

Министерство образования Российской Федерации

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королева

В.С. Асланов, И.А. Тимбай

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
В ОБОБЩЕННОМ СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА

Учебное пособие

Самара 2001

Движение твердого тела в обобщенном случае Лагранжа: Учеб. пособие / В.С. Асланов, И.А. Тимбай. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2001. 59 с.

ISBN 5-7883-0156-4

В пособии рассмотрены вопросы исследования движения твердого тела в обобщенном случае Лагранжа, под которым понимается движение твердого тела, близкого к динамически симметричному, относительно центра масс под действием нутационного момента, имеющего вид нечетного ряда Фурье по углу нутации с медленно меняющимися во времени коэффициентами, и малых возмущающих моментов.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 510300 "Механика", и может быть полезно для студентов инженерных специальностей при изучении теоретической механики.

Выполнено на кафедре теоретической механики при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 99-01-00477).

Ил. 12. Библиогр.: 14 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензенты: заведующий кафедрой динамики полета и систем управления Самарского государственного аэрокосмического университета профессор, доктор технических наук В.Л. Балакин; заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета профессор, доктор физико-математических наук В.А. Соболев

ISBN 5-7883-0156-4

© В.С. Асланов, И.А. Тимбай, 2001
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ | 6 |
| 1.1. Динамические и кинематические уравнения Эйлера | 6 |
| 1.2. Уравнения движения в обобщенном случае Лагранжа | 11 |
| 1.3. Канонические переменные Эйлера в обобщенном случае Лагранжа | 12 |
| 2. КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ОБОБЩЕННОМ СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА | 16 |
| 2.1. Вычисление переменных действие-угол | 16 |
| 2.2. Частные случаи движения твердого тела в обобщенном случае Лагранжа | 22 |
| 2.3. Связь канонических переменных действие-угол с переменными Эйлера в обобщенном случае Лагранжа | 31 |
| 2.4. Канонические переменные действие-угол при движении тела под действием синусоидального момента | 35 |
| 3. ПЕРЕХОДНЫЕ РЕЖИМЫ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА | 40 |
| 3.1. Процедура исследования переходных режимов движения | 40 |
| 3.2. Исследование переходных режимов движения твердого тела под действием бигармонического нутационного момента | 43 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК | 57 |

ВВЕДЕНИЕ

Цель пособия – ознакомить читателя с решением задачи о движении твердого тела в обобщенном случае Лагранжа.

Под движением твердого тела в обобщенном случае Лагранжа понимается движение твердого тела, близкого к динамически симметричному, относительно центра масс под действием нутационного момента, имеющего вид нечетного ряда Фурье по углу нутации с медленно меняющимися во времени коэффициентами, и малых возмущающих моментов.

При отсутствии возмущений, когда нутационный момент определяется синусоидальной зависимостью от угла нутации, имеет место движение тяжелого твердого тела в случае Лагранжа в классической постановке [1].

Для ряда практических задач, например для задачи о входе неуправляемого твердого тела в атмосферу планеты, характерен случай, когда величина нутационного момента определяется бигармонической зависимостью от угла нутации. Именно этому случаю уделяется особое внимание в данном пособии.

При исследовании движения твердого тела методами теории возмущений весьма эффективным оказывается использование переменных действие-угол. Движение твердого тела в случае Эйлера в канонических переменных действие-угол описано в работе Ю.А. Садова [2] и книге Ю.А. Архангельского [3]. В работе И.М. Аксененковой [4] и книге В.Г. Демина и Л.И. Конкиной [5] в переменных действие-угол записаны уравнения движения твердого тела в классическом случае Лагранжа, дана связь канонических переменных действие-угол с переменными Эйлера.

В пособии в переменных действие-угол описывается движение твердого тела под действием бигармонического нутационного момента. Рассмотрены возможные частные случаи движения, соответствующие

различным областям фазового портрета системы, в том числе и случай движения тела под действием синусоидального момента как опрокидывающего, так и восстанавливающего (в классическом случае Лагранжа момент опрокидывающий). Дана связь канонических переменных действие-угол с переменными Эйлера.

В пособии исследуются переходные режимы возмущенного движения твердого тела под действием бигармонического нутационного момента, когда коэффициенты момента медленно меняются во времени. В этих случаях качественно изменяется характер движения: вращательное движение может переходить в колебательное, колебательное движение "скачкообразно" – в колебательное движение с другими амплитудными характеристиками и т. д. Приведена процедура исследования переходных режимов движения тела, когда не проводится интегрирование уравнений движения, а используются только аналитические выражения для переменной действия. Даны формулы для определения времени перехода тела из одного режима движения в другой, а также формулы для определения вероятности попадания тела в тот или иной режим движения.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

1.1. Динамические и кинематические уравнения Эйлера

Рассмотрим движение свободного твердого тела относительно прямоугольной неподвижной системы координат O_aXYZ . Согласно известной теореме Шаля любое движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольной точки тела (полюса), и движения тела вокруг этой точки как неподвижной. Из основных теорем динамики следует, что за полюс удобно взять центр масс, поскольку в этом случае движение определяется наиболее просто. Действительно, согласно теореме о движении центра масс, последний движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы системы, а теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии для движения относительно центра масс (относительно поступательно движущейся прямоугольной системы координат с началом в центре масс - кёниговой системы координат $CXYZ$) формулируются точно так же, как и для движения вокруг неподвижной точки.

Пусть M - масса тела, \vec{V}_c - скорость центра масс, \vec{K}_c - кинетический момент тела в его движении относительно центра масс, $\vec{R}^{(e)}$ и $\vec{M}_c^{(e)}$ - главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки C . Тогда из теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении кинетического момента имеем два векторных дифференциальных уравнения

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{R}^{(e)}, \quad (1.1)$$

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \vec{M}_c^{(e)}. \quad (1.2)$$

Если X_c, Y_c, Z_c - координаты центра масс тела в неподвижной системе

координат O_aXYZ , а R_x, R_y, R_z - проекции вектора $\vec{R}^{(e)}$ на оси O_aX, O_aY, O_aZ , то уравнение (1.1) запишется в виде трех скалярных уравнений:

$$M \frac{d^2 X_c}{dt^2} = R_x, \quad M \frac{d^2 Y_c}{dt^2} = R_y, \quad M \frac{d^2 Z_c}{dt^2} = R_z. \quad (1.3)$$

Кинетический момент тела относительно центра масс, точки C , определяется по формуле

$$\vec{K}_c = \int_M (\vec{\rho} \times \vec{V}) dM, \quad (1.4)$$

где векторы $\vec{\rho}$ и $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ обозначают соответственно радиус-вектор и скорость произвольной точки твердого тела с массой dM ($\vec{\omega}$ - вектор мгновенной угловой скорости). Преобразуя правую часть формулы (1.4), можно представить кинетический момент \vec{K}_c в виде произведения тензора инерции I на вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ [1]:

$$\vec{K}_c = I \vec{\omega}. \quad (1.5)$$

Введем прямоугольную систему координат $Cxyz$, оси которой жестко свяжем с движущимся телом и расположим по его главным осям инерции для точки C . Абсолютная производная $\frac{d\vec{K}_c}{dt}$ связана с локальной производной $\frac{\tilde{d}\vec{K}_c}{dt}$ (вычисляемой в подвижной системе координат $Cxyz$) формулой

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_c}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_c. \quad (1.6)$$

Учитывая формулу (1.6), запишем уравнение (1.2) в виде

$$\frac{\tilde{d}\vec{K}_c}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_c = M_c^{(e)}. \quad (1.7)$$

В подвижных осях координат $Cxyz$ тензор I , вектор $\vec{\omega}$ и вектор \vec{K}_c можно записать в следующем виде:

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix},$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}, \quad (1.8)$$

$$\vec{K}_c = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k},$$

где постоянные A, B, C - главные моменты инерции тела для центра C ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные орты осей Cx, Cy, Cz .

Проектируя теперь уравнение (1.7) на подвижные оси $Cxyz$, получим три скалярных уравнения:

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_x,$$

$$B\dot{q} + (A - C)rp = M_y, \quad (1.9)$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_z.$$

Уравнения (1.9) называются динамическими уравнениями Эйлера.

В общем случае правые части уравнений (1.3) и (1.9) могут зависеть от ориентации твердого тела в пространстве. Ориентация твердого тела в пространстве в каждый момент времени определяется положением подвижной системы координат $Cxyz$ относительно кёниговой системы координат $CXYZ$ и может быть задана тремя углами Эйлера ψ, θ, φ . На рис. 1 показаны углы: прецессии ψ как угол между осью CX и линией узлов CN ; нутации θ как угол между осями Cz и CZ ; собственного вращения φ как угол между линией узлов CN и осью Cx .

Получим выражения проекций мгновенной угловой скорости твердого тела через углы Эйлера и их производные. Введем в дополнение к ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ осей Cx, Cy, Cz орт \vec{k}_1 , направленный по оси CZ , и орт \vec{e} , направленный по линии узлов CN . Спроектируем вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \psi\dot{\vec{k}}_1 + \theta\dot{\vec{e}} + \varphi\dot{\vec{k}} \quad (1.10)$$

на оси $Cxyz$ и получим следующие соотношения:

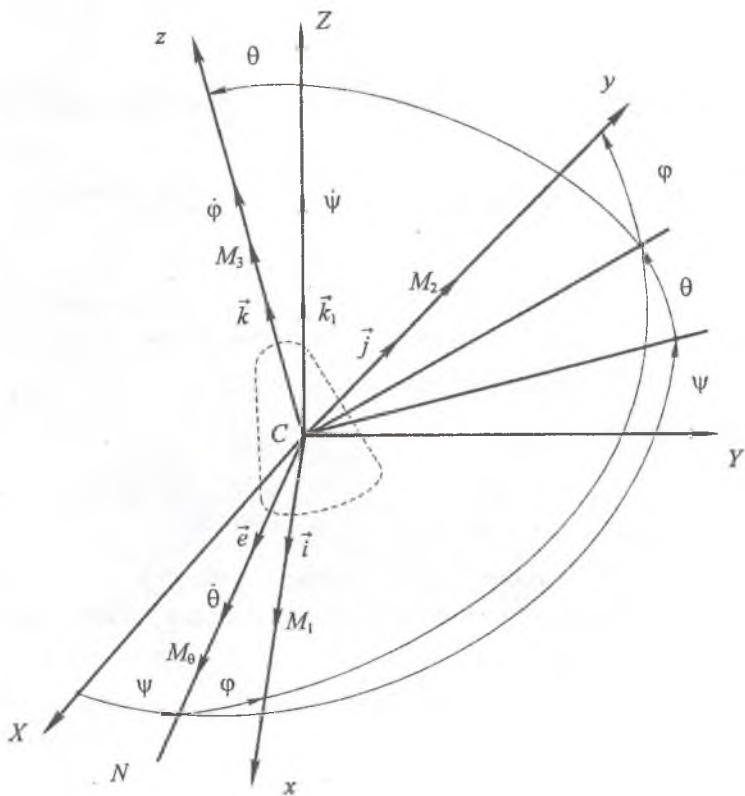


Рис. 1. Взаимное расположение кёниговой $OXYZ$ и связанной с телом $Oxuz$ систем координат

$$\begin{aligned}
 p &= (\bar{\omega} \cdot \bar{i}) = \dot{\psi}(\bar{k}_1 \cdot \bar{i}) + \dot{\theta}(\bar{e} \cdot \bar{i}) + \dot{\phi}(\bar{k} \cdot \bar{i}), \\
 q &= (\bar{\omega} \cdot \bar{j}) = \dot{\psi}(\bar{k}_1 \cdot \bar{j}) + \dot{\theta}(\bar{e} \cdot \bar{j}) + \dot{\phi}(\bar{k} \cdot \bar{j}), \\
 r &= (\bar{\omega} \cdot \bar{k}) = \dot{\psi}(\bar{k}_1 \cdot \bar{k}) + \dot{\theta}(\bar{e} \cdot \bar{k}) + \dot{\phi}(\bar{k} \cdot \bar{k}).
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Из ортогональности осей следует, что

$$(\bar{k} \cdot \bar{i}) = (\bar{k} \cdot \bar{j}) = (\bar{e} \cdot \bar{k}) = 0, \quad (\bar{k} \cdot \bar{k}) = 1.$$

Проектируя орг \bar{k}_1 на ось Cz и на плоскость Cxy , а затем на оси Cx и Cy , получим

$$(\bar{k}_1 \cdot \bar{k}) = \cos\theta, \quad (\bar{k}_1 \cdot \bar{i}) = \sin\theta \sin\varphi, \quad (\bar{k}_1 \cdot \bar{j}) = \sin\theta \cos\varphi. \tag{1.12}$$

Кроме того, заметим, что

$$(\bar{e} \cdot \bar{i}) = \cos\varphi, \quad (\bar{e} \cdot \bar{j}) = -\sin\varphi.$$

После подстановки найденных выражений в соотношения (1.11) получим следующие кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}
 p &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\
 q &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\
 r &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}.
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Систему уравнений (1.13) можно разрешить относительно производных углов Эйлера. Умножим первое уравнение на $\sin\varphi$, второе на $\cos\varphi$, сложим их и получим уравнение для угловой скорости прецессии $\dot{\psi}$. Уравнение для угловой скорости нутации $\dot{\theta}$ получим, умножая первое уравнение на $\cos\varphi$, второе на $\sin\varphi$ и вычитая второе уравнение из первого. Уравнение для угловой скорости собственного вращения $\dot{\phi}$ получим из третьего уравнения, учитывая полученное выражение для $\dot{\psi}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi} &= (p \sin\varphi + q \cos\varphi) / \sin\theta, \\
 \dot{\theta} &= p \cos\varphi - q \sin\varphi, \\
 \dot{\phi} &= r - (p \sin\varphi + q \cos\varphi) / \operatorname{tg}\theta.
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Уравнения (1.3), (1.9), (1.13) или (1.14) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающую движение свободного твердого тела.

