В настоящее время теория марковских процессов и ее приложения широко применяются в теории принятия оптимальных решений и теории массового обслуживания.

Пусть имеется некоторая система S, которая может находиться в одном из состояний $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Система может изменять состояние только в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots$ ($t_1<t_2<\ldots<t_m<\ldots$). При этом вероятность оказаться в состоянии ξ_j в момент времени t_m зависит только от того, в каком состоянии находилась система S в момент времени t_{m-1}. Цепь Маркова задана, если сформулированы приведенные условия.

Если система находится в состоянии ξ_i в момент времени t_{m-1}, то вероятность того, что система окажется в состоянии ξ_j в следующий момент времени t_m, называется **переходной** вероятностью:

$$p_{ij}^m = p_{t_m}(\xi_i \to \xi_j).$$

Марковские цепи, для которых переходные вероятности p_{ij}^m не зависят от момента времени t_m, а зависят только от индексов i и j, называются **однородными марковскими цепями**. Полная вероятностная картина изменений состояний системы S, которая может находиться в одном из n состояний, задается матрицей следующего вида:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (5.1)$$

Матрица (5.1) называется **матрицей перехода**. Элементы матрицы удовлетворяют двум условиям:

1. $0 \le p_{ij} \le 1$,

2. $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ для всех j=1,2,…,n (сумма вероятностей по строкам).

Матрицы, удовлетворяющие этим двум условиям, называются **стохастическими**.

Пример 5.1. Пусть совокупность квалифицированных рабочих поделена на три группы:

1. ξ_1 – рабочие, у которых нет высшего образования, и которые не собираются его получать;

2. ξ_2 – рабочие, у которых нет высшего образования, но которые собираются его получать;

3. ξ_3 – рабочие, у которых есть высшее образование.

Статистические обследования позволили оценить вероятность перехода из одной группы в другую на протяжении одного года. Полученная матрица перехода имеет следующий вид:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}.$$

Указать смысл элементов матрицы перехода и представить матрицу в виде сигнального графа.

Решение. В этой матрице элемент p_{21}=0 показывает вероятность того, что рабочий, который планировал начать получать высшее образование в прошлом году, в следующем за ним году вообще отказался от получения высшего образования.

Элемент p_{23}=0,3 означает вероятность того, что рабочий начнет получать высшее образование в этом году, если он не начал его получать в прошлом году, но планировал начать.

Вероятность того, что рабочие, которые в предшествующем году имели высшее образование, и в следующем за ним году будут его иметь, равна p_{33}=1,0.

Матрицу перехода удобно изображать в виде сигнальных графов, показывая переходы системы из одного состояния в другое. У правильно построенных сигнальных графов сумма вероятностей, исходящих из всех вершин, равна единице. Сигнальный граф матрицы P примера 5.1 показан на рис. 22.

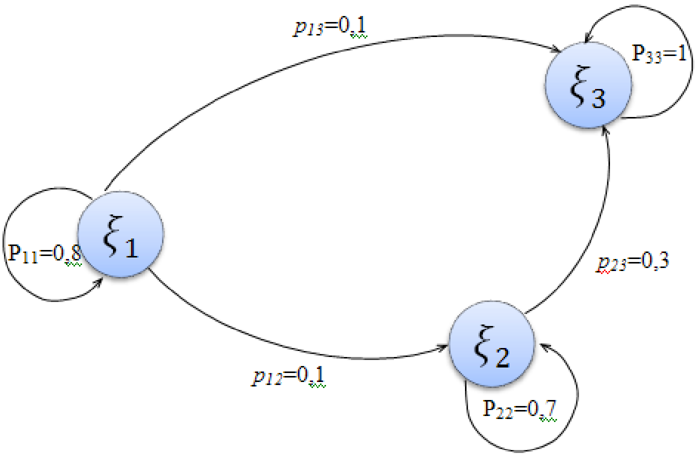


Рис. 22. Сигнальный граф матрицы перехода

Оценка переходных матриц имеет важное практическое значение, поскольку позволяет оптимизировать решение транспортных задач и методы составления прогнозов спроса на потребительские товары длительного пользования.

Наряду с переходной матрицей P на один шаг большое значение имеет матрица перехода за n шагов, которая вычисляется по формуле:

$$P(n) = p^n. \tag{5.2}$$

Пример 5.2. Транспортный цех осуществляет доставку заготовок в три разных цеха: R_1, R_2, R_3. Цех имеет группу курьеров, которая обслуживает эти предприятия. Для осуществления следующей доставки курьер едет в тот цех, который на данный момент ему ближе. Статистически определено следующее распределение вероятностей:

1) после осуществления доставки в R_1 следующая доставка в 30 случаях осуществляется в R_1, в 30 случаях – в R_2 и в 40 случаях – в R_3;

2) после осуществления доставки в R_2 следующая доставка в 40 случаях осуществляется в R_1, в 40 случаях – в R_2 и в 20 случаях – в R_3;

3) после осуществления доставки в R_3 следующая доставка в 50 случаях осуществляется в R_1, в 30 случаях – в R_2 и в 20 случаях – в R_3.

Следовательно цех для следующей доставки определяется только предыдущей доставкой. Местонахождение курьера в момент времени $t + 1$ зависит только от местонахождения в момент времени t. Поэтому данную модель можно интерпретировать как цепь Маркова. Матрица перехода выглядит следующим образом:

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Например, $p_{21} = 0,4$ – вероятность того, что после доставки в цех R_2 следующая доставка будет производиться в цех R_1.

Пусть каждая доставка с последующим перемещением в следующий цех занимает 20 минут. Тогда, в соответствии со статистическими данными, через 20 минут 40% курьеров, находившихся в R_2, будут в R_1, 40% будут в R_2 и 20% – в R_3.

Поскольку элементы матрицы перехода представляют собой вероятности, то $0 < p_{ij} < 1$, а так как в следующий момент времени каждый из курьеров обязательно будет в одном из цехов, то сумма по строкам равна 1.

Требуется определить вероятность того, что курьер окажется в цехе R_2 через две доставки, если он начинает в цехе R_3.

Решение. Существует три варианта оказаться через две доставки в цехе R_2:

1) $R_3 \to R_3$ и $R_3 \to R_2$;

2) $R_3 \to R_2$ и $R_2 \to R_2$;

3) $R_3 \to R_1$ и $R_1 \to R_2$.

Учитывая правило сложения и умножения независимых событий, искомая вероятность будет равна:

$$P = P(R_3R_3) \cdot P(R_3R_2) + P(R_3R_2) \cdot P(R_2R_2) + P(R_3R_1) \cdot P(R_1R_2) =$$

$$= 0,2 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,33.$$

Полученный результат говорит о том, что если курьер начал работу из R_3, то в 33 случаях из 100 он будет в R_2 через две доставки.

Более простой способ решения поставленной задачи заключается в использовании формулы (5.2). Возведем матрицу P в квадрат:

$$P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}41 & 0{,}33 & 0{,}26 \\ 0{,}38 & 0{,}34 & 0{,}28 \\ 0{,}37 & 0{,}33 & 0{,}30 \end{bmatrix}.$$

Элемент результирующей матрицы (3,2) – это вероятность перехода из R_3 в R_2 за два шага, и он равен 0,33. Мы получили тот же результат, что и в предыдущем подходе. В результирующей матрице сумма всех элементов в каждой строке равна 1.

Аналогичным образом можно вычислить вероятность оказаться в цехе R_i, если начинать в цехе R_j, через любое количество доставок.

6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Предметом математической статистики являются закономерности, которым подчинены массовые случайные явления. Эти закономерности устанавливаются на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений.

6.1. Задачи математической статистики и основные определения

Основные задачи математической статистики:

1. Определение способов сбора и группировки статистических данных.

2. Разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования.

К целям исследования можно отнести решение следующих задач: оценка вероятности события; оценка функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого неизвестен; оценка корреляционной зависимости от других случайных величин; проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения и др.

Для решения этих задач из большой совокупности однородных объектов выбирается ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых делается прогноз исследуемого признака этих объектов.

Основные определения математической статистики:

Генеральная совокупность – это все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, выбранных случайным образом из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности N и объем выборки n – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Выборки могут быть **повторными** и **бесповторными**.

Повторная выборка – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность.

В бесповторных выборках отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность.

Поскольку по результатам исследования выборки необходимо делать выводы о поведении интересующего признака генеральной совокупности, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности и быть **репрезентативной** (т.е. представительной). В соответствии с законом больших чисел это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, а вероятность попадания в выборку одинакова для любого объекта.

Пусть случайная величина X принимает в выборке значения $x_1 - n_1$ раз, $x_2 - n_2$ раз, …, $x_k - n_k$ раз, причем

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n,$$

где n – объем выборки.

Наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_k$ называются **вариантами**, а значения $n_1, n_2, \dots, n_k$ – **частотами**. Если разделить каждую частоту на объем выборки, получатся значения **относительных частот**:

$$p_i^* = \frac{n_i}{n}.$$

Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называется **вариационным рядом**. Перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – **статистическим рядом** (табл. 4).

Таблица 4. **Статистический ряд**

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

Если исследуется признак непрерывный случайной величины, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В таком случае нужно использовать **группированную выборку**. Для получения группированной выборки интервал (a, b), в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивается на равные частичные интервалы длиной h. Для каждого частичного интервала определяется сумма частот вариант, попавших в данный интервал. Составленная по этим результатам таблица называется **группированным статистическим рядом** (табл. 5).

Таблица 5. **Группированный статистический ряд**

Номера интервалов	1	2	…	k
Границы интервалов	$(a, a+h)$	$(a+h, a+2h)$	…	$(b-h, b)$
	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	…	(x_k, x_{k+1})
Сумма частот вариант, попавших в интервал	n_1	n_2	…	n_k
Относительные частоты	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке строятся различные графики. Например, **полигон частот** представляет собой ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$. Значения x_i откладываются на оси абсцисс, а значения n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать относительные частоты p_i^*, получим **полигон относительных частот** (см. рис. 23).

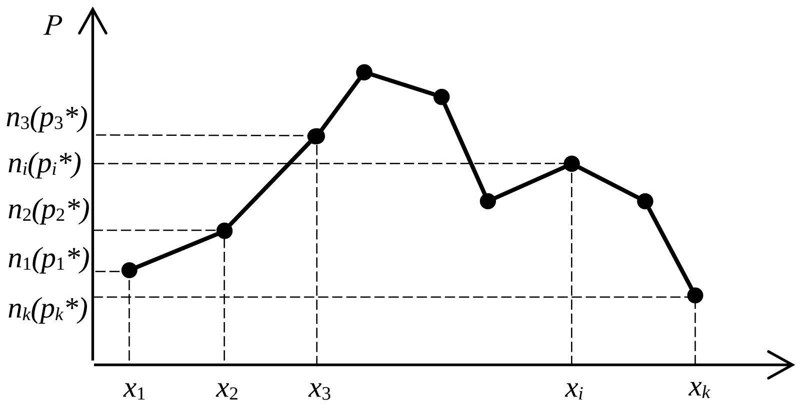


Рис. 23. Полигон (относительных) частот

Выборочной (эмпирической) функцией распределения называется функция $F^*(x)$, которая определяет для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Теоретическая функция распределения генеральной совокупности $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а функция $F^*(x)$ – относительную частоту этого события. При достаточно больших значениях n функция $F^*(x)$ стремится по вероятности к функции $F(x)$.

Из определения эмпирической функции распределения следует, что ее свойства совпадают со свойствами $F(x)$.

1. $0 \le F^*(x) \le 1$.

2. Функция $F^*(x)$ – функция неубывающая.

3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при всех $x \le x_1$. Если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при всех $x \ge x_k$.

Для наглядного представления некоторого непрерывного признака случайной величины используется **гистограмма распределения**. Пример гистограммы показан на рис. 24.

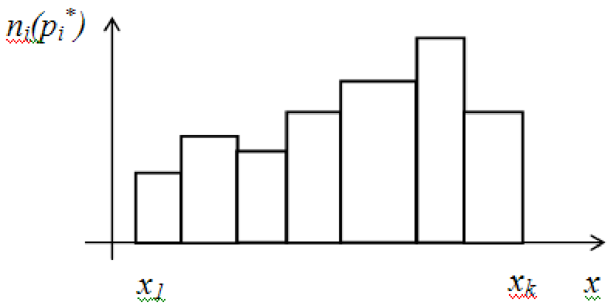


Рис. 24. Гистограмма распределения

6.2. Закон больших чисел

Под **законом больших чисел** понимается общий принцип, согласно которому при большом числе случайных величин их средний результат перестает быть случайным и может быть с большой степенью определенности предсказан. Случайные отклонения от некоторого среднего поведения взаимно погашаются. Например, если влияние на сумму отдельных слагаемых является равномерно малым, закон распределения суммы приближается к нормальному. Группа теорем, в которых дается математическая формулировка данного утверждения, называется законом больших чисел.

Неравенство Чебышева, которое записывается в виде

$$p(|X - M(X)|) < \varepsilon \geq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \tag{6.1}$$

где ε сколь угодно малое число, справедливо как для непрерывных, так и дискретных случайных величин.

Неравенство Чебышева (6.1) используется для доказательства группы теорем закона больших чисел.

Согласно **теореме Чебышева**, если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, дисперсии которых попарно ограничены ($D(X) \leq C$), при достаточно большом числе случайных величин и сколь угодно малом числе ε выполняется соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{6.2}$$

Из соотношения (6.2) следует, что среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин утрачивает характер случайной величины и принимает значение, близкое к сумме их математических ожиданий, деленной на число случайных величин.

Другой теоремой, используемой в законе больших чисел, является **теорема Бернулли**, согласно которой, если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, то при достаточно большом n для произвольного $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$p\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \tag{6.3}$$

где m – число появлений события A в n опытах, $q = 1 - p$.

Если в соотношении (6.3) перейти к пределу, получим:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Данный вид сходимости называется **сходимостью по вероятности**.

Нередко при решении практических задач требуется оценить вероятность того, что отклонение числа m появления события в n испытаниях от ожидаемого результата np не превысит определенного числа ε. Для данной оценки неравенство записывается в виде:

$$p\left(|m - np| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}. \tag{6.4}$$

Пример 6.1. Монету подбрасывают 500 раз. Оценить вероятность отклонения частоты появления герба от вероятности его появления меньше чем на 0,15.

Решение. Вероятность появления герба p = 0,5, тогда $q = 1 - p =$ $= 0{,}5$, $n = 500$, $\varepsilon = 0{,}15$.

Используя неравенство Бернулли (6.3), получим:

$$p\left(\left|\frac{m}{500} - 0{,}5\right| < 0{,}15\right) > 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{500 \cdot 0{,}15^2} = \frac{44}{45}.$$

Рассмотрим неравенство $\left|\frac{m}{500} - 0{,}5\right| < 0{,}15$. Раскрываем модуль и решаем относительно m, получим $175 < m < 325$. Следовательно вероятность отклонения частоты появления герба от вероятности его появления равна вероятности того, что герб выпадет от 175 до 325 раз из 500, и равна 44/45.

Пример 6.2. В урне 100 белых и 100 черных шаров. Вынули с возвращением 50 шаров. Оценить вероятность того, что среди вынутых шаров белых окажется более 20 и менее 30.

