МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л.С.Пулькина

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Учебное пособие

Присвоен гриф Учебно-методического совета по математике и механике Учебно-методического объединения по классическому университетскому образованию РФ.

Издательство «Самарский университет»
2004

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета.

УДК 517.944
ББК 22.161.6
П885

Пулькина Л.С. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учебное пособие в 2 частях. — Самара: Изд-во «Самарский университет», 2004. — 140с.

ISBN 5-86465-216-4

Пособие предназначено для студентов механико-математического факультета, изучающих курс «Дифференциальные уравнения в частных производных». Также может быть полезно для аспирантов соотвествующих специальностей и студентов других факультетов и вузов, изучающих уравнения математической физики.

Пособие состоит из двух частей, иллюстрировано примерами с решениями и снабжено упражнениями для самостоятельного решения.

УДК 517.944
ББК 22.161.6

Рецензенты д-р физ.-мат. наук, зав.кафедрой уравнений математической физики СамГУ О.П. Филатов, д-р физ.-мат. наук, зав.кафедрой прикладной математики СамГТУ В.П. Радченко.

ISBN 5-86465-216-4

Оглавление

Часть 1

Основные уравнения математической физики

Введение

Дифференциальными уравнениями называют такие уравнения, в которые, помимо неизвестной функции, входят и ее производные. Если неизвестная функция зависит от нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называют уравнением в частных производных. Число m называется **порядком** уравнения в частных производных, если оно содержит хотя бы одну производную порядка m и не содержит ни одной производной порядка m+1. Произвольное уравнение порядка m в случае n независимых переменных имеет вид:

$$F\left(x_1, ...x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ...\frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ...\frac{\partial^m}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_m}}\right) = 0 \qquad (1)$$

Уравнение (1.1) называется линейным, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее производных. Например, уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + u = x + 2y$$

является линейным уравнением второго порядка относительно функции $u(x, y)$.

Уравнение в частных производных называется квазилинейным, если оно линейно относительно старших производных. Например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cos u = 0.$$

Уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u = 0$$

является примерем нелинейного уравнения в частных производных.

Уравнения в частных производных имеют очень широкое применение, так как они неизбежно возникают при математическом моделировании почти всех явлений и процессов в природе и обществе. К исследованию уравнений в частных производных привлекаются многие разделы современной математики: математический анализ, алгебра, геометрия, комплексный анализ, функциональный анализ и особенно — теория бесконечномерных функциональных пространств.

Глава 1

Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

1.1. Квазилинейные уравнения

Рассмотрим сначала случай двух независимых переменных x, y. Дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка называется соотношение $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$. Если функция, стоящая в левой части этого соотношения, линейна относительно частных производных u_x и u_y, то уравнение называется квазилинейным и его можно записать в виде:

$$f_1(x, y, u)u_x + f_2(x, y, u)u_y = f_3(x, y, u). \tag{1.1}$$

Решением уравнения (1.1) называется непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$, обращающая уравнение в тождество.

Будем изучать уравнение (1.1) в некоторой области $\Omega \in R^3$ переменных x, y, u. Пусть в этой области функции f_1, f_2, f_3 непрерывно дифференцируемы и $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$. Последнее условие означает, что уравнение (1.1) не вырождается и в каждой точке области Ω является дифференциальным.

Для исследования уравнения (1.1) оказывается весьма полезной его геометрическая интерпретация. Обозначим $\nu = (u_x, u_y, -1)$ — вектор нормали к графику решения $u = u(x, y)$ уравнения (1.1), $f = (f_1, f_2, f_3)$.

Заметим, что вектор f определяет в области Ω векторное поле. Теперь уравнение (1.1) можно рассматривать как равенство нулю скалярного произведения векторов ν и f : $(\nu, f) = 0$, т.е. эти векторы ортогональны. Последнее утверждение эквивалентно тому, что вектор f лежит в касательной плоскости к графику решения. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ тогда и только тогда является решением уравнения (1.1), когда ее график в каждой своей точке касается векторного поля f.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, порожденную векторным полем f, т.е. систему, определяющую векторные линии поля. Пусть r -радиус-вектор векторной линии. Тогда вектор $dr = dxi + dyj + duk$ направлен по касательной к ней. По определению векторной линии вектор $f = (f_1, f_2, f_3)$ должен быть коллинеарен вектору dr, откуда следует пропорциональность их компонент:

$$\frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{du}{f_3} = d\tau.$$

Отсюда следует:

$$\frac{dx}{d\tau} = f_1, \quad \frac{dy}{d\tau} = f_2, \quad \frac{du}{d\tau} = f_3. \tag{1.2}$$

Система (1.2) называется характеристической, а фазовые кривые этой системы, (т.е. проекции ее интегральных кривых в пространство R^3), называются характеристиками уравнения (1.1).

Соотношения (1.2) означают, что характеристики уравнения (1.1) касаются векторного поля f.

Лемма 1.1. Если характеристика σ имеет общую точку с поверхностью S, являющейся графиком решения $u = u(x, y)$ уравнения (1.1), то она целиком принадлежит S.

Доказательство. Пусть (x^0, y^0, u^0) — общая точка кривой σ и поверхности S, τ_0 — значение параметра τ на σ, соответствующее этой точке. Обозначим через σ' кривую на S :

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad u = u(x(\tau), y(\tau)),$$

где $x(\tau)$, $y(\tau)$ определяются из системы

$$\frac{dx}{d\tau} = f_1(x, y, u(x, y)), \quad \frac{dy}{d\tau} = f_2(x, y, u(x, y)), \quad x(\tau_0) = x^0, \; y(\tau_0) = y^0. \tag{1.3}$$

Так как σ' лежит на интегральной поверхности, то в точках этой кривой справедливо и уравнение (1.1). Подставим (1.3) в (1.1). Получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} = f_3(x, y, u(x, y)).$$

Здесь слева стоит полная производная $u(x, y)$ вдоль σ' : $\frac{du}{d\tau} = f_3$, и это означает, что $u(x, y)$ удовлетворяет третьему из уравнений системы (1.2). Принимая во внимание первые два соотношения в (1.3), заключаем, что σ' является фазовой кривой системы (1.2). Так как через любую точку (x, y, u) может проходить только одна фазовая кривая системы (1.3), то σ и σ' совпадают.

Пусть $\{\sigma_\xi\}$ — семейство гладких кривых в R^3. Будем говорить, что поверхность S составлена из кривых σ_ξ, если через каждую точку поверхности S проходит некоторая кривая этого семейства и принадлежит поверхности S.

Теорема 1.2. Непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ тогда и только тогда является решением уравнения (1.1), когда ее график составлен из характеристик.

Доказательство. Пусть $u = u(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция и ее график S составлен из характеристик уравнения (1.1). Как мы выяснили выше, характеристики касаются векторного поля. Это означает, что для любой точки $(x, y, u) \in S$ вектор $f = f(x, y, u)$ касается характеристики, проходящей через эту точку и принадлежащей поверхности S. Следовательно, f лежит в касательной плоскости к S и, в силу теоремы 1.1, функция $u = u(x, y)$ является решением уравнения (1.1).

Пусть теперь $u = u(x, y)$ — решение уравнения (1.1). Тогда через каждую точку ее графика можно провести характеристику, которая, в силу леммы 1.1, принадлежит S. Это означает, что поверхность S составлена из характеристик.

Задача Коши для уравнения (1.1) состоит в определении той интегральной поверхности, которая проходит через заданную кривую L в пространстве R^3 переменных x, y, u. Обозначим через l проекцию кривой L на плоскость x, y. Тогда задача Коши сводится к отысканию такого решения уравнения (1.1), которое принимает заданное значение u_0 на l.

Предварительно наметим путь решение поставленной задачи. Пусть M_0 — некоторая точка линии L. Примем ее координаты за начальные данные функций, удовлетворяющих системе (1.2). Согласно теореме существования и единственности, получим вполне определенную характеристику уравнения (1.1), выходящую из точки M_0. Проделывая это для каждой точки линии L, получим семейство характеристик. Предположим, что это семейство образует поверхность. Тогда она является интегральной поверхностью уравнения (1.1) и, кроме того, проходит через заданную кривую. Следовательно, построенная поверхность есть решение задачи Коши.

Строгое обоснование существования и единственности решения задачи Коши требует некоторых дополнительных предположений о функциях f_1, f_2, f_3 и кривой L. Оказывается, если кривая L сама является характеристикой, то указанный выше прием построения характеристик, выходящих из точек кривой L, приведет не к поверхности, а к самой линии L (см. пример 1). Задача может не иметь решения вовсе. Это будет в том случае, когда характеристики, выходящие из точек линии L не образуют в окрестности этой линии поверхность, имеющую явное уравнение $u = u(x, y)$, где $u(x, y)$ однозначна и непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка. (см. пример 2).

Пусть l — непрерывно дифференцируемая кривая без самопересечений на плоскости переменных x, y и u_0 — непрерывно дифференцируемая функция, заданная на l. Пусть L — кривая в пространстве R^3 переменных x, y, u, которая является графиком функции $u_0(x, y)$, определенной на l.

Точка (x^0, y^0, u^0) кривой L называется нехарактеристической, если проекция $\bar{f}$ вектора $f(x^0, y^0, u^0)$ на плоскость $u = 0$ не касается в точке (x^0, y^0) кривой l.

Пусть кривая l задана параметрически уравнениями: $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$, причем $x(\xi),\ y(\xi) \in C^1$ и $x_\xi^2 + y_\xi^2 \neq 0$. Тогда тот факт, что точка (x^0, y^0, u^0) является нехарактеристической, может быть выражен аналитически следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x_\xi(\xi_0) & y_\xi(\xi_0) \\ f_1(x^0, y^0, u^0) & f_2(x^0, y^0, u^0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.4}$$

Здесь ξ_0 — значение параметра ξ, соответствующее точке (x^0, y^0, u^0).

Теорема 1.3. В некоторой окрестности нехарактеристической точки существует единственное решение задачи Коши для уравнения (1.1). График этого решения составлен из характеристик, выпущенных из точек кривой L.

Доказательство. Проведем из точек кривой L характеристики. Для этого нужно решить систему (1.2) с начальными условиями:

$$x|_{\tau=0} = x(\xi), \quad y|_{\tau=0} = y(\xi), \quad u|_{\tau=0} = u_0(\xi).$$

Получим зависящее от параметра ξ семейство характеристик:

$$x = x(\tau, \xi), \quad y = y(\tau, \xi), \quad u = u(\tau, \xi). \tag{1.5}$$

В силу известных теорем о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным условиям и параметру, функции (1.5) будут непрерывно дифференцируемо зависеть от τ и ξ. Если первые два из соотношений (1.19) удастся разрешить относительно τ и ξ, то третье из соотношений (1.5), в силу теоремы 1.2, и будет являться решением поставленной задачи Коши. Для разрешимости первых двух соотношений (1.5) достаточно, чтобы при $\tau = 0$, $\xi = \xi_0$ якобиан

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\tau & y_\tau \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

был отличен от нуля. Но, в силу системы (1.2), при выполнении условия (1.4) он действительно отличен от нуля, и существование решения доказано. Единственность решения вытекает из леммы 1.1.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$uu_x + u_y = 1.$$

Система (1.3) для него имеет вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = u, \quad \frac{dy}{d\tau} = 1, \quad \frac{du}{d\tau} = 1.$$

Ее решением, выраженным через начальные значения, будет

$$x = \frac{\tau^2}{2} + u_0\tau + x_0, \quad y = \tau + y_0, \quad u = \tau + u_0.$$

Пусть линия L, через которую должна проходить интегральная поверхность, задана уравнениями

$$x = \xi^2 + \xi, \quad y = 2\xi, \quad u = \xi.$$

Подставляя в полученные решения $x_0 = \xi^2 + \xi$, $y_0 = 2\xi$, $u_0 = \xi$, получим семейство характеристик, проходящих через эту кривую:

$$x = \frac{\tau^2}{2} + \xi\tau + \xi^2 + \xi, \quad y = \tau + 2\xi, \quad u = \tau + \xi. \quad (\star)$$

Рассмотрим определитель (1.6) для нашего примера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tau + 2\xi + 1 & 2 \\ \tau + \xi & 1 \end{vmatrix} = 1 - \tau.$$

При $\tau = 0$, т.е. на кривой L, он отличен от нуля, стало быть, из первых двух уравнений $(\star)$ можно исключить параметры τ и ξ и выразить u как функцию x, y.

Пусть теперь линия L задана такими уравнениями:

$$x = \frac{\xi^2}{2}, \quad y = \xi, \quad u = \xi.$$

Заметим сразу же, что это — характеристика. Подставляя в решения системы (1.2) для нашего примера, как это сделано выше, начальные значения, получим

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \tau)^2, \; y = \tau + \xi, \; u = \tau + \xi.$$

Легко видеть, что мы получили уравнение той же кривой L, но только сдвинутой на τ, и это не дает новой информации. В этом случае определитель (1.6) равен нулю, и поэтому невозможно исключить параметры τ и ξ. Тем не менее решение задачи Коши существует. Действительно, решение уравнения, которое мы сейчас изучаем, неявно задается уравнением

$$x = \frac{1}{2}u^2 + f(u - y)$$

с произвольной функцией f. Если выбрать f так, что $f(0) = 0$, и так, что функцию u можно определить однозначно, то все соответствующие интегральные поверхности $u = u(x, y)$ будут проходить через кривую L. Пусть, например, $f(u - y) = -\frac{1}{2}(u - y)^2$. Тогда $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{2}$.

Зададим линию L уравнениями

$$x = \xi^2, \quad y = 2\xi, \quad u = \xi.$$

Получим такое семейство характеристик

$$x = \frac{1}{2}\tau^2 + \tau\xi + \xi^2, \quad y = \tau + 2\xi, \quad u = \tau + \xi.$$

Нетрудно видеть, что L не является характеристикой. Однако, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tau + 2\xi & 2 \\ \tau + \xi & 1 \end{vmatrix} = -\tau$$

обращается в нуль при $\tau = 0$. Исключив τ и ξ, получим

$$u(x,y) = \frac{y}{2} \pm \sqrt{(x - \frac{y^2}{4})},$$

но ни одна из этих функций не является решением задачи Коши, так как производные u_x, u_y не ограничены при приближении к L.

1.2. Нелинейные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$F(x,y,u,p,q) = 0, \tag{1.7}$$

где $p = u_x$, $q = u_y$. Будем предполагать, что F — непрерывная функция, обладающая непрерывными частными производными первого порядка по всем пяти аргументам в рассматриваемой области, причем $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$. Как и в случае квазилинейного уравнения, будет полезна геометрическая интерпретация уравнения (1.7). В любой точке $P(x,y,u)$ уравнение (1.7) представляет собой соотношение между p и q, определяющими направление касательной плоскости к интегральной поверхности. Возможные касательные плоскости образуют уже не пучок плоскостей, проходящих через прямую, а однопараметрическое семейство, огибающей которого является коническая поверхность с вершиной в точке P, которая называется **конусом Монжа.**

Итак, дифференциальное уравнение (1.7) в каждой точке пространства задает конус Монжа, а задача интегрирования этого уравнения состоит в отыскании поверхностей, которые в каждой своей точке касаются соответствующего конуса Монжа.

Рассматривая квазилинейное уравнение (1.1), мы выяснили, что оно задает поле направлений. Допуская некоторую вольность в терминологии, можно сказать, что уравнение (1.7) задает «поле конусов Монжа».

Конусы Монжа можно представить также с помощью соотношений, задающих их образующие. Чтобы сделать это аналитически, введем параметры λ и s. Будем считать, что p и q — функции параметра $\lambda : p = p(\lambda)$, $q = q(\lambda)$, а параметр s — расстояние от вершины конуса вдоль фиксированной образующей. Напишем уравнение касательной плоскости к интегральной поверхности в некоторой точке $P(x_0, y_0, u_0)$:

$$u - u_0 = p(\lambda)(x - x_0) + q(\lambda)(y - y_0),$$

и продифференцируем его по параметру s, а затем по λ. Тогда вдоль образующей

$$\frac{du}{ds} = p(\lambda)\frac{dx}{ds} + q(\lambda)\frac{dy}{ds},$$

$$0 = p'(\lambda)\frac{dx}{ds} + q'(\lambda)\frac{dy}{ds}.$$

Дифференцируя соотношение $F = 0$ по λ, находим:

$$F_p p'(\lambda) + F_q q'(\lambda) = 0.$$

Из этих соотношений, каждое из которых выполняется вдоль образующей, в результате несложных преобразований получим

$$dx : dy : du = F_p : F_q : (pF_p + qF_q).$$

Введя параметр τ вдоль этих кривых, можем записать последнее соотношение в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} = F_p, \quad \frac{dy}{d\tau} = F_q, \quad \frac{du}{d\tau} = pF_p + qF_q. \tag{1.8}$$

Направления образующих конуса Монжа называются характеристическими направлениями.

В то время как в случае квазилинейного уравнения каждой точке пространства соответствует только одно характеристическое направление, здесь мы в каждой точке имеем однопараметрическое семейство характеристических направлений.

Пространственные кривые, имеющие в каждой точке характеристическое направление, называются кривыми Монжа.

Характеристики являются решениями системы (1.8). Третье из уравнений этой системы называется **условием полосы.** Оно означает, что функции $x(\tau)$, $y(\tau)$, $u(\tau)$, $p(\tau)$, $q(\tau)$ определяют не только пространственную кривую, но и плоскость, касающуюся ее в каждой точке.

Конфигурация, состоящая из кривой, и семейства касающихся ее плоскостей, называется полосой.

