МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

# Дискретная математика

Электронный курс
в системе дистанционного обучения Moodle

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ
на 2009 – 2018 годы по проекту «Модернизация учебного процесса на факультете экономики и управления
на основе развития системы электронного и дистанционного обучения»
Соглашение № 1/21 от 3 июня 2013 г.

САМАРА
2013

УДК 519
Д 48

Автор-составитель: **Ростова Елена Павловна**

**Дискретная математика** [Электронный ресурс] : электрон. курс в системе дистанц. обучения Moodle / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. Е. П. Ростова. - Электрон. текстовые и граф. дан.(2,1 Мбайт) - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Научно-образовательный модуль предназначен для студентов факультета экономики и управления, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 080500.62 «Бизнес-информатика», изучающих дисциплину «Дискретная математика» в 1 семестре.

Модуль разработан на кафедре математических методов в экономике.

# Конспект лекций по дисциплине «Дискретная математика»

для студентов направления 080500.62 Бизнес-информатика

## Оглавление

# Множества

## *Основные определения*

*Множество* – единая совокупность элементов, обладающих одним определяющим свойством.

Множество обозначается заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C* и т.д.

*Пример1:*

Множеством являются студенты, обучающиеся в одной группе. Тогда определяющим свойством этой группы будет принадлежность студента к данной учебной группе.

*Пример 2:*

Множество целых положительных чисел образуют множество натуральных чисел. Это множество обозначается $\mathbb{N}$.

*Пример 3:*

Множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $x^2+y^2 \leq 4$.

*Элемент x принадлежит множеству A*, если *x* обладает определяющим свойством множества *A*. Запись: $x \in A$. Элементы множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: *a, c, x, y* и т.д.

*Пример 1:*

Число -1 принадлежит множеству целых чисел, обозначающемуся $\mathbb{Z}$. Запись выглядит следующим образом: $-1 \in \mathbb{Z}$.

*Пример 2:*

Число 23 принадлежит множеству натуральных чисел, обозначающемуся $\mathbb{N}$. Запись выглядит следующим образом: $23 \in \mathbb{N}$.

Если $x$ *не является элементом множества* $A$, то запись выглядит следующим образом: $x \notin A$ или $\overline{x \in A}$.

*Пример:*

Число -1 НЕ принадлежит множеству натуральных чисел. Запись выглядит следующим образом: $-1 \notin \mathbb{N}$.

Множество $A$ называется *пустым множеством*, если оно не содержит элементов. Запись: $A=\emptyset$.

*Универсальное множество* – множество, содержащее все мыслимые объекты, участвующие в данном рассуждении, примере, задаче. Обозначается: $U$ (либо $I$).

### ***Способы задания множеств***

1) Перечисление: $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

*Пример 1:*

$A=\{1, 2, 3, 4\}$ множество $A$ состоит из элементов: 1, 2, 3 и 4.

*Пример 2:*

$B=\{2, 4, 6, 8\}$ множество $B$ состоит из элементов 2, 4, 6 и 8.

2) Указание свойства, характеризующего элементы множества: $A=\{x|Q(x)\}$, где $Q(x)$ – определяющее свойство множества.

*Пример 1:*

Множество $A$ из предыдущего Примера 1 можно задать следующим образом: $A=\{x|x\in \mathbb{N}, x\leq 4\}$.

Читается запись: множество $A$ есть множество, состоящее из элементов $x$ таких, что $x$ принадлежат множеству натуральных чисел и не больше 4.

*Пример 1:*

Множество $B$ из предыдущего Примера 2 можно задать следующим образом: $B=\{x|x=2k, k\in \mathbb{Z}, 2\leq x\leq 8\}$.

Читается запись: множество $B$ есть множество, состоящее из элементов $x$ таких, что $x$ являются четным числами, не менее 2 и не более 8.

## *Операции над множествами*

1. *Объединение множеств* $A$ и $B$ – это множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо множеству $A$, либо множеству $B$. Запись: $A\cup B=\{x|x\in A \text{ или } x\in B\}$.

*Пример 1:*

Пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

*Пример2:*

Пусть $D=\{z|\ z\in[-2, 6]\}$ и $F=\{y|\ y\in[4, 9]\}$. Тогда $D\cup F=\{x|\ x\in[-2, 9]\}$.

2. *Пересечение множеств* $A$ и $B$ – это множество элементов, одновременно принадлежащих множеству и $A$, и множеству $B$. Запись: $A\cap B=\{x|x\in A \text{ и } x\in B\}$.

*Пример 1:*

Пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A\cap B=\{2, 4\}$.

*Пример2:*

Пусть $D$={$z$| $z$ ∈[-2, 6]} и $F$={$y$| $y$ ∈ [4, 9]}. Тогда $D$⋂$F$ ={$x$| $x$ ∈ [4, 6]}.

*Пример 3:*

Пусть $G=\{x, y\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 4\}$ и $S=\{x, y\in R^2 \mid y>x^2\}$. Тогда множество $G\cap S$ будет выглядеть следующим образом.

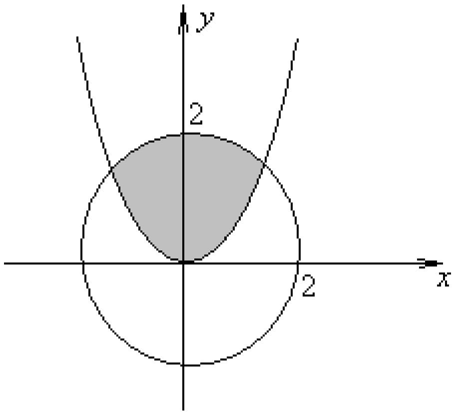



Рисунок 1. Графическое изображение множества $G$.

3. *Вычитание множества B* из множества $A$ – это множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству $A$ и не принадлежащих множеству $B$. Запись: $A\backslash B=\{x|x\in A$ и $x\notin B\}$.

*Пример 1:*

Пусть $A$={1, 2, 3, 4} и $B$={2, 4, 6, 8}. Тогда $A\backslash B$={1, 3}.

И наоборот: $B\backslash A$={6, 8}.

*Пример2:*

Пусть $D$={$z$| $z$ ∈[-2, 6]} и $F$={$y$| $y$ ∈ [4, 9]}. Тогда $D\backslash F$ ={$x$| $x$ ∈ [-2, 4)}.

И наоборот: $F\backslash D$ ={$x$| $x$ ∈ (6, 9]}.

4. *Симметрическая разность множеств A* и $B$ – множество, состоящее из элементов, принадлежащих только одному из указанных множеств. Запись: $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. Также вместо значка $\Delta$ используют $\oplus$. Запись: $A\Delta B=\{x|x\in A$ и $x\notin B$ или $x\in B$ и $x\notin A\}$.

*Пример 1:*

Пусть $A$={1, 2, 3, 4} и $B$={2, 4, 6, 8}. Тогда $A\Delta B$={1, 3, 6, 8}.

*Пример2:*

Пусть $D=\{z|\ z \in[-2, 6]\}$ и $F=\{y|\ y \in [4, 9]\}$. Тогда $D\Delta F =\{x|\ x \in [-2, 4)\cup(6, 9]\}$.

## *Отношения множеств*

1. *Множество A включено в множество B*, если каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$. Запись: $A\subseteq B$. Говорят, что $A$ есть подмножество $B$.

2. *Множество A строго включено в множество B*, если выполняются условия: $A\subseteq B$, $A\neq B$. Запись: $A\subset B$. Говорят, что множество $A$ является собственным подмножеством множества $B$.

*Пример 1:*

Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

*Пример 2:*

Пусть $A=\{x|\ x\in(0, 20)\}$ и $B=\{y|\ y\in(10, 15)\}$. Тогда $A\subset B$.

3. *Множества A и B находятся в общем положении*, если существуют элемент $x$, принадлежащий только множеству $A$, элемент $y$, принадлежащий только множеству $B$ и элемент $z$, принадлежащий обоим множествам. Запись: $A\between B$.

*Пример 1:*

Пусть $A$={1, 2, 3, 4} и $B$={2, 4, 6, 8}. Тогда $A\between B$.

*Пример2:*

Пусть $D$={z| z ∈[-2, 6]} и $F$={$y$| $y$ ∈ [4, 9]}. Тогда $D$⚭$F$.

4. Два множества $A$ и $B$ называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Запись: $A=B$. В противном случае: $A \neq B$.

*Пример:*

Пусть $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \in [0, 5]\}$ и $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда $A=B$.

5. Множества $A$ и $B$ *не пересекаются*, если у них нет общих элементов.

*Пример:*

Пусть $A$={z| z ∈[0, 5]} и $B$={$y$| $y$ ∈ [6, 10]}. Тогда $A \cap B = \emptyset$.

Все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого универсального множества $U$. *Абсолютным дополнением* множества $A$ называется множество $\bar{A} = U \backslash A$. Можно сказать, что абсолютным дополнением $\bar{A}$ множества $A$ является множество всех элементов, не принадлежащих множеству $A$.

*Пример 1:*

Пусть $A=\{x \mid x \geq 0\}$. Тогда $\bar{A} = \{x \mid x < 0\}$.

*Пример 2:*

Пусть $G=\{x, y \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Тогда $\bar{G}=\{x, y \in R^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$.

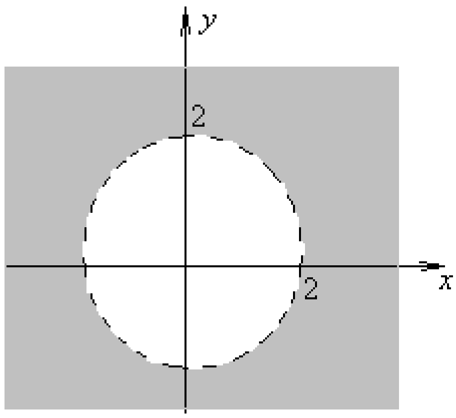


Рисунок 2. Графическое изображение множества $\bar{G}$.

### *Основные тождества алгебры множеств*

Для любых подмножеств *A, B, C* универсального множества *U* выполняются следующие тождества:

1) Коммуникативность объединения
   $A \cup B = B \cup A$.
2) Коммуникативность пересечения
   $A \cap B = B \cap A$.
3) Ассоциативность объединения
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
4) Ассоциативность пересечения
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
5) Дистрибутивность объединения относительно пересечения
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6) Дистрибутивность пересечения относительно объединения
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7) $A \cup \emptyset = A$.
8) $A \cap U = A$.
9) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
10) $A \cup U = U$.
11) $A \cup \bar{A} = U$.
12) $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
13) $A \cup A = A$.
14) $A \cap A = A$.
15) $\bar{\bar{A}} = A$.
16) $\bar{U} = \emptyset$.

17) Закон де Моргана[1]

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$,

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

18) Закон поглощения

$A \cup (A \cap B) = A$,

$A \cap (A \cup B) = A$.

19) $A \backslash B = A \cap \bar{B}$.