Решение. Используем теорему Бернулли в виде (6.4). Вероятность достать белый шар при каждом испытании равна p=100/200 = = 0,5, тогда q = 0,5. Для вычисления ε раскроем модуль и получим

$25 - \varepsilon \le m \le 25 + \varepsilon$. По условиям задачи находим, что $\varepsilon = 5$. Тогда искомая вероятность будет равна:

$$p > 1 - \frac{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{5^2} = 0{,}5.$$

Вид предельного закона распределения суммы случайных величин рассматривается в группе теорем, которые называются **центральной предельной теоремой**. В них доказывается, что закон распределения суммы случайных величин, каждая из которых может иметь различные распределения, приближается к нормальному распределению при достаточно большом числе слагаемых.

Этим объясняется важность нормального закона распределения для практических приложений.

7. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Одной из задач математической статистики является оценка значений числовых характеристик исследуемой случайной величины.

7.1. Основные точечные оценки параметров распределения

Выборочным средним $\bar{x}$ называется среднее арифметическое значений случайной величины, имеющихся в выборке:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}, \qquad (7.1)$$

где x_i – варианты; n_i – частоты.

Выборочное среднее позволяет оценить математическое ожидание m_{xB} исследуемой случайной величины по данной выборке: $m_{xB} = \bar{x}$.

Выборочная дисперсия $D_B = S^2$ определяется по формуле:

$$\overline{D} = \overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n}. \qquad (7.2)$$

Справедлива также формула для вычисления выборочной дисперсии в виде:

$$\overline{D} = \overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2}{n^2 - (\bar{x})^2}. \qquad (7.3)$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение находится по зависимости:

$$\overline{\sigma} = \overline{S} = \sqrt{\overline{D}}.$$

Модой M_0 вариационного ряда называется варианта, имеющая наибольшую частоту.

Медианой M_e является варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно ($n = 2k + 1$), то $M_e = x_{k+1}$. Если число вариант четно ($n = 2k$), то $M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Пример 7.1. Пусть выборка задана следующим статистическим рядом:

x_i	2	5	7	9
n_i	4	10	8	3

Требуется определить выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, моду и медиану.

Решение.

Выборочное среднее:

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 8 + 9 \cdot 3}{25} = 5{,}64.$$

Выборочная дисперсия:

$$\overline{D} = \overline{S}^2 = \frac{2^2 \cdot 4 + 5^2 \cdot 10 + 7^2 \cdot 8 + 9^2 \cdot 3}{25} - 5{,}64^2 = 4{,}23.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{\sigma} = \overline{S} = \sqrt{4{,}23} = 2{,}06.$$

Мода:

$$M_0 = 5.$$

Медиана:

$$M_e = \frac{5 + 7}{2} = 6.$$

Оценки начальных и центральных моментов (эмпирические моменты) определяются аналогично теоретическим моментам дискретных случайных величин. **Начальный эмпирический момент порядка *k*** определяется зависимостью:

$$\overline{\alpha}_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

Центральный эмпирический момент порядка k вычисляется по формуле

$$\overline{\mu}_k = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^k}{n}.$$

В частности, $\overline{\alpha}_1 = \overline{x}, \overline{\mu}_2 = \overline{D} = \overline{S}^2$.

При статистическом исследовании двумерных случайных величин основной задачей является выявление связи между составляющими. Зависимость между составляющими двумерной случайной величины может иметь разный вид:

1. Функциональная зависимость, когда каждому возможному значению X соответствует одно значение Y.

2. Статистическая зависимость, при которой изменение одной величины приводит к изменению другой; если в результате изменения одной величины меняется среднее значение другой, то статистическая зависимость между случайными величинами называется корреляционной.

7.2. Основные свойства статистических характеристик параметров распределения

После получения статистических оценок параметров распределения (выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение и т.п.) необходимо проверить в какой степени значения статистических оценок соответствуют истинным значениям параметров распределения генеральной совокупности.

Обозначим через $\tilde{a}$ статистическую оценку неизвестного параметра a некоторого теоретического распределения. Пусть из генеральной совокупности извлекается k выборок $\overline{\alpha}_1^*, \overline{\alpha}_2^*, ..., \overline{\alpha}_k^*$ одного и того же объема n. Тогда оценку $\tilde{a}$ можно рассматривать как случайную величину, принимающую возможные значения $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, …, $\tilde{a}_k$. Случайная величина статистической оценки $\tilde{a}$ имеет свой закон и параметры распределения.

Статистическая оценка параметра распределения должна быть **несмещенной**, **эффективной** и **состоятельной**.

Статистическая оценка $\tilde{a}$ называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно истинному значению параметра a генеральной совокупности при любом объеме выборки:

$$M(\tilde{a}) = a.$$

Если математическое ожидание оценки $\tilde{a}$ не равно истинному значению параметра a, то оценка называется **смещенной**.

Статистическая оценка называется **эффективной**, если при заданном объеме выборки n имеет наименьшую дисперсию из всех возможных.

Статистическая оценка является **состоятельной**, если при $n \to \infty$ она стремится по вероятности к истинному значению a.

Если статистическая оценка является несмещенной, то она будет состоятельной в случае, когда ее дисперсия стремится к нулю при $n \to \infty$.

Выборочное среднее $\bar{x}$, вычисленное по формуле (7.1), представляет собой несмещенную и состоятельную оценку математического ожидания m_x. При этом, если случайная величина распределена по нормальному закону, то $\bar{x}$ является еще и эффективной оценкой математического ожидания.

Выборочная дисперсия $\overline{D}$, вычисленная по формуле (7.2) или (7.3), является состоятельной оценкой дисперсии случайной величины $D(X)$, но при этом она не является эффективной и несмещенной. Несмещенная оценка дисперсии вычисляется по формуле:

$$\tilde{D} = \tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1}\overline{D}.$$

Соответственно несмещенная оценка среднего квадратического отклонения находится по соотношению:

$$\tilde{S} = \sqrt{\tilde{D}}.$$

7.3. Интервальные оценки параметров распределения

Точечная статистическая оценка $\tilde{a}$ может существенно отличаться от оцениваемого параметра a. В практических задачах математической статистики используются интервальные оценки параметров распределения.

Доверительной вероятностью оценки $\tilde{a}$ параметра a называется вероятность β того, что выполняется неравенство $|\tilde{a}-a|<\varepsilon$ или

$$p(\tilde{a}-\varepsilon<a<\tilde{a}+\varepsilon)=\beta,$$

где ε – некоторое неотрицательное число, характеризующее точность оценки.

Доверительным интервалом J_β называется интервал, который строится относительно оценки числовой характеристики случайной величины $\tilde{a}$ и включает ее истинное значение a с заданной доверительной вероятностью β. Построение доверительного интервала схематично показано на рис. 25.

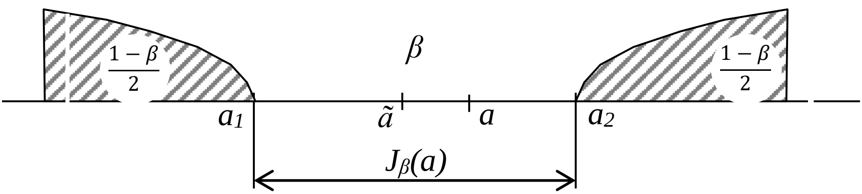


Рис. 25. Схема построения доверительного интервала

Доверительные интервалы в зависимости от вида числовой характеристики могут быть как симметричными, так и несимметричными.

7.3.1. Приближенное построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии

Пусть проводится n независимых опытов, в каждом из которых фиксируются значения случайной величины X: $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.

Точечные несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии вычисляются по формулам:

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad \tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{m})^2}{n-1}. \qquad (7.4)$$

Можно приближенно построить доверительные интервалы $J_\beta(a)$ для оценки математического ожидания и оценки дисперсии (7.4), соответствующие заданной доверительной вероятности β.

На основании центральной предельной теоремы случайная величина $\tilde{m}$ распределена по нормальному закону. Поэтому доверительный интервал для оценки математического ожидания будет симметричным:

$$J_\beta(m) = (\tilde{m} - \varepsilon_\beta; \tilde{m} + \varepsilon_\beta), \qquad (7.5)$$

где $\varepsilon_\beta = t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{m}}, \sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}$, $t_\beta = \arg\left[\Phi\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\right]$, $\Phi(u)$ – функция Лапласа (2.11).

Схема приближенного построения доверительного интервала для оценки математического ожидания показана на рис. 26.

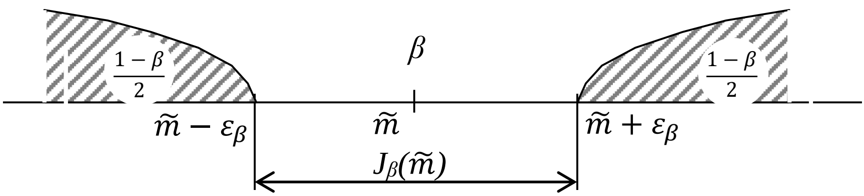


Рис. 26. Приближенное построение доверительного интервала для оценки математического ожидания

Число проведенных опытов n вошло в величину доверительного интервала (7.5) в явном виде. При увеличении числа опытов n доверительный интервал уменьшается и наоборот.

При приближенном построении доверительного интервала для оценки дисперсии $\tilde{D}$ полагаем, что случайная величина $\tilde{D}$ распределена по нормальному закону с параметрами:

$$M\left[\tilde{D}\right] = D, \qquad \sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\tilde{D}.$$

Доверительный интервал для оценки дисперсии определится по формуле:

$$J_\beta(D) = (\tilde{D} - \varepsilon_\beta; \tilde{D} + \varepsilon_\beta), \text{ где: } \varepsilon_\beta = t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{D}}.$$

Пример 7.2. Пусть n = 20; $\tilde{m}$ = 10; $\tilde{D}$ = 0,25; $\tilde{\sigma}$ = 0,5. Требуется построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии с доверительной вероятностью β = 0,90.

Решение. Для доверительной вероятности β = 0,90 величина t_β будет равна:

$$t_{\beta=0,90} = \arg\left[\Phi\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\right] = \arg\left[\Phi\left(\frac{1+0,90}{2}\right)\right] = 1,650.$$

Среднее квадратическое отклонение оценки математического ожидания найдется как:

$$\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} = \sqrt{\frac{0,25}{20}} = 0,112.$$

Тогда $\varepsilon_\beta = 1,650 \cdot 0,112 = 0,185,$ а доверительный интервал для математического ожидания:

$$J_\beta(m) = (10 - 0,185; 10 + 0,185) = (9,815; 10,185).$$

Величина ε_β для дисперсии вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \cdot \sigma_{\tilde{D}} = t_\beta \sqrt{\frac{2}{n-1}}\tilde{D} = 1,650\sqrt{\frac{2}{20-1}} \cdot 0,25 = 0,134.$$

И доверительный интервал для дисперсии будет равен:
$J_\beta(D) = (0,25 - 0,134;\ 0,25 + 0,134) = (0,116; 0,384).$

7.3.2. Точное построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии

Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения, а оценки для математического ожидания и дисперсии вычисляются по формулам (7.4), то используют специальные статистические распределения. Случайная величина $T = \sqrt{n}\,\dfrac{\tilde{m}_x - m_x}{\sqrt{\tilde{D}_x}}$ распределена по закону Стьюдента с (n – *1*) степенями свободы, где n – число опытов. Функция плотности вероятности распределения Стьюдента имеет вид:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\cdot\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du$ – гамма-функция.

Знание функции плотности вероятности случайной величины T позволяет точно построить доверительный интервал для математического ожидания:

$$J_\beta(m_x) = (\tilde{m}_x - \varepsilon_\beta; \tilde{m}_x + \varepsilon_\beta). \qquad (7.6)$$

Здесь β – доверительная вероятность; $\varepsilon_\beta = t_\beta\sqrt{\dfrac{\tilde{D}_x}{n}}$; а величина $t_\beta = t_\beta(\beta, n-1)$ определяется по специальным таблицам (Приложение 3). Примерный график функции плотности вероятности распределения Стьюдента показан на рис. 27.

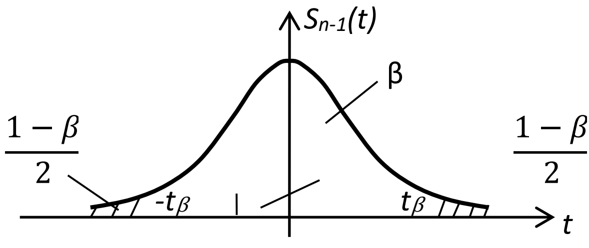


Рис. 27. Функция плотности вероятности распределения Стьюдента

Доверительный интервал для математического ожидания, построенный с использованием соотношения (7.6), будет симметричным относительно оценки $\tilde{m}_x$.

При точном построении доверительного интервала для статистической оценки дисперсии $\tilde{D}_x$ в рассмотрение вводится случайная величина $V = \frac{(n-1)\tilde{D}_x}{D_x}$, где n – число опытов. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то случайная величина V распределена по закону Пирсона (χ^2 – квадрат) с (n – 1) степенями свободы. Функция плотности вероятности распределения Пирсона описывается формулой:

$$\begin{cases} k_{n-1}(\nu) = \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \nu^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}}, & \nu \ge 0 \\ 0, & \nu < 0. \end{cases}$$

Примерный график функции плотности вероятности распределения Пирсона показан на рис. 28.

Тогда доверительный интервал для статистической оценки дисперсии будет определяться по соотношению:

$$J_\beta(D) = \left(\frac{\tilde{D}_x(n-1)}{\chi_1^2}; \frac{\tilde{D}_x(n-1)}{\chi_2^2} \right).$$

Значения χ_1^2 и χ_2^2 определяются из решения уравнений:

$$p_1 = p(V < \chi_1^2) = \frac{\alpha}{2},$$

$$p_2 = p(V < \chi_2^2) = \frac{1-\alpha}{2},$$

где $\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2}$, а β – заданная доверительная вероятность.

Значения $\chi_i^2 = \chi_i^2(p_i, n-1)$ приведены в специальных таблицах (Приложение 4).

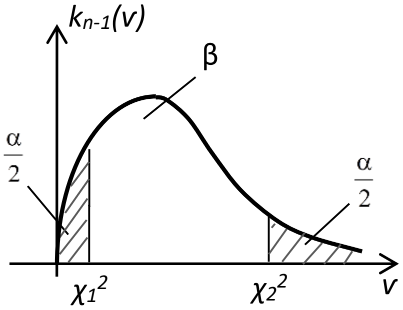


Рис. 28. Распределение Пирсона

Пример 7.3. Пусть $n = 20$; $\tilde{m} = 10$; $\tilde{D} = 0{,}25$; $\tilde{\sigma} = 0{,}5$. Исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону. Требуется точно построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии с доверительной вероятностью $\beta = 0{,}90$.

Решение. Для заданной доверительной вероятности и $n - 1 = 19$ по таблицам распределения Стьюдента определится значение $t_\beta =$ $= 1{,}729$.