Система (1.8) недоопределена, она состоит из трех уравнений относительно пяти неизвестных функций. Получим еще два уравнения для заданной интегральной поверхности $u = u(x, y)$. Заметим, что на интегральной поверхности $u = u(x, y)$ величины p и q можно рассматривать, как заданные функции от x и y. Первые два уравнения системы

(1.8) определяют на поверхности однопараметрическое семейство кривых, вдоль которых выполняется соотношение

$$\frac{du}{d\tau} = u_x\frac{dx}{d\tau} + u_y\frac{dy}{d\tau}$$

и, следовательно,

$$\frac{du}{d\tau} = pF_p + qF_q.$$

Дифференцируя уравнение (1.7) по x, а затем по y, получим соотношения

$$F_p p_x + F_q q_x + F_u p + F_x = 0,$$

$$F_p p_y + F_q q_y + F_u q + F_y = 0,$$

которые на поверхности $u = u(x, y)$ являются тождествами. Так как, в силу системы (1.8), $F_p = dx/d\tau$, $F_q = dy/d\tau$, а также $p_y = q_x$, то мы видим, что для кривых Монжа, заданных функциями параметра τ, эти два уравнения переходят в соотношения

$$\frac{dp}{d\tau} + F_u p + F_x = 0, \quad \frac{dq}{d\tau} + F_u q + F_y = 0.$$

Таким образом, если кривая Монжа находится на интегральной поверхности, то координаты x, y, u ее точек и величины p, q вдоль этой кривой удовлетворяют системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dx}{d\tau} = F_p, \quad \frac{dy}{d\tau} = F_q, \quad \frac{du}{d\tau} = pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{d\tau} = -(pF_u + F_x), \quad \frac{dq}{d\tau} = -(qF_u + F_y).\end{gathered} \tag{1.9}$$

Эта система называется **характеристической системой дифференциальных уравнений** для уравнения (1.7).

Решения системы (1.9), удовлетворяющие также уравнению $F = 0$, называются характеристическими полосами; их проекции в пространство $R^3_{(x,y,u)}$ называются характеристиками; их проекции в $R^2_{(x,y)}$ — лучами.

Теорема 1.4. Функция F является первым интегралом системы (1.9), т.е. $F = const$ вдоль решений системы (1.9).

Доказательство. Действительно, если мы продифференцируем функцию $F(x, y, u, p, q)$ по параметру τ, то получим:

$$\frac{dF}{d\tau} = F_p\frac{dp}{d\tau} + F_q\frac{dq}{d\tau} + F_u\frac{du}{d\tau} + F_x\frac{dx}{d\tau} + F_y\frac{dy}{d\tau}$$

В силу системы (1.9) выражение, стоящее в правой части, приобретает вид:

$$\frac{dF}{d\tau} = -F_p(pF_u + F_x) - F_q(qF_u + F_y) + F_u(pF_p + qF_q) + F_xF_p + F_yF_q = 0.$$

Система (1.9) имеет единственное решение, удовлетворяющее некоторому начальному условию, т.е. через каждую точку (x, y, u, p, q) проходит единственная характеристическая полоса. Характеристики же не определяются однозначно точкой (x, y, u), т.к. к любой точке (x, y, u) можно различными способами дописать вектор (p,q) так, чтобы выполнялось соотношение $F = 0$. Таким образом, по характеристике нельзя однозначно достроить характеристическую полосу. Разным начальным наборам — точка (x, y, u) плюс вектор (p, q) — будут соответствовать различные характеристические полосы. Их проекции в пространство $R^3_{(x,y,u)}$ определяют различные характеристики, проходящие через точку (x, y, u). Как и для квазилинейного уравнения, справедливо следующее утверждение: **если характеристическая полоса имеет общий элемент, т.е. значения x, y, u, p, q, с интегральной поверхностью, то эта полоса целиком принадлежит интегральной поверхности** (см., например, [6]).

Самым важным фактом теории уравнений в частных производных первого порядка является эквивалентность задачи интегрирования уравнения с частными производными (1.7) и характеристической системы (1.9). Мы это увидели на примере квазилинейного уравнения. Покажем, что и для общего нелинейного уравнения можно построить интегральную поверхность с помощью характеристических полос, которые получаются как решения характеристической системы.

Поставим **задачу Коши.** Пусть начальная полоса Γ задана функциями $x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)$ параметра t, причем так, что ее проекция $\gamma : x(t), y(t), u(t)$ не имеет точек самопересечения. Кроме того, предположим, что соотношение $F = 0$ и $\frac{du}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}$, которое называется соотношением полосы, выполняются тождественно по t.

Задача Коши состоит в том, чтобы в окрестности γ найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в этой окрестности уравнению $F(x, y, u, p, q) =$

0 и принимающую вместе с функциями $p = u_x$, $q = u_y$ заданные на γ начальные значения.

Для решения поставленной задачи через каждый элемент начальной полосы Γ проведем характеристическую полосу, которая задается с помощью параметра τ. Эта полоса получается как решение системы (1.9), которое при $\tau = 0$ обращается в заданные элементы начальной полосы $x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)$. Любое такое решение будем обозначать

$$x(\tau, t),\ y(\tau, t),\ u(\tau, t),\ p(\tau, t),\ q(\tau, t). \tag{1.10}$$

Существование и единственность каждого решения, а также непрерывная дифференцируемость по параметрам, гарантируется известными теоремами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первые три уравнения (1.10) определяют в параметрической форме некоторую поверхность. Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_\tau & x_t \\ y_\tau & y_t \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

отличен от нуля в некоторой окрестности начальной полосы, то мы сможем определить явное уравнение этой поверхности $u = u(x, y)$, а также выразить p и q как функции переменных x и y. Как было показано выше, F является интегралом системы (1.9), поэтому на поверхности $u = u(x, y)$ выполняется соотношение $F(x, y, u, p, q) = 0$. Остается открытым вопрос: будут ли найденные функции p и q частными производными функции $u(x, y)$. Если на поверхности $u = u(x, y)$ выполняются соотношения $p = u_x$, $q = u_y$, то эта поверхность является интегральной и, таким образом, решает задачу Коши.

Пусть $p = u_x$, $q = u_y$ на поверхности $u = u(x, y)$. Тогда, дифференцируя функцию $u(x, y)$ по τ и t, будем иметь

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u}{\partial \tau} - p\tfrac{\partial x}{\partial \tau} - q\tfrac{\partial y}{\partial \tau} = 0; \\ &\tfrac{\partial u}{\partial t} - p\tfrac{\partial x}{\partial t} - q\tfrac{\partial y}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Предположим теперь, что выполняются соотношения (1.12). Рассматривая эти соотношения как систему линейных уравнений относительно неизвестных p и q и замечая, что определитель этой системы совпадает с определителем Δ, отличным по предположению от нуля, получим, что $p = u_x$, $q = u_y$ (проделать самостоятельно).

Так как первое из соотношений (1.12) непосредственно вытекает из первых трех уравнений (1.10), то остается выяснить, при каких условиях выполнено второе из соотношений (1.12). Обозначим левые части уравнений (1.12) V и U соответственно. Рассматривая их как функции τ и t, выведем тождество

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial V}{\partial t} = -(p_\tau x_t - p_t x_\tau + q_\tau y_t - q_t y_\tau)$$

и преобразуем его правую часть, использовав характеристическую систему (1.9). Так как $V \equiv 0$, то и $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, поэтому получим:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = p_t F_p + q_t F_q + (px_t + qy_t)F_u + F_x x_t + F_y y_t.$$

Дифференцируя теперь по t соотношение $F = 0$, которое выполняется тождественно по τ и t, имеем

$$p_t F_p + q_t F_q + u_t F_u + x_t F_x + y_t F_y = 0,$$

и поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -F_u U.$$

При фиксированном t это уравнение является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции U. Так как на кривой Γ выполняется, по предположению, соотношение полосы, то в наших обозначениях $U = 0$ при $\tau = 0$. Но тогда из единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения с начальным условием $U = 0$ следует, что $U = 0$ при всех значениях параметра τ, что мы и хотели доказать.

Полученный результат резюмируем следующим образом.

Пусть дана пространственная кривая $\gamma : x = x(t),\ y = y(t),\ u = u(t)$, **которую можно дополнить функциями** $p(t),\ q(t)$ **до начальной полосы** $\Gamma : x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)$, **удовлетворяющей соотношению** $\frac{du}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}$ **и уравнению** $F = 0$. **Если вдоль этой полосы** $\Delta = F_p y_t - F_q x_t \neq 0$, **то в окрестности полосы** Γ **существует единственная интегральная поверхность, проходящая через эту полосу.**

Все предыдущие рассуждения справедливы при выполнении условия $\Delta \neq 0$. Постараемся сейчас выяснить, что же будет, если это условие не выполняется. Пусть $\Delta = 0$ вдоль некоторой полосы Γ, на которой $F = 0$ и выполняется соотношение полосы. Предположим, что существует интегральная поверхность $u = u(x, y)$, проходящая через эту полосу. Тогда из условия полосы и равенства нулю определителя Δ следует, что полоса Γ удовлетворяет первым трем уравнениям системы (1.9). Но тогда, так как и $F = 0$ на Γ, нетрудно видеть, что и последние два уравнения характеристической системы выполняются. Следовательно, полоса является характеристической.

Таким образом, **если $\Delta = 0$ на Γ, но существует интегральная поверхность, проходящая через полосу Γ, то эта полоса является характеристической. При этом через нее может проходить бесчисленное множество интегральных поверхностей.**

Если $\Delta = 0$ вдоль начальной полосы, которая не является характеристической, то решения задачи Коши, проходящего через эту полосу, не существует.

Здесь мы не будем более подробно рассматривать эти исключительные случаи и отсылаем любознательных читателей к книгам [3], [4], [6].

1.2.1. Полный, общий и особый интегралы

В этом параграфе рассмотрим другой метод интегрирования уравнения (1.7) и, в частности, решения задачи Коши, который позволяет избежать решения всех уравнений системы (1.9). Мы покажем, что для интегрирования уравнения (1.7) достаточно знать решение этого уравнения, зависящее от двух произвольных постоянных.

Пусть мы имеем такое решение

$$u = \varphi(x, y, a, b), \tag{1.13}$$

где a и b — произвольные постоянные. Частные производные p и q будут выражаться формулами

$$p = \varphi_x(x, y, a, b), \quad q = \varphi_y(x, y, a, b), \tag{1.14}$$

и, следовательно, соотношение

$$F(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi_x(x, y, a, b), \varphi_y(x, y, a, b)) = 0$$

должно выполняться тождественно не только относительно x, y, но и относительно a, b.

Если из соотношений (1.13) и (1.14) можно исключить постоянные a, b, и это исключение приводит к уравнению (1.7), то решение (1.13) называется **полным интегралом.**

Из полного интеграла можно получить и другие решения уравнения (1.7) путем вариации постоянных с помощью операций дифференцирования и исключения.

Рассмотрим уравнение (1.7) и его полный интеграл (1.13). Пусть теперь a и b — функции от x и y. Обозначим

$$p = \varphi_x(x, y, a, b), \quad q = \varphi_y(x, y, a, b)$$

(но пока мы не можем считать, что эти функции равны соответственно u_x и u_y) и подберем функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$ так, чтобы эти равенства выполнялись. Продифференцируем (1.13) по x и y.

$$\begin{aligned} u_x &= \varphi_x + \varphi_a a_x + \varphi_b b_x; \\ u_y &= \varphi_y + \varphi_a a_y + \varphi_b b_y. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Отсюда видно, что для того, чтобы $\varphi_x = u_x$, $\varphi_y = u_y$, нужно, чтобы

$$\begin{aligned} \varphi_a a_x + \varphi_b b_x &= 0; \\ \varphi_a a_y + \varphi_b b_y &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Уравнения (1.16) имеют очевидное решение $a = const$, $b = const$, что приводит нас опять к полному интегралу. Другое очевидное решение мы получим из равенств $\varphi_a = 0$, $\varphi_b = 0$. Если эти алгебраические уравнения можно разрешить относительно a и b, то, подставив их в (1.13), получим решение, не содержащее ни произвольных постоянных, ни произвольных функций. Такое решение называется **особым интегралом.**

Если по крайней мере одно из равенств $\varphi_a = 0$, $\varphi_b = 0$ не выполняется, то функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$ можно найти из условия существования нетривиального решения системы (1.16):

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = 0.$$

Если не все элементы определителя равны нулю, то обращение его самого в нуль означает, что между a и b существует зависимость. Выразим эту зависимость формулой $b = \omega(a)$ и подставим в (1.16). При этом уравнения (1.16) приводятся к одному, которое имеет вид

$$\varphi_a + \varphi_b \omega'(a) = 0.$$

Если из этого уравнения можно найти a как функцию от x, y, то будет найдена и функция $b(x, y)$. Подставив ее в (1.13), получим решение, зависящее от произвольной функции. Такое решение называется **общим интегралом.**

Нам будет полезна геометрическая интерпретация изложенного выше. Рассмотрим полный интеграл уравнения (1.7). Он представляет собой, как мы выяснили, семейство интегральных поверхностей уравнения (1.7), зависящее от двух параметров. Для получения особого интеграла мы выделяем из данного семейства некоторое однопараметрическое семейство, а затем находим его огибающую. Линии, вдоль которых огибаемая поверхность соприкасается с огибающей, находятся из системы

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, a, \omega(a)) = 0 \\ \varphi_a + \varphi_b \omega'(a) = 0, \end{cases}$$

где $b = \omega(a)$, при постоянном значении параметра. Так как функцию $\omega(a)$ можно выбрать так, чтобы для некоторого a она принимала произвольное значение b, а ее производная $\omega'(a)$ имела произвольное значение c, то два уравнения:

$$u = \varphi(x, y, a, b), \tag{1.17}$$

$$0 = \varphi_a + c\varphi_b, \tag{1.18}$$

определяют семейство кривых, зависящее от трех параметров, которые являются линиями касания огибающей и огибаемой поверхности. Покажем, что эти кривые являются характеристиками уравнения (1.7). Соответствующие полосы, полученные с помощью формул $p = \varphi_x(x, y, a, b)$, $q = \varphi_y(x, y, a, b)$, будут характеристическими. Продифференцируем (1.18) вдоль кривой, взяв в качестве параметра x вместо τ. Получим

$$\varphi_{ax} + c\varphi_{bx} = -y_x(\varphi_{ay} + c\varphi_{by}). \tag{1.19}$$

Дифференцируя $F(x, y, \varphi(x, y, a, b), p, q) = 0$ сначала по a, а затем по b, получим

$$\begin{gathered} F_u\varphi_a + F_p\varphi_{ax} + F_q\varphi_{ay} = 0, \\ F_u\varphi_b + F_p\varphi_{bx} + F_q\varphi_{by} = 0. \end{gathered}$$

Умножая второе равенство на c, складывая с первым и учитывая (1.18) и (1.19), получим $F_p y_x - F_q = 0$. Из полученного равенства сразу же следует, что

$$\frac{dx}{d\tau} = F_p, \quad \frac{dy}{d\tau} = F_q,$$

т.е. кривые, определяемые из уравнений (1.17) и (1.18) суть характеристики уравнения (1.7).

Отсюда следует, что всякий полный интеграл дифференциального уравнения с частными производными дает трехпараметрическое семейство характеристических кривых и полос. Таким образом, для того, чтобы проинтегрировать уравнение (1.7), достаточно найти его полный интеграл. Есть несколько способов нахождения полного интеграла. Один из них будет изложен в следующем параграфе.

1.2.2. Метод Лагранжа-Шарпи

Для изложения метода отыскания полного интеграла рассмотрим предварительно вопрос о нахождении решения системы двух уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией.

Пусть даны два уравнения

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q) &= 0; \\ G(x, y, u, p, q) &= 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Предположим, что в некоторой области в пространстве переменных (x, y, u, p, q) эти уравнения можно разрешить относительно p и q :

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= A(x, y, u); \\ \tfrac{\partial u}{\partial y} &= B(x, y, u). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Эта система переопределена, поэтому решение может и не существовать. Выведем условие совместности системы (1.21).

Пусть решение существует. Тогда оба соотношения (1.21) выполняются тождественно. Продифференцируем первое по x, а второе по y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = A_y + A_u \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = B_x + B_u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отсюда сразу получаем **необходимое условие** совместности

$$A_y + A_u B = B_x + B_u A. \tag{1.22}$$

Покажем теперь, что тождественное выполнение этого условия является и достаточным для совместности системы (1.21).

Проинтегрируем первое из уравнений (1.21), считая y параметром:

$$\frac{du}{dx} = A(x, y, u)$$

и добавим к этому уравнению некоторое начальное условие $u(x_0, y) = w(y)$. Пусть решением этой задачи является функция

$$u = \varphi(x, y, x_0, w(y)),$$

причем в силу начального условия

$$\varphi(x_0, y; x_0, w(y)) = w(y).$$

Последнее равенство продифференцируем по y :

$$w'(y) = \varphi_y + \varphi_w w'(y).$$

Потребуем теперь, чтобы полученное решение задачи для первого уравнения системы (1.21) удовлетворяло и второму:

$$\varphi_y + \varphi_w \frac{dw}{dy} = B(x, y, \varphi(x, y, x_0, w(y))).$$

Разрешим это уравнение относительно w' :

$$w' = \frac{B(x, y, \varphi)}{\varphi_w} - \frac{\varphi_y}{\varphi_w}. \tag{1.23}$$

Заметим, что в левой части стоит функция только переменной y. Найдем условия, при выполнении которых и правая часть зависит только от y. Для этого найдем производную по x :

$$[B_x(x, y, \varphi) + B_u(x, y, \varphi)\varphi_x - \varphi_{yx}]\varphi_w - [B(x, y, \varphi) - \varphi_y]\varphi_{wx} = 0.$$

Преобразуем это выражение. Для этого продифференцируем тождество $\varphi_x = A(x, y, \varphi)$ по y и по w :

$$\varphi_{xy} = A_y(x, y, \varphi) + A_u\varphi_y,$$

$$\varphi_{xw} = A_u(x, y, \varphi)\varphi_w,$$

и подставим в интересующее нас выражение. Получим, что

$$[B_x + B_u A - A_y - A_u u_y]\varphi_w \equiv 0$$

в силу условия (1.22), следовательно, правая часть (1.23) действительно не зависит от x. Заметим, что тогда в правой части уравнения (1.23) x

можно заменить на x_0, а затем преобразовать, учитывая $\varphi(x_0, y; x_0, w(y)) = w(y)$ и $w'(y) = \varphi_y + \varphi_w w'(y)$. Тогда получим:

$$w' = B(x_0, y, w(y)). \tag{1.24}$$

Интегрируя (1.24) с начальным условием $w(y_0) = u_0$, получим

$$w = \psi(y, y_0, u_0),$$

причем $\psi(y_0, y_0, u_0) = u_0$. Подставляя это решение в решение первого из уравнений системы (1.21), находим решение этой системы:

$$u = \varphi(x, y, x_0, \psi(y, y_0, u)),$$

которое при $x = x_0, y = y_0$ обращается в u_0.