1.2. Уравнения движения в обобщенном случае Лагранжа

Рассмотрим движение свободного твердого тела, близкого к динамически симметричному, под действием медленно меняющихся во времени внешнего момента M_θ , действующего в плоскости угла нутации, и малых возмущающих моментов M_i ($i = 1, 2, 3$), направленных соответственно по осям Cx , Cy , Cz (см. рис. 1). В этом случае уравнения движения (1.9) и (1.14) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{p} + (\mu - 1)qr &= m_\theta(\theta, z)\cos\varphi + \varepsilon m_1(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z), \\
 \dot{q} + (1 - \mu)pr &= -m_\theta(\theta, z)\sin\varphi + \varepsilon m_2(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z), \\
 \dot{r} &= \varepsilon m_3(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z), \\
 \dot{\psi} &= (p\sin\varphi + q\cos\varphi) / \sin\theta, \\
 \dot{\theta} &= p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\
 \dot{\varphi} &= r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi) / \operatorname{tg}\theta, \\
 \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(\psi, \theta, \varphi, z).
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь z - вектор медленных переменных (к их числу могут относиться, например, параметры движения центра масс); $\mu = C/A$ - отношение осевого и экваториального ($A = B$) моментов инерции тела относительно центра масс; m_θ - отношение внешнего момента, действующего в плоскости угла нутации, к экваториальному моменту инерции; εm_i ($i = 1, 2, 3$) - проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела, отнесенные к экваториальному моменту инерции; ε - малый параметр, характеризующий величину возмущений.

Движение твердого тела под действием нутационного момента $m_\theta(\theta, z)$, который имеет вид нечетного ряда Фурье по углу нутации с медленно меняющимися во времени коэффициентами, и малого

возмущающего момента εm можно определить как движение твердого тела в обобщенном случае Лагранжа.

При $\varepsilon = 0$ и $m_\theta(\theta) = 0$ имеет место движение твердого тела в случае Эйлера, а при $\varepsilon = 0$, $m_\theta(\theta) = a \sin(\theta)$ и $a > 0$ ($a = \text{const}$) имеет место движение тяжелого твердого тела в случае Лагранжа в классической постановке [1].

Для ряда практических задач, например для задачи о входе неуправляемого твердого тела в атмосферу планеты [6,7], характерен случай, когда величина нутационного момента определяется бигармонической зависимостью от угла нутации

$$m_\theta(\theta, z) = a(z)\sin\theta + b(z)\sin 2\theta, \quad (1.16)$$

где $a(z)$, $b(z)$ - медленно меняющиеся коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не накладывается.

1.3. Канонические переменные Эйлера в обобщенном случае Лагранжа

Рассмотрим невозмущенное движение твердого тела ($\varepsilon = 0$). В этом случае уравнения движения (1.15) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{p} + (\mu - 1)qr &= m_\theta(\theta)\cos\varphi, \\ \dot{q} + (1 - \mu)pr &= -m_\theta(\theta)\sin\varphi, \\ \dot{r} &= 0, \\ \dot{\psi} &= (p\sin\varphi + q\cos\varphi) / \sin\theta, \\ \dot{\theta} &= p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi) / \operatorname{tg}\theta, \\ \dot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Углы Эйлера ψ , θ , φ будем рассматривать как обобщенные координаты. Тогда обобщенные импульсы p_ψ , p_θ , p_φ определяются соотношениями:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (1.18)$$

где $L = T - \Pi$ - функция Лагранжа (лагранжиан, кинетический потенциал), T - кинетическая энергия, Π - потенциал (потенциальная энергия).

Кинетическая энергия, учитывая соотношения (1.8), определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \bar{K} \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2]. \quad (1.19)$$

Учитывая, что выражение элементарной работы сил, приложенных к твердому телу, в рассматриваемом случае имеет вид

$$M_\theta(\theta)d\theta = Am(\theta)d\theta = -d\Pi,$$

потенциал с точностью до постоянной определяется формулой

$$\Pi = - \int M_\theta(\theta)d\theta = A(a \cos \theta + b \cos^2 \theta). \quad (1.20)$$

Воспользовавшись выражением для кинетической энергии (1.19) и кинематическими уравнениями Эйлера (1.13), получим следующие соотношения для обобщенных импульсов, учитывая, что потенциал Π не зависит от $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$:

$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = Ap \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}} + Aq \frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}} + Cr \frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}} = A(p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta + Cr \cos \theta, \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = Ap \frac{\partial p}{\partial \dot{\theta}} + Aq \frac{\partial q}{\partial \dot{\theta}} + Cr \frac{\partial r}{\partial \dot{\theta}} = A(p \cos \varphi - q \sin \varphi), \\ p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = Ap \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + A \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + Cr \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} = Cr. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Кроме того, учитывая, что в связанной системе координат

$$\bar{K}_c = Ap\bar{i} + Bq\bar{j} + Cr\bar{k}, \quad \bar{e} = \cos \varphi \bar{i} - \sin \varphi \bar{j},$$

$$\bar{k}_1 = \sin \theta \sin \varphi \bar{i} + \sin \theta \cos \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k},$$

соотношения (1.21) можно записать в виде:

$$p_\psi = (\bar{K}_c \cdot \bar{k}_1), \quad p_\theta = (\bar{K}_c \cdot \bar{e}), \quad p_\varphi = (\bar{K}_c \cdot \bar{k}). \quad (1.22)$$

Как видно, импульсы p_ψ , p_θ , p_φ являются проекциями кинетического момента на соответствующие оси. Поскольку внешний момент действует в

плоскости угла нутации, то его проекции на ось симметрии Cz и ось CZ , от которой отсчитывается угол нутации, равны нулю. Тогда, согласно теореме об изменении кинетического момента,

$$P_{\varphi} = \text{const}, \quad p_{\psi} = \text{const}. \quad (1.23)$$

Разрешая уравнения (1.21) относительно проекций угловой скорости p, q, r , выразим их зависимость через обобщенные импульсы $P_{\psi}, P_{\theta}, P_{\varphi}$ и углы Эйлера ψ, θ, φ :

$$\begin{aligned} Ap &= \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (P_{\psi} - p_{\varphi} \cos \theta) + p_{\theta} \cos \varphi, \\ Aq &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (P_{\psi} - p_{\varphi} \cos \theta) - p_{\theta} \sin \varphi, \\ Cr &= p_{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Данная система эквивалентна системе кинематических уравнений (1.13).

Углы Эйлера и обобщенные импульсы $P_{\psi}, P_{\theta}, P_{\varphi}$ представляют систему канонических переменных. В канонических переменных Эйлера движение твердого тела будет описываться системой канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\psi}}, & \frac{dp_{\psi}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}}, & \frac{dp_{\theta}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}}, & \frac{dp_{\varphi}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где H - гамильтонова функция.

В рассматриваемой консервативной системе гамильтонова функция постоянна и равна полной механической энергии E :

$$H = E = T + \Pi. \quad (1.26)$$

Учитывая (1.19) и (1.24), запишем выражение для кинетической энергии в канонических переменных:

$$T = \frac{1}{2A} \left(\frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + p_\theta^2 \right) + \frac{p_\varphi^2}{2C}. \quad (1.27)$$

С учетом выражения для потенциала (1.20) функция Гамильтона имеет вид:

$$H = \frac{1}{2A} \left(\frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + p_\theta^2 \right) + \frac{p_\varphi^2}{2C} + A(a \cos \theta + b \cos^2 \theta) = h \quad (1.28)$$

или

$$H = \frac{p_\psi^2 + p_\varphi^2 - 2p_\varphi p_\psi \cos \theta}{2A \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2C} - \frac{p_\varphi^2}{2A} + \frac{p_\theta^2}{2A} + A(a \cos \theta + b \cos^2 \theta) = h. \quad (1.29)$$

Следовательно, в канонических переменных Эйлера невозмущенное движение твердого тела в обобщенном случае Лагранжа определяется системой канонических уравнений (1.25) с функцией Гамильтона (1.29). Поскольку величины p_ψ и p_φ являются постоянными параметрами, то задача о движении твердого тела под действием бигармонического нутационного момента свелась к определению движения консервативной системы с одной степенью свободы. В этом случае функцию Гамильтона можно записать в виде [8]

$$H = \frac{p_\theta^2}{2A} + \Pi^*(\theta) = h, \quad (1.30)$$

где приведенная потенциальная энергия определяется формулой

$$\Pi^*(\theta) = \frac{p_\varphi^2 + p_\psi^2 - 2p_\varphi p_\psi \cos \theta}{2A \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2C} - \frac{p_\varphi^2}{2A} + A(a \cos \theta + b \cos^2 \theta). \quad (1.31)$$

Учитывая выражение для функции Гамильтона (1.29), канонические уравнения (1.25) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{A \sin^2 \theta}, & \frac{dp_\psi}{dt} &= 0, & \frac{d\theta}{dt} &= \frac{p_\theta}{A}, \\ \frac{dp_\theta}{dt} &= \frac{(p_\psi^2 + p_\varphi^2) \cos \theta - p_\psi p_\varphi (1 + \cos^2 \theta)}{A \sin^3 \theta} + A(a \sin \theta + b \sin 2\theta), & & & & \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{A \sin^2 \theta} + \frac{p_\varphi}{C} - \frac{p_\varphi}{A}, & \frac{dp_\varphi}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

2. КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ОБОБЩЕННОМ СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА

2.1. Вычисление переменных действие-угол

При исследовании движения твердого тела методами теории возмущений очень эффективными оказываются переменные действие-угол I_i, w_i ($i=1,2,\dots,n$ - число степеней свободы), обладающие следующими свойствами: фазовое пространство системы периодически по всем углам с периодом 2π ; все угловые переменные - циклические, т.е. гамильтониан $H(I_1, I_2, \dots, I_n)$ не зависит от w_i .

Введем переменные действие-угол I_i, w_i ($i=1,2,3$) в задаче о движении твердого тела под действием бигармонического нутационного момента (1.16). Переменные ψ и ϕ являются циклическими переменными (в функцию Гамильтона не входят) и для соответствующих им переменных действия имеем:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\psi d\psi = p_\psi, \quad (2.1)$$
$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = p_\phi.$$

Переменную действия I_2 , соответствующую углу нутации, вычислим по формуле

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta, \quad (2.2)$$

в которой интеграл берется за полный период изменения угла нутации θ .

Импульс p_θ определим из интеграла энергии (1.29), при этом сделаем замену переменных $u = \cos\theta$, тогда интеграл (2.2) принимает вид:

$$I_2 = -\frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2} du, \quad (2.3)$$

$$f(u) = \dot{u}^2 = 2A^2bu^4 + 2A^2au^3 - (2A^2b + 2Ah + (1-\mu^{-1})I_3^2)u^2 - 2(A^2a - I_1I_3)u + (2Ah - I_1^2 - \mu^{-1}I_3^2), \quad (2.4)$$

где $u_1 = \cos\theta_{\min}$, $u_2 = \cos\theta_{\max}$ (при плоском вращении: $u_1=1$, $u_2=-1$; при плоских колебаниях относительно $\theta=0$: $u_1=1$, $u_2 = \cos\theta_{\max}$, а относительно $\theta=\pi$: $u_1 = \cos\theta_{\min}$, $u_2 = -1$).

Интеграл (2.3) относится к классу эллиптических интегралов и, следовательно, приводится к сумме элементарных функций и трех нормальных эллиптических интегралов [9]. Результат интегрирования зависит от типа корней полинома четвертой степени $f(u)$. Для реализации реального физического процесса два из четырех корней многочлена (2.4) должны соответствовать предельным значениям угла нутации: $u_1 = \cos\theta_{\min}$, $u_2 = \cos\theta_{\max}$ и при этом $[u_2, u_1] \in [-1, +1]$. Оставшиеся два корня u_3 , u_4 в зависимости от соотношения величин h , a , b , I_1 и I_3 могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Введем следующее правило нумерации этих корней. Действительные корни: при $b < 0$ - $u_3 > u_4$, при $b > 0$ - $u_3 < u_4$. Комплексно-сопряженные корни: $u_{3,4} = u_{34} \pm iw$.

Приведение интеграла (2.3) к нормальным эллиптическим интегралам осуществляется посредством преобразования $u = u(\gamma)$, отображающего интервал интегрирования $[u_1, u_2]$ в соответствующий интервал действительного аргумента $\gamma [0, \pi/2]$. Вид преобразования $u = u(\gamma)$ зависит от типа и сочетания корней, а также от знака старшего коэффициента b полинома $f(u)$ [9].