Тогда $\varepsilon_\beta = t_\beta \sqrt{\dfrac{\tilde{D}}{n}} = 1{,}729\sqrt{\dfrac{0{,}25}{20}} = 0{,}194.$

И доверительный интервал для математического ожидания будет равен:

$$J_\beta(m) = (10 - 0{,}194; 10 + 0{,}194) = (9{,}806; 10{,}194).$$

При построении доверительного интервала для дисперсии определим значения вероятностей p_i:

$$p_1 = \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05;\quad p_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(1 - \frac{0{,}1}{2}\right) = 0{,}95.$$

По таблицам распределения Пирсона находим значения χ_i^2:

$$\chi_1^2 = \chi_1^2(p_1, n-1) = \chi_1^2(0{,}05{,}19) = 30{,}14;$$

$$\chi_2^2 = \chi_2^2(p_2, n-1) = \chi_2^2(0{,}95{,}19) = 10{,}12.$$

Тогда

$$D_1 = \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_1^2} = \frac{0{,}25 \cdot 19}{30{,}14} = 0{,}158,$$

$$D_2 = \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_2^2} = \frac{0{,}25 \cdot 19}{10{,}12} = 0{,}469.$$

И доверительный интервал для дисперсии:

$$J_\beta(D) = (0{,}158; 0{,}469).$$

Точный доверительный интервал для дисперсии является несимметричным относительно оценки дисперсии $\tilde{D} = 0{,}25$.

8. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

8.1. Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется гипотеза о виде неизвестного закона распределения генеральной совокупности или о параметрах известного закона распределения.

Нулевой или **основной гипотезой** называется выдвинутая гипотеза H_0. Гипотеза H_1, которая противоречит нулевой, называется **конкурирующей** или **альтернативной**.

Пример 8.1. Пусть гипотеза H_0 заключается в том, что дисперсия генеральной совокупности $D = 0{,}25$. Конкурирующая гипотеза будет заключаться в одном из трех предположений: 1) $D \neq 0{,}25$; 2) $D < 0{,}25$; 3) $D > 0{,}25$.

Гипотеза, содержащая только одно предположение, называется **простой**. Гипотеза, состоящая из конечного или бесконечного числа простых гипотез, называется **сложной**.

Пример 8.2. Для некоторой генеральной совокупности гипотеза H_0, заключающаяся в том, что $m_x = 5$, является простой. А гипотеза H_0, заключающаяся в том, что $m_x > 5$, является сложной, состоящей из бесконечного ряда простых. Вид этих гипотез: $m_x = c$, где c – любое число, большее 5.

В результате **статистической проверки** правильности выдвинутой нулевой гипотезы возможны следующие виды ошибок: **ошибка первого рода** состоит в том, что правильная нулевая гипотеза будет отвергнута; **ошибка второго рода** заключается в том, что будет принята неверная нулевая гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода называется **уровнем значимости α**.

Основной метод проверки статистических гипотез заключается в том, что по имеющейся выборке из генеральной совокупности вычисляется значение некоторой случайной величины U, которая имеет известный закон распределения. Случайная величина U называется **статистическим критерием**, служит для проверки нулевой гипотезы и может быть определена различными способами. Закон распределения случайной величины U определяется законом распределения $F(x)$ случайной величины X и объемом выборки n.

Критической областью называется область значений критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается. Область значений критерия, при которых гипотезу принимают, называется **областью принятия гипотезы**.

Процесс проверки нулевой гипотезы состоит из следующей последовательности действий. Вначале выбирается статистический критерий U с известным законом распределения. Затем вычисляется наблюдаемое значение по имеющейся выборке из генеральной совокупности u^*. Далее по известному уровню значимости α определяется критическое значение $u_{кр}$, которое определяет границу между критической областью и областью принятия решения. Если $p(U>u_{кр}) = \alpha$, например, то справа от значения $u_{кр}$ располагается критическая область, а область принятия гипотезы – слева. Когда вычисленное значение u^* попадает в область принятия гипотезы, нулевая гипотеза принимается. Если вычисленное значение u^* попадает в критическую область, то нулевая гипотеза отвергается.

Различаются три вида критических областей:

1) если $U > u_{кр}$ $(u_{кр} > 0)$ – критическая область **правосторонняя**;

2) если $U < u_{кр}$ $(u_{кр} < 0)$ – критическая область **левосторонняя**;

3) если $u_2 < U < u_1$, а $u_1 < u_2$ – критическая область является **двухсторонней**.

Мощностью критерия называется вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что конкурирующая гипотеза верна.

Пусть вероятность ошибки второго рода (принятие неправильной нулевой гипотезы) равна β. Тогда мощность критерия определяется как 1 – β. Отсюда следует, что чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода. Поэтому после выбора уровня значимости следует строить критическую область таким образом, чтобы мощность критерия была максимальной.

Пусть закон распределения генеральной совокупности неизвестен, а нулевая гипотеза состоит в том, что генеральная совокупность распределена по некоторому известному закону. Статистические критерии для проверки таких гипотез называются **критериями со-**

гласия. Наиболее распространенными на практике являются критерий Пирсона и критерий Колмогорова.

8.1.1. Критерий Пирсона

С помощью критерия Пирсона можно проверять гипотезы о различных законах распределения, что свидетельствует о его универсальности. Схема его использования заключается в следующем.

Пусть произведено *n* независимых опытов, результаты которых сведены в *k* интервалов или разрядов в виде статистического ряда, представленного в табл. 6.

Таблица 6. **Статистический ряд**

Номера интервалов	1	2	…	k
Границы интервалов	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	…	(x_k, x_{k+1})
Сумма частот вариант, попавших в интервал	n_1	n_2	…	n_k
Относительные частоты p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

Далее принимается допущение о «теоретическом» распределении с заданной функцией распределения $F(x)$ или функцией плотности вероятности $f(x)$ и вычисляются «теоретические» вероятности попадания случайной величины X в каждый из разрядов p_i.

Мера расхождения, или статистический критерий, выбирается в виде:

$$u^* = \chi^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \qquad (8.1)$$

Пирсон доказал, что в предельном переходе (при больших *n*) распределение величины χ^2 не зависит от функции распределения $F(x)$, а зависит только от числа «степеней свободы»:

$$m = k - s,$$

где *s* – число наложенных связей (условий), которое может быть различным. Но условие $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$ накладывается всегда. Другими условиями могут быть выравнивание с учетом среднего и с учетом дисперсии.

Вычисленное по формуле (8.1) значение статистического критерия сравнивается с критическим, которое определяется по таблицам распределения Пирсона в зависимости от числа степеней свободы m и доверительной вероятности $\beta = 1 - \alpha$, где α – уровень значимости:

$$\chi^2_{кр} = \chi^2(\beta, m).$$

Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

8.1.2. *Критерий Колмогорова*

При реализации данного критерия рассматривается максимальное расхождение между статистическим и теоретическим распределениями:

$$D = \max | F^*(x_i) - F(x_i) | .$$

Колмогоров доказал, что в случае справедливости гипотезы H_0 распределение величины D не зависит от функции $F(X)$ и при $n \to \infty$ имеет предел вероятности неравенства $D\sqrt{n} \geq \lambda$ в виде:

$$p(\lambda) = 1 - k(\lambda),$$

где $k(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$, а $p(\lambda)$ – вероятность того, что расхождение имеет случайные причины и можно принять гипотезу H_0 о выбранном законе распределения как правдоподобную.

Критическое значение критерия $\lambda_{кр}(\alpha)$ вычисляется по заданному уровню значимости как корень уравнения $p(D\sqrt{n} \geq \lambda) = \alpha = 1 - \beta$. Приближенное вычисление критического значения критерия можно осуществить по формуле:

$$\lambda_{кр}(\alpha) \approx \sqrt{\frac{z}{2n} - \frac{1}{6n}},$$

где величина z является корнем уравнения

$$k\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)=\beta.$$

Существенным достоинством критерия Колмогорова является простота его использования. К недостаткам следует отнести то, что теоретическая функция распределения строится без использования статистических данных, что может привести к завышению результата.

8.1.3. Проверка гипотез о дисперсиях

В практических задачах довольно часто необходимо проводить проверку гипотезы о дисперсиях, поскольку дисперсия характеризует рассеяние характеристик и, следовательно, определяет однородность технологических процессов, точность машин и приборов.

Предположим, что имеются две нормально распределенные совокупности с дисперсиями D_1 и D_2. Требуется проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве дисперсий. Конкурирующей является либо гипотеза H_1, что $D_1>D_2$, либо гипотеза H_1', что $D_1\neq D_2$.

Пусть объемы совокупностей составляют n_1 и n_2 соответственно. Для проверки гипотезы используют оценки дисперсии $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$, подсчитанные по формуле (7.4). Как отмечалось ранее (см. п. 7.3.2.), случайная величина $V_i=\dfrac{(n_i-1)\tilde{D}_i}{D_i}$ имеет распределение χ^2 с $k_i=n_i-1$ степенями свободы. Поэтому случайная величина F, которая определяется отношением оценок дисперсий

$$F=\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_2}, \tag{8.2}$$

имеет F-распределение Фишера – Снедекора с $k_1=n_1-1$ и $k_2=n_2-1$ степенями свободы. Примерный вид кривых F-распределения приведен на рис. 29. Следует отметить, что распределение статистики F является несимметричным.

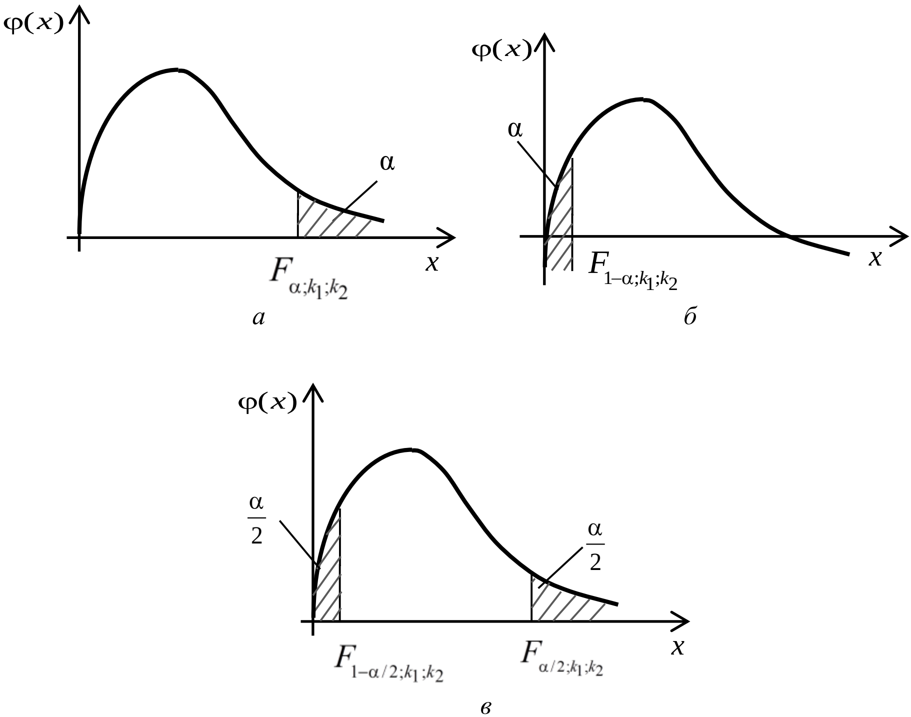


Рис. 29. Примерный вид кривых F-распределения:
а – правосторонняя критическая область; *б* – левосторонняя критическая область; *в* – двусторонняя критическая область

Нулевая гипотеза отвергается в следующих случаях:

1. В случае правосторонней критической области (см. рис. 29,а), если $F > F_{\alpha;k_1;k_2}$.

2. В случае левосторонней критической области (см. рис. 29,б), если $F < F_{1-\alpha;k_1;k_2}$.

3. В случае двусторонней критической области (рис. 29,в), если $F > F_{\alpha/2;k_1;k_2}$ или $F < F_{(1-\alpha)/2;k_1;k_2}$.

В Приложении 5 приведены таблицы значений $F_{\alpha;k_1;k_2}$ при уровнях значимости α = 0,05 и α = 0,01. При расчете статистики критерия по формуле (8.2) в числитель ставим большую из двух дисперсию, что позволяет, учитывая свойства F-распределения $F_{(1-\alpha)/2;k_1;k_2}=\dfrac{1}{F_{\alpha/2;k_1;k_2}}$, вдвое сократить объем его табличных значений.

Пример 8.3. На двух токарных станках обрабатываются детали круглого поперечного сечения. Из деталей, изготовленных на первом станке, отобрано n_1=15 штук, на втором станке n_2=18 штук. Для каждой выборки рассчитаны несмещенные оценки дисперсии: $\tilde{D}_1=9{,}11$ и $\tilde{D}_2=6{,}67$. На уровне значимости α=0,05 требуется определить обладают ли станки различной точностью, если размеры деталей подчиняются нормальному закону.

Решение. Нулевая гипотеза H_0 заключается в том, что дисперсии диаметра деталей, обрабатываемых на разных станках, равны, т.е. $D_1=D_2$. Конкурирующей примем гипотезу H_1 о том, что дисперсия размеров на первом станке больше $D_1>D_2$. В данном случае статистика критерия будет равна:

$$F=\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_2}=\frac{9{,}11}{6{,}67}=1{,}37.$$

Критическое значение F-критерия на уровне значимости α=0,05 при числе степеней свободы $k_1=n_1-1=14$ и $k_2=n_2-1=17$ равно $F_{0,05;14;17}$=2,33 (Приложение 5). Поскольку $F<F_{0,05;14;17}$, нулевая гипотеза H_0 не отвергается. Следовательно имеющиеся данные позволяют считать, что станки работают с одинаковой точностью.

В практических задачах приходится проводить сравнение дисперсий нескольких нормально распределенных совокупностей, дисперсии которых равны соответственно $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Пусть объемы m независимых нормально распределенных выборок составляют $n_1, n_2, \ldots, n_m$, а нулевая гипотеза H_0 заключается в том, что дисперсии совокупностей равны между собой: $D_1=D_2=\ldots=D_m=D$. Для проверки нулевой гипотезы используется **критерий Бартлетта**. Согласно этому критерию, если нулевая гипотеза H_0 справедлива, а объемы совокупностей $n_i\geq 3$ для всех i=1, 2, …, m, то статистика

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)\ln\left(\frac{\overline{D}}{\tilde{D}_i}\right)}{1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n_1 + \ldots + n_m - m}\right)} \qquad (8.3)$$

имеет распределение χ^2 с m-1 степенями свободы.

В формуле (8.3) $\tilde{D}_i$ – несмещенная оценка дисперсии i-й выборки, $\overline{D}$ – оценка средней арифметической дисперсии:

$$\overline{D} = \frac{1}{n_1 + \ldots + n_m - m}\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)\tilde{D}_i\ . \qquad (8.4)$$

Нулевая гипотеза H_0 отвергается, если найденное по формуле (8.3) значение $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,m-1}$, где $\chi^2_{\alpha,m-1}$ – критическое значение критерия χ^2, найденное на уровне значимости α при числе степеней свободы $m - 1$.