20) $A \backslash A = \emptyset$.

21) $\big((A \backslash B) \backslash C\big) = A \backslash (B \cup C)$.

22) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$.

23) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

24) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

25) $U \backslash A = \bar{A}$.

26) $A \backslash U = \emptyset$.

27) $A \backslash \emptyset = A$.

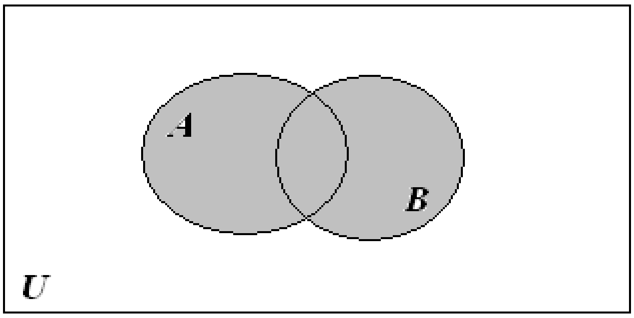
28) $\emptyset \backslash A = \emptyset$.

[1] Огастес де Морган (1806 – 1871) шотландский математики логик. Изложил в 1847 г. элементы логики высказываний и логики классов, дал первую развитую систему алгебры отношений.

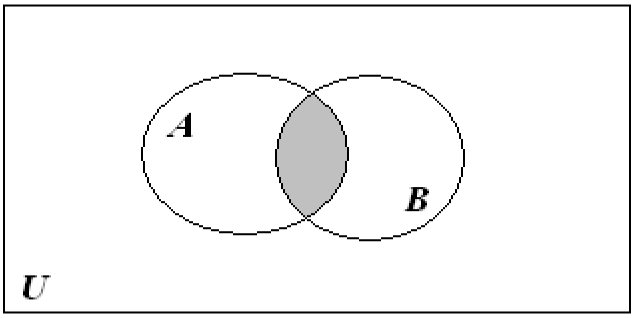
## Диаграммы Эйлера-Венна

Диаграммы Эйлера-Венна[2] используют для геометрического представления множеств. Множества представляются в виде каких-либо замкнутых фигур. Как правило, для обозначения универсального множества *U* используется прямоугольник, а для обозначения прочих множеств – круги. С помощью диаграмм Эйлера-Венна можно проиллюстрировать операции над множествами и отношения множеств.

Объединение множеств *A* и *B*: $A \cup B$.



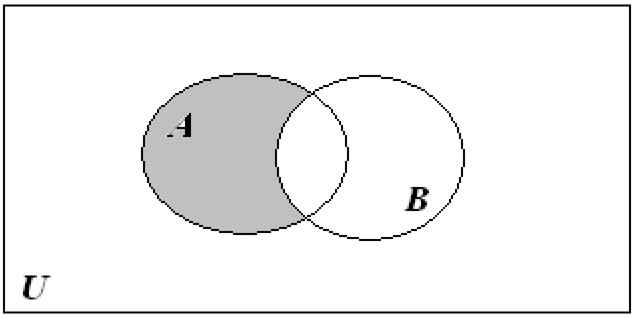

Пересечение множеств *A* и *B*: $A \cap B$.



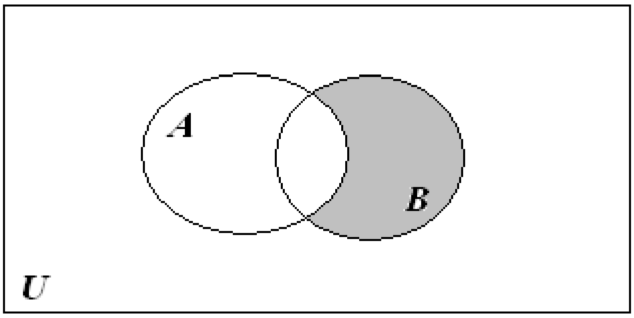

---

[2] При решении целого ряда задач Леонард Эйлер (1707 – 1783) использовал идею изображения множеств с помощью кругов. Особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1834 – 1923), подробно изложившего их в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. Поэтому такие схемы иногда называют Диаграммы Эйлера — Венна.

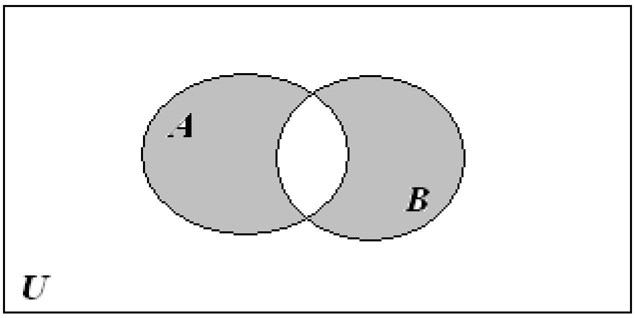
Вычитание множеств *A* и *B:* $A \backslash B$.



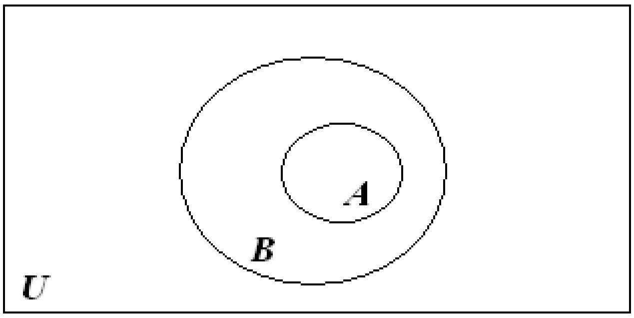

Вычитание множеств *A* и *B:* $B \backslash A$.



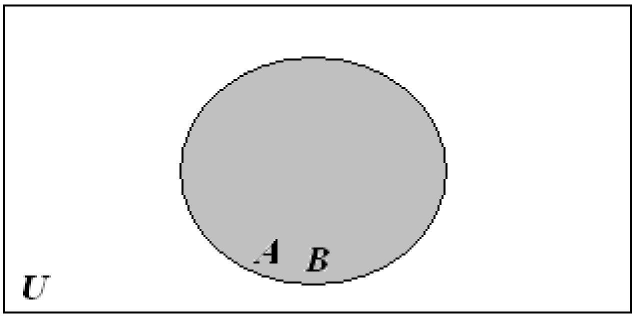

Симметрическая разность множеств *A* и *B:* $A \Delta B$.



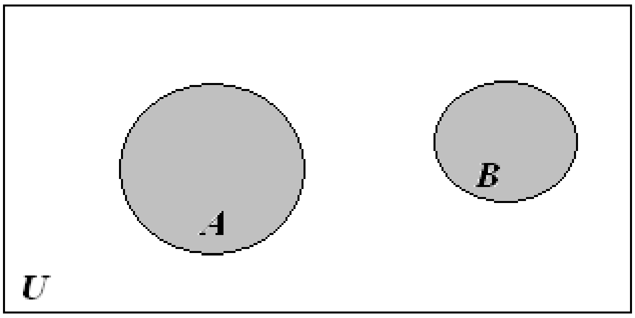
Множество *A* включено в множество *B*: $A \subseteq B$.



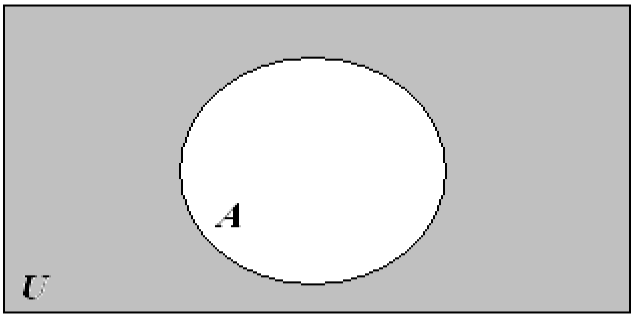

Множество *A* совпадает с множеством *B*: $A=B$.




Множество *A* не пересекается с множеством *B*.



Абсолютное дополнение множества $A$.




С помощью диаграмм Эйлера-Венна можно доказать основные тождества алгебры множеств.

### *Разбиение множества*

*Разбиение множества X* – это совокупность попарно не пересекающихся подмножеств таких, что любой элемент множества $X$ принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

### *Свойства разбиения множества*

Пусть множество $A$ разбито на подмножества $\{A_1, A_1, \ldots A_n\}$, тогда

1. $A_k \neq \emptyset$ для $\forall k=\overline{1,n}$.
2. $A_i \cap A_k = \emptyset$ для $\forall i,k = \overline{1,n}, i \neq k$.
3. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$.
4. $A_k \subseteq A$ для $\forall k = \overline{1,n}$.

*Пример:*

Пусть $X$ – множество всех студентов 1-го курса. Тогда разбиением этого множества являются учебные группы 1-го курса. Проверим, удовлетворяют, ли они свойствам разбиения.

1. Каждая группа не является пустым множеством $A_k \neq \emptyset$, т.к. в каждой группе есть хотя бы один студент.
2. Пересечение двух множеств, обозначающих две различные группы $A_i$ и $A_k$ будет пустым $A_i \cap A_k = \emptyset$, так как нет такого студента, который одновременно принадлежал бы разным группам 1-го курса.
3. Объединение всех групп 1-го курса $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$ даст множество студентов 1-го курса.
4. Каждая учебная группа 1-го курса $A_k$ включена в множество студентов 1-го курса $A_k \subseteq A$.

*Число Стирлинга*[3] $S(n, k)$ – это число возможных разбиений множества, состоящего из $n$ элементов на $k$ частей.

При $n>1$ $S(n, k)=k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1)$.

Таблица 1 Числа Стирлинга при $n < 7$ и $k < 7$

| $n$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | 0 | 0 | |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | 0 | |
| 7 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | |
| … | | | | | | | | | |

### *Свойства чисел Стирлинга*

1. $S(n, k) = 0$ при $k > n$
2. $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$
3. $S(n, n) = 1$
4. $S(n, n - 1) = 0{,}5n(n - 1)$

[3] Джеймс Стирлинг (англ. James Stirling, май 1692 – 5 декабря 1770) – шотландский математик.

*Пример:*

Пусть дано множество $B=\{a, b, c, d\}$. Определить количество возможных разбиений данного множества на 3 части. Получаем: $S(4, 3) = 6$.

Проверим, составив все возможные разбиения множества $B$ на 3 части:

$\{a\}, \{b\}, \{\mathrm{c}, d\}$

$\{a\}, \{b, c\}, \{d\}$

$\{a\}, \{b, d\}, \{c\}$

$\{a, c\}, \{b\}, \{d\}$

$\{a, d\}, \{b\}, \{c\}$

$\{a, b\}, \{\mathrm{c}\}, \{d\}$

Получили 6 вариантов разбиений множества из 4 элементов на 3 части.

*Число Белла* $B(n)$ – это общее число разбиений множества, состоящего из $n$ элементов.