Для случая, когда все четыре корня действительные, преобразование при условии принятого выше правила нумерации корней может быть представлено в виде

$$u = \frac{u_2(u_1 - u_3) - u_3(u_1 - u_2)\sin^2 \gamma}{(u_1 - u_3) - (u_1 - u_2)\sin^2 \gamma} \quad (2.5)$$

В результате преобразования для случая, когда все корни действительные, имеем следующее выражение для переменной действия:

$$I_2 = \frac{\eta}{\pi} \left\{ \left[h + 0.5(A^{-1} - C^{-1})I_3^2 \right] K(k) - Aa[\lambda K(k) + v\Pi(n, k)] - \right. \\ \left. - Ab \left[(\lambda^2 - 0.5v^2/(1+n))K(k) + \left(\frac{0.5v^2n}{(1+n)(k^2+n)} \right) E(k) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(0.5v^2 \left(\frac{n+2k^2}{k^2+n} + \frac{1}{1+n} \right) + 2\lambda v \right) \Pi(n, k) \right] \right\} - \frac{\eta}{2A\pi} \sum_{i=1}^2 d_i [\lambda_i K(k) + (v_i - \lambda_i)\Pi(n_i, k)], \quad (2.6)$$

где $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(n, k)$ - полные эллиптические интегралы I, II и III рода; $k = [(u_3 - u_4)(u_2 - u_1) / (u_3 - u_1) / (u_2 - u_4)]^{1/2}$ - модуль эллиптических интегралов, $n = (u_2 - u_1) / (u_1 - u_3)$, $\eta = 4 / \sqrt{-2b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)}$, $\lambda = u_3$, $v = (u_2 - u_3)$, $d_{1,2} = 0.5(I_3 \mp I_1)^2$, $n_{1,2} = (u_2 - u_1)(1 \mp u_3) / (u_1 - u_3) / (1 \mp u_2)$, $\lambda_{1,2} = 1 / (1 \mp u_3)$, $v_{1,2} = 1 / (1 \mp u_2)$.

Если имеют место два действительных и два комплексных корня ($u_{3,4} = u_{34} \pm iw$), то, используя преобразование

$$u = \frac{u_2 + u_1\xi - (u_2 - \xi u_1)\cos \gamma}{(1 + \xi) - (1 - \xi)\cos \gamma}, \quad (2.7)$$

где $\xi = \cos \theta_1 / \cos \theta_2$, $\operatorname{tg} \theta_1 = (u_1 - u_{34}) / w$, $\operatorname{tg} \theta_2 = (u_2 - u_{34}) / w$, получим следующее выражение для переменной действия:

$$I_2 = \frac{\eta}{\pi} \left\{ \left[h + 0.5(A^{-1} - C^{-1})I_3^2 \right] K(k) - Aa[\lambda K(k) + v(1+n)\Pi(n, k)] - \right. \\ \left. - Ab \left[(\lambda^2 - v^2(1+n))K(k) + \left(\frac{v^2(1+n)n}{k^2+n} \right) E(k) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1+n) \left(\frac{v^2(1+n)(n+2k^2)}{k^2+n} + 2\lambda v \right) \Pi(n, k) \right] \right\} - \frac{\eta}{2A\pi} \sum_{i=1}^2 0.5d_i [\lambda_i K(k) + v_i(1+n_i)\Pi(n_i, k)], \quad (2.8)$$

где $k = [0.5(1 - \zeta / \vartheta)]^{1/2}$, $n = (\xi - 1)^2 / (4\xi)$, $\eta = 4 / \sqrt{-2b\vartheta}$, $\zeta = (u_1 - u_{34})(u_2 - u_{34}) + w^2$, $\vartheta = [(u_1 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2}$,

$$\xi = [(u_1 - u_{34})^2 + w^2]^{-1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2}, \quad \lambda = (u_1 \xi - u_2) / (\xi - 1),$$

$$v = 2\xi(u_2 - u_1) / (\xi^2 - 1), \quad n_{1,2} = (\xi - 1 \pm u_2 \mp \xi u_1)^2 / [4\xi(1 \mp u_1 \mp u_2 + u_1 u_2)],$$

$$\lambda_{1,2} = (\xi - 1) / (\xi - 1 \pm u_2 \mp \xi u_1), \quad v_{1,2} = (1 + \xi) / (1 + \xi \mp u_2 \mp \xi u_1) - \lambda_{1,2},$$

$$d_{1,2} = 0.5(I_3 \mp I_1)^2.$$

Таким образом, в общем пространственном случае движения твердого тела под действием бигармонического момента переменные действия I_1 и I_3 совпадают с переменными Эйлера p_ψ и p_ϕ , а переменная действия I_2 зависит от пяти полных эллиптических интегралов ($K(k)$, $E(k)$, $\Pi(n, k)$, $\Pi(n_1, k)$, $\Pi(n_2, k)$).

Определим функцию Гамильтона в переменных действие-угол. Переменная I_2 является функцией постоянной энергии h . Для однозначного разрешения уравнения для переменной I_2 относительно постоянной энергии h необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial I_2}{\partial h} \neq 0.$$

Учитывая (2.3), получим

$$\frac{\partial I_2}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u)} du}{1-u^2} \right) = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial h} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2} du + \frac{\sqrt{f(u_2)}}{1-u_2^2} \frac{\partial u_2}{\partial h} - \frac{\sqrt{f(u_1)}}{1-u_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial h} \right).$$

Последние два слагаемых равны нулю, поскольку u_2 , u_1 - корни уравнения $f(u) = 0$, и следовательно

$$\frac{\partial I_2}{\partial h} = -\frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{A}{\sqrt{f(u)}} du,$$

а после преобразования

$$\frac{\partial I_2}{\partial h} = \frac{\eta}{2\pi} K(k). \quad (2.9)$$

Для случая различных корней u_1 и u_2 , u_3 и u_4 эта производная строго положительна, а значит уравнения (2.6) и (2.8) относительно h однозначно разрешимы.

Следовательно, функция Гамильтона является функцией переменных действия $H = H(I_1, I_2, I_3)$ и для нее все обобщенные координаты w_i ($i=1,2,3$) - циклические. Уравнения Гамильтона для канонических переменных действие-угол имеют вид

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i, \quad \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_i} = 0, \quad (i=1,2,3).$$

Отсюда очевидно, что $I_i = \text{const}$, и поскольку частоты $\omega_i = \omega_i(I_i)$ являются постоянными величинами, то для угловых переменных имеем

$$w_i = \omega_i t + w_{i0}. \quad (2.10)$$

Определим частоты движения твердого тела под действием бигармонического момента. Частота движения по второй координате, учитывая (2.9), определяется следующим образом:

если все корни полинома $f(u)$ действительные,

$$\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \beta \frac{\pi}{K(k)}, \quad (2.11)$$

$$\beta = \sqrt{-0.5b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)}, \quad (2.12)$$

если два действительных и два комплексных корня,

$$\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \tilde{\beta} \frac{\pi}{2K(k)}, \quad (2.13)$$

$$\beta = \sqrt{-2b\vartheta}. \quad (2.14)$$

Определим частоту движения по первой координате ω_1 . Для этого перепишем (2.3) в виде

$$G(I_1, I_3, h) - I_2 = 0, \quad (2.15)$$

$$G(I_1, I_3, h) = -\frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2} du.$$

Дифференцируя (2.15) по I_1 , имеем

$$\frac{\partial G}{\partial I_1} + \frac{\partial G}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial I_1} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial h}{\partial I_1} = -\frac{\partial G}{\partial I_1} / \frac{\partial G}{\partial h} = -\frac{\partial G}{\partial I_1} / \frac{\partial I_2}{\partial h}, \quad (2.16)$$

где

$$\frac{\partial G}{\partial I_1} = -\frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{I_3 u - I_1}{\sqrt{f(u)(1-u^2)}} du. \quad (2.17)$$

Из уравнения Гамильтона, учитывая соотношения (2.16) и (2.9), преобразуя выражение (2.17) с учетом (2.5) и (2.7), получим:

если все корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{1}{AK(k)} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} [\lambda_i K(k) + (v_i - \lambda_i) \Pi(n_i, k)], \quad (2.18)$$

а если имеют место два действительных и два комплексных корня, то

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{1}{AK(k)} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} [\lambda_i K(k) + v_i (1 + n_i) \Pi(n_i, k)], \quad (2.19)$$

где $d_{3,4} = 0.5(I_1 \mp I_3)$.

Аналогично определим частоту по третьей координате:

$$\omega_3 = \frac{\partial H}{\partial I_3} = -\frac{\partial G}{\partial I_3} / \frac{\partial G}{\partial h},$$

где

$$\frac{\partial G}{\partial I_3} = -\frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(I_3 - I_3(A/C))(1-u^2) + I_1 u - I_3}{\sqrt{f(u)(1-u^2)}} du.$$

В результате, если все корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$\omega_3 = \frac{\partial H}{\partial I_3} = \frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{AK(k)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} [\lambda_i K(k) + (v_i - \lambda_i) \Pi(n_i, k)], \quad (2.20)$$

а если два действительных и два комплексных корня, то

$$\omega_3 = \frac{\partial H}{\partial I_3} = \frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{AK(k)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} [\lambda_i K(k) + v_i (1 + n_i) \Pi(n_i, k)]. \quad (2.21)$$

Заметим, что коэффициенты k , λ_i , v_i , n_i , входящие в выражения

(2.18)-(2.21), определяются по формулам (2.6) или (2.8) в зависимости от типа корней полинома $f(u)$.

Таким образом, движение твердого тела под действием бигармонического нутационного момента описано в канонических переменных действие-угол, которые выражены через полные эллиптические интегралы.

2.2. Частные случаи движения твердого тела в обобщенном случае Лагранжа

Невозмущенное движение твердого тела под действием бигармонического момента в переменных Эйлера как системы с одной степенью свободы с гамильтонианом (1.29) в зависимости от начальных условий и значений величин a , b , I_1 , I_3 может происходить в одной из областей фазовых портретов, показанных на рис. 2-4 для плоского и на рис. 5 для пространственного движения, на которых также изображены соответствующие графики потенциальной энергии. Для каждой из этих областей можно определить корни полинома $f(u)=0$ через коэффициенты a , b , I_1 , I_3 и начальные условия h и упростить в ряде случаев формулы для переменных действие-угол. Рассмотрим эти частные случаи движения тела, соответствующие различным областям фазового портрета системы.

При плоском движении ($I_1 = I_3 = 0$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$) в зависимости от соотношения величин a и b имеют место три характерных вида фазовых портретов.

1) $|b| \leq 0.5|a|$. Фазовый портрет аналогичен фазовому портрету математического маятника и для случая $a < 0$ изображен на рис. 2 (при $a > 0$ фазовая картина сдвигается по оси θ на величину π).

При $h > h_2 = A(|a| + b)$ реализуется вращательное движение тела. В этом случае при $b < 0$, $h > Aa^2 / (-4b)$ полином $f(u)$ имеет два действительных и два комплексно-сопряженных корня:

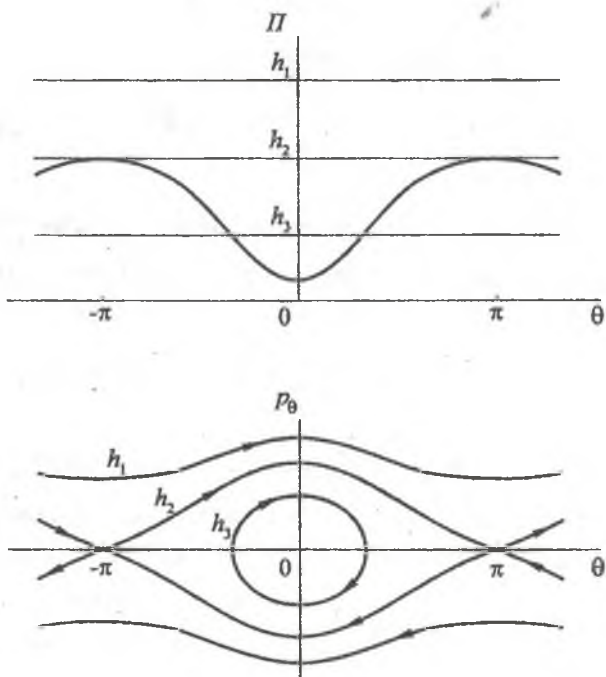


Рис. 2. Потенциальная энергия и фазовые кривые ($|b| \leq 0.5|a|$)

$$u_{1,2} = \pm 1, \quad u_{3,4} = u_{34} \pm iw,$$

где $u_{34} = -0.5a/b$, $w = [-(0.5a/b)^2 - h/(Ab)]^{1/2}$.

Выражение для переменной действия I_2 (2.8) при этом упрощается:

$$I_2 = \frac{\eta}{\pi} \{ hK(k) - A|a|(1+1/n)^{1/2} [K(k) - \Pi(n, k)] - \\ - Ab[K(k) + (E(k) - (1+n)\Pi(n, k))/(k^2 + n)] \}, \quad (2.22)$$

$$k = [0.5 - (h + Ab)/(cs)]^{1/2}, \quad n = (s - c)^2 / (4sc), \quad \eta = 4[A/(cs)]^{1/2},$$

$$c, s = [2(h \mp Aa - Ab)]^{1/2}.$$

При $b < 0$, $h = Aa^2/(-4b)$ (все корни полинома действительные, два корня равны между собой, модуль эллиптических интегралов $k = 0$) имеем

$$I_2 = A|a|/\sqrt{-2b}.$$

При $b < 0$, $[Aa^2/(-4b)] \geq h > [A(|a| + b)]$ и $b > 0$, $h > A(|a| + b)$ корни действительные:

$$u_{1,2} = \pm 1, \quad u_{3,4} = -(0.5a/b) \mp \text{sign}(b)[(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}. \quad (2.23)$$

Переменная I_2 в этом случае вычисляется по формуле (2.6) с учетом равенств (2.23) и того, что коэффициенты $d_1 = d_2 = 0$, поскольку $I_1 = I_3 = 0$.