Пример 8.4. На четырех токарных станках обрабатываются детали круглого поперечного сечения. Из деталей, изготовленных на первом станке, отобрано n_1=15 штук, на втором станке n_2=18 штук, на третьем станке n_3=25 штук, на четвертом станке n_4=32 штук. Для каждой выборки рассчитаны несмещенные оценки дисперсии: $\tilde{D}_1 = 9{,}11$, $\tilde{D}_2 = 6{,}67$, $\tilde{D}_3 = 9{,}69$ и $\tilde{D}_4 = 5{,}99$. На уровне значимости α=0,05 требуется определить, обладают ли станки различной точностью, если размеры деталей подчиняются нормальному закону.

Решение. Нулевая гипотеза H_0 заключается в равенстве дисперсий D_1=D_2=D_3=D_4=D. Определим по формуле (8.4) оценку средней арифметической дисперсии:

$$\overline{D} = \frac{(15-1)\cdot 9{,}11 + (18-1)\cdot 6{,}67 + (25-1)\cdot 9{,}69 + (32-1)\cdot 5{,}99}{15 + 18 + 25 + 32 - 4} = 7{,}66.$$

Статистика критерия подсчитывается по формуле (8.3):

$$\chi^2 = \frac{14\ln\frac{7{,}66}{9{,}11} + 17\ln\frac{7{,}66}{6{,}67} + 24\ln\frac{7{,}66}{9{,}69} + 31\ln\frac{7{,}66}{5{,}99}}{1 + \frac{1}{3\cdot 3}\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \frac{1}{24} + \frac{1}{31} - \frac{1}{86}\right)} = 1{,}87.$$

По таблице Приложения 4 определяем критическое значение $\chi^2_{0,05;3} = 7{,}82$. Поскольку $\chi^2 < \chi^2_{0,05;3}$, нулевая гипотеза H_0 не отвергается. Имеющиеся данные позволяют считать, что станки работают с одинаковой точностью.

8.1.4. Проверка гипотез о математических ожиданиях

В практике работы предприятий часто встречаются задачи сравнения средних значений разных серий экспериментов. Например, при выборочном контроле качества продукции, произведенной на разных установках и (или) при различных режимах технологии изготовления, возникает вопрос, можно ли объяснить расхождение средних случайными ошибками эксперимента или это расхождение вызвано определенными закономерностями.

Предположим, что две генеральные совокупности характеризуются математическими ожиданиями m_1 и m_2 и дисперсиями D_1 и D_2. Для проверки нулевой гипотезы H_0, которая заключается в равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей $m_1=m_2$, составляются выборки объемом n_1 и n_2. Найденные по этим выборкам несмещенные оценки математических ожиданий и дисперсий равны соответственно $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2$. Оценку дисперсии смешанной выборки объемом n_1+n_2 следует вычислять по формуле

$$\tilde{D} = \frac{(n_1-1)\tilde{D}_1 + (n_2-1)\tilde{D}_2}{n_1+n_2-2},$$

а оценку дисперсии разности несмещенных оценок математических ожиданий $\Delta\tilde{m} = \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2$ по соотношению

$$\tilde{D}_{\Delta\tilde{m}} = \frac{(n_1-1)\tilde{D}_1 + (n_2-1)\tilde{D}_2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Если гипотеза H_0 справедлива, то статистика $t = \dfrac{\Delta\tilde{m}}{\sqrt{\tilde{D}_{\Delta\tilde{m}}}}$ имеет t–распределение Стьюдента с $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы (Приложение 3).

Если конкурирующей гипотезой H_1 является гипотеза, что $\tilde{m}_1 > \tilde{m}_2$ или $\tilde{m}_1 < \tilde{m}_2$, выбирается односторонняя критическая область, а критическое значение статистики определяется из условия:

$$t_{кр} = t_{1-2\alpha}(1-2\alpha, k).$$

Если конкурирующей является гипотеза H_1: $\tilde{m}_1 \neq \tilde{m}_2$, выбирается двусторонняя критическая область и критическое значение статистики определяется из условия:

$$t_{кр} = t_{1-\alpha}(1-\alpha, k).$$

Нулевая гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α, если $|t| > t_{кр}$.

Пример 8.5. Было произведено 12 измерений диаметра вала в мм. При этом оказалось, что среднее $\tilde{m}_1$=10,2 мм, а дисперсия отклонения $\tilde{D}_1$=0,0025 мм^2. Затем вал поместили в условия с высокой температурой и произвели еще 8 измерений диаметра его оси. Среднее на этот раз оказалось равным $\tilde{m}_2$=10,25 мм, а дисперсия отклонения $\tilde{D}_2$=0,0036 мм^2. Можно ли сделать вывод при уровне значимости α=0,05, что диаметр вала существенно увеличивается при увеличении температуры?

Решение. Гипотеза H_0 состоит в том, что $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$ против конкурирующей H_1: $\tilde{m}_1 \neq \tilde{m}_2$. Будем считать, что результаты измерений диаметра вала являются нормально распределенными случайными величинами с известными дисперсиями $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$. Для проверки гипотезы H_0 составим статистику:

$$t = \frac{\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2}{\sqrt{\dfrac{\tilde{D}_1}{n_1} + \dfrac{\tilde{D}_2}{n_2}}} = \frac{10,2 - 10,25}{\sqrt{\dfrac{0,0025}{12} + \dfrac{0,0036}{8}}} = -1,9487.$$

Так как при уровне значимости α=0,05 критическое значение нормального распределения $t_{кр} = 1,96$ и $|t| < t_{кр}$, то гипотеза H_0 с доверительной вероятностью 0,95 принимается и можно считать, что диаметр вала существенно не увеличивается в условиях повышенной температуры.

8.2. Элементы корреляционного анализа

8.2.1. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Предположим, что двумерная генеральная совокупность (X, Y) имеет нормальный закон распределения. Вычисляется выборочный коэффициент корреляции $\tilde{r}$ случайных величин X и Y по выборке объемом n, извлеченной из генеральной совокупности. Пусть полученное значение $\tilde{r} \neq 0$. При заданном уровне значимости $\alpha = 1 - \beta$ необходимо проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве нулю коэффициента корреляции для генеральной совокупности $r = 0$. Конкурирующей гипотезой H_1 является то, что $r \neq 0$. Следовательно, если будет принята нулевая гипотеза H_0, то случайные величины X и Y некоррелированы, а при отклонении нулевой гипотезы H_0 случайные величины X и Y являются коррелированными.

В качестве критерия принимается случайная величина

$$T = \frac{\tilde{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\tilde{r}^2}}.$$

Если нулевая гипотеза H_0 справедлива, то случайная величина T имеет распределение Стьюдента с $m = n - 2$ степенями свободы. Критическая область является двухсторонней с границами $\pm\, t_{кр}$, где значение $t_{кр}=t_{кр}(\alpha,m)$ находится по таблицам для двухсторонней критической области.

Далее по формуле (8.2) вычисляется наблюдаемое значение критерия $\tilde{T}$ и сравнивается со значением $t_{кр}$.

Если $|\tilde{T}| < t_{кр}$, то принимается нулевая гипотеза H_0 (корреляции между случайными величинами X и Y нет).

Если $|\tilde{T}| > t_{кр}$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается (корреляция между случайными величинами X и Y есть).

8.2.2. Ранговая корреляция

Предположим, что объекты генеральной совокупности обладают двумя различными качественными признаками и эти объекты можно расположить в порядке ухудшения качества. Пусть выборка объема n из такой генеральной совокупности содержит объекты, которые обладают двумя качественными признаками A и B. Предполагается, что все объекты имеют различное качество по обоим признакам. Требуется установить **ранговую корреляцию** между признаками, то есть выяснить степень их статистической связи между собой.

Объекты выборки располагаются в порядке ухудшения качества по признаку A и место, занимаемое в этом ряду некоторым объектом, **называется рангом** $\boldsymbol{x_i} = i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Далее объекты выборки располагаются в порядке ухудшения качества по признаку B и им присваиваются ранги y_i. Номер i равен порядковому номеру объекта по признаку A, а значение ранга равно порядковому номеру объекта по признаку B. Таким способом получаются две последовательности рангов:

по признаку A: $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n;$

по признаку B: $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n$.

Если $y_j = i$, то данный объект по признаку A занимает в ряду j-е место, а в ряду по признаку B – i-е.

Далее две последовательности рангов сравниваются между собой.

Если $x_i = y_i$ при всех значениях i, имеется полная ранговая зависимость. Ухудшение качества по одному признаку влечет ухудшение качества по другому признаку.

Если $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, … , $x_n = n$, а $y_1 = n$, $y_2 = n$-1, … , $y_n = 1$, также имеется ранговая зависимость. Ухудшение качества по одному признаку влечет улучшение качества по другому признаку.

На практике чаще встречается промежуточный случай, когда ряд y_j, $j=1, 2, \ldots, n$ не является монотонным.

Для оценки статистической связи между двумя различными признаками вычисляется значение выборочного коэффициента ранговой корреляции Спирмена:

$$\tilde{r}_{рк} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}, \qquad (8.5)$$

где разности рангов $d_i = x_i - y_i$; ранги $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ являются возможными значениями случайной величины X, а ранги $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n$ являются возможными значениями случайной величины Y.

Если $\tilde{r}_{рк} = 1$, ранги совпадают при всех i и между A и B имеется полная прямая зависимость.

Если $\tilde{r}_{рк} = -1$, между A и B имеется полная противоположная зависимость.

В остальных случаях $-1 < \tilde{r}_{рк} < 1$. Зависимость между A и B тем меньше, чем ближе $|\tilde{r}_{рк}|$ к нулю.

При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза H_0 о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена (8.5) $r_{рк} = 0$ при конкурирующей гипотезе H_1 $r_{рк} \neq 0$.

Значение $t_{кр}$ вычисляется по формуле

$$t_{кр} = t_{кр}(\alpha, m)\sqrt{\frac{1-\tilde{r}_{рк}^2}{n-2}},$$

где n – объем выборки; $\tilde{r}_{рк}$ – выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена; $t_{кр}(\alpha, m)$ – критическая точка двухсторонней критической области, найденная по таблице распределения Стьюдента для числа степеней свободы $m = n - 2$.

Если $|\tilde{r}_{рк}| < t_{кр}$, то принимается нулевая гипотеза о том, что ранговая корреляционная связь между признаками незначима.

Если $|\tilde{r}_{рк}| > t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, а между признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

Для проверки гипотезы о ранговой корреляции можно использовать выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла, который вычисляется по формуле

$$\tilde{r}_{рк} = \frac{4R}{n(n-1)} - 1, \quad (8.6)$$

где n – объем выборки; $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_i + \ldots + R_{n-1}$; R_i – число рангов, больших (расположенных правее), чем y_i.

Коэффициент Кендалла обладает теми же свойствами, что и коэффициент Спирмена.

При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза H_0 о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Кендалла (8.6) $r_{рк} = 0$ при конкурирующей гипотезе H_1 $r_{рк} \neq 0$.

Для этого значение $t_{кр}$ вычисляется по формуле:

$$t_{кр} = z_{кр}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}.$$

Здесь n – объем выборки; $z_{кр}$ – критическая точка двухсторонней критической области, определяемая по таблицам функции Лапласа из условия $\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Если $|\tilde{r}_{рк}| < t_{кр}$, то принимается нулевая гипотеза о том, что ранговая корреляционная связь между признаками незначима.

Если $|\tilde{r}_{рк}| > t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, а между признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

8.2.3. Регрессионный анализ

В прикладных задачах статистического анализа зависимость между переменными $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и зависящей от них переменной Y носит случайный характер. Поэтому при изучении стохастических зависимостей основной целью является установление вида **уравнения регрессии**, т.е. установление зависимости Y от $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Установление вида зависимости, уравнения регрессии и его параметров являются задачами **регрессионного анализа**.

В регрессионном анализе изучаются модели вида:

$$Y = \varphi(X) + \varepsilon.$$

Здесь X – неслучайная независимая переменная, которая называется фактором; Y – случайная зависимая переменная; ε – случайная величина, которая характеризует отклонение от линии регрессии.

Для каждого опыта с номером $i = 1, 2, \ldots, n$ дисперсии случайных величин Y и ε равны между собой:

$$D(Y_i) = D(\varepsilon_i) = \text{const}.$$

Для разных наблюдений с номерами i и j случайные величины ε_i и ε_j некоррелированы между собой, то есть их взаимный корреляционный момент равен нулю:

$$K_{\varepsilon_i \varepsilon_y} = 0 \text{ для всех } i \neq j.$$

Оценкой функции регрессии является функция вида:

$$y_x = \varphi(x, b_1, b_2, \ldots, b_m), \tag{8.7}$$

где x – значения случайной величины X; $y_x=M(Y)$; b_1, b_2, ..., b_m – параметры функции регрессии.

Следовательно задача регрессионного анализа состоит в определении функции φ, ее параметров $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и статистического исследования уравнения (8.7).

Если вид функции φ в уравнении регрессии (8.7) выбран, то для оценки неизвестных параметров b_1, b_2, ..., b_m используется метод наименьших квадратов.

Согласно этому методу неизвестные параметры b_1, b_2, ..., b_m выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений выборочных значений y_i от их значений, найденных по формуле (8.7), была минимальной:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \varphi(x_i, b_1, b_2, \ldots, b_m) \right)^2 = \min. \tag{8.8}$$

Для определения параметров b_1, b_2, ..., b_m из условия (8.8) решается система m уравнений следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \varphi(x_i, b_1, b_2, \ldots, b_m) \right) \frac{\partial \varphi(x_i, b_1, b_2, \ldots, b_m)}{\partial b_k} = 0, \; k=1, 2, \ldots, . \tag{8.9}$$

Система уравнений (8.9) называется системой **нормальных уравнений**.

Если функция в уравнении (8.7) является линейной:

$$y_x = ax + b, \tag{8.10}$$

то имеет место **линейная регрессия** Y на X.

Неизвестные a и b определяются по формулам:

$$a=\frac{\tilde m_{xy}-\tilde m_x\tilde m_y}{\tilde m_{x^2}-(\tilde m_x)^2},\qquad b=\frac{\tilde m_y\tilde m_{x^2}-\tilde m_x\tilde m_{xy}}{\tilde m_{x^2}-(\tilde m_x)^2}. \tag{8.11}$$

Здесь $\tilde m_x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}$, $\tilde m_y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n}$, $\tilde m_{x^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}$, $\tilde m_{xy}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}{n}$.

Коэффициент a в уравнении регрессии (8.10) называется коэффициентом регрессии Y на X и обозначается a_{yx}.

Из определения выборочного коэффициента корреляции $\tilde r$ и формулы (8.11) следует, что

$$a_{xy}=\tilde r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Поэтому линейное уравнение регрессии можно записать в обычно принятой в математической статистике форме:

$$y_x-\tilde m_y=a_{yx}(x-\tilde m_x),$$

или

$$y_x-\tilde m_y=\tilde r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\tilde m_x).$$

Аналогично уравнение регрессии X на Y имеет вид:

$$x_y-\tilde m_x=\tilde r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\tilde m_y).$$

9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

9.1. Основные определения

Надежностью называется способность системы сохранять свое качество в процессе эксплуатации. Качеством системы называется совокупность свойств, характеризующих ее полезные функции. В понятие эксплуатации включается не только полезное функционирование системы, но и вся совокупность операций над нею, начиная от изготовления и кончая демонтажем или сносом.