$B(n) = S(n, 0) + S(n, 1) + S(n, 2) + \ldots + S(n, n)$

Таблица 2. Числа Белла при $n < 7$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B(n)$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | … |

*Пример:*

Пусть дано множество $D=\{a, b, c,\}$. Определить общее количество разбиений данного множества.

$n = 3$, значит $B(3) = 5$.

Проверим, составив все возможные разбиения множества $D$:

$\{a\}, \{b\}, \{\mathrm{c}\}$;   $\{a\},\{b, c\}$;   $\{a, c\}, \{b\}$;   $\{a, b\}, \{\mathrm{c}\}$;   $\{a, b, c\}$.

Получилось 5 вариантов разбиений исходного множества $D$.

## Декартово произведение

*Декартовым*[4] (*прямым*) произведением множеств $A$ и $B$ называется множество $A \times B$ упорядоченных пар, в котором первый элемент пары из множества $A$, а второй элемент пары – из множества $B$: $A \times B = \{<x,\ y> |\ x \in A, y \in B\}$.

*Пример:*

Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Тогда $A \times B = \{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <2, 5>, <3, 2>, <3, 3>, <3, 4>, <3, 5>\}$.

Изобразить $A \times B$ можно следующим образом (рис.1).

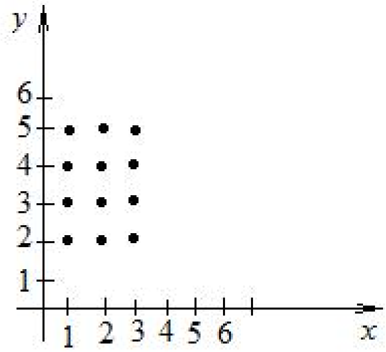



Рисунок 3

### *Свойства декартова произведения*

1. некоммутативно

   $A \times B \neq B \times A$

2. ассоциативно

   $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$

3. дистрибутивно

   $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

[4] Декарт Рене (1596 – 1659) – французский философ и математик, один из первых создателей формального языка математики.

Декартово произведение также определяется и для $n$ множеств $X_1, X_2, \ldots X_n$. *Декартово произведение* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – это множество упорядоченных наборов вида $<x_1, x_2, \ldots x_n>$, где $x_k \in X_k$, $k=1, 2, \ldots n$.

*Пример:*

Пусть множество $X_1$ – это порядковые номера студентов группы, множество $X_2$ – это фамилии студентов группы, множество $X_3$ – это оценка каждого студента группы за расчетную работу по линейной алгебре, множество $X_4$ – это оценка за контрольную работу по линейной алгебре. Тогда декартово произведение этих множеств будет состоять и наборов вида: <1, Петров, 4, 5>, <2, Иванов, 3, 3>, <3, Сидоров, 5, 3> и т.д.

*Степенью декартова произведения* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ называется число множеств $n$, входящих в это декартово произведение.

*Кортеж* $\alpha$ – это конечная последовательность $\alpha=<x_1, x_2, \ldots x_n>$, состоящая из элементов множеств $X_1, X_2, \ldots X_n$, $x_k \in X_k$, $k=1, 2, \ldots n$.

Элемент $x_k$ называется *k-ой координатой* кортежа или $k$-ой компонентой кортежа.

*Пример:*

Пусть множество $X_1$ – это фамилии сотрудников фирмы, множество $X_2$ – это имена сотрудников фирмы, множество $X_3$ – это стаж работы сотрудников в годах, множество $X_4$ – это заработная плата сотрудников (руб.). Тогда кортежи могут иметь вид: <Петров, Константин, 4, 30 000>, <Иванова, Ольга, 3, 27 000>, <Сидоров, Петр, 5, 35 000> и т.д.

Кортеж, не содержащий ни одной координаты, т.е. кортеж дины 0, называется *пустым кортежем*.

*Кортежи* $\alpha$ *и* $\beta$ *раны* $\alpha = \beta$, если они имеют одинаковую длину и их координаты, стоящие на одинаковых местах, равны:

$\alpha = \beta$ для $\alpha=<x_1, x_2, \dots x_n>$ и $\beta=<y_1, y_2, \dots y_m>$, если $m=n$ и $x_k= y_k$ для всех $k=1, 2, \dots n$.

*Пример:*

Кортежи <1, 2, 3> и <3, 1, 2> различны, хотя имеют одинаковую длину и одинаковые элементы, но элементы стоят в разных последовательностях.

Кортежи $<\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81}>$ и $<1, 2^2, 3^2>$ равны, так как, не смотря на различную запись элементов, при вычислении получаем: $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{16}=2^2$, $\sqrt{81}=3^2$. Значит, кортежи имеют одинаковую длину и на одинаковых местах стоят одинаковые элементы.

*График P* – это подмножество декартова произведения двух множеств.

*Инверсия графика P* – это график $P^{-1}$, в котором внутри каждой пары меняется порядок элементов:

$P^{-1}=\{<y, x> \mid <x, y> \in P\}$.

*Пример:*

Пусть дан график $P=\{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <2, 5>\}$.

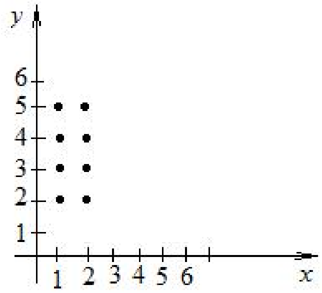



Рисунок4. График *P*.

Найти $P^{-1}$.

Т.к. $<1, 2> \in P$, то $<2, 1> \in P^{-1}$. Аналогично для всех элементов графика *P*.

$P^{-1}=\{<2, 1>, <3, 1>, <4, 1>, <5, 1>, <2, 2>, <3, 2>, <4, 2>, <5, 2>\}$.

Изобразим графически полученный результат.

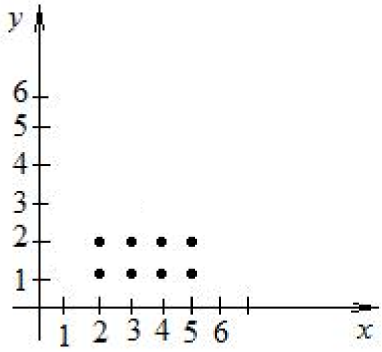


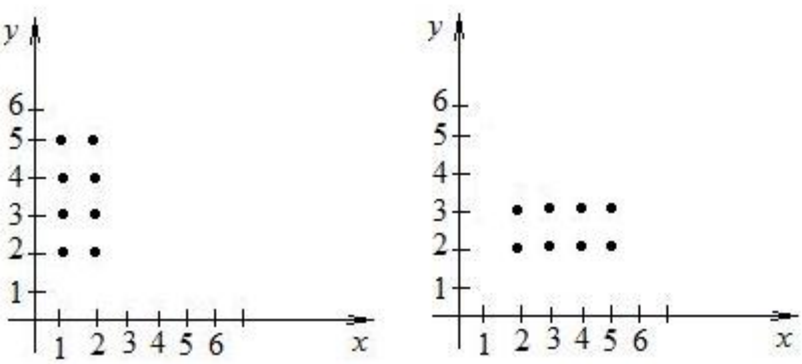

Рисунок 5. Инверсия $P^{-1}$.

*Композиция графиков* $P$ и $Q$ – график $P◦Q$, в котором упорядоченные пары удовлетворяют следующему свойству: существует элемент $z$ такой, что выполняется <*x*, *z*> ∈ *P* и <*z*, *y*> ∈ *Q*:

*P*◦*Q* = {<*x*, *y*>|<*x*, *z*> ∈ *P* и <*z*, *y*> ∈ *Q*}.

*Пример 1:*

Пусть даны графики *P*={<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <2, 5>} и *Q*={<2, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>, <4, 2>, <4, 3>, <5, 2>, <5, 3>}.




*P* *Q*

Рисунок 6. Графики *P* и *Q*.

Определить композицию *P*◦*Q*.

Для исходных *P* и *Q* получим: *P*◦*Q*={<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>}.

Изобразим полученную композицию *P*◦*Q*.

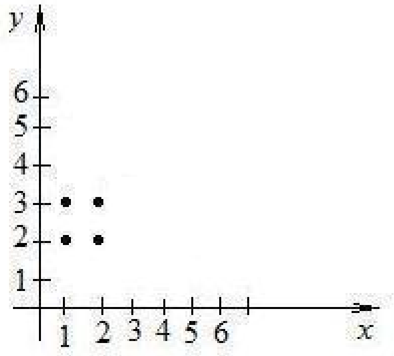



Рисунок 7. График композиции $P \circ Q$.

*Пример 2:*

Пусть даны графики $P$={<1, 3>, <2, 1>, <3, 6>, <4, 4>, <5, 3>} и $Q$={<1, 4>, <2, 2>, <3, 5>, <4, 6>, <5, 3>, <6, 1>}.

Определить композицию $P \circ Q$.

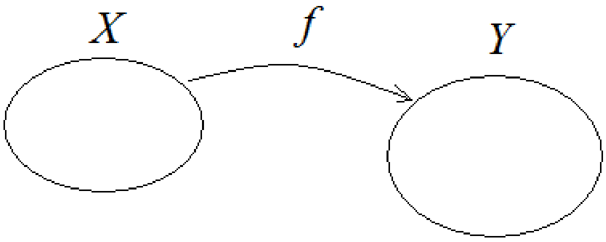
Для исходных $P$ и $Q$ получим: $P \circ Q$={<1, 5>, <2, 4>, <3, 1>, <4, 6>, <5, 5>}.

## ***Свойства графиков:***

1. $(P^{-1})^{-1} = P$
2. $(P \circ Q)^{-1} = P^{-1} \circ Q^{-1}$

## Отображение множеств

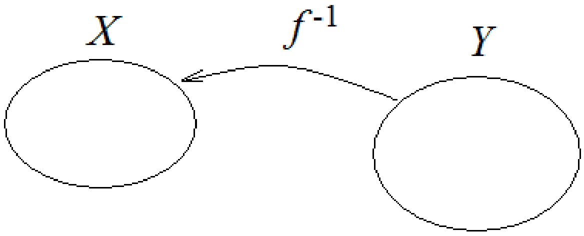
Соответствие $f$, сопоставляющее каждому элементу $x$ из множества $X$ один и только один элемент из множества $Y$, называется *отображением* множества $X$ во множество $Y$.




Полученный при этом элемент множества $Y$ называется *образом* элемента $x$ и обозначается $f(x)$.

Если $f(x)=y$, то элемент $x$ называется *прообразом* элемента $y$ при отображении $f$.

Совокупность всех прообразов элемента $y$ при отображении $f$ называется *полным прообразом* этого элемента и обозначается $f^{-1}(y)$: $f^{-1}=\{x|\ f(x)=y\}$.




Каждому подмножеству $A$ множества $X$ ($A\subset X$) соответствует его образ $f(A)$ при отображении $f$. Этот образ состоит из всех элементов $y$ множества $Y$, которые являются образами какого-либо элемента из $A$: $f(A)=\{y|y=f(a),\ a\in A\}$.