В силу построения и свойства единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений, оказывается справедливым следующее утверждение: **если существуют непрерывные частные производные A_y, A_u, B_x, B_u и выполняется условие интегрируемости (1.22), то система (1.21) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $u = u_0$ при $x = x_0, y = y_0$.**

Идея метода Лагранжа-Шарпи построения полного интеграла состоит в нахождении второго уравнения, которое вместе с данным образует совместную систему, причем это уравнение подбирается так, чтобы оно содержало одну произвольную постоянную. При интегрировании полученной системы появляется еще одна произвольная постоянная. В результате мы получаем решение, зависящее от двух произвольных постоянных, т.е. полный интеграл.

Итак, рассмотрим уравнение первого порядка (1.7):

$$F(x, y, u, p, q) = 0.$$

Постараемся найти второе уравнение

$$\Phi(x, y, u, p, q) = a \tag{1.25}$$

так, чтобы система уравнений (1.7) и (1.25) была бы совместной. Условия совместности (1.22) получены для системы уравнений, разрешенных относительно p и q. Опираясь на этот результат, получим условия совместности системы уравнений (1.7) и (1.25). Пусть якобиан

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)} \neq 0.$$

Тогда систему (1.7), (1.25) можно разрешить относительно p и q. Дифференцируя (1.7) и (1.25) по u, получаем:

$$F_u + F_p\frac{\partial p}{\partial u} + F_q\frac{\partial q}{\partial u} = 0,$$

$$\Phi_u + \Phi_p\frac{\partial p}{\partial u} + \Phi_q\frac{\partial q}{\partial u} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{F_u\Phi_q - F_q\Phi_u}{F_p\Phi_q - F_q\Phi_p}, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = -\frac{F_p\Phi_u - F_u\Phi_p}{F_p\Phi_q - F_q\Phi_p}.$$

Дифференцируем те же равенства по x и по y и из получившихся систем найдем

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{F_p\Phi_x - F_x\Phi_p}{F_p\Phi_q - F_q\Phi_p}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{F_y\Phi_q - F_q\Phi_y}{F_p\Phi_q - F_q\Phi_p}.$$

Подставляя полученные выражения в условие совместности, используя тот факт, что

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial u}, \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y},$$

и освобождаясь от знаменателя, который по предположению не равен нулю, после элементарных преобразований получим:

$$F_p\frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\frac{\partial \Phi}{\partial u} - (F_x + pF_u)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (F_y + qF_u)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0. \quad (1.26)$$

Это линейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно неизвестной функции Φ. Для решения его запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{pF_u + F_x} = -\frac{dq}{qF_u + F_y}. \quad (1.27)$$

Так как нам достаточно найти лишь одно частное решение уравнения (1.26), то, следовательно, достаточно найти один первый интеграл системы (1.27):

$$\Phi(x, y, u, p, q) = a.$$

Пример

Найдем полный интеграл уравнения:

$$p^2x^2 + q^2y^2 = u.$$

Запишем систему (1.27):

$$\frac{dx}{2px^2}=\frac{dy}{2qy^2}=\frac{du}{2p^2x^2+2q^2y^2}=-\frac{dp}{2p^2x-p}=-\frac{dq}{2q^2y-q}.$$

Найдем интегрируемую комбинацию. Для этого заметим, что

$$\frac{pdx}{2p^2x^2}=\frac{xdp}{px-2p^2x^2}.$$

Отсюда сразу же вытекает

$$\frac{pdx+xdp}{px}=\frac{pdx}{2p^2x^2},$$

что можно записать так:

$$\frac{d(px)}{px}=\frac{dx}{2px^2},$$

откуда

$$d(px)=\frac{dx}{2x},\quad p=\frac{1}{2}\frac{lnx}{x}+\frac{a}{x}.$$

Совершенно аналогично получаем, что

$$q=\frac{1}{2}\frac{lny}{y}+\frac{b}{y}.$$

Теперь решение можем записать, исходя из уравнения:

$$u=(\frac{1}{2}lnx+a)^2+(\frac{1}{2}lny+b)^2.$$

1.2.3. Решение задачи Коши по известному полному интегралу

Рассмотрим задачу отыскания интегральной поверхности уравнения первого порядка, которая проходит через заданную кривую $l\,:\,x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ u=\chi(t)$. Пусть нам известен полный интеграл $u=\Phi(x,y,a,b)$. Найдем общий интеграл из уравнений

$$u=\Phi(x,y,a,\omega(a)),\qquad(1.28)$$

$$\Phi_a(x,y,a,\omega(a))+\Phi_\omega(x,y,a,\omega(a))\omega'(a)=0.\qquad(1.29)$$

Определим функцию $\omega(a)$ так, чтобы поверхность, задаваемая уравнениями (1.28) и (1.29), проходила через кривую l, для чего подставим параметрические уравнения кривой в (1.28).

$$-\chi(t) + \Phi(\varphi(t), \psi(t), a, \omega(a)) = 0. \tag{1.30}$$

Чтобы избежать громоздких выражений, обозначим левую часть (1.30) $U(t, a, \omega(a))$. Тогда (1.29) примет вид:

$$U_a(t, a, \omega(a)) + U_\omega \omega'(a) = 0. \tag{1.31}$$

Если $\omega(a)$ уже известна, то (1.30) определяет a через t, т.е. выделяет в каждой точке кривой l поверхность из семейства поверхностей $u = \Phi(x, y, a, \omega(a))$, проходящую через эту точку, и огибающая совокупности таких поверхностей и есть искомая интегральная поверхность. Продифференцируем (1.30) по t :

$$U_t + [U_a + U_\omega \omega'(a)]\frac{da}{dt} = 0. \tag{1.32}$$

В силу (1.31), $U_t = 0$. Последнее равенство вместе с (1.30) дает семейство от одного параметра. Исключение этого параметра дает искомое решение.

Пример

Найти решение уравнения $u = px + qy + pq$, проходящее через кривую

$$x = 0, \ u = y^2.$$

Найдем полный интеграл, для чего запишем систему уравнений:

$$\frac{dx}{x+q} = \frac{dy}{y+p} = \frac{du}{px+qy+2pq} = -\frac{dp}{0} = -\frac{dq}{0}.$$

Из двух последних членов системы сразу же получаем $p = a$, $q = b$, поэтому полный интеграл уравнения (в силу самого уравнения) имеет вид:

$$u = ax + by + ab.$$

Запишем параметрическое уравнение кривой $x = 0$, $y = t$, $u = t^2$ и подставим в полный интеграл: $t^2 = bt + ab$. Дифференцируем по t и в результате находим $b = 2t$. Подставив найденное значение параметра в полный интеграл, найдем значение параметра $a = -\frac{t}{2}$. Подставив найденные значения параметров в полный интеграл, получим выражение, зависящее только от t :

$$u = -\frac{t}{2}x + 2ty - t^2.$$

Найдем огибающую этого семейства. Дифференцируем по t и находим $t = y - \frac{x}{4}$. После элементарных преобразований получаем искомое решение:

$$u = (\frac{x}{4} - y)^2.$$

Глава 2

Уравнения в частных производных второго порядка

2.1. Классификация уравнений

Линейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u(x)$, где $x = (x_1, ...x_n)$, можно записать в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x). \tag{2.1}$$

Выражение $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, содержащее все старшие производные, называется главной частью уравнения. Пусть x^0 – некоторая фиксированная точка. Рассмотрим квадратичную форму, коэффициентами которой являются значения коэффициентов главной части, вычисленные в точке $x^0 : a_{ij}^0 = a_{ij}(x^0)$:

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 p_i p_j.$$

Q называется характеристической квадратичной формой. Для того, чтобы найти некий инвариант, позволяющий каким-то образом классифицировать линейные уравнения второго порядка, перейдем к новым переменным с помощью невырожденного преобразования

$$\xi_k = \xi_k(x). \tag{2.2}$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставив найденные производные в уравнение (1.3), получим

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl}(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + \bar{c}(\xi) u = \bar{f}(\xi), \tag{2.3}$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}.$$

Обозначим

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}.$$

Преобразуем теперь характеристическую квадратичную форму Q, положив

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} q_k. \tag{2.4}$$

Получим:

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} q_k \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} q_l = \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl} \right) q_k q_l = \sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^0 q_k q_l,$$

где

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl}.$$

Таким образом, коэффициенты главной части уравнения (1.3) в результате преобразования (2.2) меняются в точке x^0 так же, как коэффициенты характеристической квадратичной формы Q при преобразовании

(1.19). Это наблюдение позволяет найти некий инвариант, который можно положить в основу классификации линейных уравнений в частных производных второго порядка.

Действительно, как известно, выбором линейного преобразования можно привести матрицу $(\bar{a}^0_{kl})$ квадратичной формы к диагональному виду, в котором $|\bar{a}^0_{kk}| = 1$, либо 0, $\bar{a}^0_{kl} = 0$, $k \neq l$.

Согласно закону инерции, число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов $\bar{a}^0_{ij}$ в каноническом виде квадратичной формы инвариантно относительно линейного преобразования.

Определение. Уравнение (1.3) в точке x^0 называется:

— **эллиптическим**, если в каноническом виде характеристической квадратичной формы все n коэффициентов отличны от нуля и одного знака;

— **гиперболическим**, если в каноническом виде характеристической квадратичной формы все n коэффициентов отличны от нуля и один из коффициентов имеет знак, противоположный остальным;

— **параболическим**, если в каноническом виде характеристической квадратичной формы хотя бы один из коэффициентов равен нулю.

Проведенные рассуждения позволяют не только определить тип уравнения, но и привести его к простейшему виду, который называется каноническим. Для этого достаточно выбрать новые независимые переменные так, чтобы в точке x^0

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \alpha^0_{ik},$$

где α^0_{ik}— коэффициенты преобразования (1.19), приводящего характеристическую квадратичную форму Q к каноническому виду, например, полагая $\xi_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^0_{ik} x_i$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - 4u_{yz} + 8u_{zz} + u_x - u_y = 0.$$

Запишем характеристическую квадратичную форму этого уравнения:

$$Q = p_1^2 + 2p_1p_2 - 3p_2^2 - 4p_2p_3 + 8p_3^2,$$

и приведем ее к каноническому виду выделением полных квадратов:

$$Q = (p_1 + p_2)^2 - (2p_2 + p_3)^2 + 9p_3^2.$$

Положим

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + p_2; \\ q_2 &= 2p_2 + p_3; \\ q_3 &= 3p_3. \end{aligned}$$

Тогда $Q = q_1^2 - q_2^2 + q_3^2$, стало быть, уравнение гиперболическое. Заметим, что в принятых нами обозначениях матрицей полученного преобразования является P^{-1}. Выразив p через q, получим:

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1 - \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{6}q_3, \\ p_2 &= \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{6}q_3, \\ p_3 &= \frac{1}{3}q_3. \end{aligned}$$

Тогда

$$A = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$\begin{aligned} \xi &= x, \\ \eta &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ \zeta &= \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z, \end{aligned}$$

находим производные:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi - \frac{1}{2}u_\eta + \frac{1}{6}u_\zeta, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} + \frac{1}{4}u_{\eta\eta} + \frac{1}{36}u_{\zeta\zeta} - u_{\xi\eta} + \frac{1}{3}u_{\xi\zeta} - \frac{1}{6}u_{\eta\zeta}, \\ u_y &= \frac{1}{2}u_\eta - \frac{1}{6}u_\zeta, \\ u_{yy} &= \frac{1}{4}u_{\eta\eta} + \frac{1}{36}u_{\zeta\zeta} - \frac{1}{6}u_{\eta\zeta}, \\ u_z &= \frac{1}{3}u_\zeta, \\ u_{zz} &= \frac{1}{9}u_{\zeta\zeta}, \end{aligned}$$

$$u_{xy} = \frac{1}{2}u_{\xi\eta} - \frac{1}{6}u_{\xi\zeta} - \frac{1}{4}u_{\eta\eta} + \frac{1}{6}u_{\eta\zeta} - \frac{1}{36}u_{\zeta\zeta},$$
$$u_{yz} = \frac{1}{6}u_{\eta\zeta} - \frac{1}{18}u_{\zeta\zeta}.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получим его канонический вид:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - u_{\eta}.$$

Задачи

Определить тип уравнений и привести к каноническому виду.

1. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0.$
2. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + 3xu = 0.$
3. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_z - u = 0.$
4. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$
5. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0.$
6. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0.$
7. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$
8. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0.$
9. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0.$
10. $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0.$

2.2. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду на плоскости

Рассмотрим квазилинейное уравнение на плоскости:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \tag{2.5}$$

коэффициенты которого имеют непрерывные производные до второго порядка включительно и не обращаются в нуль одновременно. Характеристическая квадратичная форма уравнения (2.5) имеет вид:

$$Q = ap^2 + 2bpq + cq^2.$$

Заметим, что коэффициенты главной части уравнения (2.5) не могут обращаться в нуль одновременно. Не ограничивая общности, можно считать, что $a(x^0, y^0) > 0$. Тогда, в силу определения, уравнение (2.5) в точке (x^0, y^0) является эллиптическим, если $b^2 - ac < 0$, гиперболическим, если $b^2 - ac > 0$, параболическим, если $b^2 - ac = 0$. Для того, чтобы привести уравнение (2.5) к каноническому виду, можно, как это сделано выше, использовать матрицу преобразования характеристической квадратичной формы. По существу мы так и поступим, но при этом постараемся увидеть некоторые новые детали, которые имеют большое значение для изучения уравнений в частных производных.

Перейдем к новым переменным с помощью невырожденного преобразования

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y). \end{cases} \tag{2.6}$$

В результате получим уравнение

$$\bar{a}u_{\xi\xi} + 2\bar{b}u_{\xi\eta} + \bar{c}u_{\eta\eta} + \bar{f}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tag{2.7}$$

коэффициенты которого выражаются через коэффициенты уравнения (2.5) с помощью формул:

$$\bar{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$$

$$\bar{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2.$$

Рассмотрим теперь уравнение в частных производных первого порядка

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \tag{2.8}$$

которое называется характеристическим уравнением.

Пусть в окрестности точки (x^0, y^0) $b^2 - ac > 0$. Тогда уравнение (2.8) можно записать так:

$$[a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial\varphi}{\partial y}] \cdot [a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial\varphi}{\partial y}] = 0.$$

Приравнивая нулю каждое из выражений, стоящих в квадратных скобках, получим два линейных (в отличие от уравнения (2.8)) уравнения в частных производных первого порядка:

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{2.9}$$

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \tag{2.10}$$

Для нахождения решения каждого из них запишем соответствующие им системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b+\sqrt{b^2-ac}},\qquad \frac{dx}{a}=\frac{dy}{b-\sqrt{b^2-ac}},$$

или

$$ady-(b+\sqrt{b^2-ac})dx=0,\qquad ady-(b-\sqrt{b^2-ac})dx=0,\tag{2.11}$$

которые можно записать в виде одного уравнения:

$$ady^2-2bdxdy+cdx^2=0.\tag{2.12}$$

Если коэффициенты a, b, c уравнения (2.5) имеют непрерывные частные производные до второго порядка и $a(x^0, y^0)\neq 0$, то существуют интегралы уравнений (2.11):

$$\varphi_1(x,y)=const,\qquad \varphi_2(x,y)=const,\tag{2.13}$$

левые части которых будут решениями уравнения (2.8).

Кривые (2.13) называются **характеристическими кривыми** или просто **характеристиками** уравнения (2.5).

Для уравнения гиперболического типа $b^2-ac>0$ и, следовательно, интегралы (2.13) вещественны и различны, поэтому гиперболическое уравнение имеет два различных семейства вещественных характеристик.

Положим в преобразовании (2.6)

$$\xi=\varphi_1(x,y),\qquad \eta=\varphi_2(x,y),$$

где $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)$– различные решения уравнения (2.8). Тогда $\bar{a}=\bar{c}=0$, $\bar{b}\neq 0$, и мы получаем каноническй вид гиперболического уравнения:

$$u_{\xi\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Пусть в окрестности точки (x^0, y^0) $b^2-ac=0$. Тогда уравнение (2.5) параболическое, а уравнения (2.9) и (2.10) совпадают и обращаются в уравнение

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.\tag{2.14}$$

Нетрудно видеть, что всякое решение уравнения (2.14), в силу условия $b^2-ac=0$, удовлетворяет также уравнению

$$b\frac{\partial\varphi}{\partial x}+c\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.\tag{2.15}$$

Таким образом, параболическое уравнение имеет только одно семейство вещественных характеристик.

Положим в преобразовании (2.6) $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – решение уравнения (2.14), а за $\eta(x, y)$ возьмем любую непрерывно дифференцируемую функцию так, чтобы якобиан преобразования

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

был бы отличен от нуля в окрестности точки (x^0, y^0). Тогда $\bar{a} = 0$, а так как

$$\bar{b} = (a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y})\frac{\partial\eta}{\partial x} + (b\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c\frac{\partial\varphi}{\partial y})\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

то $\bar{b} = 0$ и канонический вид уравнения параболического типа таков:

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Пусть теперь $b^2 - ac < 0$, то есть уравнение (2.5) эллиптическое. Если коэффициенты a, b, c аналитичны в окрестности точки (x^0, y^0), то уравнение (2.8) имеет в этой окрестности аналитическое решение:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y).$$

Положим в преобразовании (2.6)

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y).$$

Разделяя в тождестве

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

действительную и мнимую части, получим

$$a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= a\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

откуда следует, что $a = c$, $b = 0$ и канонический вид эллиптического уравнения таков:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Рассмотрим примеры.

1. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$.

$b^2 - ac = 1 - (-3) = 4 \Longrightarrow$ уравнение гиперболическое. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 2dxdy - 3dx^2 = 0 \Longrightarrow (\frac{dy}{dx})^2 + 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1, \ \frac{dy}{dx} = -3,$$

откуда находим характеристики: $x - y = c$, $3x + y = c$. Положим $\xi = x - y$, $\eta = 3x + y$ и найдем производные

$$u_x = u_\xi + 3u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta},$$

$$u_y = -u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденные производные в уравнение, получим канонический вид

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{16}(u_{xi} - u_{eta}) = 0.$$

2. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$.

$b^2 - ac = -y \Longrightarrow$уравнение гиперболическое при $y < 0$, эллиптическое при $y > 0$.

Рассмотрим случай $y > 0$.

$$dy^2 + ydx^2 = 0. \Longrightarrow \frac{dy}{i\sqrt{y}} = \pm dx, \Longrightarrow x \pm 2i\sqrt{y} = c.$$

Положим $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$ и найдем производные:

$$u_x = u_\xi, \ u_{xx} = u_{\xi\xi},$$

$$u_y = u_\eta\frac{1}{\sqrt{y}}, \ u_{yy} = u_{\eta\eta}\frac{1}{y} - \frac{1}{2}u_\eta y^{-\frac{3}{2}}.$$

После подстановки в исходное уравнение получим канонический вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0.$$

3. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0.$
$b^2 - ac = 0 \Longrightarrow$ уравнение параболическое.

$$4dy^2 - 4dxdy + dx^2 = 0 \Longrightarrow (2dy - dx)^2 = 0 \Longrightarrow 2y - x = c.$$

Положим $\xi = x - 2y,\ \eta = x$. Найдем производные и подставим в уравнение. Получим канонический вид

$$u_{\eta\eta} + u_\xi = 0.$$

Задачи
Привести к каноническому виду.

1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0.$
2. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0.$
3. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_x + 3u_y - u = 0.$
4. $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$
5. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0.$
6. $tg^2 x u_{xx} - 2ytgxu_{xy} + y^2u_{yy} + tg^3 x u_x = 0.$
7. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0.$
8. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0.$
9. $u_{xx} - yu_{yy} = 0.$
10. $u_{xy} - xu_{yy} = 0.$

2.3. Задача Коши для уравнения колебаний струны

1. Вывод уравнения колебаний струны

При построении математической модели необходимо отразить самое существенное в изучаемом явлении и отбросить второстепенное. Что является главным, а что второстепенным определяется научным поиском на данном этапе исследований. Сейчас для нас главным будет построение максимально простой модели процесса колебаний струны, поэтому будем предполагать, что струна однородна, толщина ее постоянна, колебания происходят в одной плоскости x, u, а вектор смещения перпендикулярен в любой момент времени оси Ox. Тогда процесс колебания можно описать функцией $u(x,t)$, которая представляет собой смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия, совпадающего с осью Ox.

Под струной понимают гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю. Это, в свою очередь, означает, что струна не сопротивляется изгибу. Величина натяжения, возникающего в упругой струне, вычисляется по закону Гука. Будем рассматривать только малые поперечные колебания, поэтому будем пренебрегать квадратом u_x по сравнению с единицей. Выделим произвольный участок струны (x_1, x_2) и найдем его длину после деформации.

$$l' = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2}dx \approx x_1 - x_2,$$

в силу чего можно считать, что при малых колебаниях в пределах принятой точности удлинения участков струны не происходит. Но тогда, в силу закона Гука, следует, что величина натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Покажем, что натяжение не зависит и от x. Найдем проекции натяжения на оси x и u :

$$T_x = T(x)\cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx T(x),$$

$$T_u = T(x)\sin\alpha \approx T(x)\operatorname{tg}\alpha = T(x)u_x,$$

где α – угол наклона касательной к кривой $u(x,t)$ с осью Ox. На участке (x_1, x_2) действуют силы натяжения, внешние силы и сила инерции. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю. По предположению, силы инерции и внешние силы направлены вдоль оси u, поэтому

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0.$$

Теперь ясно, что $T(x,t) = T_0$.

Воспользуемся вторым законом Ньютона. Пусть $\rho(x)$ – линейная плотность струны. Приравняем изменение количества движения участка струны (x_1, x_2) за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ импульсу действующих сил: натяжения $T_0[u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t)]$ и внешней силы, которую будем считать непрерывно распределенной с плотностью $F(x,t)$, рассчитанной на единицу длины. Получим:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi,t_2) - u_t(\xi,t_1)]\rho(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t)]dt + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi,t)d\xi dt.$$

Предположим, что $u(x,t)$ имеет непрерывные производные по обеим переменным до второго порядка включительно. Тогда, применив теорему о среднем, разделив на $\Delta x\Delta t$, после чего, перейдя к пределу при $x_2 \to x_1, t_2 \to t_1$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны:

$$\rho(x)u_{tt} = T_0 u_{xx} + F(x,t). \tag{2.16}$$

В случае постоянной плотности и отсутствия внешних сил получим, обозначив $a^2 = T_0/\rho(x)$, уравнение свободных колебаний струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{2.17}$$

2. Решение уравнения колебаний струны

Рассмотрим уравнение (2.17) и найдем его характеристики.

$$dx^2 - a^2dt^2 = 0, \implies x - at = c, \quad x + at = c.$$

Положим

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Тогда уравнение (2.17) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

Перепишем его так:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0,$$

откуда легко следует, что функция, стоящая в скобках, не зависит от η, то есть,

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = f_1(\xi),$$

где $f_1(\xi)$ — произвольная функция. Интегрируя полученное уравнение по ξ, рассматривая η как параметр, найдем

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

где $g(\eta)$ — произвольная функция. Возвращаясь к старым переменным, будем иметь

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at). \tag{2.18}$$

Нетрудно проверить, что функция $u(x,t)$, определяемая формулой (2.18), есть решение уравнения (2.17), если f и g произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Явление, описываемое функцией $f(x - at)$, называется прямой волной, а функцией $g(x + at)$ — обратной волной.

3. О корректной постановке краевых задач

Из формулы (2.18) мы видим, что уравнение (2.17) имеет бесчисленное множество решений. Чтобы выделить одно, вполне определенное, нам понадобятся дополнительные условия.

Заметим, что любое уравнение в частных производных может иметь бесчисленное множество решений. Чтобы уравнение имело одно решение, необходимо на искомое решение уравнения наложить дополнительные условия, которыми могут быть, например, начальные и граничные условия. Дополнительные условия, как правило, вытекают из физической постановки задачи.

Для уравнений в частных производных очень важно указать класс функций, среди которых разыскивается решение. Обычно это то или иное функциональное пространство, например, $C^k(\Omega)$ или $W_p^l(\Omega)$.

При постановке задач для уравнений в частных производных нужно учитывать следующий факт. Все известные функции, входящие в уравнение, а также в начальные и граничные условия, определяются из опыта и поэтому не могут быть найдены совершенно точно. Неизбежно возникающая погрешность в данных задачи будет сказываться и на решении. Возникает вопрос, какова будет погрешность решения? Существуют примеры, когда малая погрешность в исходных данных влечет большую погрешность решения. Поэтому, исследуя вопрос о разрешимости поставленной задачи, мы должны рассматривать вопрос о зависимости решения от исходных данных.

Определение. Задача называется поставленной **корректно**, если решение задачи, удовлетворяющее требуемым условиям, существует, единственно и устойчиво.

Последнее свойство означает, что малые изменения данных задачи приводят к малым изменениям решения.

4. Задача Коши для уравнения колебаний струны

Найти решение уравнения (2.17), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{2.19}$$

Пусть $\varphi(x) \in C^2(-\infty,\infty)$, $\psi(x) \in C^1(-\infty,\infty)$. В (2.18) положим $t = 0$ и из первого условия Коши получим

$$\varphi(x) = f(x) + g(x).$$

Дифференцируя (2.18) и полагая затем $t = 0$, из второго условия Коши получим

$$\psi(x) = -af'(x) + ag'(x).$$

Второе из этих равенств проинтегрируем, и после несложных преобразований получим решение задачи Коши

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi. \tag{2.20}$$

Мы показали, что решение задачи Коши существует. Формула (2.20) называется формулой Даламбера. Покажем, что оно единственно.

Предположим, что существуют два различных решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t$ задачи Коши с условиями (2.19) для уравнения (2.17), где для простоты положим $a = 1$. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ есть решение задачи Коши с однородными начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \tag{2.21}$$

Интегрируя очевидное тождество

$$-2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0$$

по треугольной области Δ с вершинами в точках $A(x-t,0)$, $B(x+t,0)$, $C(x,t)$, получим

$$\int\limits_{\Delta}\left[-2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right] d\xi d\tau =$$

$$= -\int_{\partial\Delta} 2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}d\tau + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 d\xi + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\xi = 0.$$

Вдоль AB, в силу (2.21), $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$. Заметим, что BC и CA – характеристики уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, и вдоль этих отрезков имеем соответственно $d\xi = -d\tau$, $d\xi = d\tau$, поэтому интеграл по $\partial\Delta$ можно переписать так:

$$\int_{BC} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau - \int_{CA} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = 0$$

или, переходя к обычным интегралам,

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = 0,$$

откуда следует, что $u_\xi - u_\tau = 0$ на BC, $u_\xi + u_\tau = 0$ на AC. Следовательно, в точке $C(x,t)$ имеют место оба эти равенства, а значит,

$$u_x = 0, \quad u_t = 0.$$

Так как точка C выбрана произвольно, то равенства $u_x = 0$, $u_t = 0$ имеют место всюду на плоскости переменных x, t. Это означает, что $u(x,t) = const$. Но, в силу первого из начальных условий, $u(x,0) = 0$, откуда следует, что $u(x,t) = 0$ всюду.

Покажем, что полученное решение устойчиво. Пусть выбрано $\varepsilon > 0$ и $|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \varepsilon$, $|\psi(x) - \bar{\psi}(x)| < \varepsilon$. Рассмотрим разность $u(x,t) - \bar{u}(x,t)$ решений задачи Коши с начальными данными $\varphi(x), \psi(x)$ $\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)$.

$$|u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \le \frac{1}{2}|\varphi(x-at) - \bar{\varphi}(x-at)| + \frac{1}{2}|\varphi(x+at) - \bar{\varphi}(x+at)| +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi(\xi) - \bar{\psi}(\xi)|d\xi < \varepsilon(1+t),$$

откуда следует, что на любом конечном промежутке времени решение задачи Коши для уравнения колебаний струны непрерывно зависит от данных задачи.

Таким образом, задача Коши для уравнения колебаний струны поставлена корректно.

2.4. Задача Коши для волнового уравнения

Для наглядности рассмотрим случай трех пространственных переменных, т.е. уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{2.22}$$

Покажем, что функция

$$u(x,t) = \int_S \frac{\mu(y)}{|y-x|} ds_y, \tag{2.23}$$

где $|y-x|$– расстояние между точками $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$, S — сфера $|y-x|^2=t^2$, $\mu(y)$ – заданная на сфере S дважды непрерывно дифференцируемая функция, является решением уравнения (2.22). Подставим эту функцию в уравнение. Чтобы найти производные этой функции, преобразуем (2.23), произведя замену переменных $y_i = x_i + t\xi_i$, $i=1,2,3$, в результате чего формула (2.23) приобретает вид

$$u(x,t) = t\int_\sigma \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)d\sigma_\xi, \tag{2.24}$$

где σ– единичная сфера $|\xi|=1$, $d\sigma_\xi$– элемент ее площади, и $ds_y = t^2 d\sigma_\xi$. Из (2.24) имеем

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = t\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi. \tag{2.25}$$

Для того, чтобы найти производную по t, удобно рассмотреть интеграл

$$I = \int_S [\frac{\partial \mu}{\partial y_1}\nu_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2}\nu_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_3}\nu_3] ds_y, \tag{2.26}$$

где $\nu(y)=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$– внешняя нормаль к S в точке y. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_\sigma \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)d\sigma_\xi +$$

$$+t\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\xi_i d\sigma_\xi = \frac{u}{t} + \frac{I}{t}. \tag{2.27}$$

Дифференцируя полученное равенство еще раз по t, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}.$$

Осталось найти производную $\frac{\partial I}{\partial t}$. Для этого преобразуем (2.26) с помощью формулы Остроградского-Гаусса, в силу которой

$$I = \int\limits_{|y-x|^2 \leq t^2} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\tau_y,$$

где $d\tau_y$— элемент объема. Теперь перейдем к сферическим координатам, в которых

$$I = \int\limits_0^t d\rho \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu\rho^2 \sin\theta d\varphi.$$

где $\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho = d\tau_y$. Так как $\sin\theta d\theta d\varphi = d\sigma_\xi$, то

$$\frac{\partial I}{\partial t} = t^2 \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu \sin\theta d\varphi = t^2 \int\limits_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi,$$

и окончательно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t \int\limits_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi.$$

Сравнивая полученное выражение с (2.25), убеждаемся в справедливости утверждения: (2.23) — решение уравнения(2.22).

Решение задачи Коши. Формула Кирхгофа

Обозначим

$$M(\mu) = \int\limits_\sigma \mu(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, x_3 + t\xi_3) d\sigma_\xi. \qquad (2.28)$$

Тогда формула (2.24) примет вид

$$u(x,t) = tM(\mu).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $\mu(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, то, наряду с $tM(\mu)$, решением уравнения (2.22) будет и $\frac{\partial}{\partial t}[tM(\mu)]$.

Покажем теперь, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}tM(\psi) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)] \tag{2.29}$$

является решением задачи Коши для уравнения (2.22) с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2.30}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x). \tag{2.31}$$

Так как выше было показано, что каждое слагаемое в (2.29) является решением уравнения (2.22), то остается показать, что (2.29) удовлетворяет начальным условиям (2.30), (2.31).

Положим в формуле (2.29) $t = 0$. Тогда

$$u(x,0) = \frac{1}{4\pi}M(\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma}\varphi(x)d\sigma_\xi = \varphi(x).$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\psi)] + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[tM(\varphi)] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\psi)] + \frac{1}{4\pi}t(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})M(\varphi),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma}\psi(x)d\sigma_\xi = \psi(x).$$

2.5. Задачи Коши и Гурса для уравнений с переменными коэффициентами

При изучении задачи Коши для уравнения колебаний струны нельзя было не заметить роль характеристик. Нам удалось построить общее решение, что позволило получить формулу Даламбера. Дело обстоит гораздо сложнее, если коэффициенты уравнения являются функциями независимых переменных.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y). \tag{2.32}$$

Заметим, что уравнение (2.32) записано в каноническом виде и его характеристиками являются прямые $x = const, \quad y = const$.

Пусть l— дуга кривой, которая пересекает прямые, параллельные характеристикам, не более, чем в одной точке, а уравнение этой дуги может быть записано в виде $y = g(x)$.

Рассмотрим задачу Коши с данными на нехарактеристической кривой l :

$$u|_{y=g(x)} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=g(x)} = \psi(x). \tag{2.33}$$

Можно показать, что эта задача имеет решение, но мы сначала получим представление ее решения, для чего применим метод Римана, к изложению которого и приступаем.

Начало классической теории гиперболических уравнений было положено Б.Риманом, получившим представление решения задачи Коши для уравнения второго порядка. В его работе нет доказательства существования и способа построения решений в общем случае, а лишь рассмотрены некоторые примеры, допускающие явное решение. В предположении, что решение существует, Риман дает его изящное интегральное представление.

Рассмотрим оператор

$$L^*v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv, \tag{2.34}$$

который называется формально сопряженным (или сопряженным по Лагранжу) оператором с оператором Lu. Имеет место тождество

$$2(vLu - uL^*v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2buv\right). \tag{2.35}$$

Пусть $P(\xi, \eta)$— произвольная точка плоскости xOy. Рассмотрим область, ограниченную двумя характеристиками различных семейств, выходящих из точки $P(\xi, \eta)$, и кривой l, которая является носителем начальных данных. Обозначим эту область Δ, а точки пересечения характеристик $x = \xi$, $y = \eta$ с кривой l — соответственно A и B. Проинтегрируем по области Δ тождество (2.35) и, применив формулу Грина, получим

$$2\int_{\Delta}(vLu - uL^*v)dxdy =$$

$$= \int_{\partial\Delta}(vu_y - uv_y + 2auv)dy - (vu_x - uv_x + 2buv)dx. \tag{2.36}$$

Граница $\partial\Delta$ состоит из трех частей: характеристик AP, PB и дуги AB. Преобразуем интегралы вдоль характеристик.

$$\int\limits_{AP}(vu_y - uv_y + 2auv)dy = (uv)|_P - (uv)|_A - \int\limits_{AP} u(v_y - av)dy,$$

$$\int\limits_{PB}(vu_x - uv_x + abuv)dx = (uv)|_B - (uv)|_P - \int\limits_{PB} u(v_x - bv)dx.$$

Подставляя полученные выражения в (2.36), получим

$$(uv)_P = \frac{(uv)_A + (uv)_B}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{BA}(vu_x - uv_x + 2buv)dx + (vu_y - uv_y + 2auv)dy +$$

$$+\int\limits_{AP} u(v_y - av)dy + \int\limits_{PB} u(v_x - bv)dx + \int\limits_{\Delta}[vLu - uL^*v]dxdy.$$

Пусть теперь $u(x,y)$ — решение задачи Коши для уравнения (2.32). Функцию $v(x,y,\xi,\eta)$ выберем следующим образом:

$$\begin{array}{ll} a) & L^*v = 0, \\ b) & v_y - av = 0, \quad x = \xi, \\ c) & v_x - bv = 0, \quad y = \eta, \\ d) & v = 1, \quad x = \xi, \ y = \eta. \end{array}$$

Тогда, если удастся найти такую функцию v, мы получим представление решения задачи Коши:

$$u(P) = \frac{(uv)_A + (uv)_B}{2} + \int\limits_{\Delta} vf\,dxdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{BA}(vu_x - uv_x + 2buv)dx + (vu_y - uv_y + 2auv)dy.$$

Таким образом, вопрос о возможности представления решения задачи Коши с помощью этой формулы сведен к задаче нахождения функции v, удовлетворяющей условиям a) - d).