Надежностью называется свойство объекта выполнять заданные функции, сохраняя во времени значения установленных эксплуатационных показателей в заданных пределах, соответствующих заданным режимам и условиям использования, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования.

Объект – предмет определенного целевого назначения, рассматриваемый в период проектирования, эксплуатации, исследований и испытаний на надежность. Объектами могут быть системы и элементы.

Система – совокупность элементов, объединенных общим функциональным назначением. При анализе надежности системы учитывается надежность элементов и их взаимосвязь.

Элемент – изделие, которое с точки зрения надежности рассматривается как единое целое и характеризуется определенным показателем надежности.

Показатель надежности – это количественная характеристика одного или нескольких свойств, составляющих надежность объекта. Показатель надежности количественно характеризует, в какой степени конкретному элементу присущи определенные свойства, обусловливающие его надежность.

Работоспособность – состояние объекта, при котором он способен выполнять заданные функции, сохраняя значения заданных параметров в пределах, установленных нормативно-технической документацией.

Отказ – это событие, заключающееся в нарушении работоспособности объекта.

Повреждение – событие, заключающееся в нарушении исправности объекта или его составных частей вследствие влияния внешних воздействий, превышающих уровни, установленные в нормативно-технической документации на объект.

Повреждение может быть существенным, являясь причиной нарушения работоспособности, и несущественным, при котором работоспособность объекта сохраняется.

В процессе эксплуатации качество системы изменяется. Обычно оно уменьшается с течением времени, но может быть и наоборот, например, при доработках системы. Таким образом, надежность является функцией времени.

Надежность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его эксплуатации может включать безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость в отдельности или определенное сочетание этих свойств как для объекта, так и для его частей.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторого времени или некоторой наработки. Свойством безотказности объект обладает как в период его использования, так и в периоды хранения и транспортирования.

Нередко надежность изделия отождествляется с его безотказностью. Для изделий одноразовых и неремонтируемых или для отдельных периодов работы изделий безотказность и надежность тождественны (например, для стартовавшего одноразового неремонтируемого летательного аппарата). Для того же летательного аппарата (ЛА), находящегося на хранении, безотказность не тождественна надежности, а является лишь одним из свойств надежности наряду с долговечностью, ремонтопригодностью и сохраняемостью.

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения его отказов, повреждений и устранению их последствий путем проведения ремонтов и технического обслуживания.

Сохраняемость – свойство объекта непрерывно сохранять исправное и работоспособное состояние в течение и после хранения и транспортирования. Сохраняемость объекта характеризует его способность противостоять отрицательному влиянию условий хранения и транспортирования на его безотказность и долговечность.

Под ***систематическим отказом*** понимают многократно повторяющийся отказ, обусловленный дефектами конструкции объекта, нарушением процесса его изготовления, качеством используемых материалов и т.п.

При ***полном отказе*** наблюдается полная потеря работоспособности изделия.

Частичный отказ – отказ, после возникновения которого изделие может быть использовано по назначению.

Предельное состояние – состояние объекта, при котором дальнейшая эксплуатация должна быть прекращена из-за неустранимого нарушения требований безопасности или неустранимого ухода заданных параметров за установленные пределы. Неремонтируемый объект достигает предельного состояния при возникновении отказа или при достижении заранее установленного предельно допустимого значения срока службы или суммарной наработки. Для ремонтируемых объектов переход в предельное состояние определяется наступлением момента, когда дальнейшая эксплуатация невозможна или нецелесообразна по одной или нескольким из следующих причин: становится невозможным поддержание безопасности, безотказности или эффективности эксплуатации объекта на допустимом уровне.

Для количественной оценки надежности применяют различные методы расчета надежности.

1. Формальные методы.

При использовании формальных методов расчета надежности принимают, что изменение надежности подчиняется некоторым статистическим закономерностям, которые определяются экспериментально. При этом нельзя выяснить причины отказов и определить возможности их устранения.

Существует два направления формальных методов: одно рассматривает надежность как вероятность случайного события, другое – как качество, развернутое во времени.

2. *Методы, учитывающие причины отказов.*

Показателем надежности в этих методах расчета является вероятность превышения несущей способности конструкции над действующими нагрузками. При расчете надежности как вероятностной прочности и несущая способность конструкции, и действующие нагрузки рассматриваются как случайные величины. В случаях, когда несущая способность и действующие нагрузки являются случайными процессами, определяется вероятность невыброса случайного процесса за заданный уровень.

9.2. Формальные методы оценки надежности элементов

9.2.1 Надежность как вероятность случайного события

Надежность H определяется как вероятность того, что элемент не откажет. При этом временные характеристики надежности не рассматриваются, а элементы срабатывают или отказывают однократно. Пусть N – число элементов, поставленных на испытания или находящихся в эксплуатации, а m – число элементов, работающих исправно. Тогда точечная оценка надежности вычисляется по формуле

$$\tilde{H} = \frac{m}{N}. \tag{9.1}$$

Если опыты, в которых поставлено на испытания N элементов, повторяются многократно, то число неотказавших элементов m является случайной величиной, распределенной по биномиальному закону (1.12). Следовательно, оценка надежности (9.1) также является случайной величиной. В этом случае оказывается возможным найти нижнюю $\tilde{H}_H$ и верхнюю $\tilde{H}_B$ границы надежности с доверительной вероятностью β из следующих уравнений:

$$\sum_{k=0}^{m} C_N^k \cdot \tilde{H}_H^k (1-\tilde{H}_H)^{(N-k)} = \frac{1-\beta}{2}, \tag{9.2}$$

$$\sum_{k=m}^{N} C_N^k \cdot \tilde{H}_B^k (1-\tilde{H}_B)^{(N-k)} = \frac{1-\beta}{2}. \tag{9.3}$$

Решения уравнений (9.2) и (9.3) представлены в специальных таблицах в литературе по статистике для различных значений N, m и β либо $\alpha = 1 - \beta$.

Пример 9.1. Пусть испытываются на растяжение 10 образцов из композиционного материала. При определенной нагрузке 6 образцов не разрушились. Найти точечную оценку надежности, а также нижнюю и верхнюю границы при доверительной вероятности β=0,95.

Решение. Точечная оценка надежности определяется по формуле (9.1) и равна:

$$\tilde{H} = \frac{m}{N} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Нижняя и верхняя оценки надежности определяются из решения уравнений (9.2) и (9.3) или по таблицам, представленным в работе [4]. Они составляют $\tilde{H}_H$ =0,304 и $\tilde{H}_B$ =0,850.

Пример 9.2. В результате запуска 50 экземпляров прототипа ракеты-носителя произошел один отказ. Определить точечную оценку и нижнюю границу надежности при доверительной вероятности β=0,95.

Решение. Точечная оценка надежности равна:

$$\tilde{H} = \frac{m}{N} = \frac{50-1}{50} = 0{,}98.$$

По таблицам, представленным в работе [4], для N=50, m=49 и β=0,95 находим $\tilde{H}_H = 0{,}91$.

При испытаниях высоконадежных элементов летательных аппаратов обычно число отказавших элементов равно нулю, следовательно m=N, а $\tilde{H} = 1$. В данном случае точечная оценка надежности равна верхней границе надежности. Нижняя граница надежности для высоконадежных элементов вычисляется по формуле

$$\tilde{H}_H = \sqrt[m]{1-\beta}.$$

Пример 9.3. В результате испытаний 100 пироболтов отказов не произошло. Определить нижнюю границу надежности пироболтов при доверительной вероятности β = 0,9.

Решение. Нижняя граница надежности будет равна

$$\tilde{H}_H = \sqrt[m]{1-\beta} = \sqrt[100]{1-0,9} = 0,977.$$

9.2.2 Надежность как качество, развернутое во времени

В данном подходе предполагается, что изменение надежности элемента подчиняется статистическим закономерностям, которые определяются экспериментально.

Под ***вероятностью безотказной работы,*** или ***функцией надежности,*** понимается вероятность того, что элемент будет работоспособным в течение заданного интервала времени t в заданных условиях эксплуатации. Вероятность безотказной работы (функция надежности) – это вероятность того, что за заданный интервал времени не произойдет отказа.

Длительность времени безотказной работы элемента T– случайная величина.

Законом распределения или интегральной функцией распределения случайной величины T называется неубывающая функция $F(t)$, выражающая вероятность выполнения неравенства $T<t$:

$$F(t) = P(T < t).$$

Функция надежности представляет собой интегральную функцию распределения интервала времени безотказной работы элемента:

$$H(t) = P(T > t).$$

Исправная работа и отказ являются событиями противоположными, поэтому:

$$H(t) = 1 - F(t).$$

Форма кривой $H(t)$ зависит от вида отказа. Однако в любом случае функция надежности должна обладать следующими свойствами:

1) $H(0)=1$, т.е. полагают, что в начальный момент времени элемент находится в исправном состоянии;

2) $H(t)$ – положительная невозрастающая функция времени;

3) $\lim\limits_{t\to\infty} H(t) = 0$, т.е. при возрастании времени работы элемента вероятность его безотказной работы уменьшается и в пределе оказывается равной нулю.

Примерный вид кривых *F(t)* и *H(t)* показан на рис. 30.

Статистические оценки вероятности безотказной работы $\tilde{H}(t)$ и вероятности отказа $\tilde{F}(t)$ в течение заданного интервала времени *t* вычисляются по формулам:

$$\tilde{H}(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0}, \qquad \tilde{F}(t) = \frac{n(t)}{N_0},$$

где N_0 – число поставленных на испытание элементов; *n(t)* – число элементов, вышедших из строя за время *t*.

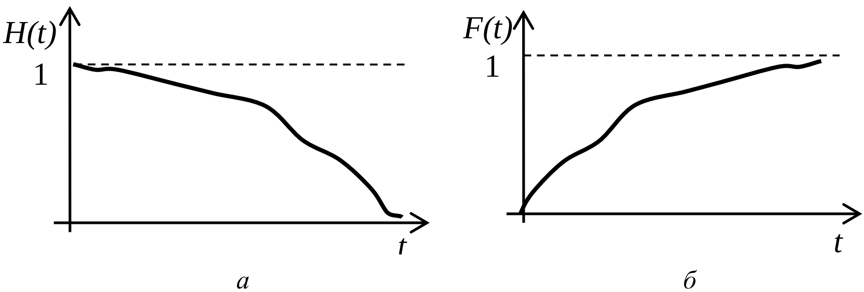


Рис. 30. Примерный вид кривых:
а – функция $F(t)$; б – функция $H(t)$

При достаточно большом числе N_0:

$$\tilde{H}(t) \to H(t), \qquad \tilde{F}(t) \to F(t).$$

Частота отказов в единицу времени вычисляется как отношение вероятности отказа к соответствующему интервалу времени:

$$a(t) = \frac{n(t)}{N_0 \Delta t},$$

где *n(t)* – число элементов, вышедших из строя в течение интервала времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

Схема построения гистограммы частот отказов приведена на рис. 31. При $\Delta t \to 0$ получится функция плотности вероятности отказов *f(t)*.

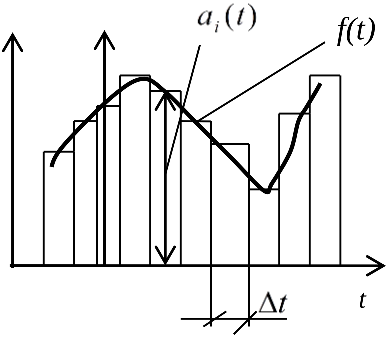


Рис. 31 Гистограмма частот отказов
и функция плотности вероятности отказов

Функция надежности связана с функцией плотности вероятности отказов очевидным соотношением:

$$H(t) = \int_{t}^{\infty} f(t)dt.$$

Средняя наработка на отказ или ***среднее время безотказной работы*** определяется следующим образом:

$$\langle T \rangle = \int_{0}^{t} tf(t)dt.$$

Величина $\langle T \rangle$ выражается непосредственно через вероятность безотказной работы *H(t)*:

$$\langle T \rangle = \int_{0}^{\infty} H(t)dt.$$

Геометрически это означает, что среднее время безотказной работы равно площади, ограниченной кривой надежности и координатными осями, как это схематично показано на рис. 32.

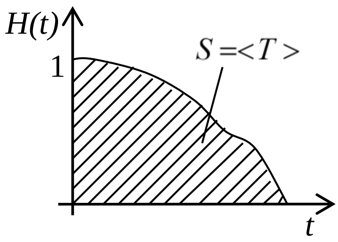


Рис. 32. Связь времени безотказной работы с функцией надежности

Под ***интенсивностью отказов*** $\lambda(t)$ понимается вероятность отказа элемента в единицу времени после данного момента времени при условии, что отказ до этого момента не возник. Интенсивность отказов можно выразить также через отношение числа отказавших элементов $n(t)$ за определенный интервал времени $(t, t+\Delta t)$ к числу исправных элементов $N(t)$ из N_0 к началу рассматриваемого промежутка времени.

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{N(t)\Delta t} \approx \frac{f(t)}{H(t)}. \quad (9.4)$$

Используя соотношение (9.4), можно выразить функцию надежности через интенсивность отказов:

$$H(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right). \quad (9.5)$$

Вероятность безотказной работы на отрезке $(t_1,\ t_2)$ выражается зависимостью:

$$H(t_1, t_2) = \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau)d\tau\right).$$

Это соотношение называется ***основной формулой надежности***. Интенсивность отказов определяется при этом экспериментально с использованием соотношения (9.4). Для массовых изделий экспериментальное значение величины $\lambda(t)$ изменяется во времени, как это показано на рис. 33.

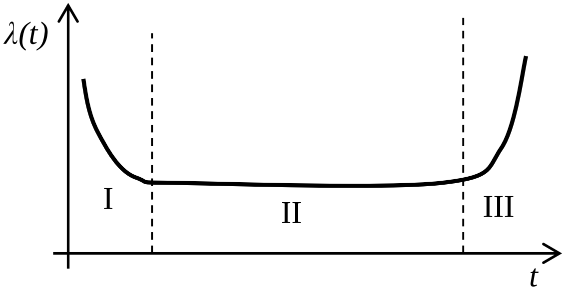


Рис. 33. Зависимость интенсивности отказов от времени:
I – период приработки; II – период нормальной работы;
III – период старения или износа

Для периода нормальной работы многих изделий принимается, что $\lambda(t)$ = const.

Тогда

$$H(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right) = \exp(-\lambda t)\,. \qquad (9.6)$$

Данная формула называется ***экспоненциальным законом надежности***, получившим наибольшее распространение благодаря своей простоте. Согласно этому закону:

$$H(t_1, t_2) = \frac{H(t_2)}{H(t_1)},$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t),$$

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda},$$

$$H(t) = \exp\left(-\frac{t}{\langle T \rangle}\right).$$

Кривые $H(t)$, $F(t)$, $f(t)$ схематично показаны на рис. 34.