Множество $A$ называется *областью определения отображения* $f$, а множество $f(A)$ называется *множеством значений* этого отображения.

Каждому подмножеству $B$ множества $Y$ ($B \subset Y$) соответствует его полный прообраз $f^{-1}(B)$ при отображении $f$. Он состоит из всех элементов $x$ множества $X$, образы которых принадлежат $B$: $f^{-1}(B)=\{x|f(x)\in B\}$.

Отображение $f$ называется *сюръективным*, если при отображении множества $X$ в множество $Y$ каждый элемент множества $Y$ имеет прообраз.

*Пример:*

Пусть задано $f$:[0, 1]→[0, 3], функция $y = 12(x - 0{,}5)^2$.

Из уравнения $y = 12(x - 0{,}5)^2$ при $y\in[0, 3]$, определим корни:

$x_1 = 0{,}5 - 0{,}5\sqrt{\frac{y}{3}}$ и $x_2 = 0{,}5 + 0{,}5\sqrt{\frac{y}{3}}$.

Если $y\in(0, 3]$, то оба корня принадлежат (0, 1], а если $y=0$, то $x_1 = x_2 = 0{,}5\in[0, 1]$.

Следовательно, для всех $y\in[0, 3]$ уравнение $y = 12(x - 0{,}5)^2$ имеет хотя бы одно решение, поэтому рассматриваемая функция сюръективна.

Отображение $f$ называется *инъективным*, если при отображении множества $X$ в множество $Y$ для каждого элемента $y$ множества $Y$ существует не более одного прообраза: $\forall\, x_1, x_2 \in X|\ x_1 \neq x_2$ верно $f(x_1) \neq f(x_2)$.

*Пример:*

Пусть задано $f$:[0, 1]→[0, 3], функция $y = 3^x$.

Для произвольного $y\in[0, 3]$ уравнение $y = 3^x$ имеет не более одного решения $x$, принадлежащего отрезку [0, 1]. При $y\in[1, 3]$ решением является $x = \log_3 y$, а при $y\in[0, 1]$ решений нет. Следовательно, $y = 3^x$ инъективна.

Если отображение сюръективно и инъективно, оно называется *биективным* (взаимно однозначным).

*Пример:*

Пусть задано $f$:[0, 1]→[0, 3], функция $y = 3\sin\frac{\pi x}{2}$.

Для произвольного $y$∈[0, 3] уравнения $y = 3\sin\frac{\pi x}{2}$ найдется единственное решение $x = \frac{2}{\pi} arcsin\frac{y}{3}$, принадлежащее отрезку [0, 1], поэтому функция $y \to 3\sin\frac{\pi x}{2}$ является биективным.

## Отношения и их свойства

*Бинарным отношением* на множестве а называется пара $Ф$=<$A$, $F$>. Здесь $A$ – область задания отношения, $F$ – график отношения, причем $F \subseteq A^2$.

Если <$x$, $y$> ∈ $F$, то говорят, что $x$ и $y$ вступают в отношение $\varphi$. Запись: $x\ \varphi\ y$.

Если $x$ и $y$ не вступают в отношение $\varphi$, тогда запись: $\overline{x\ \varphi\ y}$.

*Пример 1:*

Пусть $A$ – множество студентов факультета. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что студенты $x$ и $y$ учатся в одной группе.

*Пример 2:*

Пусть $A$ – множество прямых на плоскости. Две прямые на плоскости $l$ и $m$ имеют хотя бы одну общую точку: $l\ \varphi\ m$.

### *Свойства отношений*

1. *Рефлексивность*

   свойство бинарных (двуместных, двучленных) отношений, выражающее выполнимость их для пар объектов с совпадающими членами (так сказать, между объектом и его «зеркальным отражением»): отношение $\varphi$ называется рефлексивным, если для любого объекта $x$ из области его определения выполняется $x\varphi x$: $\forall x \in A\ x\varphi x$.

   Примерами рефлексивных отношений являются отношения типа равенства, эквивалентности, подобия и отношения нестрогого порядка (любой предмет не меньше и не больше самого себя).

*Пример 1:*

Пусть *A* – множество студентов факультета. Запись $x \varphi y$ обозначает, что студенты *x* и *y* учатся в одной группе.

Тогда отношение $\varphi$ является рефлексивным, т.к. для любого студента можно сказать, что он учится в одной группе с самим собой.

*Пример 2:*

Пусть *A* – множество прямых на плоскости. Две прямые на плоскости $l$ и $m$ имеют хотя бы одну общую точку: $l \varphi m$.

Тогда отношение $\varphi$ является рефлексивным, т.к. для любой прямой на плоскости можно сказать, что она имеет хотя бы одну общую точку с самой собой.

2. *Антирефлексивность*

свойство бинарных отношений, выражающее невыполнимость их для пар объектов с совпадающими членами: отношение $\varphi$ называется антирефлексивным, если существует объект *x* из области его определения, для которого не выполняется $x\varphi x$: $\exists x \in A | \overline{x\varphi x}$. Обозначается антирефлексивность следующим образом: $\overline{x\varphi x}$.

*Пример 1:*

Пусть *A* – множество студентов факультета. Запись $x \varphi y$ обозначает, что студент *x* обыграл студента *y* в шахматы на турнире.

Тогда отношение $\varphi$ является антирефлексивным, т.к. найдется студент, не обыгравший сам себя.

*Пример 2:*

Пусть $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$. Запись $x \varphi y$ обозначает, что $x<y$.

Тогда отношение $\varphi$ является антирефлексивным, т.к. найдется такое число $x$, которое не будет строго меньше самого себя, то есть неравенство $x<x$ не выполняется.

3. *Симметричность*

свойство бинарных (двуместных, двучленных) отношений. Отношение $\varphi$, определенное на некотором множестве, называется симметричным, если для любых элементов этого множества $x$ и $y$ верно следующее: из того, что $x$ находится в отношении $\varphi$ к $y$($x\varphi y$) следует, что и $y$ находится в этом же отношении к $x$ ($y\varphi x$): $\forall x, y \in A \;\; x\varphi y \;\; \Rightarrow y\varphi x$.

Примерами симметричных отношений: отношения типа равенства, отношения родства, соседства и др.

*Пример 1:*

Пусть $A$ – множество жителей одного дома. Запись $x \; \varphi \; y$ обозначает, что жильцы $x$ и $y$ являются соседями.

Тогда отношение $\varphi$ является симметричным, т.к. из того, что $x$ является соседом $y$ следует, что и $y$ является соседом $x$.

*Пример 2:*

Пусть $A$ – множество окружностей на плоскости. Запись $r \; \varphi \; t$ обозначает, что окружности жильцы $r$ и $t$ касаются друг друга, то есть имеют одну общую точку.

Тогда отношение $\varphi$ является симметричным, т.к. из того, что $r$ касается $t$ следует, что и $t$ касается $r$.

4. *Антисимметричность*

свойство бинарных отношений. Отношение $\varphi$, определенное на некотором множестве, называется антисимметричным, если для любых элементов этого множества $x$ и $y$ верно следующее: из того, что $x$ находится в отношении $\varphi$ к $y$($x\varphi y$) и $y$ находится в этом же отношении к

$x$ ($y\varphi x$) следует, что эти элементы равны $x$=$y$: $\forall x, y \in A \;\; x\varphi y, y\varphi x \;\Rightarrow x = y$.

Антисимметричность также можно определить следующим образом. Отношение $\varphi$, определенное на некотором множестве, называется антисимметричным, если для любых элементов этого множества $x$ и $y$ верно следующее: из того, что $x$ находится в отношении $\varphi$ к $y$($x\varphi y$) и $x$ не равен $y$ $x \neq y$ следует, что $y$ не находится в этом же отношении $\varphi$ к $x$ ($\overline{x\varphi y}$): $\forall x, y \in A \;\; x\varphi y, x \neq y \Rightarrow \overline{y\varphi x}$.

*Пример 1:*

Пусть $A$ – множество студентов факультета. Запись $x \varphi y$ обозначает, что студент $x$ обыграл студента $y$ в шахматы на турнире.

Тогда отношение $\varphi$ является антисимметричным, т.к. найдутся такие студенты $x$ и $y$, для которых верно следующее: $x$ обыграл $y$, а $y$ не обыграл $x$.

*Пример 2:*

Пусть $x\in \mathbb{Z}$ и $y\in \mathbb{Z}$. Запись $x \varphi y$ обозначает, что $x<y$.

Тогда отношение $\varphi$ является антисимметричным, т.к. найдутся такие числа $x$ и $y$, для которых не будет выполняться $x<y$ и $y<x$.

5. *Транзитивность*

свойство бинарных (двуместных) отношений: отношение $\varphi$ называется транзитивным, если для любых элементов $x$, $y$ и $z$ множества, на котором определено это отношение, из $x\varphi y$ и $y\varphi z$ следует $x\varphi z$: $\forall x, y, z \;\in A \; x\varphi y, y\varphi z \;\Rightarrow x\varphi z$.

Примерами транзитивных отношений являются отношения типа равенства, порядка отношения.

*Пример 1:*

Пусть $x\in \mathbb{Z}$, $y\in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{Z}$. Запись $x \varphi y$ обозначает, что $x$=$y$.

Тогда отношение $\varphi$ является транзитивным, т.к. для любых чисел $x$, $y$, $z$ верно следующее: из $x = y$ и $y = z$ следует $x$=$z$.

*Пример 2:*

Пусть $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x<y$.

Тогда отношение $\varphi$ является транзитивным, т.к. для любых чисел $x$, $y$, $z$ верно следующее: из $x < y$ и $y < z$ следует $x<z$.

6. *Связность*

   свойство бинарных (двуместных) отношений: отношение $\varphi$ называется связным, если для любых неравных элементов $x$ и $y$ ($x \neq y$) множества, на котором определено это отношение либо $x$ находится в отношении $\varphi$ к $y$ ($x\varphi y$), либо $y$ находится в этом же отношении к $x$ ($y\varphi x$): $\forall x, y \in A\ x \neq y \Rightarrow x\varphi y$ или $y\varphi x$.

*Пример 1:*

Пусть $A$ – множество студентов факультета. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что студент $x$ обыграл студента $y$ в шахматы на турнире.

Тогда отношение $\varphi$ является связным, т.к. для любых двух различных студентов $x$ и $y$ следующее: либо $x$ обыграл $y$, либо $y$ обыграл $x$.

*Пример 2:*

Пусть $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x<y$.

Тогда отношение $\varphi$ является связным, т.к. для любых чисел $x$, $y$, $x \neq y$ верно следующее: либо $x < y$, либо $y < x$.

Любое отношение может обладать тем или иным свойством из выше перечисленных.

*Пример:*

Пусть $A$ – множество молодых людей в г.Самаре. Запись $x\varphi y$ означает, что $x$ является родным братом $y$. Определить свойства данного отношения.