Заметим, что условия b) и c) суть дифференциальные уравнения вдоль характеристик. Интегрируя их и применяя условие d), получим

$$v(x,\eta;\xi,\eta) = \exp\int_{\xi}^{x} b(t,\eta)dt, \tag{2.37}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta) = \exp\int_{\eta}^{y} a(\xi,t)dt. \tag{2.38}$$

Задача нахождения решения уравнения $L^*v = 0$, удовлетворяющего условиям (2.37)-(2.38), называется задачей Гурса.

Задача Гурса

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y). \tag{2.39}$$

Пусть известны значения $u(x,y)$ на двух пересекающихся характеристиках

$$u(x_0,y) = \varphi_1(y), \quad y_0 \le y \le b, \tag{2.40}$$

$$u(x,y_0) = \varphi_2(x), \quad x_0 \le x \le a, \tag{2.41}$$

причем заданные функции имеют непрерывные производные первого порядка и удовлетворяют условию согласования $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0)$.

Покажем, что решение поставленной задачи существует и единственно в прямоугольнике $D = \{(x,y): \ x_0 \le x \le a, \ y_0 \le y \le b\}$.

Пусть $u(x,y)$– решение задачи Гурса (2.39) - (2.40) - (2.41).

Положим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w. \tag{2.42}$$

Уравнение (2.39) можно теперь переписать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = f - av - bw - cu, \tag{2.43}$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} v(x,y) = v(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} [f - av - bw - cu]dy \\ w(x,y) = w(x_0,y) + \int\limits_{x_0}^{x} [f - av - bw - cu]dx \\ u(x,y) = u(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} w(x,y)dy \end{cases}$$

или, так как в силу условий (2.40), (2.41)

$$v(x,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=y_0} = \varphi_2'(x), \quad w(x_0,y) = \frac{\partial u}{\partial y}|_{x=x_0} = \varphi_1'(x),$$

$$\begin{cases} v(x,y) = \varphi_2'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} [f - av - bw - cu]dy \\ w(x,y) = \varphi_1'(y) + \int\limits_{x_0}^{x} [f - av - bw - cu]dx \\ u(x,y) = \varphi_2(x) + \int\limits_{y_0}^{y} w(x,y)dy \end{cases} \qquad (2.44)$$

Таким образом, если $u(x,y)$– решение задачи Гурса (2.39) - (2.40) - (2.41), то тройка функций u, v, w– решение системы (2.44).

Оказывается, верно и обратное: если u, v, w– решение системы (2.44), то $u(x,y)$– решение задачи Гурса.

Действительно, всякое решение системы (2.44) удовлетворяет системе (2.43) и второму из равенств (2.42). Дифференцируя теперь последнее из равенств (2.44) по x, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_2'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial w}{\partial x} dy =$$

$$= \varphi_2'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} [f - av - bw - cu]dy = v(x,y).$$

Таким образом, выполняется и первое из равенств (2.42).

Проверим, удовлетворяет ли функция u условиям (2.40) и (2.40). Положим в последнем равенстве системы (2.44) $y = y_0$, а затем $x = x_0$. Получим

$$u(x,y_0) = \varphi_2(x);$$

$$u(x_0,y)=\varphi_2(x_0)+\int\limits_{y_0}^{y} w(x_0,y)dy=\varphi(x_0)+\int\limits_{y_0}^{y}\varphi_1'(y)dy=$$

$$=\varphi_2(x_0)+\varphi_1(y)-\varphi_1(y_0)=\varphi(y).$$

Итак, мы показали, что задача (2.39) - (2.40) - (2.41) и система (2.44) эквивалентны.

Решение системы (2.44) будем искать методом последовательных приближений. Пусть

$$v_0=\varphi_2'(x),\quad w_0=\varphi_1'(y),\quad u_0=\varphi_2(x),$$

$$\begin{cases} v_n=\varphi_2'(x)+\int\limits_{y_0}^{y}[f-av_{n-1}-bw_{n-1}-cu_{n-1}]dy\\ w_n=\varphi_1'(y)+\int\limits_{x_0}^{x}[f-av_{n-1}-bw_{n-1}-cu_{n-1}]dx\\ u_n=\varphi_2(x)+\int\limits_{y_0}^{y}w_{n-1}(x,y)dy \end{cases}\tag{2.45}$$

Докажем сходимость последовательностей $u_n,\ \ v_n,\ \ w_n$.
Пусть $\varphi_i,\ \ \varphi_i',\ \ f(x,y),\ \ a(x,y),\ \ b(x,y),\ \ c(x,y)$ ограничены в прямоугольнике D. Рассмотрим

$$\begin{cases} v_{n+1}-v_n=-\int\limits_{y_0}^{y}[a(v_n-v_{n-1})+b(w_n-w_{n-1})+c(u_n-u_{n-1})]dy,\\ w_{n+1}-w_n=-\int\limits_{x_0}^{x}[a(v_n-v_{n-1})+b(w_n-w_{n-1})+c(u_n-u_{n-1})]dx,\\ u_{n+1}-u_n=\int\limits_{y_0}^{y}(w_n-w_{n-1})dy. \end{cases}\tag{2.46}$$

Покажем, что справедливы следующие оценки

$$\begin{cases} |v_n-v_{n-1}|\le AK^{n-1}\frac{(x-x_0+y-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},\\ |w_n-w_{n-1}|\le AK^{n-1}\frac{(x-x_0+y-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},\\ |u_n-u_{n-1}|\le AK^{n-1}\frac{(x-x_0+y-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{cases}\tag{2.47}$$

где $K>|a|+|b|+|c|$, $A>0$ — некоторые постоянные, не зависящие от n. Пусть $n=1$. Рассмотрим

$$v_1-v_0=\int\limits_{y_0}^{y}(f-av_0-bw_0-cu_0)dy.$$

Так как по условию все функции φ_i, φ_i', $f(x,y)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ ограничены, то найдется такое число A, что

$$|v_1 - v_0| \le \int\limits_{y_0}^{b} (|f| + |a||\varphi_2'| + |b||\varphi_1'| + |c||\varphi_2|)dy \le A.$$

Совершенно аналогично получим

$$|w_1 - w_0| \le A, \quad |u_1 - u_0| \le A.$$

Покажем, что неравенства (2.47) останутся справедливыми при замене n на $n+1$. Из (2.46) имеем:

$$|v_{n+1} - v_n| \le \int\limits_{y_0}^{y} (|a| + |b| + |c|)K^{n-1} A \frac{(x - x_0 + y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy \le$$

$$\le AK^n \int\limits_{y_0}^{y} \frac{(x - x_0 + y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy =$$

$$= AK^n \left[\frac{(x - x_0 + y - y_0)^n}{n!} - \frac{(x - x_0)^n}{n!} \right] \le AK^n \frac{(x - x_0 + y - y_0)^n}{n!}.$$

Так же оцениваются и две другие разности в (2.47).

Из полученных оценок следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1}), \quad v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n-1}), \quad w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - w_{n-1}),$$

так как они мажорируются сходящимся рядом

$$A + A \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \frac{(x - x_0 + y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

сумма которого,как известно, равна

$$A + Ae^{K(x - x_0 + y - y_0)}.$$

Но тогда последовательности u_n, v_n, w_n в прямоугольнике D равномерно сходятся к определенным пределам, так как они представляют собой не что иное, как частичные суммы рассмотренных рядов. Переходя к пределам в (2.45), видим, что эти предельные функции u, v, w удовлетворяют системе (2.44), а в силу эквивалентности, u есть решение задачи Гурса.

Покажем теперь, что это решение единственно. Для этого достаточно проверить, что в случае, когда $f \equiv 0$, $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 0$, система (2.44) не имеет других решений, кроме $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, $w \equiv 0$. Допустим, что система имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям $|u| < A$, $|v| < A$, $|w| < A$. Тогда для этого решения справедливы неравенства

$$\begin{cases} |u| \leq AK^{n-1}\frac{(x-x_0+y-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |v| \leq AK^{n-1}\frac{(x-x_0+y-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |w| \leq AK^{n-1}\frac{(x-x_0+y-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{cases}$$

которые выводятся так же, как (2.47).

Отсюда сразу следует, что $u = v = w = 0$.

Доказанная однозначная разрешимость задачи Гурса завершает доказательство существования решения задачи Коши.

Замечание. Представление решения задачи Гурса может быть получено с помощью функции Римана. Об этом, а также о некоторых свойствах и физическом смысле функции Римана можно прочитать в [10], [11].

Задачи

Найти общее решение уравнений.

1. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$.

2. $u_{xy} + au_x = 0$.

3. $u_{xy} + bu_y = 0$.

4. $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0$.

5. $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$.

Решить задачу Коши.

1. $u_{xy} + u_x = 0$,
   $u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1$.

2. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0,$
   $u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0.$

3. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,$
   $u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = x + \cos x.$

4. $xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0,$
   $u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad x > 0.$

5. $u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0,$
   $u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 2.$

2.6. Уравнения параболического типа

Уравнения параболического типа возникают при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Типичным представителем уравнений этого типа и к тому же наиболее простым является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{2.48}$$

Замечание. О выводе уравнения теплопроводности см. [7], [12].

2.6.1. Первая краевая задача. Принцип максимума

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где Ω– ограниченная область в R^n, поставим смешанную задачу для уравнения (2.48)

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2.49}$$

$$u|_S = \psi(x), \quad x \in S, \tag{2.50}$$

где $S = \partial\Omega \times (0,T)$– боковая поверхность цилиндра Q_T.

Теорема 2.1. Функция $u(x,t)$, удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности (2.48) в цилиндре Q_T и непрерывная вплоть до его границы, принимает наибольшее и наименьшее значения на $\Gamma = \Omega_0 \cup S$, где $\Omega_0 = \{(x,t):\ x \in \Omega, \quad t = 0\}$.

Доказательство. Мы ограничимся случаем максимума, так как случай минимума сводится к случаю максимума переменой знака функции $u(x.t)$.

Обозначим через M наибольшее значение решения $u(x,t)$ уравнения (2.48) в цилиндре $\bar{Q}_T$, а через m— ее наибольшее значение на Γ и допустим, что $M > m$, то есть $u(x_0, t_0) = M, \quad x_0 \in \Omega, \quad 0 < t_0 \leq T$.

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{2nd^2}|x - x_0|^2,$$

где d— диаметр области Ω.

Заметим, что

$$v(x,t)|_\Gamma \leq m + \frac{M-m}{2n} = \frac{M}{2n} + \frac{(2n-1)m}{2n} < M,$$

$$v(x_0, t_0) = M.$$

Следовательно, $v(x,t)$ также, как и $u(x,t)$, принимает наибольшее значение в некоторой внутренней точке цилиндра (x_1, t_1), $x_1 \in \Omega, \quad 0 < t_1 \leq T$. Тогда в этой точке $\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \leq 0$, откуда следует, что в точке $(x_1, t_1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \geq 0$.

С другой стороны,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - a^2 \frac{M-m}{d^2} = -a^2 \frac{M-m}{d^2} < 0,$$

что противоречит предыдущему неравенству, поэтому теорема доказана.

Теорема 2.2. Существует не более одного решения первой краевой задачи (2.49)-(2.50) для уравнения (2.48).

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения u_1 и u_2 этой задачи. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяют уравнению (2.48) и однородным условиям (2.49)-(2.50). В силу теоремы о максимуме и минимуме $u \leq 0, \quad u \geq 0$ в $\bar{Q}_T$, откуда следует, что $u_1 = u_2$.

2.6.2. Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, -\infty < x < \infty, \tag{2.51}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2.52}$$

где $\varphi(x)$– непрерывная и ограниченная функция.

Теорема 2.3. Существует не более одного ограниченного решения $|u(x,t)| \le M$, $u(x,t) \in C^2(t > 0, x \in R^1) \cap C(t \ge 0, x \in R^1)$ задачи Коши для уравнения (2.51).

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$– два решения задачи Коши. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.51) и однородному начальному условию $u(x,0) = 0$. Так как решения ограничены, то $|u(x,t)| \le 2M$. Теорему о максимуме и минимуме непосредственно применить нельзя, так как она доказана для ограниченной области. Чтобы ей воспользоваться, рассмотрим ограниченную область

$$|x| \le L, \quad 0 \le t \le T$$

и введем функцию

$$v(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right),$$

которая удовлетворяет уравнению (2.51). Нетрудно убедиться в том, что

$$v(x,0) \ge u(x,0) = 0, \quad v(\pm L,t) \ge |u(\pm L,t)|.$$

Применяя теперь теорему о максимуме и минимуме к функциям $v(x,t) - u(x,t)$, $v(x,t) + u(x,t)$ в построенной ограниченной области, будем иметь

$$v(x,t) - u(x,t) \ge 0, \quad v(x,t) + u(x,t) \ge 0,$$

откуда

$$-v(x,t) \le u(x,t) \le v(x,t)$$

или

$$|u(x,t)| \le v(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Фиксируя некоторое значение (x_0, t_0) и выбирая L достаточно большим, получим

$$|u(x_0,t_0)| < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности (x_0, t_0) и ε, следует, что $u(x,t) \equiv 0$, т.е. $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Существование решения задачи Коши

Найдем сначала частные решения уравнения (2.51) в виде

$$u(x,t) = T(t)X(x). \tag{2.53}$$

Подставляя (2.53) в уравнение (2.51) и разделяя переменные, получим

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}, \quad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,$$

где постоянные A, B могут зависеть от λ, причем так как граничные условия отсутствуют, то параметр λ остается произвольным.

Таким образом, частные решения уравнения (2.51) имеют вид

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x] \tag{2.54}$$

при любых $A(\lambda)$, $B(\lambda)$. Интегрируя (2.54) по параметру λ, получим решение уравнения (2.51)

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda, \tag{2.55}$$

если этот интеграл сходится и его можно дифференцировать один раз по t и два раза по x.

Выберем $A(\lambda)$, $b(\lambda)$ так, чтобы выполнялось начальное условие (2.52). Полагая в (2.55) $t = 0$, получим, в силу (2.52),

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda. \tag{2.56}$$

Представим функцию $\varphi(x)$ в виде интеграла Фурье:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\cos\lambda x \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi]d\lambda.$$

Мы видим, что равенство (2.56) будет выполнено, если положить

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (2.55), получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi,$$

но так как подынтегральная функция четна по λ, и

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

то

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{2.57}$$

Функция

$$F(x,t,\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}},$$

рассматриваемая как функция от (x,t), является решением уравнения (2.51) и называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Докажем, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$ формула (2.57) дает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (2.51). Для этого нужно показать, что интеграл (2.57), а также интегралы, полученные его формальным дифференцированием под знаком интеграла по x и по t, равномерно сходятся. После формального дифференцирования мы получим сумму интегралов вида

$$I = \frac{1}{t^k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)(\xi - x)^m e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{2.58}$$

Сделаем замену переменной, положив

$$\eta = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}, \quad t > 0,$$

после чего

$$I = (2a)^{m+1} t^{\frac{m+1}{2} - k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2a\eta\sqrt{t})\eta^m e^{-\eta^2} d\eta.$$

Так как по условию $\varphi(x)$ ограничена, то легко видеть, что подынтегральная функция мажорируется функцией $M|\eta|^m e^{-\eta^2}$, которая интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$, и, следовательно, интеграл (2.58) равномерно сходится.

Таким образом, функция $u(x,t)$, определяемая формулой (2.57), удовлетворяет уравнению (2.51) при $t > 0$.

Докажем теперь, что функция (2.57) удовлетворяет начальному условию, т.е.

$$\lim_{t \to 0} = \varphi(x)$$

при любом $x \in (-\infty, \infty)$. Замена

$$\eta = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}, \quad t > 0$$

приводит интеграл в правой части формулы (2.57) к виду:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2a\eta\sqrt{t}) e^{-\eta^2} d\eta. \qquad (2.59)$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1,$$

то

$$u(x,t) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + 2a\eta\sqrt{t}) - \varphi(x)] e^{-\eta^2} d\eta,$$

откуда

$$|u(x,t) - \varphi(x)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + 2a\eta\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\eta^2} d\eta.$$

В силу ограниченности функции $\varphi(x)$, при любых x, t, η имеем

$$|\varphi(x + 2a\eta\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq 2M.$$

Зафиксируем выбранное произвольно сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$ сходится, то можно выбрать столь большое число $N > 0$, что

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-\eta^2} d\eta \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{N}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Разобьем промежуток интегрирования на три:

$$(-\infty, -N), \quad (-N, N), \quad (N, -\infty),$$

и рассмотрим теперь интеграл по второму из них. В силу непрерывности $\varphi(x)$, при всех t, достаточно близких к нулю, и при $|\eta| \leq N$ имеем

$$|\varphi(x + 2a\eta\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь, учитывая полученные выше оценки интегралов по двум другим промежуткам, а также очевидное неравенство

$$\int\limits_{-N}^{N} e^{-\eta^2} d\eta < \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi},$$

получаем

$$|u(x,t) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, и вытекает справедливость утверждения.

Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальной функции

Пусть $\bar{u}(x,t)$ – решение задачи Коши для того же уравнения теплопроводности, но с начальным условием $\bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x)$, причем $|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Рассмотрим разность соответствующих решений и оценим абсолютную величину этой разности:

$$|u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi) - \bar{\varphi}(\xi)| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi = \varepsilon,$$

что и означает непрерывную зависимость решения от начальных данных.

Отметим одно важное свойство решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Эта функция непрерывно дифференцируема сколь угодно раз по x и по t, тогда как начальная функция может быть всего лишь ограничена и непрерывна. Эта гладкость решений существенно отличает уравнение теплопроводности от уравнения колебаний струны (и вообще гиперболических уравнений).