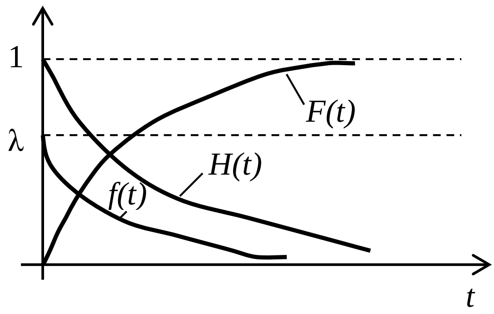


Рис. 34. Кривые $H(t)$, $F(t)$, $f(t)$ для экспоненциального закона надежности

При использовании функции надежности можно сказать, что надежность элемента характеризуется вероятностью безотказной работы в течение 5 ч, равной 0,99. При использовании средней наработки на отказ можно сказать, что надежность элемента характеризуется средней наработкой на отказ, равной 100 ч. При использовании интенсивности отказов можно сказать, что надежность элемента характеризуется интенсивностью отказов, равной 0,01 1/ч. В двух последних случаях вообще отсутствует какое-либо явное упоминание о вероятности безотказной работы. Она может быть найдена, если указана функция надежности или подразумевается, что она экспоненциальная (9.6).

9.3. Методы, учитывающие причины отказов

9.3.1. Надежность как вероятностная прочность

При расчете надежности элементов конструкций как вероятностной прочности предполагается, что в данный момент времени действующая на элемент нагрузка $N(t)$ и соответствующая несущая способность $R(t)$ являются случайными величинами с известными функциями распределения $F_N(N)$ и $F_R(R)$ и (или) функциями плотности вероятности $f_N(N)$ и $f_R(R)$.

Под внешней нагрузкой подразумевается растягивающая, сжимающая или перерезывающая сила, изгибающие или крутящие моменты, внутреннее давление в баках, продольные или поперечные перегрузки и т.д., а также любые их комбинации.

При расчете надежности предполагается, что элемент обладает определенной несущей способностью по отношению к нагружению. Под надежностью в данном случае понимают вероятность безотказной работы, т.е.:

$$H(t) = P\big(R(t) > N(t)\big) = P(R > N).$$

Вероятность отказа F характеризуется заштрихованной площадью, как это показано на рис. 35.

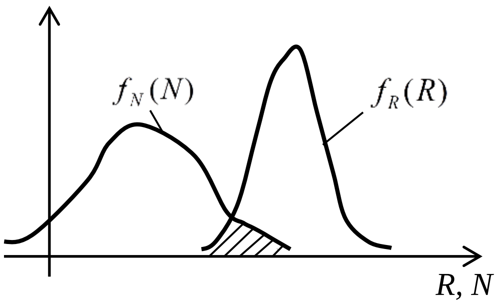


Рис. 35. Функции плотности вероятности несущей способности и эксплуатационной нагрузки

Рассмотрим вероятность события (см. рис. 36), что несущая способность элемента R будет превосходить значение эксплуатационной нагрузки N_0 $P(R>N_0)$, а эксплуатационная нагрузка примет значение в окрестности точки N_0.

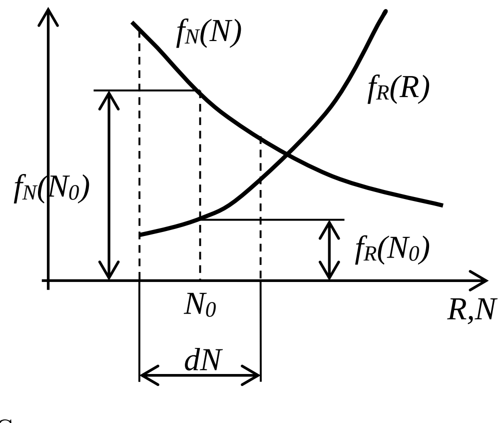


Рис. 36. Схема определения вероятности совместного события

Вероятность такого совместного события равна:

$$f_N(N_0)dN \cdot \int_{N_0}^{\infty} f_R(R)dR.$$

Вероятность отказа (ненадежность) элемента определяется в этом случае соотношением:

$$F = \int_0^{\infty} f_N(N)F_R(N)dN = \int_0^{\infty} f_R(R)[1 - F_N(R)]dR.$$

Соответственно надежность элемента определяется соотношением:

$$H = \int_0^{\infty} f_N(N)[1 - F_R(N)]dN = \int_0^{\infty} f_R(R)F_N(R)dR. \qquad (9.7)$$

Пример 9.4. Несущая способность элемента имеет нормальный закон распределения с параметрами m_R=100кН, σ_R=10кН. Эксплуатационная нагрузка распределена по экспоненциальному закону $f_N(N) = \lambda e^{-\lambda N}$ с математическим ожиданием m_N=50кН. Определить вероятность безотказной работы элемента.

Решение. Воспользуемся для решения задачи формулой (9.7) с учетом того, что $F_N(R) = 1 - e^{-\lambda R}$.

После несложных аналитических выкладок получим:

$$H = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi\left(\frac{m_R}{\sqrt{2}\sigma_R}\right) - \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(2m_R - \lambda\sigma_R^2)\right]\left(1 + \Phi\left(\frac{m_R - \lambda\sigma_R^2}{\sqrt{2}\sigma_R}\right)\right)\right\}.$$

Подставляя численные значения m_R, σ_R и $\lambda = \dfrac{1}{m_N}$, получим H=0,86.

9.3.2. Основные понятия теории надежности В.В. Болотина

Рассматривается поведение системы при внешних воздействиях, которое описывается уравнением:

$$Lu=q,$$

где q – вектор внешних воздействий на систему, u – вектор параметров поведения системы, с помощью составляющих которого можно охарактеризовать любое состояние системы. Эволюция состояний оценивается некоторыми функциями $u(t)$.

Каждой функции $u(t)$ соответствует некая траектория $v(t)$, а связь между этими траекториями дается операторным соотношением:

$$v=Mu.$$

Оператор M в частности может быть тождественным оператором.

Множество состояний системы, допустимых с точки зрения качества, образует область допустимых состояний Ω_0, граница которой Г соответствует предельным состояниям и называется предельной поверхностью.

Если параметры качества системы $v(t)$ находятся внутри области допустимых состояний Ω_0, то они сохраняются в установленных допусках. Пересечение траекторией $v(t)$ предельной поверхности Г соответствует отказу системы.

На рис. 37 представлены траектории $q(t)$, $u(t)$ и $v(t)$ для случая, когда соответствующие пространства являются эвклидовыми трехмерными пространствами.

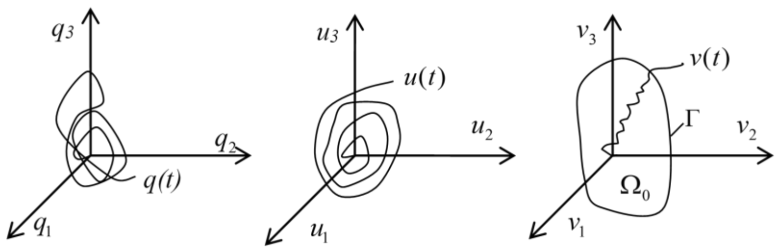


Рис. 37. Траектории параметров внешних воздействий, поведения и качества системы

Пусть внешнее воздействие $q(t)$ и оператор системы L являются стохастическими. Тогда траектории $v(t)$ будут также стохастическими. Отказ интерпретируется как случайное пересечение траекторией $v(t)$ предельной поверхности Г в направлении внешней нормали или как случайный выброс из области допустимых состояний Ω_0. Вероятность безотказной работы *H(t)* – функция надежности определяется как вероятность пребывания элемента *v(t)* в допустимой области Ω_0 на отрезке времени $[0,t]$:

$$H(t) = P\{v(\tau) \in \Omega_0; \tau \in [0,t]\}.$$

Таким образом, формулируется общая схема оценки надежности с учетом физических, технических и эксплуатационных факторов, которая слагается из четырех этапов:

1. Схематизация системы и внешних воздействий на нее, определение оператора L, характеризующего поведение системы.
2. Определение стохастического поведения системы при случайных воздействиях, т.е. решение уравнения $Lu=q$. Это задача статистической динамики.
3. Выбор области допустимых состояний Ω_0. Выбор осуществляется на основании технико-экономических соображений с учетом технологических, эксплуатационных и других требований.
4. Определение функции надежности *H(t)*.

Таким образом, функция надежности *H(t)* определяется как результат учета ряда факторов: внешней среды, свойств системы, технологических, эксплуатационных и других требований.

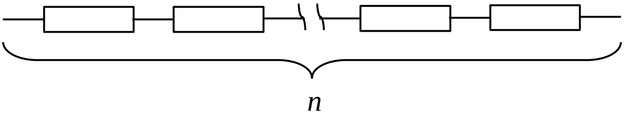
9.4. Методы оценки надежности систем

Системой называется любое устройство, состоящее из элементов, надежность каждого из которых известна. Если элементы, составляющие систему, являются независимыми по отказам, надежность системы оценивается с использованием **метода структурных схем надежности**.

Структурная схема показывает деление системы на составляющие элементы и влияние возможных отказов элементов на надежность системы. Элементы соединяются в систему последовательно, параллельно или смешанно.

При **последовательном соединении элементов** по надежности необходимым и достаточным условием безотказной работы системы является безотказная работа всех ее элементов.

Схематично последовательное соединение n элементов в систему показано на рис. 38.



ис. 38. Последовательное соединение элементов

Надежность системы H_c подсчитывается по формуле:

$$H_c = H_1 H_2 ... H_i ... H_n = \prod_{i=1}^{n} H_i \,, \qquad (9.8)$$

где H_i – надежность i-го элемента.

В случае, когда надежности всех элементов равны между собой $H_i=H$, $i=1, 2, …, n$, формула (9.8) принимает вид:

$$H_c=H^n.$$

Надежность системы с последовательным соединением меньше надежности наименее надежного ее элемента, т.е. $H_c \le \min\{H_i\}$. Чем больше количество последовательно соединенных элементов, тем меньше надежность системы.

Пример 9.5. Система состоит из трех последовательно соединенных элементов, показатели надежности которых составляют 0,99; 0,97 и 0,95. Определить надежность системы.

Решение. Надежность системы равна:

$$H_c=H_1H_2H_3=0{,}99 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95 \approx 0{,}91.$$

Если надежность каждого элемента определяется соотношением (9.5), интенсивность отказов системы с последовательным соединением элементов равна сумме интенсивностей отказов элементов:

$$\lambda_c(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + ... + \lambda_i(t) + ... + \lambda_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t),$$

а надежность системы определяется соотношением:

$$H_c(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_c(\tau) d\tau \right].$$

Для экспоненциального закона надежности (9.6), когда $\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}$, получим:

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i;$$

$$H_c(t) = \exp(-\lambda_c t). \qquad (9.9)$$

Анализ формулы (9.9) показывает, что функция надежности системы соответствует экспоненциальному закону распределения.

Среднее время наработки на отказ системы $\langle T \rangle_c$ вычисляется через среднее время на отказ каждого элемента $\langle T \rangle_i$ по формуле:

$$\frac{1}{\langle T \rangle_c} = \frac{1}{\frac{1}{\langle T \rangle_1} + \frac{1}{\langle T \rangle_2} + \ldots + \frac{1}{\langle T \rangle_i} + \ldots + \frac{1}{\langle T \rangle_n}}.$$

Для экспоненциального закона надежности, когда $\langle T \rangle_i = \langle T \rangle$, получим:

$$\langle T \rangle_c = \frac{\langle T \rangle}{n}.$$

При **параллельном соединении элементов** по надежности необходимым и достаточным условием отказа системы является отказ всех ее элементов.

Схематично параллельное соединение n элементов в систему показано на рис. 39.

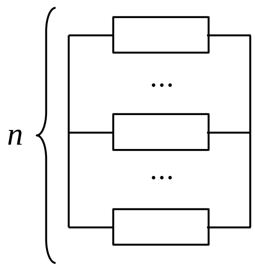


Рис. 39. Параллельное соединение элементов

Надежность системы при параллельном соединении элементов определяется соотношением:

$$H_c = 1-(1-H_1)(1-H_2)\ldots(1-H_i)\ldots(1-H_n) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-H_i). \quad (9.10)$$

В частном случае, когда надежность всех элементов одинакова $H_i=H$, i=1, 2, …, n, формула (9.10) принимает вид:

$$H_c = 1-(1-H_i)^n.$$

Надежность системы с параллельным соединением больше надежности любого ее элемента, т.е. $H_c \geq \max\{H_i\}$. Чем больше количество параллельно соединенных элементов, тем больше надежность системы.

Пример 9.6. Система состоит из трех параллельно соединенных элементов, показатели надежности которых составляют 0,99; 0,97 и 0,95. Определить надежность системы.

Решение. Надежность системы равна:

$$H_c = 1-(1-H_1)(1-H_2)(1-H_3) = 1-0,01\cdot 0,03\cdot 0,05 \approx 1.$$

Если надежность каждого элемента определяется соотношением (9.5), надежность системы определяется по формуле:

$$H_c(t) = 1-\left[1-\exp\left(-\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau\right)\right]\left[1-\exp\left(-\int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau\right)\right]\ldots\left[1-\exp\left(-\int_0^t \lambda_n(\tau)d\tau\right)\right].$$

В частном случае, когда все элементы одинаковы и имеют экспоненциальный закон надежности, надежность системы вычисляется по следующей зависимости:

$$H_c(t) = 1-[1-\exp(-\lambda t)]^n.$$

Среднее время наработки на отказ системы с параллельным соединением элементов, надежность которых определяется экспоненциальным законом, определяется формулой:

$$\langle T\rangle_c = \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right). \quad (9.11)$$

Из выражения (9.11) видно, что каждая новая степень резервирования уменьшает приращение среднего времени наработки системы на отказ. Вследствие этого в практике более чем пятикратное резервирование не применяется.

Смешанным соединением элементов в смысле надежности называется такое соединение, при котором есть элементы, соединенные параллельно, и элементы, соединенные последовательно.

Расчет надежности систем со смешанным соединением осуществляется в несколько этапов. Вначале в структурной схеме надежности системы выделяются группы элементов, которые соединены только последовательно или параллельно, и вычисляются показатели надежности этих групп. Затем каждая группа элементов представляется в виде одного элемента с известным показателем надежности. В полученной структурной схеме снова выделяются группы элементов, которые соединены только последовательно или параллельно, и вычисляются показатели надежности для этих групп. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет рассчитан показатель надежности системы в целом.

На рис. 40 схематично показаны примеры двух способов смешанного соединения элементов: общее резервирование (рис. 40,а) и раздельное резервирование (рис. 40,б).

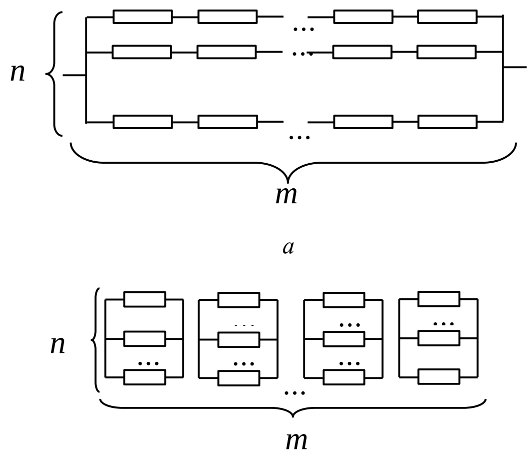


Рис. 40. Способы смешанного соединения элементов:
а – общее резервирование; б – раздельное резервирование

Пусть надежность каждого элемента H_{jk} известна. Тогда надежность системы с общим резервированием определится по формуле:

$$H_c = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \prod_{k=1}^{m} H_{jk} \right], \qquad (9.12)$$

а надежность системы с раздельным резервированием по соотношению:

$$H_c = \prod_{k=1}^{m} \left[1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - H_{jk}) \right]. \qquad (9.13)$$

Пример 9.7. Система состоит из шести смешанно соединенных элементов, показатель надежности каждого из которых составляет 0,8. Определить надежность системы при двух различных способах соединения, если $m = 3$, $n = 2$.