Границе перехода вращения в колебания соответствует условие $h = h_2 = A(|a| + b)$. В этом случае все корни полинома $f(u)$ действительные, два корня равны между собой, и поскольку при этом под знаком радикала в выражении (2.3) остается полином второй степени, то интеграл, взятый вдоль сепаратрисы, выражается через элементарные функции:

$$I_2 = \frac{2A}{\pi} \sqrt{-2b} [\sqrt{u_* - 1} + u_* \arctg(\sqrt{1/(u_* - 1)})] \quad \text{при } b < 0, \quad (2.24)$$

$$I_2 = \frac{2A}{\pi} \sqrt{2b} [\sqrt{u_* + 1} + u_* \ln((1 + \sqrt{u_* + 1})/\sqrt{u_*})] \quad \text{при } b > 0, \quad (2.25)$$

где $u_* = |0.5a/b|$.

Колебательному движению относительно $\theta = 0$ (при $a < 0$) или $\theta = \pi$ (при $a > 0$) соответствует условие $[A(-|a| + b)] < h < [A(|a| + b)]$. В этой

области движения переменная I_2 вычисляется по формуле (2.6), а корни определяются следующим образом:

$$u_{1,3} = \pm 1, \quad u_{2,4} = -(0.5a/b) \mp \text{sign}(b)[(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2} \quad \text{при } a < 0, \\ u_{2,4} = \mp 1, \quad u_{1,3} = -(0.5a/b) \pm \text{sign}(b)[(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2} \quad \text{при } a > 0. \quad (2.26)$$

2) $|b| > 0.5|a|$, $b < 0$. На фазовом портрете появляются дополнительные особые точки типа седло, соответствующие значениям угла нутации $\theta_* = \pm \arccos(-0.5a/b) + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), и имеют место три области движения - вращательная A_3 и две колебательные A_1 и A_2 (рис. 3).

При $h > h_2 = Aa^2/(-4b)$ реализуется вращательное движение тела, которому соответствуют два действительных и два комплексно-сопряженных корня полинома:

$$u_{1,2} = \pm 1, \quad u_{3,4} = u_{34} \pm iw,$$

где $u_{34} = -0.5a/b$, $w = [-(0.5a/b)^2 - h/(Ab)]^{1/2}$.

Переменная I_2 в этом случае определяется по формуле (2.22).

Границе перехода между областями фазовой плоскости соответствует условие $h = h_2 = Aa^2/(-4b)$. На границе перехода интеграл, взятый вдоль сепаратрис, имеет вид

$$I_2 = \frac{2A}{\pi} \sqrt{-2b} [\sin \theta_* + (0.5\pi - \theta_*) \cos \theta_*], \quad (2.27)$$

где $\theta_* = \arccos(-0.5a/b)$.

Колебательному движению в области A_1 относительно точки $\theta = 0$ соответствует условие $[A(a+b)] < h < [Aa^2/(-4b)]$, а колебаниям в области A_2 относительно точки $\theta = \pi$ соответствует условие $[A(-a+b)] < h < [Aa^2/(-4b)]$. В этих колебательных областях движения переменная I_2 вычисляется по формуле (2.6). При этом корни определяются следующим образом:

при колебаниях в области A_1 относительно точки $\theta = 0$

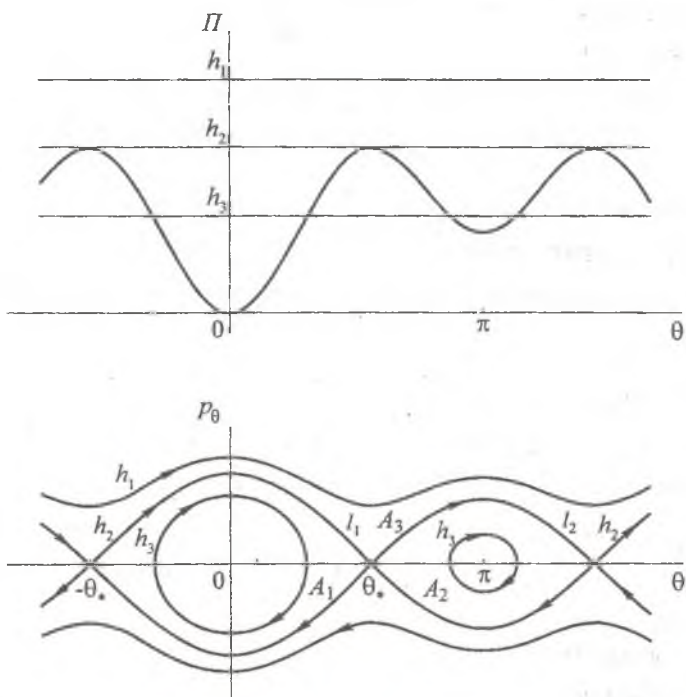


Рис. 3. Потенциальная энергия и фазовые кривые ($|b| > 0.5|a|$, $b < 0$)

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -0.5a/b + [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2},$$

$$u_3 = \max[-1, -0.5a/b - [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}],$$

$$u_4 = \min[-1, -0.5a/b - [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}],$$

при колебаниях в области A_2 относительно точки $\theta = \pi$

$$u_1 = -0.5a/b - [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}, \quad u_2 = -1,$$

$$u_3 = \max[1, -0.5a/b + [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}],$$

$$u_4 = \min[1, -0.5a/b + [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}].$$

3) $b > 0.5|a|$, $b > 0$. Фазовый портрет для случая $a < 0$ изображен на рис. 4 (при $a > 0$ фазовая картина сдвигается по оси θ на величину π). Здесь особым точкам типа центр соответствуют значения угла нутации $\theta = \pm \arccos(-0.5a/b) + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а в точках $\theta = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет место особая точка - седло. На фазовом портрете располагаются четыре характерные области движения - вращательная и три колебательные.

При $h > h_2 = A(|a| + b)$ реализуется вращательное движение тела. Переменная I_2 определяется выражением (2.6). При этом корни полинома $f(u)$ определяются по формулам (2.23).

Границе перехода вращения в колебания относительно неустойчивого положения равновесия $\theta = 0$ (при $a < 0$) или $\theta = \pi$ (при $a > 0$) соответствует условие $h = h_2 = A(|a| + b)$. Интеграл, взятый вдоль сепаратрис, в этом случае определяется выражением (2.24).

При $[A(-|a| + b)] < h < [A(|a| + b)]$ тело совершает колебания относительно неустойчивого положения равновесия $\theta = 0$ (при $a < 0$) или $\theta = \pi$ (при $a > 0$). Переменная действия определяется выражением (2.6). При этом корни определяются по формулам (2.26).

Границе перехода из колебательной области A_3 в одну из двух колебательных областей A_1 или A_2 соответствует условие $h = h_3 = A(-|a| + b)$. Интеграл, взятый вдоль сепаратрисы, имеет вид

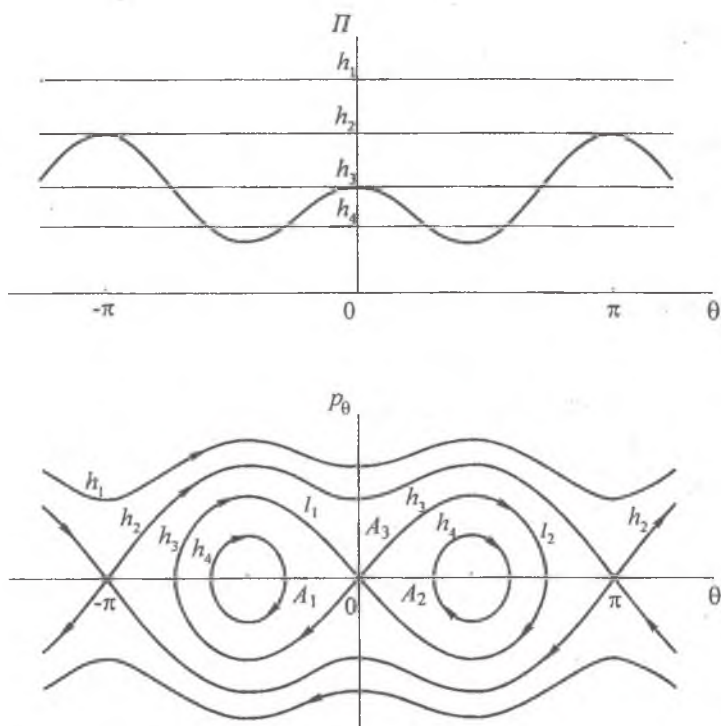


Рис. 4. Потенциальная энергия и фазовые кривые ($|b| > 0.5|a|$, $b > 0$)

$$I_2 = \frac{2A}{\pi} \sqrt{2b} [\sqrt{1-u_*} - u_* \ln((1 + \sqrt{1-u_*})/\sqrt{u_*})], \quad (2.28)$$

где $u_* = |0.5a/b|$.

Колебаниям относительно устойчивых положений равновесия $\theta = \pm \arccos(-0.5a/b)$ соответствует условие $[A(-|a|+b)] < h < [Aa^2/(-4b)]$. Переменная действия определяется выражением (2.6). При этом корни определяются по формулам:

$$u_{1,2} = -(0.5a/b) \mp [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}, \quad u_{3,4} = \mp 1.$$

В случае пространственного движения тела с бигармонической моментной характеристикой наличие гироскопического члена в выражении для интеграла энергии (1.29) исключает возможность вращательного движения. В зависимости от типа корней полинома (2.4) переменная действия вычисляется по формулам (2.6) или (2.8). Вторая гармоника в бигармонической моментной характеристике обуславливает возможность появления на фазовом портрете особой точки типа седло. В этом случае имеют место три колебательные области (рис. 5). Качественный анализ уравнения (1.29) показывает, что если внутри интервала для угла нутации $(0, \pi)$ седловая точка отсутствует в плоском случае ($I_1 = I_3 = 0$), то она отсутствует и в случае пространственных колебаний независимо от величин I_1 и I_3 . С другой стороны, если при $I_1 = I_3 = 0$ седловая точка имеет место (случай $|b| > 0.5|a|$, $b < 0$), то обеспечить ее отсутствие можно только выбором достаточно больших по модулю I_1 и I_3 . В случае, когда седловая точка имеет место, при движении во внешней области A_3 (рис. 5) переменная I_2 определяется по формуле (2.8) (два корня полинома $f(u)$ действительные, а два комплексно-сопряженные). При движении в одной из внутренних колебательных областей A_1 или A_2 переменная действия определяется по формуле (2.6) (все корни действительные).

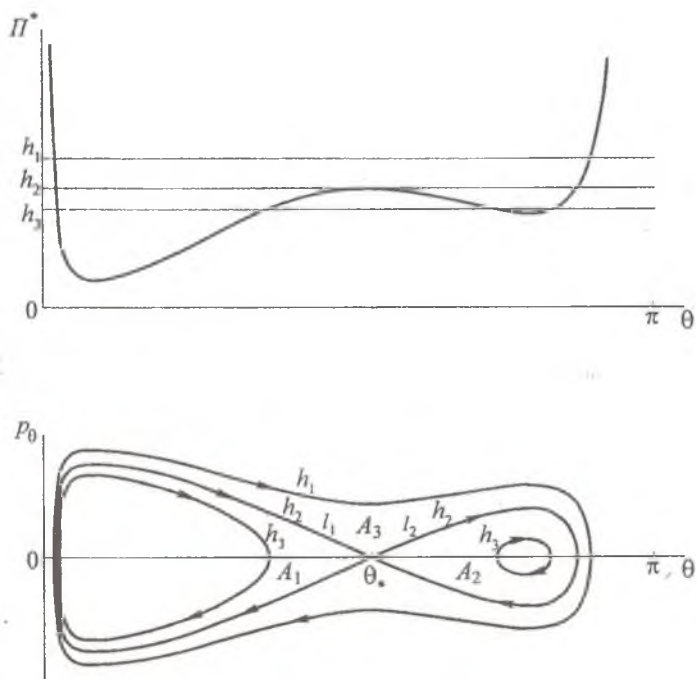


Рис. 5. Приведенная потенциальная энергия и фазовые кривые

Границе перехода из внешней колебательной области в одну из внутренних колебательных областей ($h = h_2$ на рис. 5) соответствует момент перехода комплексно-сопряженных корней $u_{3,4} = u_{34} \pm iw$ в действительные $u_{3,4} = u_{34} = u_* = \cos\theta_*$, $w = 0$. В этом случае полином (2.4) имеет вид

$$f(u) = 2A^2b(u - u_1)(u - u_2)(u - u_*)^2,$$

и интеграл (2.3) вычисляется через элементарные функции

$$I_2 = \frac{A}{\pi} \sqrt{-2b} [2\sqrt{(u_1 - u_*)(u_* - u_2)} - \sum_{i=1}^3 c_i \arcsin \delta_i], \quad (2.29)$$

$$c_1 = u_1 + u_2 + 2u_*, \quad c_{2,3} = (1 \mp u_*) \sqrt{(u_1 \mp 1)(u_2 \mp 1)},$$

$$\delta_1 = (u_1 + u_2 - 2u_*)/|u_2 - u_1|,$$

$$\delta_{2,3} = [(u_2 \mp 1)(u_* - u_1) + (u_1 \mp 1)(u_* - u_2)]/|(u_2 - u_1)(u_* \mp 1)|.$$

2.3. Связь канонических переменных действие-угол с переменными Эйлера в обобщенном случае Лагранжа

Чтобы найти выражение канонических переменных действие-угол через углы Эйлера ψ , θ , φ , построим производящую функцию $W(\psi, \theta, \varphi, I_1, I_2, I_3)$ канонического преобразования. Функция Гамильтона H определяется формулой (1.29), в которую входит только одна нециклическая координата θ . Поэтому производящую функцию W можно искать в виде [8]

$$W = V(\theta, I_1, I_3, h(I_1, I_2, I_3)) + I_1\psi + I_3\varphi. \quad (2.30)$$

Здесь функция V вычисляется по формуле

$$V = \int_{\theta_{\min}}^{\theta} p_{\theta} d\theta = - \int_{u_1}^u \frac{f(u)}{1 - u^2} du. \quad (2.31)$$

Угловые переменные w_i определяются по правилам канонического преобразования [8]

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial I_i} \quad (i=1,2,3). \quad (2.32)$$

Найдем выражение для угловой переменной w_2 :

$$w_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{\partial V}{\partial I_2} = \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial I_2}.$$

Вычисляя частную производную от V (2.31) по переменной h , преобразуя полученное выражение к эллиптическому интегралу первого рода и учитывая равенство (2.9), получим:

если все корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$w_2 = \pi - \pi \frac{F(k)}{K(k)}, \quad (2.33)$$

если два корня действительные и два комплексные, то

$$w_2 = \pi \frac{F(k)}{2K(k)}, \quad (2.34)$$

где

$$F(k) = \int_0^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \quad (2.35)$$

есть неполный эллиптический интеграл первого рода.