2.7. Уравнение Лапласа

Обозначим через Δ дифференциальный оператор

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Он называется оператором Лапласа, а однородное уравнение $\Delta u = 0$ — уравнением Лапласа. Это уравнение эллиптично всюду в $\mathbf{R}^n$.

Уравнение Лапласа является основным, и в то же время простейшим представителем уравнений эллиптического типа, на котором вырабатывались методы решения краевых задач для эллиптических уравнений.

Определение. Дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения Лапласа называется **гармонической функцией.**

Следует заметить, что это определение дано для ограниченной области. Если область содержит бесконечно удаленную точку, то оно нуждается в уточнении, ибо понятие производной в бесконечно удаленной точке не имеет смысла.

Под **регулярным решением** уравнения Лапласа в окрестности бесконечно удаленной точки понимается гармоническая в этой окрестности всюду, кроме бесконечно удаленной точки, функция $u(x)$, которая при $|x| \to \infty$ остается ограниченной в случае $n = 2$ и стремится к нулю не медленнее, чем $|x|^{2-n}$ при $n > 2$.

Рассмотрим специальное решение уравнения Лапласа, которое называется **фундаментальным решением**:

$$E(x, y) = \begin{cases} \frac{|y-x|^{2-n}}{n-2}, & n > 2 \\ -\log|y-x|, & n = 2 \end{cases}, \tag{2.60}$$

где $|y-x|$– расстояние между точками x и y. $E(x,y)$ является гармонической функцией при $x \neq y$ как по x, так и по y, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Выведем две формулы, которые нам понадобятся.

Рассмотрим функции $u(x)$, $v(x) \in C^1(D)$, где D– область пространства $\mathbf{R^n}$ с достаточно гладкой границей $\partial D = S$. Нетрудно проверить справедливость следующих тождеств

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\Delta u,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = v\Delta u - u\Delta v.$$

Интегрируя эти тождества по области и применяя формулу Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\tau = \int\limits_{\partial D} \sum_{i=1}^{n} A_i(y)\nu_i(y)ds, \qquad (GO),$$

получим

$$\int\limits_S v(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}ds = \int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\tau + \int\limits_D v\Delta u d\tau. \qquad (G1)$$

$$\int\limits_S \left(v(y)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds = \int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)d\tau. \qquad (G2)$$

Простейшие свойства гармонических функций

1. Если $u(x) \in C^1(D)$, $\Delta u = 0$ и $u|_{\partial D} = 0$, то $u(x) = 0$ и в D.

Это свойство следует из первой формулы Грина (G1) , если в ней положить $u(x) = v(x)$. Действительно, учитывая, что по условию $\Delta u = 0$ и $u|S = 0$, получим

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau = 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, ...n$, $x \in D$, т.е. $u = const$ для всех $x \in D$. Но так как на границе области $u = 0$, а по условию она непрерывна в замкнутой области, то $u(x) = 0 \ \forall x \in D$.

2. Если $u(x) \in C^1(D)$, $\Delta u = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D} = 0$, то $u(x) - const \forall x \in D$. Это свойство доказываеся аналогично предыдущему.

3. Если $u(x) \in C^1(\bar{D})$, $\Delta u = 0$, то $\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$.

Действительно, положив в $(G1)$ $v(x) = 1$, получим требуемое.

4. Интегральное представление гармонических функций

Для гармонической функции $u(x) \in C^1(D)$ имеет место представление

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S E(x,y) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial E}{\partial \nu} \right) ds, \tag{2.61}$$

где $E(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площадь единичной сферы в $\mathbf{R}^n$.

Для доказательства выделим точку x из области D вместе с замкнутым шаром $|y - x| \le \varepsilon$, целиком лежащим в D. В оставшейся части области, которую обозначим D_ε, $E(x,y)$ гармонична, поэтому можно применить вторую формулу Грина $(G2)$, в которой $v(y) = E(x,y)$:

$$0 = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} [E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu}] ds =$$

$$= \int\limits_S [E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu}] ds -$$

$$- \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} [E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu}] ds,$$

где $S = \partial D$. Тогда

$$\int\limits_S [E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu}] ds =$$

$$= \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} [E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu}] ds =$$

$$= \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ds -$$

$$- \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} [u(y) - u(x)] \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu} ds - u(x) \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu} ds.$$

Рассмотрим каждый из интегралов правой части последнего равенства. Заметим, что на сфере $|y-x| = \varepsilon$

$$E(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\varepsilon^{n-2}}, & n > 2, \\ -\ln \varepsilon, & n = 2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu} = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}, & n > 2, \\ -\frac{1}{\varepsilon}, & n = 2. \end{cases}$$

Тогда, в силу свойства 3 гармонических функций,

$$\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ds = \frac{1}{(n-2)\varepsilon^{n-2}} \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ds = 0.$$

Так как

$$ds = \frac{-}{\varepsilon^{n-1}}$$

$$- \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} [u(y) - u(x)] \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu} ds = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} [u(x) - u(y)] ds,$$

то, в силу непрерывности $u(x)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} [u(y) - u(x)] \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu} ds = 0.$$

Заметим, что на сфере $|y-x| = \varepsilon$

$$\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu} ds = -\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} ds = -\omega_n.$$

Переходя теперь к пределу при $\varepsilon \to 0$ в формуле Грина, примененной к D_ε, получим формулу (2.61).

5. Формулы среднего арифметического

Если шар $|y-x| \le R$ лежит целиком в области гармоничности функции $u(x)$, то значение этой функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере $|y-x| = R$.

Действительно, так как на сфере $|y-x| = R$ имеют место равенства

$$E(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)R^{n-2}}, & n > 2, \\ -\ln R, & n = 2; \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu} = \begin{cases} -\frac{1}{R^{n-1}}, & n > 2, \\ -\frac{1}{R}, & n = 2; \end{cases}$$

то из формулы (2.61), примененной к шару $|y-x| \le R$, получаем

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=R} u(y)ds. \tag{2.62}$$

Формула (2.62) называется формулой среднего арифметического по сфере. Из нее можно получить еще одну полезную формулу. Запишем формулу (2.62) для сферы $|y-x| = \rho$:

$$\rho^{n-1}u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|y-x|=\rho} u(y)ds,$$

и, проинтегрировав по ρ в промежутке $0 \le \rho \le R$, получаем

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|<R} u(y)d\tau, \tag{2.63}$$

где $\frac{n}{\omega_n R^n}$ — объем шара $|y-x| < R$. (2.63) называется формулой среднего арифметического по шару.

6. Принцип экстремума

Обозначим соответственно M и m верхнюю и нижнюю грани значений в области D гармонической функции $u(x)$.

Отличная от постоянной гармоническая в области D функция $u(x)$, непрерывная в $\bar{D}$, ни в одной точке $x \in D$ не может принимать ни значения M, ни значения m.

Для доказательства этого утверждения предположим противное: пусть $u(x_0) = M$, $x_0 \in D$, и рассмотрим шар $|x - x_0| < \varepsilon$, целиком лежащий в D. Тогда в каждой точке этого шара $u(x) = M$. Действительно, если бы в точке y при $|y - x_0| < \varepsilon$ имело бы место неравенство $u(y) < M$, то в силу непрерывности функции $u(x)$ это неравенство выполнялось бы и в некоторой окрестности $|\xi - y| < \delta$ точки y, и на основании формулы (2.63), примененной в случае шара $|x - x_0| < \varepsilon$, мы бы получили абсурдное неравенство

$$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|x-x_0|<\varepsilon} u(y)d\tau < M.$$

Следовательно, $u(x) = M$ всюду в шаре $|x - x_0| < \varepsilon$.

Пусть теперь $x-$ произвольная точка области D, $l-$ непрерывная кривая, лежащая в D и соединяющая точки x и x_0. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы оно оказалось меньше расстояния между границей ∂D области D и кривой l. Передвигая центр y шара $|\eta - y| < \varepsilon$ из точки x_0 в точку x по кривой l и пользуясь доказанным фактом, что в каждом из этих шаров $u(\eta) = M$, получим $u(x) = M$. В силу произвольности x, $u(x) = M$ всюду в области D. Получено противоречие.

Аналогично доказывается вторая часть утверждения.

2.8. Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Найти гармоническую функцию $u(x)$ в области D из класса $C^2(D) \cap C(\bar{D})$, удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{\partial D} = \psi, \tag{2.64}$$

где $\psi-$ заданная, непрерывная на ∂D функция.

Теорема 2.4. Существует не более одного решения задачи Дирихле из $C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

Доказательство. Из принципа экстремума вытекает неравенство для гармонической функции $u(x) \in C(\bar{D})$ и $u|_{\partial D} = \psi$:

$$|u(x)| \leq \max_{\partial D} |\psi|. \tag{2.65}$$

Пусть u_1, u_2- два различных решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа с граничным условием (2.64). Тогда $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи Дирихле, т.е. $u|_{\partial D} = 0$. Из неравенства (2.65) для этой функции имеем

$$|u_1 - u_2| \leq 0,$$

откуда $u_1 = u_2$.

Известны различные методы доказательства существования решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Здесь мы рассмотрим один из них, позволяющий для областей специального вида построить решение в явном виде. Для реализации этого метода нам потребуется ввести понятие функции Грина.

Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Предположим, что задача Дирихле решена и $u(x)$ – ее решение.

Из формулы интегрального представления гармонической функции

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S [E(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial E}{\partial \nu}]ds. \tag{2.66}$$

Пусть $g(x,y)$– гармоническая функция точки y в D для любого $x \in D$. Применим вторую формулу Грина (G2) к функциям $u(x)$ и $g(x,y)$:

$$0 = \int\limits_S [g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(u)\frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu}]ds. \tag{2.67}$$

Сложим (2.66) и (2.67), умножив предварительно (2.67) на $1/\omega_n$:

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S [u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}(E(x,y) + g(x,y)) - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu}(E(x,y) + g(x,y))]ds. \tag{2.68}$$

Так как $u(x)$– решение задачи Дирихле, то ее значение на $S = \partial D$ известно, а значение $\frac{\partial u}{\partial \nu}$– нет. Если, кроме перечисленных выше свойств, $g(x,y)|_S = -E(x,y)|_S$, то в (2.68) обращается в нуль второе слагаемое, и формула (2.68) дает представление решения задачи Дирихле:

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}ds, \tag{2.69}$$

где обозначено $G(x,y) = E(x,y) + g(x,y)$.

Определение. Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области называется функция $G(x,y)$, обладающая свойствами:

1) $G(x,y) = E(x,y) + g(x,y)$,

где $E(x,y)$– фундаментальное решение уравнения Лапласа, $g(x,y)$– гармоническая функция как по $x \in D$, так и по $y \in D$;

2) $G(x,y)|_S = 0$.

Построение функции Грина для шара

Рассмотрим шар с центром O в начале координат и радиусом R. Обозначим $|y - x| = r$, $|x| = \rho$, $|\bar{x}| = \rho_1$, $|y - \bar{x}| = r_1$, где x, y– внутренние точки шара, $\bar{x}$– точка, симметричная точке x относительно сферы

$S_R^0: \ |x| = R: \ \rho\rho_1 = R^2$. Если $y \in S$, то из подобия треугольников Oxy и Oxy следует, что $r = \frac{\rho}{R} r_1$.

Покажем, что функция

$$G(x, y) = \frac{r^{2-n}}{n-2} - \frac{r_1^{2-n}\rho^{2-n}}{(n-2)R^{2-n}} \tag{2.70}$$

является функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Действительно, выполнение второго из условий, определяющих функцию Грина, следует из построения, а первого — из гармоничности внутри шара второго слагаемого в (2.70).

Решение задачи Дирихле в шаре

Найдем производную по нормали построенной функции Грина:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(r^{2-n}) = r^{1-n}\cos(r, \nu),$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(r_1^{2-n}) = r_1^{1-n}\cos(r_1, \nu).$$

Так как по теореме косинусов

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(r, \nu),$$

$$\rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos(r_1, \nu),$$

то

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial\nu} = \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^n},$$

и мы получаем представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0} \psi(y)\frac{R^2 - \rho^2}{r^n}ds. \tag{2.71}$$

Полученная формула (2.71) называется формулой Пуассона.

Формула Пуассона позволяет доказать еще несколько свойств гармонических функций.

Теорема Лиувилля. Если гармоническая всюду в $\mathbf{R^n}$ функция $u(x)$ ограничена сверху (снизу), то она постоянна.

Доказательство. Покажем сначала, что если гармоническая в $\mathbf{R^n}$ функция $u(x)$ всюду неотрицательна (неположительна), то она постоянна.

Пусть $u(x) \geq 0$. По формуле Пуассона имеем

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \psi(y) \frac{R^2 - \rho^2}{r^n} ds,$$

а по свойству среднего арифметического

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{S_R^0} u(y) ds.$$

Так как

$$R - \rho \leq r \leq R + \rho,$$

то

$$\frac{R^2 - \rho^2}{(R+\rho)^n} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{r^n} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{(R-\rho)^n},$$

откуда

$$\frac{R - \rho}{(R+\rho)^{n-1}} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{r^n} \leq \frac{R - \rho}{(R-\rho)^{n-1}}.$$

Вспоминая, что по условию $u(x) \geq 0$, умножим все части предыдущего неравенства на $u(x)$ и проинтегрируем по S_R^0. Получим

$$u(0) \frac{R^{n-2}(R - \rho)}{(R+\rho)^{n-1}} \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + \rho)}{(R-\rho)^{n-1}}.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, получим, что $\forall x \;\; u(x) = u(0)$.

Теперь нетрудно доказать основное утверждение теоремы. Пусть $u(x) \leq M \;\; \forall x \in \mathbf{R^n}$. Тогда функция $M - u(x) \geq 0$ и гармонична в $\mathbf{R^n}$. Но, как доказано выше, $M - u(x) = M - u(0)$, стало быть, $u(x) = u(0)$.

Теорема Гарнака. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ гармонических в области D функций $u(x)$, непрерывных в $\bar{D}$, равномерно сходится на границе области D, то этот ряд равномерно сходится и в $\bar{D}$, и его сумма $u(x)$ есть гармоническая функция в D.

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(y)$ следует: для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $p \geq 1$

$$\left| \sum_{k=N}^{N+p} u_k(y) \right| < \varepsilon, \quad y \in \partial D.$$

Так как конечная сумма гармонических функций есть функция гармоническая, то, в силу принципа экстремума,

$$\left|\sum_{k=N}^{N+p} u_k(y)\right| < \varepsilon, \quad y \in D.$$

Из этого неравенства следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ в D. Докажем, что его сумма гармонична. Пусть x – произвольная точка области D. Рассмотрим шар с центром в x_0, лежащий в D. Каждую гармоническую функцию $u_k(x)$ в этом шаре можно представить интегралом Пуассона (2.71):

$$u_k(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} u_k(y) \frac{R^2 - |x-x_0|^{2\,n}}{y-x}\, ds.$$

Так как равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно, то

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} u_k(y) \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|y-x|^n} ds =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} u(y) \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|y-x|^n} ds.$$

Отсюда следует гармоничность функции в шаре $|x - x_0| < R$. Так как x_0 выбрана произвольно, то $u(x)$ гармонична всюду в D.

Замечание. На плоскости функцию Грина можно построить изящным методом, идея которого связана с понятием конформного преобразования. [9].

Задачи

Построить функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа для областей:

1) полушар $|x| < R,\ x_3 > 0$;
2) четверть круга $|z| < 1,\ 0 < argz < \frac{\pi}{2}$;
3) полуплоскость $Imz > 0$;
4) четверть плоскости $0 < argz < \frac{\pi}{2}$;
5) полоса $0 < Imz < \pi$.

Найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в первом квадранте $x > 0,\ y > 0$ со следующими краевыми условиями: $u(0, y) = a,\ \ u(x, 0) = b$.

2.9. Смешанные задачи для нестационарных уравнений

2.9.1. Смешанная задача для уравнения колебаний струны

Рассмотрим задачу отыскания решения уравнения колебаний ограниченной струны. В этом случае кроме начальных данных нужно задавать еще и граничные условия, которые определяют поведение концов струны. Например, если концы струны длины l закреплены, то смещения на концах отсутствуют, т.е.

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{2.72}$$

Другой случай – концы струны свободны. Это означает, что на свободном конце струны натяжение равно нулю, так что математическая формулировка условия свободного конца имеет вид

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0. \tag{2.73}$$

Если концы струны движутся по определенному закону, то граничные условия имеют вид:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \tag{2.74}$$

Приведем еще один пример. Если концы струны закреплены упруго, то математически это выражается следующим образом:

$$u_x(0,t) - h_1 u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0. \tag{2.75}$$

Комбинируя различные перечисленные граничные условия, мы получим различные смешанные задачи для уравнения колебаний струны.

Одним из наиболее эффективных методов решения смешанных задач является метод Фурье (метод разделения переменных). Мы изложим его на примере решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны. Начнем с простейшего случая однородного уравнения и граничных условий (2.72):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{2.76}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2.77}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{2.78}$$

Будем искать сначала **частные решения** уравнения, удовлетворяющие граничным условиям, в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{2.79}$$

Подставим (2.79) в уравнение и, разделив на $a^2X(x)T(t)$, получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{2.80}$$

Равенство (2.80),левая часть которого зависит только от t, а правая – только от x, возможно лишь в том случае, когда обе его части равны одной и той же постоянной. Обозначим эту постоянную $-\lambda$ и получим из (2.80) два уравнения:

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{2.81}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{2.82}$$

Так как мы хотим найти решения, удовлетворяющие граничным условиям, то $u(0,t) = T(t)X(0) = 0$, $u(l,t) = T(t)X(l) = 0$, а поскольку нас интересуют лишь нетривиальные решения, эти условия означают, что нужно потребовать, чтобы

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{2.83}$$

(Заметим, что задача отыскания нетривиальных решений уравнения, удовлетворяющих однородным условиям, является частным случаем задачи Штурма-Лиувилля. См., например,[9]).