Данное отношение:

- антирефлексивно, т.к. найдется $x$ не является родным братом самому себе;
- симметрично, т.к. если $x$ – родной брат $y$, то и $y$ – родной брат $x$;

- транзитивно, т.к. из того, что $x$ – родной брат $y$ и $y$ – родной брат $z$ следует, что $x$ – родной брат $z$;
- несвязно, т.к. найдутся такие разные молодые люди $x$ и $y$ в г. Самаре, которые не будут друг другу родными братьями.

Итак, отношение $\varphi$ из данного примера антирефлексивно, симметрично, транзитивно и несвязно.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением частичного порядка*.

*Пример:*

Пусть $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$. Запись $x\ \varphi\ y$ обозначает, что $x \leq y$.

Проверим, является ли данное отношение $\varphi$ отношением частичного порядка. Данное отношение рефлексивно, так как $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ выполняется $x \leq x$. Также данное отношение является антисимметричным, так как найдутся такие числа $x$ и $y$, для которых не будет выполняться $x \leq y$ и $y \leq x$.

Отношение $\varphi$ является транзитивным, так как $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$ из условий $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $x \leq z$.

Значит, отношение $x \leq y$ является отношением частичного порядка.

Связное отношение частичного порядка называется *отношением линейного порядка.*

*Пример:*

Пусть $A$ – множество людей в г.Самаре. Запись $x\varphi y$ означает, что $x$ не старше $y$. Определить свойства данного отношения.

Данное отношение:

- рефлексивно, т.к. найдется житель города Самары, который не старше самого себя;
- антисимметрично, т.к. если $x$ не старше $y$, то $y$ не может быть не старше $x$;
- транзитивно, т.к. из того, что $x$ не старше $y$ и $y$ не старше $z$ следует, что $x$ не старше $z$;

- связно, т.к. для любых двух жителей г. Самары можно сказать, что один не старше другого.

Итак, отношение $\varphi$ из данного примера рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и связно, значит является отношением линейного порядка.

Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением строго порядка*.

*Пример:*

Пусть рассматривается множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Запись $x\varphi y$ означает, что $x<y$. Определить, является ли данное отношение отношением строгого порядка.

Отношение $\varphi$ из данного примера является:

- антирефлексивным, т.к. существует такое число $x$, для которого не выполняется $x<x$;
- антисимметрично, т.к. найдется такая пара $x$ и $y$, для которой из отношения $x<y$ не следует $y<x$;
- транзитивно, т.к. из $x<y$ и $y<z$ следует, что $x<z$;
- связно, т.к. любая пара целых неравных чисел $x\neq y$ находится в отношении $\varphi$: либо $x<y$, либо $y<x$.

Итак, данное отношение $x<y$ антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно и несвязно, значит оно является отношением строгого порядка.

Связное отношение строгого порядка называется *отношением строгого линейного порядка.*

*Пример:*

Пусть $A$ – множество студентов факультета, принимающих участие в спартакиаде по одному виду спорта. Запись $x\varphi y$ означает, что $x$ по итогам всех игр набрал больше очков, чем $y$. Определить, является ли данное отношение отношением строгого линейного порядка.

Отношение $\varphi$ из данного примера является:

- антирефлексивным, т.к. существует такой студент $x$, который не набрал очков больше самого себя, т.е. не выполняется $x\varphi x$;

- антисимметрично, т.к. если студент $x$ обыграл студента $y$ ($x\varphi y$), то отсюда не следует, что студент $y$ обыграл студента $x$ ($y\varphi x$), т.е. из $x\varphi y$ не следует $y\varphi x$;
- транзитивно, т.к. если студент $x$ набрал очков больше, чем студент $y$ ($x\varphi y$) и студент $y$ набрал очков больше, чем студент z ($y\varphi z$), то из этого следует, что студент $x$ набрал очков больше, чем студент z ($x\varphi z$), т.е из $x\varphi y$ *и* $y\varphi z \Rightarrow x\varphi z$;
- связно, т.к. любая пара студентов, принимающих участие в спартакиаде находится в отношении $\varphi$: либо $x$ набрал очков больше, чем $y$ ($x\varphi y$), либо $y$ набрал очков больше, чем $x$ ($y\varphi x$).

Итак, данное отношение $x\varphi y$ антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно и связно, значит оно является отношением строгого линейного порядка.

Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности.*

*Пример:*

Пусть рассматриваются натуральные числа, т.е. элементы множества $\mathbb{N}$. Запись $x\varphi y$ обозначает, что $x=y$. Определить, является ли данное отношение отношением эквивалентности.

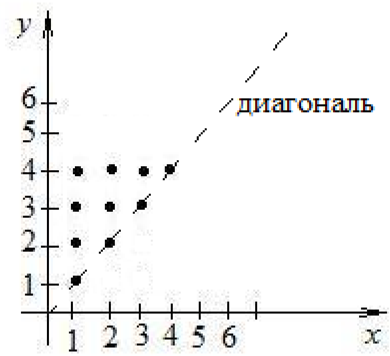
Данное отношение обладает следующими свойствами:

- рефлексивно, т.к. $x=y$;
- симметрично, т.к. из $x=y$ следует $y=x$;
- транзитивно, т.к. если $x=y$ и $y$=z, то $x=z$;
- несвязно, т.к. найдутся такие $x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N}$, для которых не будет выполняться $x=y$.

Значит, можно сказать, что отношение равенства является отношением эквивалентности.

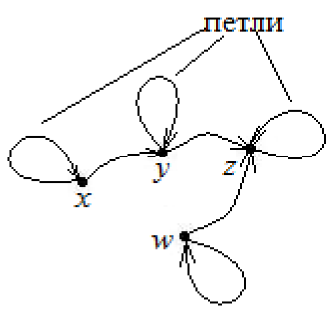
*Особенности графического изображения бинарных отношений*

1. График рефлексивного отношения всегда содержит диагональ, то есть элементы, расположенные на биссектрисе угла I четверти координатной плоскости.

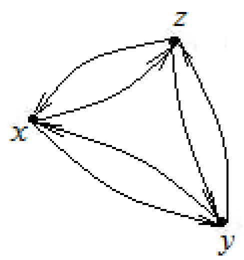



2. График симметричного отношения симметричен относительно диагонали.

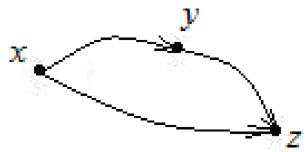

3. Стрелочная диаграмма рефлексивного отношения содержит в себе петли.




4. Стрелочная диаграмма симметричного отношения содержит в себе противоположно направленные парные стрелки.




5. В стрелочной диагонали транзитивного отношения для любой пары стрелок таких, что конец первой совпадает с концом второй, существует третья стрелка, соединяющая начало первой и конец второй.



## Алгебра логики

*Высказывание* – это повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать истинно оно или ложно.

Высказывания обозначают латинскими буквами. Всякая буква, обозначающая некоторое высказывание, - это переменная величина, принимающая одно из двух значений – 0 или 1.

### *Основные функции алгебры логики. Таблицы истинности*

*Конъюнкция* – логическая операция, по своему применению максимально приближенная к союзу «и». Обозначение: $x\&y$, $x\wedge y$, $x\cdot y$ .Также называется логическое «и», логическое умножение. Логическая связка «и», «а», «но», «хотя». В префиксной записи min($x$, $y$).

Таблица истинности конъюнкции.

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

*Дизъюнкция* – логическая операция, по своему применению максимально приближенная к союзу «или». Обозначение: $\boldsymbol{x \vee y, x + y}$ .Также называется логическое «или», логическое сложение. Логическая связка «или». В префиксной записи max($x$, $y$).

Таблица истинности дизъюнкции.

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

*Импликация*. Обозначение: $x \Rightarrow y, x \supset y, x \to y$. Логическая связка «если $x$, то $y$», «из $x$ следует $y$», «$x$ влечет $y$».

$x \to y = \bar{x} \vee y$

Таблица истинности импликации.

| $x$ | $y$ | $x \Rightarrow y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

*Инверсия, отрицание*

Обозначение: $\neg x$, $\bar{x}, \rceil x$. Также называется отрицанием. Логическая связка «не».

Таблица истинности инверсии.

| $x$ | $\neg x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

*Эквивалентность*

Обозначение: $x \sim y, x \equiv y, x \leftrightarrow y$. Логическая связка «$x$ эквивалентно $y$», «$x$ истинно тогда и только тогда, когда $y$».

$x \sim y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$

Таблица истинности эквивалентности.

| $x$ | $y$ | $x\sim y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

*Сложение по модулю два*

или антиэквивалентность.

Обозначение: $x \oplus y$.

$x \oplus y = \overline{x \sim y}$.

Таблица истинности сложения по модулю два.

| $x$ | $y$ | $x\oplus y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

*Штрих Шеффера*

или антиконъюнкция.

Обозначение: $x|y$.

$x|y = \overline{x \wedge y}$.

Таблица истинности штриха Шеффера.

| $x$ | $y$ | $x|y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

*Стрелка Пирса*

или антидизъюнкция.

Обозначение: $x \downarrow y$.

$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

Таблица истинности стрелки Пирса.

| $x$ | $y$ | $x \downarrow y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

### ***Алфавит алгебры логики***

Алфавит – это любое непустое множество. В алгебре логики алфавит состоит из

- переменных, обозначающих высказывания,
- логических символов, обозначающих логические функции,
- скобок.

*Формула* – это произвольная конечная последовательность символов, которая удовлетворяет следующим правилам:

- любая переменная, обозначающая высказывание, есть формула,
- если $A$ и $B$ – формулы, то формулами являются $A \wedge B, A \vee B, \bar{A}$, $A \sim B, A \rightarrow B$,
- других формул нет.

Особенности употребления скобок:

1. внешние скобки не записывают,
2. каждое вхождение знака отрицания относится к наикратчайшей формуле, следующей за ним,

3. не записывают скобки, отсутствие которых не меняет смысл формулы.

*Список переменных* формулы $A$ – это упорядоченных набор всех переменных, содержащихся в данной формуле.

*Пример:*
Пусть формула $A = x \to y \vee (z \wedge \bar{x}) \sim t|y$.
Тогда списком формулы $A$ будет $(t, x, y, z)$.

*Оценка списка* – это сопоставление каждой переменной списка некоторому истинному значению.

*Пример:*
Список $(x, y, z)$.
Оценки списка в количестве $2^3 = 8$: (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).

Формулы называются *равносильными* (*эквивалентными*), если на любой оценке списка переменных они принимают одинаковое значение. Обозначение $A \equiv B$.

### Булевы функции

*Булева*[5] *функция* $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ от $n$ переменных – это функция, принимающая одно из двух значений (0 или 1), при этом каждая из переменных также принимает одно из двух значений: 0 или 1.