Определим угловую переменную w_1 :

$$w_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = \psi + \frac{\partial V}{\partial I_1} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial I_1}.$$

Вычисляя частные производные от V (2.31) по переменным I_1 и h , преобразуя полученные выражения к эллиптическим интегралам первого и третьего рода и учитывая равенства (2.18), (2.19), получим:

если корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$w_1 = \psi + \frac{\eta}{2A} \sum_{i=1}^2 d_{i+2}(v_i - \lambda_i) [\Pi(\gamma, n_i, k) - \Pi(n_i, k)F(k)/K(k)], \quad (2.36)$$

если два корня действительные и два комплексные, то

$$w_1 = \psi + \frac{\eta}{4A} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} v_i \{ (1+n_i) [\Pi(n_i, k) F(k) / K(k) - \Pi(\gamma, n_i, k)] + B_i \}, \quad (2.37)$$

где

$$B_i = \frac{b_i}{\sqrt{(b_i^2 - 1)(1 - k^2 + k^2 b_i^2)}} \operatorname{arctg} \frac{\sin \gamma \sqrt{1 - k^2 + k^2 b_i^2}}{\sqrt{b_i^2 - 1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}},$$

$$b_{1,2} = \frac{1 + \xi \mp u_2 \mp u_1 \xi}{\xi - 1 \pm u_2 \mp u_1 \xi},$$

$$\Pi(\gamma, n_i, k) = \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{(1 + n_i \sin^2 \gamma) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \text{неполный эллиптический интеграл}$$

третьего рода.

Определим угловую переменную w_3 :

$$w_3 = \frac{\partial W}{\partial I_3} = \varphi + \frac{\partial V}{\partial I_3} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial I_3}.$$

Вычисляя частные производные от V (2.31) по переменным I_3 и h , преобразуя полученные выражения к эллиптическим интегралам первого и третьего рода и учитывая равенства (2.20), (2.21), получим:

если корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$w_3 = \varphi + \frac{\eta}{2A} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} (v_i - \lambda_i) [\Pi(\gamma, n_i, k) - \Pi(n_i, k) F(k) / K(k)], \quad (2.38)$$

если два корня действительные и два комплексные, то

$$w_3 = \varphi + \frac{\eta}{4A} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} v_i \{ (1+n_i) [\Pi(n_i, k) F(k) / K(k) - \Pi(\gamma, n_i, k)] + B_i \}. \quad (2.39)$$

Получим выражения для углов Эйлера как функций времени. Обращая эллиптический интеграл $F(k)$ (2.35) и учитывая (2.33) и (2.34), получим, что если все корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$\gamma = \operatorname{am} \left[K(k) - \frac{w_2}{\pi} K(k), k \right], \quad (2.40)$$

а если имеют место два действительных и два комплексных корня, то

$$\gamma = \text{am}\left[\frac{2w_2}{\pi} K(k), k\right]. \quad (2.41)$$

Учитывая выражения для угловой переменной w_2 (2.10), для частоты ω_2 (2.11) или (2.13) и полагая $w_{j0} = 0$, формулы (2.40) и (2.41) запишем соответственно в следующем виде:

$$\gamma = \text{am}[K(k) - \beta t, k], \quad (2.42)$$

$$\gamma = \text{am}[\beta t, k], \quad (2.43)$$

где β определяется в зависимости от типа корней полинома $f(u)$ по формулам (2.12) или (2.14).

На основании формул (2.5) и (2.7), учитывая (2.42) и (2.43), запишем решение для угла нутации:

если корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$\cos\theta = \frac{u_2(u_1 - u_3) - u_3(u_1 - u_2)\text{sn}^2[K(k) - \beta t, k]}{(u_1 - u_3) - (u_1 - u_2)\text{sn}^2[K(k) - \beta t, k]} \quad (2.44)$$

или, после преобразований,

$$\cos\theta = u_3 + \frac{u_1 - u_3}{1 + \{(u_1 - u_2)/(u_2 - u_3)\}\text{cn}^2[K(k) - \beta t, k]}, \quad (2.45)$$

если имеют место два действительных и два комплексных корня, то

$$\cos\theta = \frac{u_2 + u_1\xi - (u_2 - \xi u_1)\text{cn}[\beta t, k]}{(1 + \xi) - (1 - \xi)\text{cn}[\beta t, k]} \quad (2.46)$$

или

$$\cos\theta = u_2 + (u_1 - u_2) \frac{\xi}{\xi - 1} \left\{ 1 + \frac{1 - (1 + \xi)/(\xi - 1)}{(1 + \xi)(\xi - 1) + \text{cn}[\beta t, k]} \right\}. \quad (2.47)$$

Подставляя $F(k)$ из соотношений (2.33) и (2.34) в (2.36)-(2.39), учитывая выражения для угловых переменных (2.10) и для частот (2.11), (2.13), (2.18)-(2.21), полагая, что $w_{j0} = 0$, получим выражения для угла прецессии и угла собственного вращения:

если корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$\psi = \left(\frac{1}{A} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} \lambda_i \right) t + \frac{\eta}{2A} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} (v_i - \lambda_i) \{ \Pi(n_i, k) - \Pi(\gamma, n_i, k) \}, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \left(\frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{A} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} \lambda_i \right) t + \\ & + \frac{\eta}{2A} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} (v_i - \lambda_i) \{ \Pi(n_i, k) - \Pi(\gamma, n_i, k) \}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

если два корня действительные и два комплексные, то

$$\psi = \left(\frac{1}{A} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} \lambda_i \right) t + \frac{\eta}{4A} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} v_i \{ (1 + n_i) \Pi(\gamma, n_i, k) - B_i \}, \quad (2.50)$$

$$\varphi = \left(\frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{A} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} \lambda_i \right) t + \frac{\eta}{4A} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} v_i \{ (1 + n_i) \Pi(\gamma, n_i, k) - B_i \}. \quad (2.51)$$

Заметим, что коэффициенты k , λ_i , v_i , n_i , η , входящие в выражения (2.33)-(2.51), определяются по формулам (2.6) или (2.8) в зависимости от типа корней полинома $f(u)$.

2.4. Канонические переменные действие-угол

при движении тела под действием синусоидального момента

Рассмотрим движение твердого тела под действием нутационного момента, который имеет синусоидальную зависимость от угла нутации

$$m_0(\theta) = a \sin(\theta), \quad (2.52)$$

где a - коэффициент, на знак которого никаких ограничений не накладывается и при $a > 0$ имеет место движение тяжелого твердого тела в случае Лагранжа в классической постановке.

Гамильтонова функция (1.29) в рассматриваемом случае равна

$$H = \frac{P_\Phi^2 + P_\Psi^2 - 2P_\Phi P_\Psi \cos\theta}{2A \sin^2\theta} + \frac{P_\Phi^2}{2C} - \frac{P_\Phi^2}{2A} + \frac{P_\theta^2}{2A} + Aa \cos\theta = h. \quad (2.53)$$

Найдем общее аналитическое выражение для переменной действия I_2 , справедливое для всех возможных областей движения. Полином (2.4) в этом случае становится полиномом третьей степени:

$$f(u) = \dot{u}^2 = 2A^2 a u^3 - (2Ah + (1 - \mu^{-1})I_3^2)u^2 - 2(A^2 a - I_1 I_3)u + (2Ah - I_1^2 - \mu^{-1}I_3^2). \quad (2.54)$$

Физическое движение реализуется, когда все корни кубического полинома действительные [1]. Нумерацию корней будем проводить следующим образом:

$$\text{при } a < 0 \quad u_1 > u_2 > u_3 \quad (u_1 = \cos\theta_{\min}, u_2 = \cos\theta_{\max});$$

$$\text{при } a > 0 \quad u_1 < u_2 < u_3 \quad (u_1 = \cos\theta_{\max}, u_2 = \cos\theta_{\min}).$$

В случае пространственного движения тела под действием синусоидального момента имеет место только одна колебательная область. Используя преобразование (2.5), интеграл (2.3) можно привести к виду

$$I_2 = \frac{\eta}{\pi} \left\{ \left[h + 0.5(A^{-1} - C^{-1})I_3^2 \right] K(k) - Aa[\lambda K(k) + vE(k)] \right\} - \frac{\eta}{2A\pi} \sum_{i=1}^2 d_i \lambda_i \Pi(n_i, k), \quad (2.55)$$

где $k = [(u_1 - u_2)/(u_1 - u_3)]^{1/2}$, $\eta = 4/\sqrt{-2a(u_1 - u_3)}$, $\lambda = u_3$, $v = (u_1 - u_3)$,

$$n_{1,2} = (u_2 - u_1)/(u_1 \mp 1), \quad \lambda_{1,2} = 1/(1 \mp u_1), \quad d_{1,2} = 0.5(I_3 \mp I_1)^2.$$

Определим частоты движения твердого тела под действием синусоидального нутационного момента. Учитывая выражение для функции Гамильтона (2.53), проведя вычисления по формулам параграфа 2.1, определяющим частоты движения твердого тела, получим:

$$\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \beta \frac{\pi}{K(k)}, \quad (2.56)$$

$$\beta = \sqrt{-0.5a(u_1 - u_3)}, \quad (2.57)$$

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{1}{AK(k)} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} \lambda_i \Pi(n_i, k), \quad (2.58)$$

$$\omega_3 = \frac{\partial H}{\partial I_3} = \frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{AK(k)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} \lambda_i \Pi(n_i, k). \quad (2.59)$$

Рассмотрим частный случай – плоское движение твердого тела под действием синусоидального нутационного момента. Для плоского движения ($I_1 = I_3 = 0$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$) фазовый портрет изображен для $a < 0$ на рис. 2, а при $a > 0$ фазовая картина сдвигается по оси θ на величину π .

Выражение для переменной действия I_2 в этом случае имеет вид

$$I_2 = \frac{\pi}{\pi} \{hK(k) - Aa[\lambda K(k) + vE(k)]\}. \quad (2.60)$$

При $h > A|a|$ реализуется вращательное движение тела, и в этом случае полином $f(u)$ имеет следующие корни: $u_3 = h/(Aa)$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ при $a < 0$; $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ при $a > 0$. Выражение для переменной действия I_2 при этом упрощается:

$$I_2 = 2\sqrt{2A(h + A|a|)E(k)}/\pi \quad (2.61)$$

или

$$I_2 = [4A\sqrt{|a|/k}E(k)]/\pi, \quad (2.62)$$

где $k = [2A|a|/(h + A|a|)]^{1/2}$.

Границе перехода вращения в колебания соответствует условие $h = A|a|$. В этом случае интеграл, взятый вдоль сепаратрисы, определяется по формуле

$$I_2 = 4A\sqrt{|a|}/\pi. \quad (2.63)$$

При плоских колебаниях ($-A|a| > h < A|a|$): $u_1 = 1$, $u_2 = h/(Aa)$, $u_3 = -1$ при $a < 0$; $u_1 = -1$, $u_2 = h/(Aa)$, $u_3 = 1$ при $a > 0$. Переменная действия определяется формулой

$$I_2 = [2/\sqrt{|a|}] \{ (h - A|a|)K(k) + 2A|a|E(k) \} / \pi' \quad (2.64)$$

или

$$I_2 = 4A\sqrt{|a|} \{ (k^2 - 1)K(k) + E(k) \} / \pi, \quad (2.65)$$

где $k = [0.5(1 + h/(A|a|))]^{1/2}$

или

$$k = \sin(\theta_{\max}/2) \text{ при } a < 0, \quad k = \cos(\theta_{\min}/2) \text{ при } a > 0.$$

Установим связь канонических переменных действие-угол с переменными Эйлера при движении твердого тела под действием синусоидального нутационного момента. Рассмотрим общий случай движения. Угловые переменные w_i определим по формулам раздела 2.3.