Итак, мы пришли к следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2.82), удовлетворяющие условиям (2.83).

Те значения λ, при которых задача (2.82)-(2.83) имеет нетривиальные решения, называются **собственными значениями**, а сами эти решения – **собственными функциями.**

1. Пусть $\lambda < 0$. Общее решение уравнения (2.82) в этом случае имеет вид

$$X(x) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

и из граничных условий

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}$$

получаем $C_1 = C_2 = 0$. Стало быть, задача не имеет отрицательных собственных значений.

2. Пусть $\lambda = 0$. В этом случае общее решение имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

и, как легко видеть, удовлетворяет граничным условиям только при $C_1 = C_2 = 0$, т.е. 0 также не является собственным значением.

3. Рассмотрим теперь $\lambda > 0$. Общее решение в этом случае, как известно, можно представить в виде

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Из первого граничного условия следует, что $C_1 = 0$, из второго, что $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Мы должны считать, что $C_2 \neq 0$, так как пытаемся найти нетривиальное решение, поэтому $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, откуда находим

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянной, которую можно положить равной единице.

При $\lambda = \lambda_k$ решение уравнения (2.81) имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l},$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные.

Таким образом, каждая из функций

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяет уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ и граничным условиям $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Будем искать решение поставленной задачи в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.84}$$

Заметим, что в силу линейности и однородности уравнения (2.76), сумма ряда (3.10) также будет решением (3.10), удовлетворяющим условиям (2.78), если этот ряд равномерно сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по t и по x.

Коэффициенты A_k, B_k будем искать из начальных условий (2.77). Положим в (3.10) $t = 0$. Тогда из первого условия (2.77)

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.85}$$

Продифференцируем (3.10), положим $t = 0$ и из второго условия (2.77) получим

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{l} B_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.86}$$

Формулы (2.85), (2.86) представляют собой разложение заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Коэффициенты разложений вычисляются по формулам:

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{2.87}$$

Таким образом, **формальное решение** задачи построено.

Теорема 2.5. Если $\varphi(x) \in C^2[0, l]$, имеет кусочно-непрерывную третью производную, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(x) \in C^1[0, l]$, имеет кусочно-непрерывную производную второго порядка, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, то функция $u(x, t)$, определяемая рядом (3.10), имеет непрерывные производные второго порядка, удовлетворяет уравнению (2.76), начальным условиям (2.77) и граничным условиям (2.78).

Доказательство. Интегрируя по частям (2.87), учитывая условия теоремы, получим

$$A_k = -(\frac{l}{\pi})^3\frac{b_k^{(3)}}{k^3}, \quad B_k = -(\frac{l}{\pi})^3\frac{a_k^{(2)}}{k_3}, \tag{2.88}$$

где

$$b_k^{(3)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \quad a_k^{(2)} = \frac{2}{al}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k^{(2)}|}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k^{(3)}|}{k} \tag{2.89}$$

сходятся. Подставив (2.88) в (3.10), получим

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}(b_k^{(3)} \cos\frac{ak\pi t}{l} + a_k^{(2)} \sin\frac{ak\pi t}{l}) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Этот ряд мажорируется числовым сходящимся рядом

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}(|b_k^{(3)}| + |a_k^{(2)}|),$$

следовательно, ряд (3.10) сходится абсолютно и равномерно. Принимая во внимание (2.89), убеждаемся в том, что ряд (3.10) можно дважды почленно дифференцировать по t и по x. Теорема доказана.

Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах

Задача о нахождении вынужденных колебаний однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы $f(x,t,)$ сводится к решению уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{2.90}$$

с начальными данными (2.77) и граничными условиями (2.78).

Решение задачи (2.90) - (2.77) - (2.78) будем искать в виде суммы $u = u_0 + v$, где u_0– решение однородного уравнения (2.76), удовлетворяющее условиям (2.77), (2.78), а v– решение неоднородного уравнения (2.90), удовлетворяющее граничным условиям (2.78) и нулевым начальным условиям

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0.$$

Метод нахождения u_0 изложен в предыдущем параграфе, при реализации этого метода найдены собственные функции задачи:

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.91}$$

где коэффициенты $V_k(t)$ неизвестны. Подставляя (2.91) в (2.90), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k''(t)+(\frac{ak\pi}{l})^2V_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}=f(x,t). \qquad (2.92)$$

Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,l)$:

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},\quad f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad k=1,2,...,$$

и подставим в (2.92). Приравнивая коэффициенты, получим уравнение

$$V_k''(t)+(\frac{ak\pi}{l})^2V_k(t)=f_k(t),$$

решая которое при нулевых начальных условиях $T_k(0)=0,\ T_k'(0)=0$, находим

$$V_k(t)=\frac{l}{ak\pi}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{ak\pi(t-\tau)}{l}d\tau,$$

а следовательно, и (2.91).

Вынужденные колебания струны с подвижными концами

Эта задача приводится к решению уравнения (2.90) с начальными данными (2.77) и граничными условиями (2.74): $u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(l,t)=\mu_2(t)$. Решение будем искать в виде

$$u(x,t)=\bar{u}(x,t)+w(x,t),$$

где функция $w(x,t)$ удовлетворяет условиям (2.74). Подойдет, например, такая функция:

$$w(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

Тогда функция $\bar{u}(x,t)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям, уравнению $\bar{u}_{tt}=a^2\bar{u}_{xx}+\bar{f}(x,t)$, где $\bar{f}(x,t)=f(x,t)-(w_{tt}-a^2w_{xx})$, и начальным условиям $\bar{u}(x,0)=\varphi(x)-w(x,0),\ \ \bar{u}_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0)$.

Таким образом, задача (2.90) - (2.77) - (2.74) относительно функции $u(x,t)$ сведена к задаче относительно функции $\bar{u}(x,t)$, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Пример

$u_{tt} = u_{xx}$,

$u(x,0) = x + 1,\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = t + 1,\ \ u(1,t) = t^3 + 2.$

I. Сведем задачу к задаче с однородными граничными условиями. Для этого будем искать решение в виде $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$, где $w(x,t) = t + 1 + x(t^3 - t + 1)$. Подставим в исходное уравнение и придем к задаче с однородными граничными условиями:

$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} - 6tx$,

$\tilde{u}(x,0) = 0,\ \ \tilde{u}_t(x,0) = x - 1,\ \ \tilde{u}(0,t) = 0,\ \ \tilde{u}(1,t) = 0.$

II. Будем искать решение этой задачи в виде $\tilde{u} = u^0 + v$, где u^0– решение задачи для однородного уравнения:

$u^0_{tt} = u^0_{xx}$,

$u^0(0,t) = 0,\ \ u^0(1,t) = 0,\ \ u^0(x,0) = 0,\ \ u^0_t(x,0) = x - 1,$

а v– решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Собственные значения и собственные функции задачи для u^0 были найдены выше и имеют вид

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad X_k(x) = \sin k\pi x.$$

Поэтому

$$u^0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\pi t + B_k \sin k\pi t) \sin k\pi x.$$

Коэффициенты найдем из начальных условий:

$$A_k = 0, \quad B_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^1 (x-1) \sin k\pi x dx = -\frac{2}{(k\pi)^2}.$$

Решение неоднородного уравнения с однородными данными ищем в виде $v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin k\pi x$, где $V_k(t)$ неизвестны. Подставив в уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(V_k''(t) + (k\pi)^2 V_k(t)\right) \sin k\pi x = -6tx.$$

Разложим $-6tx$ в ряд по синусам, а затем приравняем коэффициенты. Получим уравнения

$$V_k''(t) + (k\pi)^2 V_k(t) = \frac{12t(-1)^k}{k\pi}, \quad k = 1, 2, ...,$$

решение каждого из которых, удовлетворяющее условиям $V_k(0) = V_k'(0) = 0$, дается формулой

$$V_k(t) = \frac{(-1)^{k+1}12}{(k\pi)^2} \int_0^t \tau \sin k\pi(t-\tau)d\tau,$$

откуда

$$V_k(t) = \frac{(-1)^k 12t}{(k\pi)^3} - \frac{(-1)^k 12}{(k\pi)^4} \sin k\pi t.$$

Тогда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k 12t}{(k\pi)^3} - \frac{(-1)^k 12}{(k\pi)^4} \sin k\pi t \right) \sin k\pi x.$$

Ответ:

$$u(x,t) = t + 1 + x(t^3 - t + 1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} \sin k\pi t \sin k\pi x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k 12t}{(k\pi)^3} - \frac{(-1)^k 12}{(k\pi)^4} \sin k\pi t \right) \sin k\pi x.$$

Задачи

Решить смешанные задачи для гиперболических уравнений.

1. $u_{tt} = u_{xx} + 2b \quad (b = const)$;
   $u(x,0) = 0,\ u_t(x.0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0.$

2. $u_{tt} = u_{xx} + \cos t$;
   $u(x,0) = 0,\ u_t(x.0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$

3. $u_{tt} = u_{xx}$;
   $u(x,0) = 0,\ u_t(x.0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = t.$

4. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$;
   $u(x,0) = \pi x - x^2,\ u_t(x.0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$

5. $u_{tt} + u_t = u_{xx}$;
   $u(x,0) = 0,\ u_t(x.0) = 0,\ u(0,t) = t,\ u(1,t) = 0.$

6. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x$;
   $u(x,0) = \cos x,\ u_t(x.0) = 2x,\ u_x(0,t) = 2t,\ u(\pi/2,t) = \pi t.$

7. $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^4 x$;
$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0.$

8. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t$;
$u(x,0) = e^{-x}\sin x,\ u_t(x,0) = x,\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = \pi t.$

2.9.2. Смешанная задача для уравнения теплопроводности

Метод Фурье, изложенный на примере уравнения колебания струны, может быть применен к решению смешанных задач для уравнения теплопроводности, задачи Дирихле для уравнения Лапласа в областях специального вида, а также для других уравнений при выполнении некоторых условий на коэффициенты уравнений и граничных условий. В [8] приведены примеры смешанных задач с различными граничными условиями с подробными решениями.

Здесь рассмотрим пример решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности.

Пример

$u_t = u_{xx}$,

$u(x,0) = 0,\quad u_x(0,t) = 1,\quad u(l,t) = 0.$

Так как одно из граничных условий неоднородное, сведем сначала поставленную задачу к задаче с однородными условиями. Для этого будем искать решение в виде $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$. Нетрудно догадаться, что можно положить $w(x,t) = x - l$. Тогда

$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}$,

$\tilde{u}_x(0,t) = 0,\quad \tilde{u}(l,t) = 0,\quad \tilde{u}(x,0) = l - x.$

Разделяя переменные, приходим к уравнениям

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\quad T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

первое из которых при $\lambda > 0$ имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям $X'(0) = 0,\ X(l) = 0:$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2l}\right)^2,\quad X_k(x) = \cos\frac{\pi(1+2k)x}{2l}.$$

Решение второго уравнения имеет вид

$$T_k(t) = A_k e^{-\lambda_k t}.$$

Теперь, имея набор частных решений $\bar{u}_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$, ищем решение в виде ряда

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} \cos\frac{\pi(1+2k)x}{2l}.$$

Найдем коэффициенты из начального условия

$$l - x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{\pi(1+2k)x}{2l} :$$

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l (l-x)\cos\frac{\pi(1+2k)x}{2l}dx.$$

Вычислив интеграл, можем записать решение поставленной задачи:

$$u(x,t) = x - l + \frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+2k)^2}\cos\frac{\pi(1+2k)}{2l}x.$$

Задачи

Решить смешанные задачи для параболических уравнений.

1. $u_t = u_{xx}$,
   $u(x,0) = x^2 - 1, \quad u_x(0,t) = 0, \; u(l,t) = 0.$

2. $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t$,
   $u(x,0) = e^x \sin\pi x, \quad u(0,t) = 0, \; u(l,t) = t.$

3. $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2 - 4x^2 t + 2\cos^2 x$,
   $u(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \; u_x(\pi,t) = 2\pi t.$

4. $u_t = u_{xx}$,
   $u(x,0) = 0, \quad u_x - hu|_{x=0} = 0, \; u_x + hu|_{x=l} = 0.$

Часть 2

Обобщенные решения краевых задач

Введение

Понятие обобщенного решения дифференциального уравнения возникло в связи с задачами математической физики, когда под решением потребовалось понимать функции, не имеющие достаточного числа производных, и даже недифференцируемые функции.

Решение краевой задачи для дифференциального уравнения называют классическим, если оно непрерывно со всеми производными, входящими в уравнение. Такое решение можно получить, если начальные данные, граничные условия и правые части уравнения являются непрерывными функциями со своими производными до определенного порядка. Однако при моделировании физических процессов часто приходят к задачам, данные которых не обладают достаточной гладкостью.

Рассмотрим простой пример. Найдем решение уравнения $u_t + u_x = 0$ в области $\Omega = \{(x,t): \quad a < x + t < b\}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$. Если $\varphi(x) \in C^1[a,b]$, то решением этой задачи является функция $u(x,t) = \varphi(x-t)$. Пусть теперь $\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ непрерывна, но не дифференцируема. Понятно, что теперь она не может служить классическим решением поставленной задачи. Однако, известно, что такую функцию можно представить как предел равномерно сходящейся на отрезке $[a,b]$ последовательности функций $\varphi_n(x)$, имеющих непрерывные производные. При этом соответствующие решения $u_n(x,t) = \varphi_n(x-t)$ уравнения $u_t + u_x = 0$ будут равномерно в Ω сходиться к функции $u(x,t) = \varphi(x-t)$. Это дает основание считать функцию $\varphi(x-t)$ также решением, но в обобщенном смысле.

Таким образом, под обобщенным решением дифференциального уравнения естественно понимать предел (в той или иной норме) последовательности классических решений.

Проиллюстрируем другой подход к введению понятия обобщенного решения на примере той же задачи. В этом случае основная идея состоит в замене дифференциального уравнения некоторым интегральным тождеством.

Докажем сначала, что если $u(x,t) \in C^1(\Omega)$, а $v(x)$– любая достаточно гладкая функция, то утверждения

$$\int\limits_{\Omega} (u_t + u_x) v(x,t)\, dxdt = 0 \qquad (\alpha)$$

и

$$u_t + u_x = 0 \qquad (\beta)$$

эквивалентны.

(α) сразу следует из (β).

Пусть $u(x,t) \in C^1(\Omega)$ и удовлетворяет (α). Предположим, что в некоторой внутренней точке $(x_0, t_0) \in \Omega$ $u_t + u_x \neq 0$. Для определенности положим, что в этой точке

$$u_t + u_x = \delta > 0.$$

Из непрерывности производных u_t, u_x в области Ω следует существование такого $\varepsilon > 0$, что при $(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 \leq \varepsilon$ выполнено неравенство $u_t + u_x > \frac{\delta}{2}$.

Определим теперь $v(x,t)$ формулой

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 - |\frac{(x-x_0)^2+(t-t_0)^2}{\varepsilon}|^p, & (x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 \leq \varepsilon \\ 0, & (x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 > \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что для такой функции

$$\int\limits_{\Omega} (u_t + u_x) v(x,t)\,dxdt > \int\limits_{0}^{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon}\right)^p \frac{\delta}{2} 2\pi r dr > 0.$$

Мы пришли к противоречию, которое и завершает доказательство справедливости утверждения.

Теперь, воспользовавшись тождеством

$$(u_t + u_x)v(x,t) + (v_t + v_x)u(x,t) = (uv)_t + (uv)_x,$$

можно сделать вывод, что (β) эквивалентно для непрерывно дифференцируемой функции $u(x,t)$ равенству

$$\int\limits_{\Omega} u(v_t + v_x)\,dxdt = \int\limits_{\partial\Omega} uv dx - uv dt \qquad (\gamma)$$

для любой достаточно гладкой функции $v(x,t)$. Заметим, что функции $v(x,t)$ можно считать равными нулю на всей или на части границы рассматриваемой области, если мы хотим убедиться в выполнении равенства $u_t + u_x = 0$ лишь внутри области.

Таким образом, для гладких $u(x,t)$ равенство (γ) эквивалентно определению решения, но для проверки его выполнимости не надо, однако, дифференцировать $u(x,t)$.

Это и послужило основанием назвать функцию, удовлетворяющую тождеству (γ) для любых достаточно гладких $v(x,t)$, обобщенным решением уравнения

$$u_t + u_x = 0.$$

Идея введения понятия обобщенного решения как функции, удовлетворяющей интегральному тождеству, оказалась весьма плодотворной и получила широкое развитие. В конце 40-х годов О.А.Ладыженской было предложено определять обобщенные решения краевых и начально-краевых задач для различных типов уравнений второго порядка с помощью интегральных тождеств, заменяющих собой уравнение и часть начальных и краевых условий. При этом была отмечена важность того, что для каждой задачи можно вводить различные классы обобщенных решений, определяемые выбором функционального пространства, которому должно принадлежать искомое обобщенное решение. Выбор пространства находится в распоряжении исследователя, но этот выбор должнен быть сделан так, чтобы в нем задача имела детерминированный характер, т.е. не могла бы иметь более одного решения.

При изучении обобщенной разрешимости задачи возникает вопрос, как удовлетворить краевым и начальным условиям. Трудность заключается в том, что если функция только интегрируема (по Лебегу) по n-мерной области, то она может быть не определена на многообразиях меньшей размерности.

Для того, чтобы разобраться в этих вопросах, нужно детально изучить различные классы функций, в которых целесообразно рассматривать обобщенные решения краевых задач. К таким классам относятся, прежде всего, функциональные пространства, введенные С.Л.Соболевым, которые так и называются: пространства Соболева. Фундаментальную роль в этих пространствах играет понятие обобщенной производной для интегрируемой по Лебегу функции, также введенное С.Л.Соболевым.

Глава 1

Обобщенные производные и пространства С.Л.Соболева

1.1. Средние функции

1.1.1. Усредняющее ядро

Пусть x и y — произвольные точки пространства $R^n, h > 0$ — произвольное число.