Решение. Надежность системы с общим резервированием равна (9.12):

$$H_c = 1–(1–0{,}8·0{,}8·0{,}8)(1–0{,}8·0{,}8·0{,}8) \approx 0{,}76.$$

Надежность системы с раздельным резервированием (9.13):

$$H_c = [1–(1–0{,}8)(1–0{,}8)][1–(1–0{,}8)(1–0{,}8)][1–(1–0{,}8)(1–0{,}8)] \approx 0{,}88.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Для разгрузки деталей начальнику цеха требуется выделить 5 из 20 имеющихся рабочих. Сколькими способами это можно сделать, осуществляя отбор в случайном порядке?

Ответ: $n = 15504$.

Задача 2. Сколько словарей надо издать, чтобы переводить с 5 языков на любой другой из этих языков?

Ответ: $n = 10$.

Задача 3. Рабочий имеет возможность выбора заготовок 15 из 25. Сколько существует способов для случайного отбора заготовок?

Ответ: $n = 3268760$.

Задача 4. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

Ответ: $p = 0{,}05$.

Задача 5. Десять солдат-новобранцев разного роста случайным образом становятся в строй. Какова вероятность того, что они расположатся в строю по росту?

Ответ: $p = 0{,}00000051$.

Задача 6. За круглым столом случайно рассаживаются 6 мужчин и 6 женщин. Какова вероятность того, что мужчины и женщины будут чередоваться друг с другом?

Ответ: $p = 0{,}0022$.

Задача 7. Из 12 лотерейных билетов, содержащих 4 выигрышных, наугад берут 6. Какова вероятность того, что хотя бы один из них будет выигрышным?

Ответ: $p = 0{,}9697$.

Задача 8. Студент знает 14 вопросов из 20. В билете содержатся 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит хотя бы на один из них.

Ответ: $p = 0{,}9525$.

Задача 9. При игре в бридж каждый игрок получает 13 карт (из 52). Один из них получил 7 карт черной масти и 6 – белой. Какова вероятность того, что у него окажутся туз пик и туз треф?

Ответ: $p = 0{,}0646$.

Задача 10. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг, окажется внутри квадрата.

Ответ: $p = 0{,}6366$.

Задача 11. На троллейбусной остановке находится человек, ожидающий троллейбус одного из маршрутов – №1 или №2. Троллейбусы разных маршрутов приходят независимо друг от друга, и вероятность появления 1 маршрута в течение 5 минут равна 0,1, а второго 0,5. Какова вероятность появления троллейбуса нужного маршрута в течение 5 минут?

Ответ: $p = 0{,}55$.

Задача 12. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по трем предметам. Студент освоил 90% вопросов по первому предмету, 95% – по второму и 50% – по третьему. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст все экзамены?

Ответ: $p = 0{,}4275$.

Задача 13. Два приятеля, независимо друг от друга, садятся в электричку, состоящую из 9 вагонов. Какова вероятность того, что они окажутся в разных вагонах?

Ответ: $p = 0{,}8889$.

Задача 14. В течение смены двое рабочих могут, независимо друг от друга, изготавливать брак с вероятностями 0,06 и 0,09. Найти вероятность того, что в конце смены оба рабочих дадут продукцию без брака.

Ответ: $p = 0{,}8554$.

Задача 15. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом, если другой производитель не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,75, а при наличии конкурирующего товара – равна 0,25. Вероятность выпуска другим производителем товара равна 0,35. Найти вероятность того, что товар будет иметь успех.

Ответ: $p = 0{,}575$.

Задача 16. На строительство объекта поступают железобетонные плиты из 4 цементных заводов в количестве 50, 10, 40 и 30 штук соответственно. Каждый из заводов допускает при изготовлении плит брак (несоответствие ГОСТ), равный в процентном отношении соответственно 1, 5, 2 и 3. Какова вероятность того, что наугад взятая плита будет удовлетворять требованиям ГОСТ?

Ответ: $p = 0{,}9979$.

Задача 17. При хороших метеоусловиях вероятность благополучной посадки самолета равна 0,9999, а при плохих – 0,9991. Для данного аэропорта в 80% случаев погода считается летной. Найти вероятность благополучного приземления самолета.

Ответ: $p = 0{,}99974$.

Задача 18. В цехе работают 3 мастера и 6 их учеников. Мастер допускает брак при изготовлении изделия с вероятностью 0,05; ученик – с вероятностью 0,15. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность, что его изготовил мастер?

Ответ: $p = 0{,}1429$.

Задача 19. На предприятии установлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал появляется с вероятностью 0,95. Однако сигнал может возникнуть и без аварийной ситуации с вероятностью 0,001. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,005. Чему равна вероятность аварийной ситуации, если сигнализация сработала?

Ответ: $p = 0{,}8268$.

Задача 20. Военный летчик катапультируется в местности, 60% которой занимают леса. Вероятность благополучного приземления в лесу равна 0,3, а в безлесной местности – 0,9. Какова вероятность благополучного приземления летчика?

Ответ: $p = 0{,}54$.

Задача 21. Вероятность того, что прибор не откажет к моменту времени t_1, равна 0,9, а вероятность того, что он не откажет к моменту времени t_2 ($t_2>t_1$), равна 0,6. Найти вероятность того, что прибор, не отказавший к моменту времени t_1, не откажет и к моменту времени t_2.

Ответ: $p = 2/3$.

Задача 22. Среди поступающих в ремонт часов 40% нуждаются в общей чистке механизма. Какова вероятность того, что из 5 взятых наугад часов все нуждаются в чистке механизма?

Ответ: $p = 0{,}01024$.

Задача 23. Из 20 видеокамер 10 расположены за оградой аэропорта. Для проверки случайным образом выбраны 5 камер. Какова вероятность того, что хотя бы 2 из них окажутся в черте аэропорта?

Ответ: $p = 0{,}8483$.

Задача 24. При производстве деталей обнаруживается 0,4% брака. Какова вероятность при случайном отборе 2000 деталей обнаружить не больше 3 бракованных?

Ответ: $p = 0{,}0424$.

Задача 25. Дан закон распределения вероятностей дискретной случайной величины *X*:

X	-2	0	2	4	6
p	0,2	0,1	a	0,2	0,3

Найти значение a, вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду. Построить график функции распределения $F(x)$, найти значение $F(3)$.

Задача 26. Дан закон распределения вероятностей дискретной случайной величины *X*:

X	–2	0	2	4	6
p	0,2	*a*	0,1	0,2	0,3

Найти значение *a*, вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду. Построить график функции распределения *F(x)*, найти значение *F(*5*)*.

Задача 27. Задана функция распределения непрерывной случайной величины *X*:

$$F(X)=\begin{cases} 0, & x\le -4, \\ \dfrac{x+4}{10}, & -4<x\le 6, \\ 1, & x>6. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти плотность вероятностей *f(x);* числовые характеристики *M[X], D[X], σ[X]*;

2) построить графики функций *f(x), F(x)*;

3)вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $P(-3 < X < 0)$.

Задача 28. Функция плотности вероятности нормального закона имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{2{,}5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{12{,}5}}.$$

Требуется записать математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, вычислить и изобразить графически вероятности попадания непрерывной случайной величины *X* на следующие интервалы:

а) $x<1$; б) $1{,}5<x<2$; в) $x>4{,}5$.

Задача 29. Функция плотности вероятности нормального закона имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{3{,}5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{24{,}5}}.$$

Требуется записать математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, вычислить и изобразить графически вероятности попадания непрерывной случайной величины X на следующие интервалы:

а) $x<1,5$; б) $0,5<x<2,5$; в) $x>3,5$.

Задача 30. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно 16 км/ч. Оценить с помощью первой формы неравенства Чебышева вероятность того, что в этом пункте скорость ветра не превысит 80 км/ч.

Ответ: $p = 0,8$.

Задача 31. Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения курса самолета $\sigma=2°$. Считая математическое ожидание ошибки измерения равным нулю, оценить вероятность того, что ошибка при данном измерении курса самолета будет более 5°.

Ответ: $p = 0,16$.

Задача 32. Электронная система состоит из 45 элементов одинаковой надёжности, равной 0,95 за время T. Найти вероятность того, что доля безотказно работавших элементов в течение времени T отличается от 0,95 не более чем на 0,1.

Ответ: $p \geq 0,8944$.

Задача 33. Известно, что $P(X < 1) = 0,95$. В каких пределах находится $M[X]$, если X – неотрицательная случайная величина?

Ответ: $M[X] \geq 0,5$.

Задача 34. Среднее количество звонков, поступающих в цех в течение дня, равно 30. Оценить вероятность того, что в течение дня появится более 90 звонков.

Ответ: $p \leq 2/3$.

Задача 35. Опыт страховой компании показывает, что на каждый пятый договор приходится страховой случай. Сколько договоров нужно заключить, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,2 не более чем на 0,05?

Ответ: $n \geq 1280$.

Задача 36. Сколько надо произвести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более чем на 1, если среднее квадратическое отклонение (ошибка измерений) не превосходит 3?

Ответ: $n \geq 180$.

Задача 37. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из ста конденсаторов выйдут из строя: а) не менее 20 конденсаторов; б) менее 28 конденсаторов; в) от 14 до 26 конденсаторов.

Ответ: а) 0,5; б) 0,9772; в) 0,8664.

Задача 38. Известно, что $P(\left|X\text{-}M(X)\right| < 0{,}1) = 0{,}95$. В каких пределах находится среднее квадратическое отклонение σ_x?

Ответ: $\sigma_x \geq 0{,}0974$.

Задача 39. *Два устройства А и В могут сдаваться в аренду по од*ной и той же цене. Каждое устройство может иметь два состояния: ξ_1 – устройство работает исправно; ξ_2 – устройство требует ремонта.

Устройства имеют следующие матрицы переходных вероятностей:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix}; \qquad P_B = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Для каждого устройства требуется определить вероятность исправной работы (p_{A1} и p_{B1}) и вероятность ремонта (p_{A2} и p_{B2}). Какое устройство следует арендовать?

Ответ: $p_{A1} = \dfrac{7}{9}$; $p_{A2} = \dfrac{2}{9}$; $p_{B1} = \dfrac{2}{3}$; $p_{B2} = \dfrac{1}{3}$.

Поскольку $p_{A2} > p_{B2}$, устройство A чаще находится в исправном состоянии, чем устройство B. Следовательно лучше арендовать устройство A.

Задача 40. Станок может находиться в одном из двух состояний: ξ_1 – станок работает исправно; ξ_2 – станок требует ремонта. На следующий день станок может изменить состояние в соответствии с переходной матрицей следующего вида:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Если станок работает исправно до и после перехода, прибыль составляет 4000 руб. Если станок начинает работу в нормальном состоянии, а потом требует ремонта (или наоборот), прибыль составляет 1000 руб. Если станок требует ремонта и до и после перехода, то убытки составляют 2000 руб. Требуется найти ожидаемую прибыль.

Ответ: 2900 руб.

Задача 41. В начале года в цехе имеется N_1 исправных станков (состояние ξ_1) и N_2 (состояние ξ_2), требующих ремонта станков. Их соотношение составляет $r = N_1{:}N_2 = 4{:}1$. Требуется определить соотношение r в начале следующего года, если вероятность перехода между состояниями ξ_1 и ξ_2 по истечении года характеризуется матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $r = 3{:}2$.

Задача 42. Закон распределения системы дискретных случайных величин задан таблицей:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
1	0,10	0,15	0,04	0,06
2	0,12	0,08	0,05	0,04
3	0,01	0,02	0,11	a

Определить:

1) значение числа a;

2) безусловные законы распределения случайных величин X и Y;

3) вероятность того, что $X=1$, а $Y \geq 2$;

4) вероятность того, что $X=Y$.

Задача 43. Двумерная дискретная случайная величина задана следующим законом распределения:

$X \setminus Y$	0	1
0	0,12	0,18
1	0,28	0,42

Определить:

1) функцию распределения дискретной случайной величины X;

2) функцию распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y);

3) вероятность того, что $X \le Y$.

Задача 44. Дискретная случайная величина X задана следующим рядом распределения:

x_i	–2	–1	0	1	2	3	4
p_i	0,05	0,10	0,15	0,25	0,15	0,20	0,10

Найти распределение случайной величины $Y = 3X^2 + 1$.

Ответ:

y_i	–47	–26	–11	–2	1
p_i	0,10	0,20	0,20	0,35	0,15

Задача 45. Закон распределения системы дискретных случайных величин задан таблицей:

$X \setminus Y$	10	20	30
50	0,15	0,30	0,15
100	0,10	0,05	0,25

Определить:

1) условный закон распределения случайной величины Y при условии, что X=100;

2) условный закон распределения случайной величины X при условии, что Y =20;

3) являются ли независимыми случайные величины X и Y.

Задача 46. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n = 50. После обработки данных получена следующая таблица:

значение x_i	2	5	7	10
частота n_i	16	12	8	14

Найти значение несмещенной оценки выборочного среднего $\bar{x}$.

Ответ: $\bar{x}$ =5,76.

Задача 47. По выборке объема n = 41 найдена смещенная оценка D_B. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Ответ: $\overline{D}$ = 3,075.

Задача 48. В результате пяти измерений длины стержня получены следующие результаты в мм: 103, 94, 105, 106, 92. Определить несмещенные оценки выборочного среднего и дисперсии.

Ответ: $\overline{x}$ =100 мм, $\overline{D}$ = 42,5 мм^2.

Задача 49. В таблице приведены результаты измерения роста 100 случайно отобранных студентов:

Рост, см	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Определить несмещенные оценки выборочного среднего и дисперсии.

Ответ: $\overline{x}$ =166 см, $\overline{D}$ = 4,81см^2.

Задача 50. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины X. Выборочное среднее значение $\overline{x}$ = 14, σ_B = 5, объем выборки n = 25, доверительная вероятность равна 0,95.

Ответ: 11,94 < $\tilde{m}$ < 16,06.

Задача 51. Найти минимальный объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,975 точность оценки математического ожидания $\tilde{m}$ по выборочной средней равна ε_β = 0,3, если известна дисперсия $\tilde{D}_x$ = 1,44 нормально распределенной случайной величины.

Ответ: n = 81.

Задача 52. Проведено 700 независимых опытов, в каждом из которых событие *A* происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие *A* происходит:

1) точно 270 раз;

2) больше чем 230 раз, но меньше чем 270 раз;

3) больше чем 270 раз.

Ответ:

1) $P_{400}(270) \approx 0{,}0045$;

2) $P_{700}(230 \le m \le 270) = 0{,}8378$;

3) $P_{400}(m > 270) = 0{,}0197$.