После соответствующих вычислений имеем:

$$w_2 = \pi \frac{F(k)}{K(k)}, \quad (2.66)$$

$$w_1 = \psi + \frac{\eta}{2A} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} \lambda_i [\Pi(n_i, k) F(k) / K(k) - \Pi(\gamma, n_i, k)], \quad (2.67)$$

$$w_3 = \varphi + \frac{\eta}{2A} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} \lambda_i [\Pi(n_i, k) F(k) / K(k) - \Pi(\gamma, n_i, k)]. \quad (2.68)$$

Получим выражения для углов Эйлера как функций времени. Обращая эллиптический интеграл $F(k)$ и учитывая (2.66), получим

$$\gamma = \text{am}[\beta t, k]. \quad (2.69)$$

Решение для угла нутации может быть представлено как

$$\cos \theta = u_1 + (u_2 - u_1) \text{sn}^2[\beta t, k] \quad (2.70)$$

или

$$\cos \theta = u_2 + (u_1 - u_2) \text{cn}^2[\beta t, k], \quad (2.71)$$

или

$$\cos \theta = \frac{u_2(u_1 - u_3) - u_3(u_1 - u_2) \operatorname{sn}^2[K(k) - \beta t, k]}{(u_1 - u_3) - (u_1 - u_2) \operatorname{sn}^2[K(k) - \beta t, k]} \quad (2.72)$$

По формулам раздела 2.3 получим выражения для угла прецессии и угла собственного вращения:

$$\psi = \frac{\eta}{2A} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} \lambda_i \Pi(\gamma, n_i, k), \quad (2.73)$$

$$\varphi = \left(\frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} \right) t + \frac{\eta}{2A} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} \lambda_i \Pi(\gamma, n_i, k). \quad (2.74)$$

Следует отметить, что выведенные формулы для углов Эйлера (2.71), (2.73), (2.74) совпадают с аналитическими выражениями [10], полученными прямым взятием квадратур из выражений, полученных из первых интегралов системы.

3. ПЕРЕХОДНЫЕ РЕЖИМЫ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Процедура исследования переходных режимов движения

В параграфе 2.2 были рассмотрены фазовые портреты невозмущенного движения тела под действием бигармонического нутационного момента (см. рис. 2-5). В возмущенном движении при изменении величин коэффициентов бигармонического нутационного момента a и b или при наличии возмущающих моментов происходит эволюция фазовых траекторий, в результате которой они могут пересекать сепаратрисы, попадая в различные области фазового портрета. Это явление сопровождается качественными изменениями характера движения: вращательное движение может переходить в колебательное, колебательное движение может “скачкообразно” переходить в колебательное движение с другими амплитудными характеристиками и т. д.

Рассмотрим переходные режимы возмущенного движения твердого тела под действием бигармонического нутационного момента, когда коэффициенты момента a и b медленно меняются во времени, а возмущающие моменты отсутствуют. Как известно, для таких систем переменная действия является адиабатическим инвариантом, то есть сохраняет свое значение [11]. Равенство $I_2 = \text{const}$ справедливо для большинства начальных условий с точностью $O(\epsilon \ln \epsilon)$ на временах порядка $1/\epsilon$ [12]. Исключительное множество начальных условий, для которых эта оценка несправедлива, имеют меру $O(\epsilon^n)$, где $n \geq 1$ - любое наперед заданное число. Режимы движения, соответствующие данным начальным условиям, когда фазовая траектория заканчивается в седловой точке и период движения обращается в бесконечность, называются режимами

“зависания” тела в окрестности неустойчивого положения равновесия и в настоящей работе не рассматриваются (применительно к задаче о неуправляемом пространственном движении твердого тела в атмосфере они подробно исследованы в [13]).

Рассмотрим процедуру исследования переходных режимов движения тела, когда не проводится интегрирование уравнений движения, а используются только аналитические выражения для переменной действия.

Исходя из постоянства переменной действия, моменты времени, соответствующие переходам между различными областями фазового портрета, определяются из равенства выражения переменной действия, вычисленной вдоль сепаратрис, значению переменной действия, вычисленной по начальным условиям движения.

Величина угла нутации на границе перехода от одного типа движения к другому в общем случае зависит от начальных условий углового движения (от законов распределения начальных углов нутации и угловых скоростей), а также от скорости изменения коэффициентов a и b . Рассмотрим случай, когда коэффициенты a и b медленно изменяются во времени таким образом, что тело за время движения от $t = 0$ до границы перехода совершает несколько оборотов или колебаний.

В случаях, когда при пересечении сепаратрис фазовая точка может попадать в различные колебательные области, возникает задача выбора области продолжения движения. Дело в том, что фазовые точки, которые в начальный момент находились на расстоянии порядка ϵ друг от друга (ϵ - малый положительный параметр, характеризующий медленность изменения параметров системы), могут после пересечения сепаратрисы захватываться в различные области, и их дальнейшее движение будет совершенно различным. Так как начальные данные всегда известны лишь с некоторой точностью, то при $\epsilon \rightarrow 0$ детерминированный подход к задаче теряет смысл.

Однако можно корректно определить и вычислить вероятность захвата в ту или иную область. Пусть сепаратрисы l_1 и l_2 отделяют внутренние области движения A_1 , A_2 от внешней A_3 (см. рис. 3, 4, 5). Для выбора области продолжения движения A_1 или A_2 используется понятие вероятности P_i , $i=1, 2$, захвата в каждую из них. В соответствии с [14] эта вероятность определяется как доля фазового объема малой окрестности начальной точки движения, “захватываемая” в рассматриваемую область в пределе, когда малый параметр $\varepsilon \rightarrow 0$ и размер окрестности $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \ll \delta$ (сначала предел берется по ε потом по δ), причем $P_1 + P_2 = 1$. Отношение вероятностей вычисляется по формулам

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}, \quad (3.1)$$

$$\Theta_i = - \int_{l_i} \frac{\partial [H(\theta, \theta, z) - H(0, \theta_*, z)]}{\partial z} \Phi_z dt \quad (i=1, 2), \quad (3.2)$$

где $\theta = 0$, $\theta = \theta_*$ - координаты седловой особой точки на фазовом портрете. Интегралы (3.2) вычисляются вдоль сепаратрис l_1 и l_2 , параметризованных временем t невозмущенного движения по ним. Физический смысл функции Θ_i - скорость приближения площади, ометаемой фазовой траекторией, к площади, ограниченной сепаратрисой.

Итак, при известных начальных условиях движения можно проследить за эволюцией фазовой траектории, найти моменты перехода и вероятность перехода в ту или иную характерную область фазового портрета.

3.2. Исследование переходных режимов движения твердого тела под действием бигармонического нутационного момента

Исследуем переходные режимы возмущенного движения твердого тела, полагая для определенности, что коэффициенты a и b изменяются по экспоненциальному закону (такой закон имеет место в задаче о входе неуправляемого твердого тела в атмосферу [13]):

$$a = a_0 z, \quad b = b_0 z, \quad z = \exp(\beta t), \quad (3.3)$$

где a_0 и b_0 - значения коэффициентов a и b при $t = 0$, β - положительный коэффициент порядка малости ϵ .

Проведем анализ переходных режимов движения тела для характерных случаев плоского движения, фазовые портреты которых показаны на рис. 2-4.

1. $|b| \leq 0.5|a|$. Фазовый портрет для случая $a < 0$ изображен на рис. 2 (при $a > 0$ фазовая картина сдвигается по оси θ на величину π). В зависимости от величины энергии h тело может совершать либо вращательное, либо колебательное движение, области которых разделены сепаратрисой. Пусть начальные условия соответствуют вращательному движению тела. По мере роста параметра z колебательная область растет, и тело, совершающее вращательное движение, в какой-то момент времени начинает совершать колебательное движение. Для иллюстрации данного переходного режима движения на рис. 6 показано изменение характера движения тела в зависимости от времени (как результат интегрирования системы уравнений (1.15) с учетом того, что коэффициенты нутационного момента a и b меняются в соответствии с (3.3), а возмущающие моменты отсутствуют) при следующих начальных данных: $a_0 = -0.02\text{с}^{-2}$, $b_0 = -0.005\text{с}^{-2}$, $\theta_0 = 10$ град, $\dot{\theta}_0 = 30$ град/с, $\beta = 0.05\text{с}^{-1}$. На рис. 6 приведены графики изменения угловой скорости $\dot{\theta}$ от угла нутации θ и угла нутации θ от времени t . Отметим, что обобщенный импульс p_θ связан с угловой скоростью $\dot{\theta}$ соотношением $p_\theta = A\dot{\theta}$.

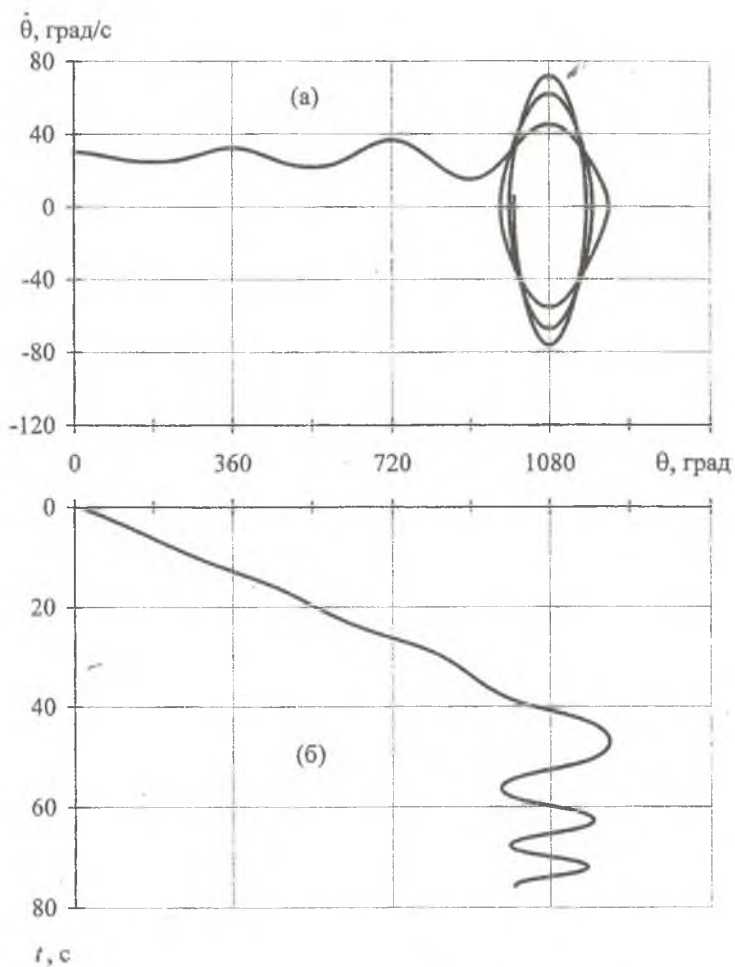


Рис. 6. Характер изменения плоского движения; $|b| \leq 0.5|a|$:
 а - фазовая траектория; б - изменение угла нутации

Получим формулы для определения момента времени, соответствующего переходу вращения в колебания. Пусть начальные условия соответствуют вращательному движению тела, и тогда переменная действия I_2^0 в зависимости от соотношения коэффициентов a_0 , b_0 и h_0 вычисляется по одной из формул (2.22) или (2.6) с учетом (2.23), а в случае движения твердого тела под действием синусоидального нутационного момента ($b = 0$) - по формуле (2.61). Если начальное значение потенциальной энергии намного меньше начального значения кинетической энергии, то величина $I_2^0 = A\dot{\theta}_0 / (2\pi)$. Приравнявая значение I_2^0 значению переменной действия, вычисленной вдоль сепаратрисы по одной из формул (2.24), (2.25), (2.63), получим значение коэффициента b или a (при $b = 0$) в момент времени $t = t_*$, соответствующий переходу вращения в колебания:

$$\begin{aligned}
 b_* &= -\{I_2^0(\pi/A)/[\sqrt{u_* - 1} + u_* \arctg(\sqrt{1/(u_* - 1)})]\}^2 / 8 \quad \text{при } b < 0, \\
 b_* &= \{I_2^0(\pi/A)/[\sqrt{u_* + 1} + u_* \ln((1 + \sqrt{u_* + 1})/\sqrt{u_*})]\}^2 / 8 \quad \text{при } b > 0, \\
 a_* &= \text{sign}(a_0)\{I_2^0(\pi/A)\}^2 / 16 \quad \text{при } b = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

где $u_* = |0.5a_* / b_*| = |0.5a_0 / b_0|$.

Время t_* определяется при известном b_* или a_* из соотношений (3.3):

$$t_* = \ln[b_* / b_0] / \beta \tag{3.5}$$

или

$$t_* = \ln[a_* / a_0] / \beta.$$

Отметим, что коэффициенты нутационного момента в соответствии с (3.3) связаны соотношением $a_* = (a_0 / b_0)b_*$.