Две булевы функции называются *равными*, если для любого набора переменных они принимают одинаковые значения

[5] Джордж Буль (1815 – 1864) – ирландский математик и логик, впервые сформулировавший основные положения алгебры логики.

Наборы $u$ и $v$ значений переменных называются *соседними по* $i$*-ой переменной*, если они отличаются только $i$-ой координатой.

Переменная $x_i$ называется *фиктивной переменной* булевой функции $f$, если для любых наборов $u$ и $v$ соседних по $i$-ой переменной, выполняется равенство $f(u)=f(v)$.

Переменная $x_i$ называется *существенной переменной* булевой функции $f$, если существует хотя бы одна пара наборов $u$ и $v$ соседних по $i$-ой переменной, такая, что справедливо неравенство $f(u) \neq f(v)$.

Булевая функция, полученная с помощью подстановок некоторых функций $f_1$, $f_2$, $f_3 \dots f_n$ друг в друга в качестве аргументов, а также с помощью переименования переменных, называется *суперпозицией функций* $f_1$, $f_2$, $f_3 \dots f_n$.

***Правило порядка выполнения действий*:** при чтении и выполнении действий в суперпозиции функций двигаются от внутренних скобок к внешним, как и в алгебраических выражениях. Если скобок нет, тогда действия выполняются в следующей последовательности: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание.

### *Основные равносильности алгебры логики*

1. Коммутативные законы

   $x \cdot y = y \cdot x$

   $x \vee y = y \vee x$

2. Ассоциативные законы

   $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

   $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

3. Дистрибутивные законы

$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$

$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$

4. Законы идемпотентности

$x \cdot x = x$

$x \vee x = x$

5. Тождества с константами

$x \cdot 0 = 0$

$x \vee 0 = x$

$x \cdot 1 = x$

$x \vee 1 = 1$

6. Законы поглощения

$x \cdot (x \vee y) = x$

$x \vee (x \cdot y) = x$

7. Законы де Моргана

$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

8. Закон исключенного третьего

$x \vee \bar{x} = x \oplus \bar{x} = 1$

9. Закон противоречия

$x \cdot \bar{x} = 0$

10. Закон двойного отрицания

$\bar{\bar{x}} = x$

11. Правило вычеркивания

$\bar{x} \cdot y \vee x = y \vee x$

12. Отрицание противоречия

$\overline{\bar{x} \cdot x} = 1$

13. Контрапозиция

$x \to y = \bar{y} \to \bar{x}$

14. Цепное заключение

$(x \to y) \cdot (y \to z) = x \to z$

15. Противоположность

$x \sim y = \bar{x} \sim \bar{y}$

16. Выражение дизъюнкции через конъюнкцию и сумму по модулю два

$x \vee y = xy \oplus y \oplus x$

17. Выражение дизъюнкции через импликацию

$(x \to y) \longrightarrow y = x \vee y$

18. Выражение отрицания через штрих Шеффера, стрелку Пирса, сумму по модулю два и эквивалентность

$x|x = x \downarrow x = \bar{x} = x \oplus 1 = x \sim 0$

19. Выражение конъюнкции через штрих Шеффера

$(x|y)|(x|y) = x \cdot y$

20. Выражение дизъюнкции через стрелку Пирса

$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = x \vee y$

21. Тождества

$x \vee \bar{x} \cdot y = x \vee y$

$x \cdot (\bar{y} \vee x) = x \cdot y$

## Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

*Элементарная конъюнкция* – это формула, являющаяся конъюнкцией переменных или их отрицаний.

*Пример:*

Формулы $x$, $\bar{x}$, $x \wedge y$, $x \wedge \bar{y} \wedge z$ являются элементарными конъюнкциями.

Формулы $x \vee y \wedge z$, $\bar{x} \oplus y \sim z$, $x \wedge \bar{y} \vee z$ не являются элементарными конъюнкциями, так как кроме конъюнкций содержат и другие функции.

*Элементарная дизъюнкция* – это формула, являющаяся дизъюнкцией переменных или их отрицаний.

*Пример:*

Формулы $x$, $\bar{x}$, $x \vee y$, $x \vee \bar{y} \vee z$ являются элементарными дизъюнкциями.

Формулы $x \vee y \wedge z$, $\bar{x} \oplus y \sim z$, $x \wedge \bar{y} \vee z$ не являются элементарными дизъюнкциями, так как кроме дизъюнкций содержат и другие функции.

*Конъюнктивная нормальная форма* (*КНФ*) – это формула, являющаяся конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

*Пример:*

Формулы $(x \vee y) \wedge (y \vee \bar{z})$, $(x \vee \bar{y}) \wedge y \wedge (\bar{x} \vee z)$ являются КНФ.

Формулы $(x \sim y) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (y|z)$, $(\bar{x} \oplus y) \wedge (\bar{y} \sim z)$, $(\overline{x \vee y}) \wedge (\overline{y \vee z})$ не являются КНФ.

*Дизъюнктивная нормальная форма* (*ДНФ*) – это формула, являющаяся дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

*Пример:*

Формулы $xy \vee y \vee \bar{z}$, $x\bar{y} \vee y\bar{x} \vee z$ являются ДНФ.

Формулы $(x \sim y) \vee \bar{x}y \vee (y|z)$, $(\bar{x} \oplus y) \vee (\bar{y} \sim z)$, $(\overline{xy}) \vee (\overline{yz})$ не являются ДНФ.

Для любой формулы $A$ можно найти такую формулу $B$, что $B$ находится в ДНФ и $A \equiv B$. Тогда формула $B$ будет называться дизъюнктивной нормальной формой формулы $A$.

Аналогично и для КНФ. Для любой формулы $A$ можно найти такую формулу $B$, что $B$ находится в КНФ и $A \equiv B$. Тогда формула $B$ будет называться конъюнктивной нормальной формой формулы $A$.

Одна формула $A$ может иметь несколько ДНФ и КНФ.

### ***Алгоритм построения ДНФ и КНФ:***

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием. Это можно сделать, используя основные равносильности алгебры логики.
2. Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям на знаки отрицания, относящиеся к отдельным переменным. Это можно сделать, используя законы де Моргана.
3. Избавиться от знаков двойного отрицания.
4. Применить, если требуется, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

*Пример:*

Привести формулу $A = ((x \to y) \downarrow (\overline{y \to z}))$ к ДНФ.

1. Выразим логические операции $\to$ и $\downarrow$ через $\wedge, \vee$ и $\rceil$, используя $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$ и $x \to y = \bar{x} \vee y$:

   $A = (\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (\overline{\bar{y} \vee z})})$.
2. Избавимся от знака отрицания, относящегося к выражениям, используя законы де Моргана $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ и $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$:

   $A = (\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (\overline{\bar{y} \vee z})}) = (\overline{\bar{x} \vee y}) \wedge (\overline{\overline{\bar{y} \vee z}}) = (\bar{\bar{x}} \wedge \bar{y}) \wedge (\overline{\overline{\bar{y} \vee z}})$.
3. Избавимся от двойного отрицания

$A = (\bar{\bar{x}} \wedge \bar{y}) \wedge (\overline{\overline{\bar{y} \vee z}}) = (x \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee z).$

4. Используя закон дистрибутивности, приведем формулу к ДНФ
   $A = (x \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee z) = (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z).$
   Упростив, получим ДНФ:
   $A = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z).$

### *Двойственность формул*

Формула $A^*$ называется *двойственной* к формуле $A$, если она получена заменой всех символов конъюнкции и дизъюнкции на двойственные.

Символы конъюнкции и дизъюнкции являются двойственными друг к другу.

Двойственная к двойственной есть исходная формула $(A^*)^* = A$.

*Пример:*

Пусть дана формула $B = (x \vee y)(\overline{x \vee y})z$.

Тогда двойственная к исходной формула будет иметь вид $B^* = (xy) \vee (\overline{xy}) \vee z$.

Если две формулы эквивалентны $A \equiv B$, то и двойственные им также эквивалентны $A^* \equiv B^*$.

Если формула $A$ находится в ДНФ, то двойственная к ней $A^*$ – в КНФ и наоборот.

*Пример:*

Построить двойственную формулу к формуле $A = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z).$

Формула $A$ находится в ДНФ, так как является дизъюнкцией элементарных конъюнкций. Построим двойственную к ней и проверим будет ли она находится в КНФ.

$A^* = (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z).$

Полученная формула $A^*$ находится в КНФ, так как является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Пусть ($x_1$, $x_2$, $x_3$, … $x_n$) – список переменных и ($t_1$, $t_2$, $t_3$, … $t_n$) – его оценка, тогда двойственная к этой оценке будет получена из исходной заменой 0 на 1 и 1 на 0, то есть ложь↔истина.

## СДНФ и СКНФ

*Совершенная конъюнктивная нормальная форма* (*СКНФ*) – это формула, для которой выполняются следующие условия:

1) формула находится в КНФ;
2) каждый конъюнктивный член формулы является $k$-членной дизъюнкцией, причем на $i$-ом месте этой дизъюнкции стоит $i$-ая переменная либо ее отрицание;
3) все конъюнктивные члены попарно различны.

Для СДНФ аналогично. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма* (*СДНФ*) – это формула, для которой выполняются следующие условия:

1) формула находится в ДНФ;
2) каждый дизъюнктивный член формулы является $k$-членной конъюнкцией, причем на $i$-ом месте этой конъюнкции стоит $i$-ая переменная либо ее отрицание;
3) все дизъюнктивные члены попарно различны.

*Пример:*

Определить СКНФ для следующей формулы $A = \bar{y} \wedge ((x \vee z) | \overline{(\bar{y}|\bar{z})})$.

Приведем формулу $A$ к КНФ:

$$A = \bar{y} \wedge \left((x \vee z) \middle| \overline{(\bar{y}|\bar{z})}\right) = \bar{y} \wedge \overline{\left((x \vee z) \wedge \overline{\overline{(\bar{y} \wedge \bar{z})}}\right)} = \bar{y} \wedge \overline{\left((x \vee z) \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z})\right)} =$$

$$= \bar{y} \wedge \left(\overline{(x \vee z)} \vee \overline{(\bar{y} \wedge \bar{z})}\right) = \bar{y} \wedge \left((\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}})\right) = \bar{y} \wedge \left((\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (y \vee z)\right) =$$

$$= \bar{y} \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{z} \vee z \vee y).$$

Строим СКНФ, для этого из КНФ удаляем третью дизъюнкцию, а к первой дизъюнкции добавляем $x \wedge \bar{x}$:

$$\big(\bar{y} \vee (x \wedge \bar{x})\big) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) = (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z),$$

добавляем к первой и второй дизъюнкциям $z \wedge \bar{z}$:

$$\big((\bar{y} \vee x) \vee (z \wedge \bar{z})\big) \wedge \big((\bar{y} \vee \bar{x}) \vee (z \wedge \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)\big) =$$

$$= (\bar{y} \vee x \vee z) \wedge (\bar{y} \vee x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee z) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z).$$

Преобразуем полученную формулу так, чтобы в каждой элементарной дизъюнкции на *i*-ом месте стояла *i*-ая переменная:

$A = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$.