Задача 53. Завод изготовляет шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков $d_0 = 5$ мм. Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр – случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением d_0 и средним квадратическим отклонением $\sigma_d = 0{,}05$ мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше чем на 0,1 мм. Определить, какой процент шариков в среднем будет отбраковываться.

Ответ: 4,6% (применяется табличная функция Лапласа и формула вероятности попадания на симметричный интервал).

Задача 54. Производится ряд независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие *A* с вероятностью, равной *p*. Испытания производятся до первого появления события *A*, после чего прекращаются. Случайная величина *X* – число произведенных испытаний. Построить ряд распределения этой случайной величины и найти математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $x_i = i$; $p_i = q^{i-1} \cdot p$; $M_x = \dfrac{1}{p}$; $D_x = \dfrac{q}{p^2}$.

Задача 55. При работе прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Время *T* работы прибора от его включения до возникновения неисправности распределено по показательному закону с параметром μ. Возникновение неисправности мгновенно обнаруживается и прибор поступает в ремонт. Ремонт продолжается время t_0, после чего прибор снова включается в работу. Найти плотность распределения $f^*(t)$ и функцию распределения $F^*(t)$ промежутка времени T^* между двумя соседними неисправностями.

Найти его математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что время T^* будет больше $2t_0$.

Ответ: $M(T^*) = \frac{1}{\mu} + t_0$; $D(T^*) = \frac{1}{\mu^2}$; $P(T^* > 2t_0) = e^{-\mu t_0}$.

Задача 56. Время T между двумя сбоями вычислительного устройства распределено по показательному закону с параметром μ. Решение определенной задачи требует безотказной работы устройства в течение времени τ. Если за время τ произошел сбой, то задачу приходится решать заново. Сбой обнаруживается только через время τ после начала решения задачи. Рассматривается случайная величина θ – время, за которое задача будет решена. Найти ее закон распределения и математическое ожидание (среднее время решения задачи).

Ответ: $M_\theta = \frac{\tau}{p} = \frac{\tau}{e^{-\mu\tau}}$.

Задача 57. Производится вынужденная посадка самолета на лесостепь. Точки, в которых растут кусты и деревья, представляют собой равномерное пуассоновское поле точек с параметром μ. Размах крыльев самолета равен r, а длина пробега L. Благополучная посадка возможна, если самолет не заденет ни одного куста или дерева (размерами кроны пренебречь). Определить вероятность p того, что самолет приземлится благополучно.

Ответ: $p=e^{-rL\mu}$.

ПРИМЕР ТЕСТА
ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Задание № 1 (*выберите один вариант ответа*).

Игральный кубик бросают один раз. Вероятность того, что на верхней грани выпадет число очков, равное четырем, пяти или шести, равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$;

3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$.

Задание № 2 (*выберите один вариант ответа*).

Случайные события A и B, удовлетворяющие условиям $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$; $P(AB) = 0,2$, являются…

Варианты ответов:

1) совместными и независимыми;
2) несовместными и независимыми;
3) совместными и зависимыми;
4) несовместными и зависимыми.

Задание № 3 (*выберите один вариант ответа*).

По мишени производится четыре выстрела. Значение вероятности промаха при первом выстреле 0,5; при втором – 0,3; при третьем – 0,2; при четвертом – 0,1. Тогда вероятность того, что мишень не будет поражена ни разу, равна…

Варианты ответов:

1) 0,003; 2) 0,275;

3) 1,1; 4) 0,03.

Задание № 4 (*выберите один вариант ответа*).

Событие A может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2, образующих полную группу событий. Известны вероятность $P(B_1)=\frac{1}{3}$ и условные вероятности $P\left(\frac{A}{B_1}\right)=\frac{1}{2}$, $P\left(\frac{A}{B_2}\right)=\frac{1}{4}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна …

Варианты ответов:

1)	$\frac{3}{4}$;	2)	$\frac{1}{3}$;
3)	$\frac{2}{3}$;	4)	$\frac{1}{2}$.

Задание № 5 (*выберите один вариант ответа*).

Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 0{,}3, & 0<x\le 1, \\ 0{,}5, & 1<x\le 6, \\ 1, & x>6. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P(-1\le X\le 3)$ равна …

Варианты ответов:

1)	0,7;	2)	0,3;
3)	0,2;	4)	0,5.

Задание № 6 (*выберите один вариант ответа*).

Статистическое распределение выборки имеет вид:

x_i	2	3	7	10
n_i	4	7	5	4

Тогда относительная частота варианты $x_1=2$, равна …

Варианты ответов:

1)	0,4	2)	0,1
3)	4	4)	0,2

Задание № 7 (*выберите один вариант ответа*).

Дана выборка объема n. Если каждый элемент выборки увеличить в 5 раз, то выборочное среднее $\bar{x}$ …

Варианты ответов:

1)	увеличится в 5 раз	2)	увеличится в 25 раз
3)	не изменится	4)	увеличится на 5 единиц

Задание № 8 (*выберите один вариант ответа*).

Если основная гипотеза имеет вид $H_0 : a = 20$, то конкурирующей может быть гипотеза …

Варианты ответов:

1)	$a \leq 20$	2)	$a \geq 20$
3)	$a > 20$	4)	$a \geq 10$

Задание № 9. (*выберите один вариант ответа*).

Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей следующей таблицей:

X	x_1	4	7
p	0,2	0,5	0,3

Если математическое ожидание $M(X)$ = 3,5, то значение x_1 равно …

Варианты ответов:

1)	–3	2)	–1
3)	0	4)	3

Задание № 10 (*выберите несколько вариантов ответа*).

Из каждой из двух колод вынимают по одной карте. События A – «карта из первой колоды – красной масти» и B – «карта из второй колоды – бубновой масти» являются:

Варианты ответов:

1)	несовместными	2)	совместными
3)	независимыми	4)	зависимыми

Задание № 11 (*выберите один вариант ответа*).

Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = -3 + 2x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен…

Варианты ответов:

1)	–0,6	2)	–3
3)	0,6	4)	–2

Задание № 12 (*выберите один вариант ответа*).

Количество перестановок букв в слове «зачеты» равно…

Варианты ответов:

1)	6	2)	24
3)	120	4)	720

Задание № 13 (*выберите один вариант ответа*).

Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 8, 9, X_3, 12. Если несмещенная оценка математического ожидания равна 10, то выборочная дисперсия будет равна …

***Варианты ответов*:**

1) 2,5 2) 2,0 3) 0 4) 1,5

Задание №14 *(выберите один вариант ответа)*.

При построении выборочного уравнения парной регрессии вычислены выборочный коэффициент корреляции $r_k = 0{,}54$ и выборочные средние квадратические отклонения $\sigma_x = 1{,}6$ и $\sigma_y = 3{,}2$. Тогда выборочный коэффициент регрессии Y на X равен…

Варианты ответов:

1) 1,08 2) – 1,08 3) 0,27 4) – 0,27

Задание №15 (*выберите один вариант ответа*).

Мода вариационного ряда 2 , 5 , 5 , 6 , 7 , 9 , 10 равна …

Варианты ответов:

1) 2 2) 10 3) 6 4) 5

Задание №16 (*выберите один вариант ответа*).

При производстве некоторого изделия вероятность брака равна 0,2. Ряд распределения случайной величины X – числа бракованных изделий, если изготовлено три изделия, будет иметь вид …

Варианты ответов:

1)

X	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

2)

X	0	1	2	3
p	0,512	0,384	0,0,096	0,008

3)

X	0	1	2	3
p	0,8	0,16	0,032	0,0064

4)

X	0	1	2	3
p	0,512	0,128	0,032	0,008

Задание №17 *(выберите несколько вариантов ответа)*.

В теории надежности для выравнивания опытной информации используют несколько различных законов распределения:

Варианты ответов:

1) Нормальный (Гаусса)
2) Экспоненциальный
3) Вейбулла
4) Стьюдента
5) Дифференциальный
6) Интегральный

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барковская, Л.С. Теория вероятностей: практикум / Л.С. Барковская, Л.В. Станишевская, Ю.Н. Черторицкий. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск: БГЭУ, 2011. – 150 с.

2. Белько, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи: учеб. пособие / И.В. Белько, Г.П. Свирид; под ред. К.К. Кузьмича. – 2-е изд., стер. – Минск: Новое знание, 2004. – 251с.

3. Блатов, И.А. Теория вероятностей и математическая статистика: конспект лекций / И.А. Блатов, О.В. Старожилова. – Самара: ГОУВПО ПГУТИ, 2010. – 286с.

4. Болшев, Л.И. Таблицы математической статистики / Л.И. Болшев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983.

5. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студ. втузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448с.

6. Волковец, А.И. Теория вероятностей и математическая статистика: конспект лекций для студентов всех специальностей и форм обучения БГУИР / А.И. Волковец, А.Б. Гуринович. – Минск: БГУИР, 2003. – 84с.

7. Выск, Н.Д. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Н.Д. Выск. – М.: МАТИ – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2011. – 168с.

8. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2007. – 404с. – (Основы наук).

9. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2013. – 479с.: ил. – (Бакалавр. Базовый курс).

10. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2007. – 479с.: ил. – (Основы наук).

11. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 451с.

12. Дуплякин, В.М. Статистический анализ выборочных данных: учеб. пособие / В.М. Дуплякин, Т.Д. Коваленко. – Самара: МИР, 2007. – 68с.

13. Единый портал интернет-тестирования в сфере образования. [Электронный ресурс]. Режим доступа: свободный. Адрес: http://www.i-fgos.ru/.

14. Колемаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В.А. Колемаев , В.Н. Калинина. – 2-е изд., перераб и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА 2015 – (http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=436721).

15. Высшая математика для экономических специальностей: учебник и практикум / Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Юрайт; ИД Юрайт, 2011. – 909с. – (Основы наук).

16. Исаченко, Н.А. Математика и информатика: учеб. пособие / Н.А. Исаченко. – Омск: Изд-во ОмГУ, 2006. – 160с.

17. Кацман Ю.Я. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы: учебник / Ю.Я. Кацман; Томский политехнический университет.-Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2013.- 131с. (http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_ red&book_id=442107/).

18. Кремер, Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт, 2011. – 656с.

19. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 551с. – (Золотой фонд российских учебников).

20. Куренков, В.И. Методы обеспечения надежности и экспериментальная отработка ракетно-космической техники: электронное учеб. пособие / В.И. Куренков, В.А. Капитонов. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2012. – 258с.

21. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения / Ю.Г. Матвиенко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006 – 328с.

22. Мацкевич, И.П. Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов эконом. вузов / И.П. Мацкевич, Г.П. Свирид. – Минск: Высшая школа, 2003. – 269с.

23. Мягкова, С.В. Дискретные цепи Маркова и их применение в экономике: метод. указания / С.В. Мягкова, Е.В. Морозова. – Волгоград: Изд-во ВГТУ, 2011. – 15с.

24. Перов С.Н. Разработка методов оценки показателей надежности трубопроводных систем при проектировании и эксплуатации: автореф. дис. … д-ра техн. наук. – Самара, 2009. – 38с.

25. Соколов, Г.А. Теория вероятностей / Г.А. Соколов, Н.А. Чистяков. – М.: Экзамен, 2005. – 416с.

26. Тарасов Ю.Л., Перов С.Н., Логвинов С.Л. Методика оценки вероятности безотказной работы трубопроводных систем // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2003. №1(3). С.111-119.

27. Фадеева, Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: курс лекций / Л.Н. Фадеева. – М.: Эксмо, 2006. – 400 с.

28. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие / под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 302с.

Приложение 1

Функция Гаусса $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Целые и десятые доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0, 3989	0, 3989	0, 3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0, 2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0, 0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0, 0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0, 0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Приложение 2

Функция Лапласа первого рода $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

Целые и десятые доли *x*	Сотые доли *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0, 5000	0,504	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0, 5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0, 5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0, 6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0, 6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0, 6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0, 7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0, 7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0, 7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0, 8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0, 8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0, 8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0, 8849	0,8869	0,8883	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0, 9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0, 9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0, 9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0, 9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0, 9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0, 9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0, 9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0, 9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0, 9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9858
2,2	0, 9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0, 9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0, 9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0, 9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0, 9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0, 9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0, 9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,9	0, 9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0, 9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990
3,1	0, 9990	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	0,9993
3,2	0, 9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0, 9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,4	0, 9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,5	0, 9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0, 9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0, 9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0, 9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0, 9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0, 9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,5	0, 999997									
5,0	0, 999997									

Приложение 3

Значения $t_{\beta}(\beta, n-1)$ критерия Стьюдента

Число степеней свободы *n-1*	Вероятность β											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0, 16	0,32	0,51	0,73	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	0, 14	0,29	0,44	0,62	0,82	1,06	0,34	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	0, 14	0,28	0,42	0,58	0,76	0,98	1,25	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	0, 13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,19	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	0, 13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,16	1,48	2,01	2,57	3,36	4,03
6	0, 13	0,26	0,40	0,55	1,72	1,91	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	0, 13	0,26	0,40	0,55	1,71	1,90	1,12	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50
8	0, 13	0,26	0,40	0,55	1,70	1,89	1,11	1,40	1,86	2,31	2,90	3,35
9	0, 13	0,26	0,40	0,54	1,70	1,88	1,10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	0, 13	0,26	0,40	0,54	1,70	1,88	1,09	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
11	0, 13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,09	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	0, 13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,08	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05
13	0, 13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,08	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	0, 13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,08	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98
15	0, 13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,07	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,07	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,07	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
18	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,07	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
19	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,07	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
20	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,06	1,32	1,72	2,09	2,53	2,84
21	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,06	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,06	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,06	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
24	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,06	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
25	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,06	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79
26	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,06	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,06	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
28	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,06	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
29	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,05	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76
30	0, 13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,05	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75
40	0, 13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,05	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
60	0, 13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,05	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66
120	0, 13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,84	1,04	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	0, 13	0,25	0,38	0,52	0,67	0,84	1,04	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

Приложение 4

Значения $\chi^2(p, n-1)$ критерия Пирсона

Число степеней свободы *n-1*	Вероятность *p*												
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0,15	0,45	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64
2	0,02	0,04	0,10	0,21	0,45	0,71	1,39	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21
3	0,11	0,18	0,35	0,58	1,00	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,7	13,3
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	13,4	15,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	15,0	16,8
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,6	18,5
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,1	21,1	23,7	26,9	29,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,1	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0
17	6,41	7,26	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4
18	7,02	7,91	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8
19	7,63	8,57	10,1	11,6	13,7	15,3	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2
20	8,26	9,24	10,8	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6
21	8,90	9,92	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9
22	9,54	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6
27	12,9	14,1	16,1	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6
30	14,9	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9

Приложение 5

Значения $F_{\alpha,k1,k2}$ – критерия Фишера-Снедекора

$\alpha = 0{,}05$																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	240	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	3,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,83	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

$\alpha = 0{,}01$																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Учебное издание

Перов Сергей Николаевич

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ПРИЛОЖЕНИИ
К ПРОБЛЕМАМ ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ**

Учебное пособие

Редактор Н.С. К у п р и я н о в а
Компьютерная верстка Л.Р. Д м и т р и е н к о

Подписано в печать 06.06.2019. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 9,5.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 15(Р1У)/2019.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.