2. $|b| > 0.5|a|$, $b < 0$. Фазовый портрет показан на рис. 3. Картина фазовых кривых периодична по θ с периодом 2π . Значения угла нутации $\theta = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), соответствующие особым точкам типа центр, являются устойчивыми положениями равновесия. Значения угла нутации

$\theta_* = \pm \arccos(-0.5a/b) + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствующие особым точкам типа седло, являются неустойчивыми положениями равновесия. На фазовом портрете имеют место три области движения - вращательная A_3 и две колебательные A_1 и A_2 , разделенные сепаратрисами. В зависимости от величины энергии h тело может совершать либо вращательное, либо колебательное движение. По мере роста параметра z колебательные области A_1 и A_2 растут, и тело, совершающее вращательное движение, в какой-то момент времени начинает совершать колебательное движение в одной из них. Для иллюстрации данных переходных режимов движения на рис. 7, 8 показано изменение характера движения тела в случае, когда вращение переходит в колебание в области A_1 (начальные данные: $a_0 = -0.02 \text{ с}^{-2}$, $b_0 = -0.02 \text{ с}^{-2}$, $\theta_0 = 10$ град, $\dot{\theta}_0 = 30$ град/с, $\beta = 0.05 \text{ с}^{-1}$), и в случае, когда вращение переходит в колебание в области A_2 (начальные данные $a_0 = -0.02 \text{ с}^{-2}$, $b_0 = -0.02 \text{ с}^{-2}$, $\theta_0 = 10$ град, $\dot{\theta}_0 = 31$ град/с, $\beta = 0.05 \text{ с}^{-1}$).

Получим формулы для определения момента времени, соответствующего переходу вращения в колебания, а также найдем вероятность попадания в колебательные области A_1 и A_2 . Пусть начальные условия соответствуют вращательному движению тела (область A_3), тогда переменная действия I_2^0 определяется по формуле (2.22). Приравнивая значение I_2^0 значению переменной действия, вычисленной вдоль сепаратрисы по формуле (2.27), получим значение коэффициента b в момент времени $t = t_*$, соответствующий переходу вращения в колебания:

$$b_* = -[I_2^0(\pi/A)/(\sin\theta_* + (0.5\pi - \theta_*)\cos\theta_*)]^2/8, \quad (3.6)$$

где $\theta_* = \arccos(-0.5a_0/b_0)$.

Время t_* определяется при известном b_* по формуле (3.5).

После пересечения сепаратрисы при $t > t_*$ система может совершать колебания относительно одного из двух устойчивых положений равновесия $\theta = 0$ (в области A_1) или $\theta = \pi$ (в области A_2). Найдем вероятность

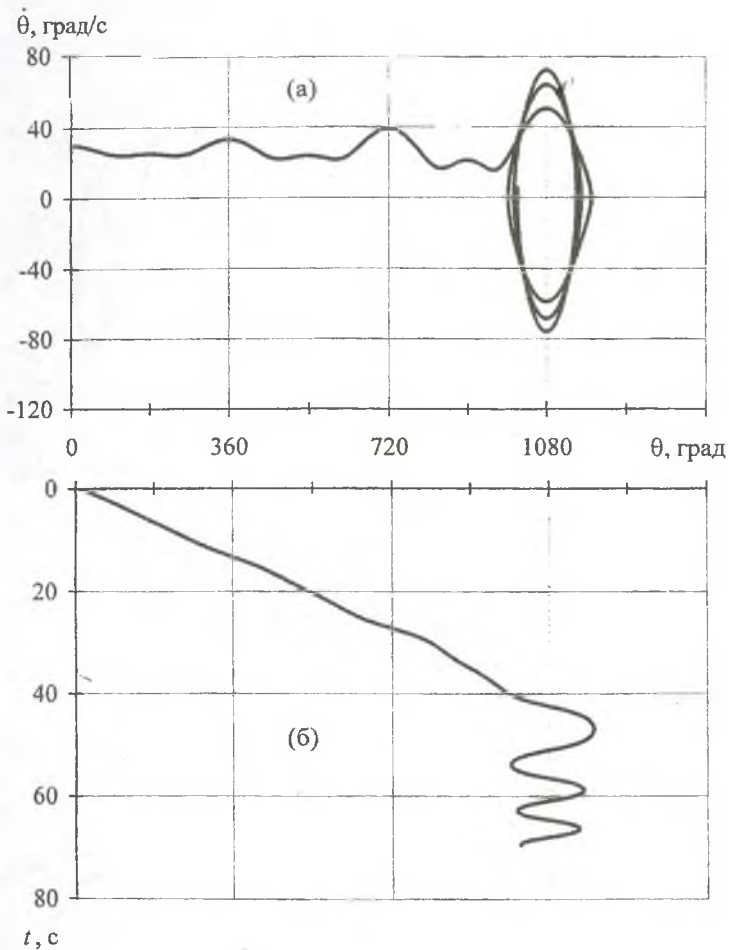


Рис. 7. Характер изменения плоского движения при переходе в область A_1 ; $|b| > 0.5|a|$, $b < 0$:
 а - фазовая траектория; б - изменение угла нутации

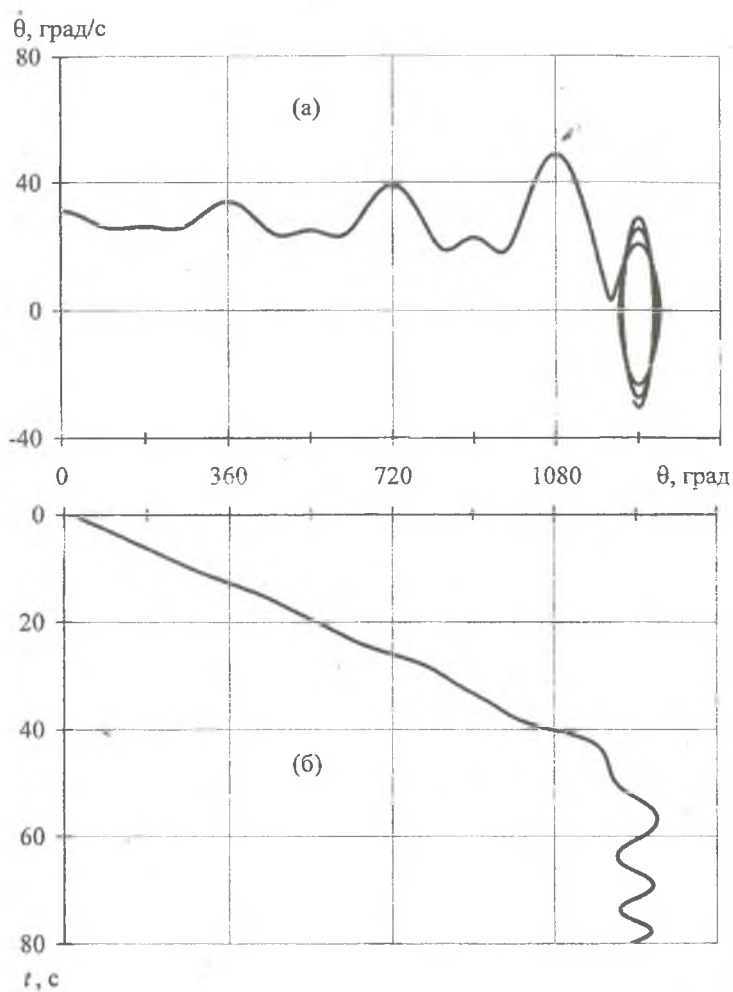


Рис. 8. Характер изменения плоского движения при переходе в область A_2 ; $|b| > 0.5|a|$, $b < 0$:
 а - фазовая траектория; б - изменение угла нутации

попадания в эти колебательные области. Будем обозначать вероятность попадания в область A_1 через P_1 , а вероятность попадания в области A_2 через P_2 . Естественно, что $P_1 + P_2 = 1$. После соответствующих вычислений по формулам (3.1) и (3.2) имеем

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 - \theta_* \operatorname{ctg} \theta_*}{1 + (\pi - \theta_*) \operatorname{ctg} \theta_*}. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что величина вероятности попадания тела в ту или иную колебательную область определяется только значением неустойчивого положения равновесия $\theta = \theta_*$. Поскольку $\Phi_z = \dot{z} = \beta z > 0$ ($\beta > 0$) и величины Θ_i в (4.2) положительные, то имеет место однократный проход через сепаратрису фазовой точки из внешней области во внутреннюю.

3. $b > 0.5|a|$, $b > 0$. Фазовый портрет для случая $a < 0$ изображен на рис. 4 (при $a > 0$ фазовая картина сдвигается по оси θ на величину π). Картина фазовых кривых периодична по θ с периодом 2π . Значения угла нутации $\theta = \pm \arccos(-0.5a/b) + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствующие особым точкам типа центр, являются устойчивыми положениями равновесия. Значения угла нутации $\theta = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствующие особым точкам типа седло, являются неустойчивыми положениями равновесия. На фазовом портрете располагаются четыре характерные области движения - вращательная и три колебательные, разделенные сепаратрисами. В зависимости от величины энергии h тело может совершать либо вращательное, либо колебательное движение. Причем колебательное движение может совершаться либо относительно неустойчивого положения равновесия $\theta = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в области A_3 , либо относительно одного из двух устойчивых положений равновесия $\theta = \pm \arccos(-0.5a/b) + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в области A_1 или A_2 . По мере роста параметра z колебательные области растут, и тело, совершающее вращательное движение, в какой-то момент времени начинает совершать колебательное движение относительно неустойчивого положения равновесия, а затем в

следующий момент времени начинает совершать колебательное движение относительно одного из двух устойчивых положений равновесия. Для иллюстрации данных переходных режимов движения на рис. 9, 10 показано изменение характера движения тела в случае, когда движение завершается в области A_1 (начальные данные: $a_0 = -0.01 \text{ с}^{-2}$, $b_0 = 0.025 \text{ с}^{-2}$, $\theta_0 = 10$ град, $\dot{\theta}_0 = 30$ град/с, $\beta = 0.05 \text{ с}^{-1}$), и в случае, когда движение завершается в области A_2 (начальные данные $a_0 = -0.01 \text{ с}^{-2}$, $b_0 = 0.025 \text{ с}^{-2}$, $\theta_0 = 10$ град, $\dot{\theta}_0 = 30.5$ град/с, $\beta = 0.05 \text{ с}^{-1}$).

Получим формулы для определения моментов времени, соответствующих переходам между областями. Если начальные условия соответствуют вращательному движению тела, то интеграл действия I_2^0 вычисляется по формуле (2.6) с учетом формул для корней (2.23). Если начальные условия соответствуют колебаниям тела относительно неустойчивого положения равновесия $\theta = 0$ при $a < 0$ (область A_3 на рис. 4) или $\theta = \pi$ при $a > 0$, то интеграл действия I_2^0 вычисляется по формуле (2.6) с учетом формул (2.26). Значение коэффициента b в момент времени $t = t_{1*}$, соответствующий моменту перехода вращения в колебания, определяется равенством (3.4). Время t_{1*} при известном b_* определяется по формуле (3.5).

Найдем момент времени $t = t_{2*}$, соответствующий переходу из колебательной области относительно неустойчивого положения равновесия $\theta = 0$ (при $a < 0$) или $\theta = \pi$ (при $a > 0$), в одну из двух колебательных областей относительно устойчивых положений равновесия $\theta = \pm \arccos(-0.5a/b)$ (в область A_2 или A_1). Приравнявая значение I_2^0 значению переменной действия, вычисленной вдоль сепаратрисы по формуле (2.28), получим значение коэффициента b в момент времени $t = t_{2*}$:

$$b_* = \{I_2^0(\pi/A) / [\sqrt{1-u_*} - u_* \ln((1 + \sqrt{1-u_*}) / \sqrt{u_*})]\}^2 / 8,$$

где $u_* = |0.5a_* / b_*| = |0.5a_0 / b_0|$.