Получили СКНФ для исходной формулы *A*.

## Основы теории графов

### *Основные понятия теории графов*

***Граф*** $G$ – это совокупность множества вершин $V$ и множества ребер $X$: $G=<V, X>$, где $V$ – непустое множество. Множество $X$ состоит из пар элементов множества $V$.

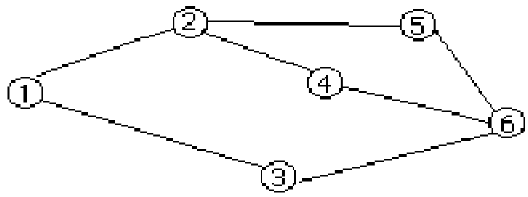



Рисунок 8. Граф $G=<V, X>$.

На данном графе (рис. 8) шесть вершин, т.е. $V$: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и семь ребер, т.е. $X$: $<1, 2>$, $<1, 3>$, $<2, 5>$, $<2, 4>$, $<3, 6>$, $<4, 6>$, $<5, 6>$.

Если пары в наборе $X$ повторяются, то граф называется ***псевдографом*** или графом с ***кратными ребрами***.

Ребро, начало и конец которого совпадают, называется ***петлей***.

Вершины называются ***смежными*** или ***соседними,*** если существует ребро, их соединяющее. То есть вершины $v_1$ и $v_2$ смежные, так как $<v_1, v_2>\in X$, где $X$ – множество ребер рассматриваемого графа $G=<V, X>$.

Если вершина является началом или концом ребра, то вершина и ребро называются ***инцидентными***.

***Степенью*** вершины $v$ называется число инцедентных ей ребер. Обозначается $d(v)$.

Вершина, степень которой равна нулю, называется ***изолированной***.

Вершина, степень которой равна единице, называется ***висячей*** или ***тупиковой***.

***Маршрутом*** в графе называется последовательность вершин и ребер, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего (это не относится к первому и последнему ребру). Число ребер в маршруте определяет его ***длину***.

Если элементы в парах множества $X$ не упорядочены, то граф $G$ называют ***неориентированным***.

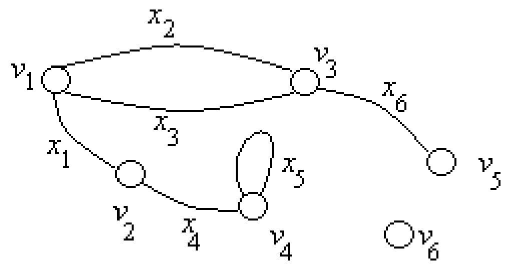



Рисунок 9. Граф с кратными ребрами.

На графе, изображенном на рисунке 9 верщина $v_5$ является висячей, так как $d(v_5)$=1. Степень вершины $v_6$ равна нулю $d(v_6)$=0, эта вершина $v_6$ изолированная. Ребро $x_5$= $<v_4, v_4>$ является петлей. Ребра $x_2 = <v_1, v_2>$ и $x_3 = <v_1, v_2>$ смежные или соседние. Пример маршрута в графе рисунка 9 ($v_1$, $v_3$, $v_5$). Маршрут содержит два ребра, значит, его длина равна 2. Также этот маршрут можно описать с помощью ребер, что позволяет уточнить маршрут: ($v_1$, $x_2$, $v_3$, $x_6$, $v_5$).

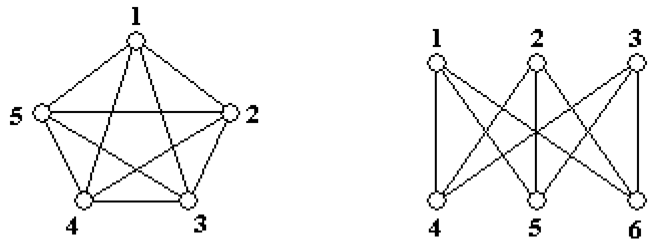
## *Плоский граф*

Граф, ребра которого не пересекаются, называется ***плоским*** (планарным) графом.

***Плоский граф*** **–** это граф, нарисованный таким образом, что его ребра не пересекаются. Говорят, что граф допускает плоскую укладку, если его можно нарисовать как плоский. Также плоские графы называют ***планарными***.

Граф, изображенный на рисунке 8. – плоский.

Существуют и непланарные графы. На рис. показаны два таких графа.




***Орграф***

Граф называется ***ориентированным (орграфом)***, если пары в наборе $X$ упорядоченные, т.е. для каждого ребра задано направление. Ребра в ориентированном графе называются ***дугами***. В ориентированном графе каждая дуга имеет направление, показанное стрелкой.

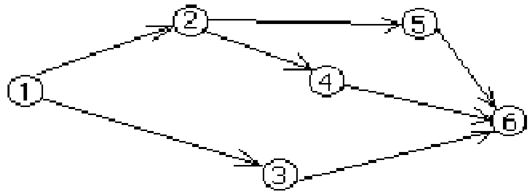



Рисунок 10. Ориентированный граф.

Маршрут в орграфе называется ***путем***.

В орграфе, изображенном на рис. 10 последовательность ($v_1$, $v_3$, $v_4$, $v_5$) является путем, а последовательность ($v_1$, $v_4$, $v_2$) не является, так как не существует дуги, соединяющей $v_4$ и $v_2$.

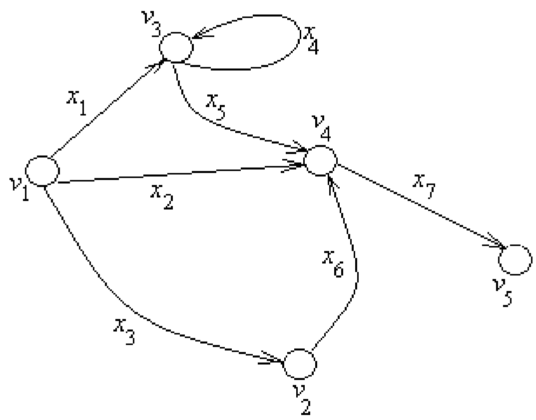



Рисунок 11. Ориентированный граф $G'=<V', X'>$.

Если вершина является началом дуги, то дуга называется ***исходящей*** из вершины, если концом – дуга называется ***заходящей***.

***Полустепенью исхода*** вершины $v$ называется число $d^{-}(v)$ дуг, исходящих из этой вершины, ***полустепенью захода*** – число $d^{+}(v)$ дуг, заходящих в вершину.

Для графа, изображенного на рисунке 4 $d^{-}(v_1)=3$, $d^{+}(v_1)=0$, $d^{+}(v_4)=3$, $d^{-}(v_4)=1$.

***Связный граф*** – граф, в котором из любой вершины можно найти цепь в любую другую вершину.

***Цепь*** в графе — маршрут, все рёбра которого различны. Если все вершины (а тем самым и рёбра) различны, то такая цепь называется ***простой*** (***элементарной***). В цепи $v_0,e_1,...,e_k,v_k$ вершины $v_0$ и $v_k$ называются ***концами цепи***. Цепь с концами $u$ и $v$ соединяет вершины $u$ и $v$. Цепь, соединяющая вершины $u$ и $v$ обозначается $<u, v>$. Для ориентированных графов цепь называется ***орцепью***.

Граф называется ***нагруженным***, если для его дуг определена весовая функция, задающая «стоимость» пути. «Стоимость» $l(x)$ или $l(v_i\ , v_j)$ в зависимости от задачи может интерпретироваться как расстояние от пункта $i$ до пункта $j$, стоимость перевозки, время прохождения данного ребра или дуги $x$ и т. п.

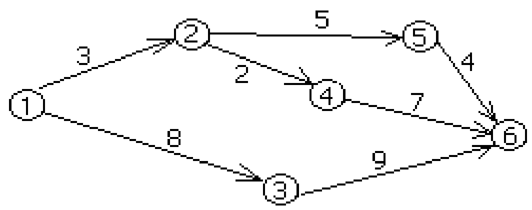



Рисунок 12. Ориентированный, нагруженный граф $G''=<V'', X''>$.

В графе рис. 12 для каждой дуги задана некоторая «стоимость» пути. Например, $l(1,2)=3$. Это означает, что для того, чтобы попасть из пункта 1 в пункт 2 надо потратить 3 часа, или пройти 3 км., или заплатить 3 усл. ден. единицы и т.п.

***Способы описания и задания графов***

1) Графический.

Данный способ задания подразумевает схематическое изображение графа на рисунке с указанием всех необходимых данных. В качестве примера можно привести рис. 8 – 12.

2) Перечисление всех вершин и дуг.

Вершины: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Дуги: $x_1$ <1, 2>, $x_2$ <1, 3>, $x_3$ <2, 5>, $x_4$ <2, 4>, $x_5$ <3, 6>, $x_6$ <4, 6>, $x_7$ <5, 6>.

3) Матрица смежности.

Если $G=<V, X>$, где $V$ – совокупность вершин ($n$ вершин), а $X$ – совокупность дуг, то матрицей смежности этого графа называется квадратная матрица $A(G)$ порядка $n \times n$, где элемент матрицы либо 0, либо 1, в зависимости от того, смежны ли вершины.

$$A(G)=[a_{ij}], \text{ где } a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если} <v_i, v_j> \in X \\ 0, \text{если} <v_i, v_j> \notin X \end{cases}$$

Построим матрицу смежности для графа рис.12.

Таблица 3.

| $A(G)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

4) Матрица инцидентности.

Если $G=<V, X>$ – ориентированный граф, где $V$ – совокупность вершин ($n$ вершин), а $X$ – совокупность дуг ($m$ дуг), то ***матрицей инцидентности*** этого графа называется матрица $B(G)$, размера $n \times m$, где элемент матрицы либо 1, либо 0,
либо –1.

$$B(G)=[b_{i\,j}],\text{ где } b_{i\,j}=\begin{cases} -1, \textit{если вершина } v_i - \textit{конец дуги } x_j; \\ 1, \textit{если вершина } v_i - \textit{начало дуги } x_j; \\ 0, \textit{если вершина } v_i \textit{ неинцедентна дуге } x_j. \end{cases}$$

Построим матрицу инцидентности для графа рис. 12.

Таблица 4.

| $B(G)$ дуги / вершины | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 |

5) Матрица длин дуг.

Если $G=<V, X>$ – ориентированный граф, где $V$ – совокупность вершин ($n$ вершин), а $X$ – совокупность дуг, то ***матрицей длин дуг*** этого графа называется матрица $C(G)$, размера $n \times n$, где элемент матрицы это значения весовой функции для каждой из дуг или ребер.

$$C(G)=[c_{ij}],\text{ где } c_{ij}=\begin{cases} l(v_i,v_j), \text{если} & (v_i,v_j)\in X \\ \infty \quad , \text{если} & (v_i,v_j)\notin X \end{cases}$$

Построим матрицу длин дуг для графа рис. 12.