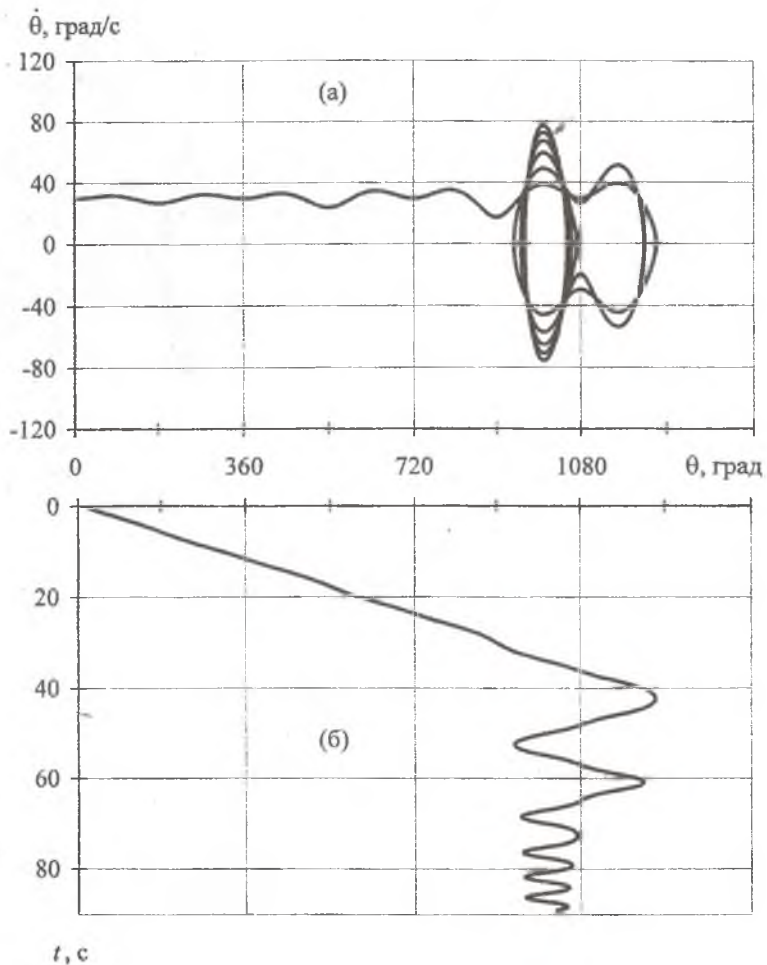


Рис. 9. Характер изменения плоского движения при переходе в область A_1 ; $b > 0.5|a|$, $b > 0$:
 а - фазовая траектория; б - изменение угла нутации

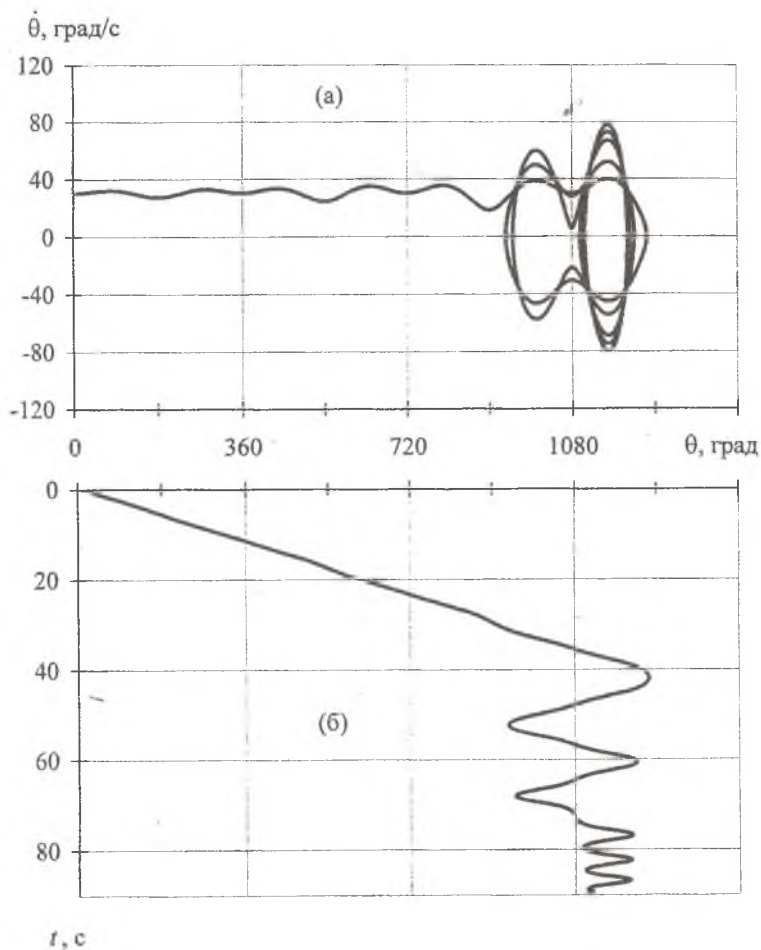


Рис. 10. Характер изменения плоского движения при переходе в область A_2 ; $b > 0.5|a|$, $b > 0$:
 а - фазовая траектория; б - изменение угла нутации

Время t_{2*} при известном b_* определяется по формуле (3.5). Амплитуда колебаний в момент времени t_{2*} равна

$$\theta_m(t_{2*}) = \arccos[\text{sign}(a_*)(1 - 2u_*)].$$

Попадание в колебательные области A_1 или A_2 равновероятно, поскольку они равны и симметричны относительно седловой особой точки $\theta = 0$ (при $a < 0$) или $\theta = \pi$ (при $a > 0$).

Рассмотрим случай пространственного движения тела под действием бигармонической нутационного момента (см. рис. 5), когда на фазовом портрете имеет место седловая точка (см. параграф 2.2). В этом случае имеют место три колебательные области. По мере роста параметра z колебательные области растут, и тело, совершающее колебательное движение во внешней области A_3 , в какой-то момент времени начинает совершать колебательное движение в одной из двух внутренних колебательных областей A_1 или A_2 . Для иллюстрации данных переходных режимов движения на рис. 11, 12 показан характер изменения пространственного движения тела во времени в случае, когда движение завершается в области A_1 (начальные данные: $a_0 = -0.02 \text{ с}^{-2}$, $b_0 = -0.02 \text{ с}^{-2}$, $p_\phi = 0.005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, $p_\psi = 0.01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, $\theta_0 = 10$ град, $\dot{\theta}_0 = 26$ град/с, $A = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $C = 0.05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\beta = 0.05 \text{ с}^{-1}$), и в случае, когда движение завершается в области A_2 (начальные данные $a_0 = -0.02 \text{ с}^{-2}$, $b_0 = -0.02 \text{ с}^{-2}$, $p_\phi = 0.005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, $p_\psi = 0.01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, $\theta_0 = 10$ град, $\dot{\theta}_0 = 27$ град/с, $A = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $C = 0.05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\beta = 0.05 \text{ с}^{-1}$).

Определим момент времени $t = t_*$, соответствующий переходу из внешней колебательной области A_3 в одну из внутренних колебательных областей, т. е. момент перехода комплексно-сопряженных корней полинома (2.4): $u_{3,4} = u_{34} \pm i\omega$ в действительные: $u_{3,4} = u_{34} = u_* = \cos\theta_*$, $\omega = 0$. Пусть начальные условия соответствуют движению тела в области A_3 , тогда

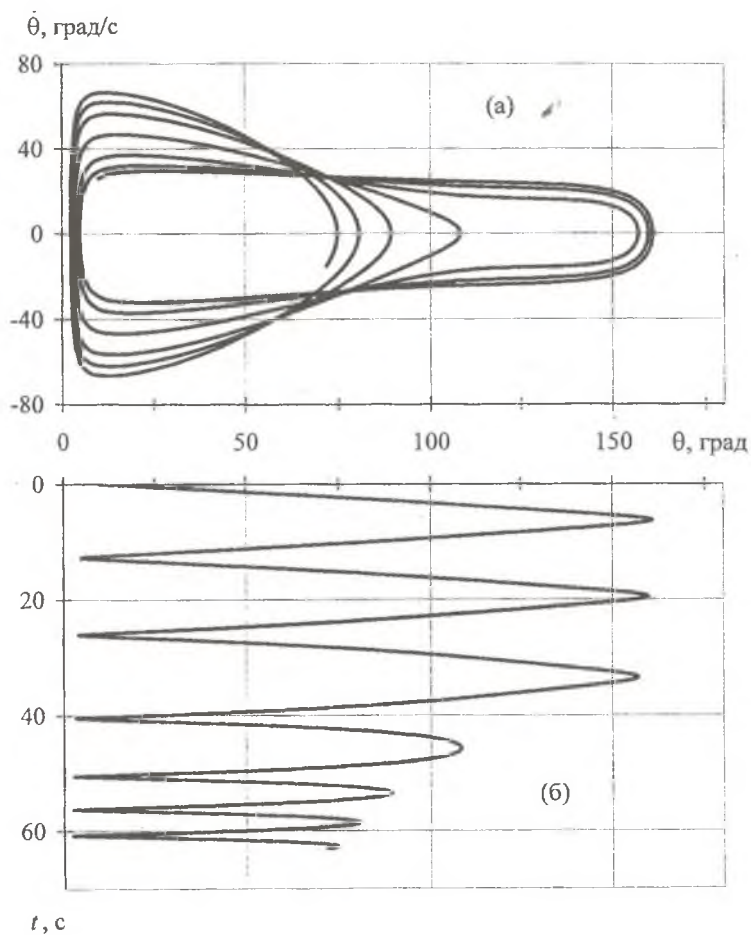


Рис. 11. Характер изменения пространственного движения при переходе в область A_1 : а - фазовая траектория; б - изменение угла нутации

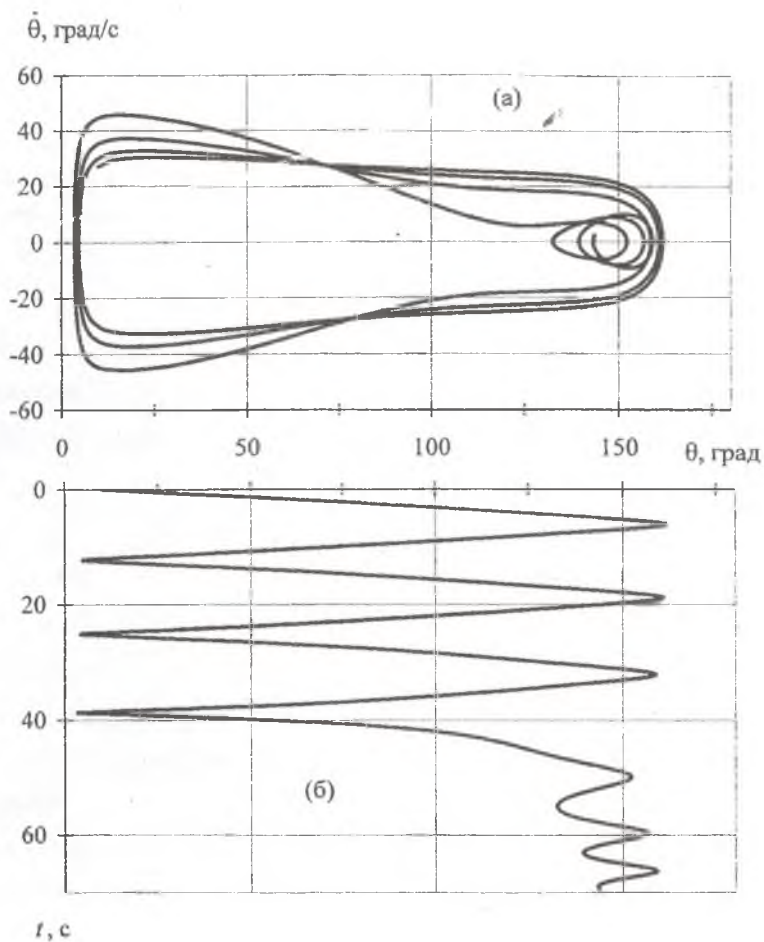


Рис. 12. Характер изменения пространственного движения при переходе в область A_2 : а - фазовая траектория; б - изменение угла нутации

интеграл действия I_2^0 вычисляется по формуле (2.8). Учитывая постоянство переменной действия, выражение (2.29) перепишем в виде

$$b_* = -\{I_2^0(\pi/A)/[2\sqrt{(u_1 - u_*)(u_* - u_2)} - \sum_{i=1}^3 c_i \arcsin \delta_i]\}^2 / 2. \quad (3.8)$$

Значение коэффициента b в момент времени $t = t_*$ определяется путем совместного решения уравнения (3.8) с определением корней полинома (2.4). Величина h_* определяется из условия перехода комплексно-сопряженных корней: $u_{3,4} = u_{34} \pm iw$ в действительные: $u_{3,4} = u_{34} = u_* = \cos \theta_*$, $w = 0$. Время t_* определяется при известном b_* по формуле (3.44).

Поскольку при $t > t_*$ тело может продолжить движение в одной из внутренних колебательных областей A_1 или A_2 (см. рис. 5), определим вероятность его захвата в эти колебательные области. Пользуясь формулами (3.1) и (3.2), получим

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sqrt{(u_1 - u_*)(u_* - u_2)} + (0.5c_1 + a_0/b_0)(0.5\pi + \arcsin \delta_1)}{\sqrt{(u_1 - u_*)(u_* - u_2)} - (0.5c_1 + a_0/b_0)(0.5\pi - \arcsin \delta_1)}, \quad (3.9)$$

где $c_1 = u_1 + u_2 + 2u_*$, $\delta_1 = (u_1 + u_2 - 2u_*)/|u_2 - u_1|$.

Таким образом, для случая движения твердого тела под действием бигармонического нутационного момента, когда коэффициенты момента изменяются по экспоненциальному закону (3.3), проведен полный анализ возможных переходных режимов движения, даны формулы для определения времени перехода тела из одного режима движения в другой, а также формулы для определения вероятности попадания тела в тот или иной режим движения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. I, II. М.: Наука, 1972.
2. Садов Ю.А. Переменные действие-угол в задаче Эйлера-Пуансо // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 962-964.
3. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
4. Аксененкова И.М. Канонические переменные действие-угол в задаче о волчке Лагранжа // Тез. конф. молодых ученых, посвященной 225-летию Моск. гос. ун-та, 1979. С. 86-90.
4. Демин В.Г., Конкина Л.И. Новые методы в динамике твердого тела. Фрунзе: Илим, 1989. 182 с.
6. Серов В.М. Вращательное движение динамически симметричного твердого тела под действием нелинейного момента // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 26-31.
7. Асланов В.С., Тимбай И.А. Интеграл действия при движении твердого тела в обобщенном случае Лагранжа // Изв. АН МТТ. 1998. № 2. С. 9-17.
8. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
10. Асланов В.С. Некоторые вопросы динамики твердого тела: Учеб. пособие. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1992. 78 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.
12. Нейштадт А.И. Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису // Физика плазмы. 1986. Т. 12. Вып. 8. С. 992-1001.

13. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
14. Лифшиц И.М., Слуцкий А.А., Набутовский В.М. Об особенностях движения заряженных квазичастиц в переменном и неоднородном электромагнитном поле // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1961. Т. 41. Вып. 3. С. 939-948.