Таблица 6.

| *C(G)* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ∞ | 3 | 8 | ∞ | ∞ | ∞ |
| 2 | ∞ | ∞ | ∞ | 2 | 5 | ∞ |
| 3 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | 9 |
| 4 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | 7 |
| 5 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | 4 |
| 6 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |

***Задача нахождения кратчайшего пути***

Рассмотрим решение задачи нахождения кратчайшего пути методом «волны».

***Пример***

Допустим, в п. 1 находится склад, а в остальных пунктах – строительные площадки компании (рис. 13).

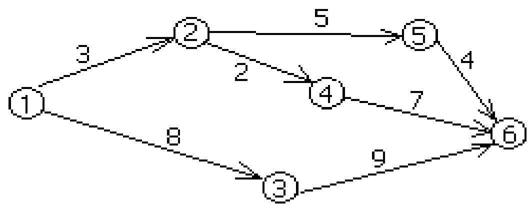



Рисунок 13.

Показатели на дугах – расстояния в километрах. Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки.

Первый пункт является стартовым и ему присваивается постоянная метка.

Постоянная метка присваивается тем пунктам, если для них определено кратчайшее расстояние.

1) рассмотрим каждый пункт, в который можно попасть непосредственно из пункта 1.

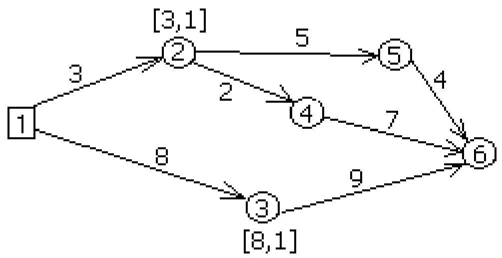



Рисунок 14

До п. 2 расстояние в 3 км, до п. 3 – 8 км. Т.о. пунктам 2 и 3 присвоены временные метки [3,1] и [8,1] соответственно (рис. 14). Первое число в метке обозначает расстояние от п.1, второе число – это номер пункта, из которого непосредственно «пришли» в рассматриваемый пункт. Далее рассматриваются все временные метки на предмет нахождения метки с минимальным расстоянием. На данный момент это метка [3,1]. Пункту 2 присваиваем постоянную метку и фиксируем дугу из п.1 в п.2 (рис. 15).

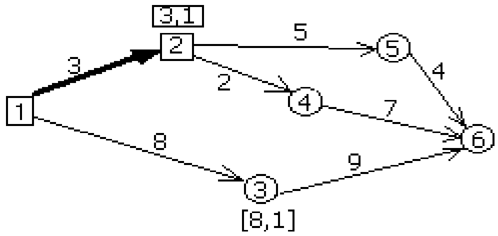



Рисунок 15.

2) теперь рассматриваются все пункты, которые ещё не имеют постоянных меток и непосредственно связаны с пунктом 2, т.е. мы рассматриваем п. 4 и п. 5. Достичь п. 4 можно, преодолев 3+2=5 км., а п. 5 – преодолев 3+5=8 км. Т.о. п. 4 и п. 5 присваиваются временные метки [5,2] и [8,2] соответственно (рис.16). Теперь снова рассматриваем временные метки и выбираем из них ту, которая имеет в своём обозначении кратчайшее расстояние, т.е. метку [5,2] для п.4. Эта метка теперь получает статус постоянной и фиксируем дугу из п.2 в п.4 (рис.17).

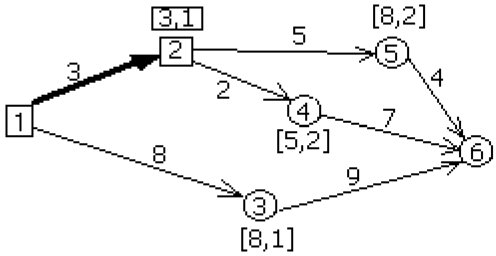



Рисунок 16.

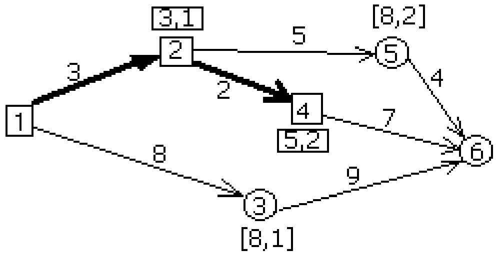



Рисунок 17.

3) следующий этап начинается в п. 4, последнем, помеченном постоянной меткой. Как и раньше, рассматриваем каждый пункт без постоянной метки, в

который можно попасть непосредственно из п. 4. В этом случае, это единственный п. 6. Для того, чтобы достичь п. 6 надо преодолеть 5+7=12 км.

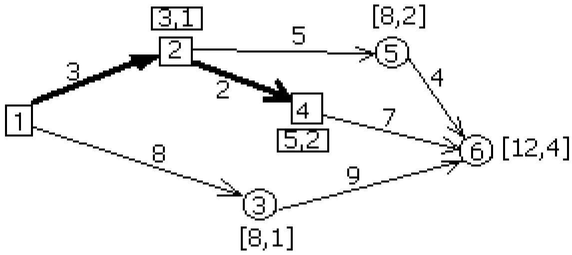



Рисунок 18.

Временная метка пункта 6 будет иметь вид [12,4] (рис. 18). Среди всех временных метках, которые имеются на данный момент, выбираем ту, которой соответствует наименьшее количество километров. Таких пунктов два: п. 5 и п. 3 ( до каждого из них длина равна 8 км.). Выбираем любой из этих пунктов, например, п. 5. Эта метка фиксируется как и путь из п. 2 в п. 5 (рис. 19).

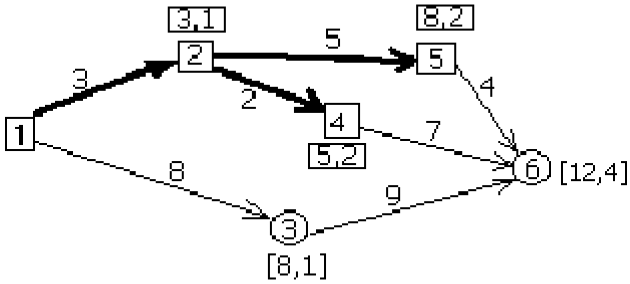



Рисунок 19.

3) теперь рассмотрим пункты, в которые можно попасть из п. 5. Таковым является только п. 6, имеющий уже временную метку. Добавляем к этой временной метке ещё одну, относящуюся к п. 5 (рис. 20).

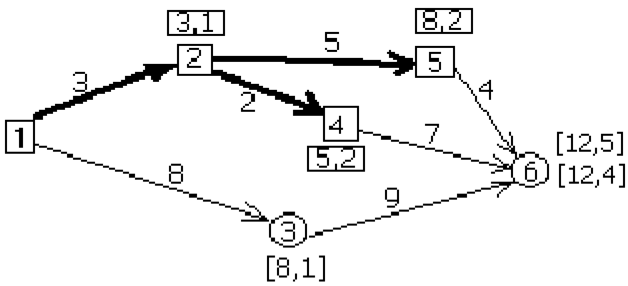


Рисунок 20.

Из имеющихся трёх временных меток опять выбираем ту, в которой указано минимальная длина пути от п. 1 до данного пункта. Таковой меткой является метка [8,1] для п. 3. Эти пункт и метка получают статус стационарных и путь из п. 1 в п. 3 фиксируется (рис. 21).

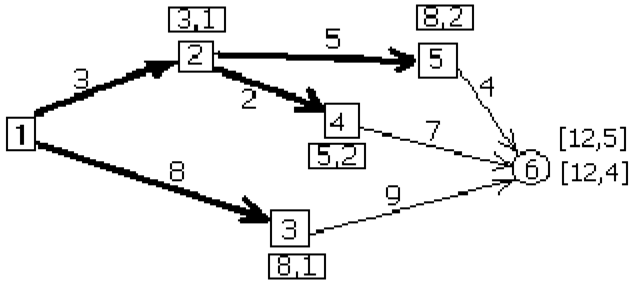



Рисунок 21.

5) из фиксированного п. 3 можно попасть в п. 6, у которого уже есть две временные метки, но нет постоянной. Добавляем п. 6 ещё одну временную метку [17,3] (рис. 22).

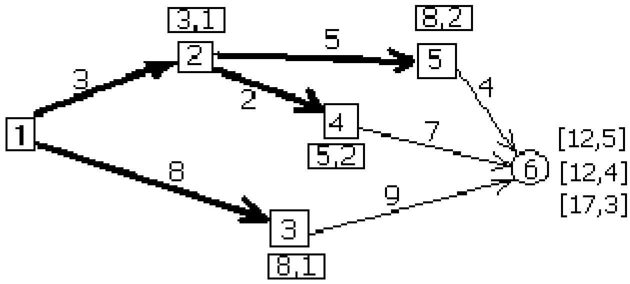



Рисунок 22.

Т. о. п. 6 имеет три временные метки, т. е. до п. 6 можно пройти тремя путями различной длины. Выбираем наикратчайший путь. Таких пути два: через п. 5 и через п. 6. Выбираем любой, потому что длина их одинаковая. Пусть это будет путь, проходящий через п. 4. Тогда фиксируем метку [12,4], п. 6 и путь из п. 4 в п. 6 (рис.23).

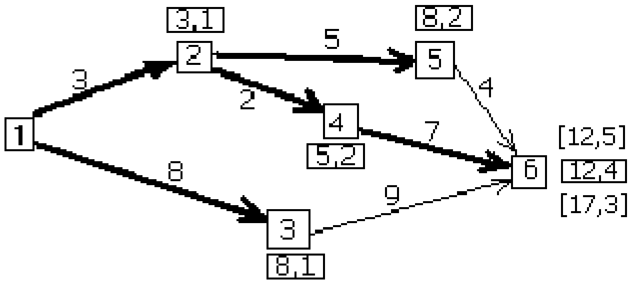



Рисунок 23.

Теперь можно использовать информацию в постоянных метках для нахождения кратчайшего пути из п. 1 в любой другой пункт. Например, кратчайший путь из п. 1 в п. 4 есть путь 1 – 2 – 4 и длина его 5 км. Используя этот подход, можно определить кратчайшие пути применительно ко всей сети компании, состоящей из её строительных площадок.

Таблица 7.

| Пункт | Кратчайший путь из п.1 | Расстояние, км. |
|---|---|---|
| 2 | 1 – 2 | 3 |
| 3 | 1 – 3 | 8 |
| 4 | 1 – 2 – 4 | 5 |
| 5 | 1 – 2 – 5 | 8 |
| 6 | 1 – 2 – 4 – 6 | 12 |

## Основные символы

$\exists$ - существует, найдется

$\nexists$ - не существует, не найдется

$\in$ - принадлежит, включен в …

$\forall$ - любой, для любого

| - такой, что