Функция $\omega_h(x, y)$ называется усредняющим ядром, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $\omega_h(x, y)$ зависит только от h и r, где через r обозначено расстояние между точками x и y : $r = |x - y|$;

2) $\omega_h(r) > 0,\ r < h$,

$\omega_h(r) = 0,\ r \geq h$;

3) $\int\limits_{r<h} \omega_h(r)dy = \int_{r<h} \omega_h(r)dx = 1$;

4) $\omega_h(r)$ бесконечно дифференцируема по декартовым координатам каждой из точек x и y.

Такие функции существуют. Действительно, нетрудно убедиться в том, что функция

$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}}, & r < h,\ c_h = const > 0; \\ 0. & r \geq h \end{cases}$$

удовлетворяет всем указанным свойствам.

1.1.2. Средние функции

Пусть Ω —конечная область пространства R^n, $u(y)$— функция, суммируемая в Ω. Доопределим эту функцию вне Ω нулем. Положим

$$u_h(x) = \int\limits_{\Omega} \omega_h(r) u(y) dy, \tag{1.1}$$

где $\omega_h(r)$ — какое-нибудь усредняющее ядро.

Функция $u_h(x)$ называется **средней функцией** по отношению к u, число h — радиусом усреднения.

Принимая во внимание, что $u(y) = 0$, $y \bar{\in} \Omega$, можно интеграл (1.1) распространить на все пространство, и тогда среднюю функцию можно представить следующим образом:

$$u_h(x) = \int\limits_{R^n} \omega_h(r) u(y) dy.$$

В силу свойства 2 усредняющего ядра, можно интегрировать только по шару радиуса h с центром в точке x :

$$u_h(x) = \int\limits_{r<h} \omega_h(r) u(y) dy.$$

Отметим **простейшие свойства** средних функций.

1. Средняя функция бесконечно дифференцируема во всем пространстве и ее производные любого порядка можно получить дифференцированием под знаком интеграла в любом из представлений средней функции.

2. Средняя функция равна нулю во всех точках, расстояние которых до области Ω не меньше h.

Следующие три свойства средних функций сформулируем в виде теорем.

Теорема 1.1. Если $u \in C(\Omega)$, то $u_h(x) \to u(x), h \to 0$, равномерно во всякой замкнутой внутренней подобласти области Ω.

Доказательство. Пусть Ω'— внутренняя подобласть области Ω. Построим область Ω'', которая является внутренней подобластью для Ω и для которой Ω' является внутренней подобластью.

Обозначим через h_0 наименьшее расстояние между точками границ областей Ω' и Ω''. Построим среднюю функцию $u_h(x)$ с радиусом усреднения $h < h_0$. С учетом свойства 3 усредняющего ядра получим

$$u_h(x) - u(x) = \int\limits_{r<h} [u(y) - u(x)]\omega_h(r)dy.$$

Если $x \in \bar{\Omega}'$, то, в силу выбора h, $y \in \Omega''$. В замкнутой области Ω'' непрерывная функция u равномерно непрерывна, поэтому при достаточно малом h и $r < h$ $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное сколь угодно малое число. Так как по свойствам усредняющего ядра $\omega_h(r) \geq 0$ и $\int\limits_{r<h} \omega_h(r)dy = 1$, то $|u_h(x) - u(x)| \leq \varepsilon$, что доказывает теорему.

Теорема 1.2. Норма в $L_2(\Omega)$ не возрастает при усреднении.

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_2(\Omega)$. Докажем, что в метрике $L_2(\Omega)$ $||u_h|| \leq ||u||$. Рассмотрим квадрат средней функции и воспользуемся тем, что $\omega_h(r) \geq 0$:

$$u_h^2(x) = \left(\int\limits_{\Omega} u(y)\omega_h(r)dy\right)^2 = \left(\int\limits_{\Omega} u(y)\sqrt{\omega_h(r)}\sqrt{\omega_h(r)}dy\right)^2.$$

Последний интеграл оценим с помощью неравенства Коши-Буняковского. Тогда

$$u_h^2(x) \leq \int\limits_{\Omega} u^2(y)\omega_h(r)dy \int\limits_{\Omega} \omega_h(r)dy \leq \int\limits_{\Omega} u^2\omega_h(r)dy, \qquad (1.2)$$

так как по свойству усредняющего ядра

$$\int\limits_{\Omega} \omega_h(r)dy = \int\limits_{\Omega\cap(r<h)} \omega_h(r)dy \leq \int\limits_{r<h} \omega_h(r)dy = 1.$$

Интегрируя неравенство (1.2) по области Ω, получим

$$||u_h||^2 = \int\limits_{\Omega} u_h^2(x)dx \leq \int\limits_{\Omega} u^2(y) \int\limits_{\Omega} \omega_h(r)dxdy \leq \int\limits_{\Omega} u^2(y)dy = ||u||^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.3. Если $u \in L_2(\Omega)$, то $||u - u_h|| \to 0, h \to 0$.

Доказательство. Так как $u \in L_2(\Omega)$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно построить многочлен $p(x)$ так, чтобы

$$||u - p||_{L_2(\Omega)} < \varepsilon/3.$$

Применим неравенство треугольника

$$||u - u_h|| \le ||u - p|| + ||p - p_h|| + ||p_h - u_h||.$$

Так как по теореме 1.2 норма не возрастает при усреднении, то

$$||p_h - u_h|| \le ||p - u|| < \varepsilon/3.$$

Рассмотрим область Ω_1, для которой Ω является внутренней подобластью. В силу теоремы 1.1 $p_h \to p$ при $h \to 0$ равномерно в любой внутренней замкнутой подобласти Ω_1, а значит, и в Ω. Но из равномерной сходимости в замкнутой области следует сходимость в среднем, поэтому для достаточно малых h

$$||p - p_h||_{L_2(\Omega)} < \varepsilon/3,$$

и теперь мы убеждаемся в справедливости утверждения теоремы:

$$||u - u_h|| < \varepsilon.$$

1.2. Обобщенные производные

Введем некоторые обозначения.

Целочисленный вектор с неотрицательными компонентами $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ называется мультииндексом. Будем обозначать производную функции $f(x)$ порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ следующим образом

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Множество функций f, непрерывных вместе с производной $D^\alpha f$, $|\alpha| \le k$, $0 \le k < \infty$, в области Ω, обозначим $C^k(\Omega)$. Класс функций $C^k(\Omega)$, у которых все производные допускают непрерывное продолжение на замыкание $\bar{\Omega}$, обозначим $C^k(\bar{\Omega})$. Носителем непрерывной функции φ называется замыкание множества тех точек, где $\varphi(x) \ne 0$; носитель φ обозначаем $supp\varphi$:

$$supp\varphi = \overline{\{x : x \in R^n,\ \varphi(x) \ne 0\}}.$$

Функции с компактным носителем называются финитными. Обычно рассматривают k раз непрерывно дифференцируемые финитные функции; множество таких функций, определенных в Ω, обозначают $\dot{C}^k(\Omega)$.

Пусть функция $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$. Функция $v(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ называется обобщенной производной (о.п.)порядка α функции $u(x)$ в области Ω, если для любой $\varphi(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}$ имеет место тождество:

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\varphi(x)dx. \tag{1.3}$$

Пример. Пусть $\Omega = (-1, 1)$, $u(x) = |x|$. Рассмотрим

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^0 x\varphi'(x)dx + \int_0^1 x\varphi'(x)dx.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)dx = -x\varphi(x)|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi(x)dx + x\varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx =$$

$$= -\int_{-1}^1 \varphi(x) signx dx.$$

Внеинтегральные слагаемые обратились в нуль в точках -1 и 1, в силу финитности функции $\varphi(x)$.

Таким образом, $D|x| = signx$.

1.2.1. Свойства обобщенных производных

Теорема 1.4. Обобщенная производная определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.

Доказательство. Предположим, что функция u имеет две различные обобщенные производные v_1 и v_2. Это означает, что для $\forall\varphi \in \dot{C}^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_1 \varphi dx,$$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_2 \varphi dx.$$

Вычитая из одного равенства другое, получаем

$$\int\limits_{\Omega}(v_1 - v_2)dx = 0, \quad \forall\varphi \in \dot{C}^{\infty}(\Omega).$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления, из этого равенства следует, что $v_1 = v_2$ в Ω с точностью до множества меры нуль, что и требовалось доказать.

Обозначим $\Omega_h = \{x : x \in \Omega,\ \rho(x, \partial\Omega) < h\}$.

Теорема 1.5. Пусть в области Ω функция $u(x)$ имеет обобщенную производную вида (1.3). Тогда в области $\Omega\setminus\Omega_h$ средняя функция от этой производной равна производной от средней функции.

Доказательство. Пусть $x \in \Omega \setminus \Omega_h$. Так как множество $\Omega \setminus \Omega_h$ открытое, то расстояние от точки x до границы области Ω больше h. и поэтому усредняющее ядро $\omega_h(r)$ является финитной в области Ω функцией. Тогда тождество, определяющее обобщенную производную, может быть записано так:

$$\int\limits_{\Omega} u(y)\frac{\partial^k\omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1}\partial y_2^{k_2}...\partial y_n^{k_n}}dy = (-1)^k\int\limits_{\Omega} v(y)\omega_h(y)dy. \tag{1.4}$$

Правая часть равенства (1.4) по определению средней функции есть не что иное, как средняя функция:

$$\int\limits_{\Omega} v(y)\omega_h(r)dy = v_h(x).$$

Рассмотрим левую часть (1.4). Так как усредняющее ядро $\omega_h(r)$ зависит только от разности $x - y$, то

$$\frac{\partial^k\omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1}\partial y_2^{k_2}...\partial y_n^{k_n}} = (-1)^k\frac{\partial^k\omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}},$$

поэтому

$$\int\limits_{\Omega} u(y)\frac{\partial^k\omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1}\partial y_2^{k_2}...\partial y_n^{k_n}}dy = (-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\int\limits_{\Omega} u(y)\omega_h(r)dy,$$

и из равенства (1.4) получаем

$$\frac{\partial^k u_h(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}} = v_h(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.6. Если в области Ω функция $v(x) = D^k u(x), w(x) = D^l v(x)$, то в той же области $w(x) = D^{k+l} u(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in \dot{C}^{k+l}(\Omega)$. Тогда $D^l\varphi \in \dot{C}^k(\Omega)$. По определению обобщенной производной

$$\int\limits_\Omega u D^{k+l}\varphi dx = (-1)^k \int\limits_\Omega v D^l \varphi dx, \quad \int\limits_\Omega v D^l \varphi dx = (-1)^l \int\limits_\Omega w\varphi dx.$$

Из этих двух равенств и вытекает справедливость утверждения теоремы.
Теорема 1.7. Функция, обобщенный градиент которой равен нулю, есть постоянная.

Доказательство. Пусть функция $u(x)$ суммируема в области Ω и имеет в этой области обобщенные производные $u_{x_i} = 0, \ i = 1, ...n$. Построим среднюю функцию $u_h(x)$. По теореме 1.5, $\frac{\partial u_h}{\partial x_i} \equiv 0$ и, следовательно, $u_h(x) = const$ в $\Omega \setminus \Omega_h$. По теореме 1.3, $||u - u_h||_{L_2} \to 0, \ h \to 0$, поэтому $u(x) \equiv const$ в Ω.

Докажем две теоремы о предельных свойствах обобщенных производных.

Будем предполагать, что как данные функции, так и их обобщенные производные суммируемы с квадратом в конечной области.

Теорема 1.8. Пусть функции $u_n(x), \ n = 1, 2, ...$ имеют в Ω обобщенные производные

$$v_n(x) = \frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_m^{k_m}}.$$

Если обе последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся в метрике $L_2(\Omega)$ к пределам $u(x)$ и $v(x)$ соответственно, то в области Ω функция $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$ того же вида.

Доказательство. По определению обобщенной производной

$$\int\limits_\Omega u_n D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_n \varphi dx. \tag{1.5}$$

Так как $u_n, v_n \in L_2(\Omega)$, $\varphi-$ финитная функция, то каждый из интегралов в (1.5) представляет собой скалярное произведение в $L_2(\Omega)$:

$$(u_n, D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(v_n, \varphi). \tag{1.6}$$

Известно, что из сильной сходимости (т.е. по норме), следует слабая сходимость:

$$||u_n - u||_{L_2(\Omega)} \to 0 \implies (u_n - u, \varphi) \to 0.$$

Переходя теперь в (1.6) к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Теорема 1.9. Пусть $v(x)$ — обобщенная производная функции $u(x)$ в области Ω : $v(x) = D^k u(x)$. В любой внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$ можно построить последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{u_n(x)\}$ таких, что в метрике $L_2(\Omega')$

$$u_n \to u, \quad D^k u_n \to v.$$

Доказательство. Построим последовательность следующим образом. Положим $u_n(x) = u_{h_n}(x)$, где h_n — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Тогда первое соотношение вытекает из теоремы 1.3, второе — из теорем 1.3 и 1.5.

Упражнения

1. Построить среднюю функцию для

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} |x| < 1, \\ 0, & \text{если} |x| \geq 1. \end{cases}$$

   Рассмотреть случай $n = 1$.

2. Найти обобщенную производную функции $y = |x - 1|$ в области $\Omega = (0, 2)$.

3. Найти обобщенную производную функции $y = \arccos \cos x$ в области $\Omega = (0, 2\pi)$.

4. Найти обобщенную производную второго порядка функции

$$y = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \ \Omega = (-\infty, \ \infty).$$

5. Доказать, что смешанная о.п. не зависит от порядка дифференцирования.

6. Показать, что из существования о.п. какого-либо порядка не следует существование предшествующих ей о.п. на следующем примере: пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны на сегменте [-1,1], но ни в одной его точке не дифференцируемы. Тогда функция $u(x, y) = f(x) + g(y)$ не имеет о.п. первого порядка, но имеет смешанную о.п. второго порядка, равную нулю в квадрате $-1 \leq x, y \leq 1$.

7. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если} |x| < 1, x_2 > 0, \\ -1, & \text{если} |x| < 1, x_2 < 0. \end{cases}$$

Показать, что $f(x_1, x_2)$ имеет о.п. первого порядка в каждом из полукругов, но не имеет о.п. по x_2 в круге $|x| < 1$.

8. Показать, что если в области Ω функция $f(x)$ имеет о.п. $D^\alpha f$, то и в любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ функция $f(x)$ имеет о.п. $D^\alpha f$.

1.3. Пространства Соболева W_p^k

Рассмотрим множество функций $u(x) \in L_p(\Omega), 1 \le p < \infty$, имеющих все обобщенные производные до порядка k включительно, также принадлежащие $L_p(\Omega)$. Введем на этом множестве норму:

$$||u|| = \{\sum_{|\alpha|=0}^{k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Полученное линейное нормированное пространство называется пространством Соболева $W_p^k(\Omega)$. Пространство $W_p^k(\Omega)$ банахово.

Пространство $W_p^k(\Omega)$ при $p = 2$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx. \tag{1.8}$$

В этом случае для $W_2^k(\Omega)$ часто используется обозначение $H^k(\Omega)$.

1.3.1. Пространства $W_2^1(\Omega), \overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)$ и их свойства

Теорема 1.10. Пространство $W_2^1(\Omega)$ — полное метрическое пространство относительно нормы

$$||u|| = \{\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^2\right) dx\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{u_k\}$, $u_k(x) \in W_2^1(\Omega)$, т.е. $||u_k - u_l||_{W_2^1(\Omega)} \to 0$ при $k, l \to \infty$. Из определения нормы (1.9) следует, что

$$||u_k - u_l||^2_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega (u_k - u_l)^2 dx + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_l}{\partial x_i})^2 dx =$$

$$= ||u_k - u_l||^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_l}{\partial x_i}||^2,$$

но тогда

$$||u_k - u_l||^2_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad k, l \to \infty,$$

$$||\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_l}{\partial x_i}||^2_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad k, l \to \infty \quad \forall i = 1, ...n.$$

Но $L_2(\Omega)$– полное пространство, поэтому существуют функции $u(x) \in L_2(\Omega)$ и $w_i(x) \in L_2(\Omega)$, к которым сходятся последовательности $\{u_k(x)\}$ и $\{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\}$ соответственно:

$$||u_k - u||^2_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{1.10}$$

$$||\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - wi||^2_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty \quad \forall i = 1, ...n. \tag{1.11}$$

Покажем, что $w_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Так как каждая функция $u_k(x)$ имеет обобщенную производную $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$, то для любой финитной функции $\varphi(x)$ справедливо тождество

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \varphi(x) dx = -\int\limits_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \tag{1.12}$$

Но из сильной сходимости в $L_2(\Omega)$ следует слабая сходимость, т.е. из формул (1.10) и (1.11) вытекает соответственно

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega u_k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int\limits_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \tag{1.13}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \varphi(x) dx = \int\limits_\Omega w_i(x) \varphi(x) dx. \tag{1.14}$$

Переходя теперь к пределу в (1.12), используя при этом (1.13) и (1.14), получаем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi(x)dx = -\int\limits_{\Omega} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx,$$

что означает, что $w_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Отсюда следует, что $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, а также, что

$$||u_k(x) - u(x)||_{w_2^1(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty,$$

а это и означает полноту пространства $W_2^1(\Omega)$.

О продолжении функций

Пусть функция $f(x)$ задана в области Ω, которая является строго внутренней подобластью области Ω'. Функцию $F(x)$, определенную в области Ω' и совпадающую с $f(x)$ в Ω, будем называть **продолжением** в Ω' функции $f(x)$. Заметим, что продолжение существует для любой функции, например, $F(x)$ можно положить равной нулю в $\Omega' \setminus \Omega$. Однако, продолжение $F(x)$ функции $f(x)$ часто полезно (а иногда небходимо) разыскивать в классе функций, обладающих такой же гладкостью, как и $f(x)$. Такие продолжения существуют не всегда, а при выполнении определенных условий на границу области Ω.

Справедливо следующее утверждение.

Пусть Ω и Ω' -- ограниченные области, $\bar{\Omega} \subset \Omega'$, $\partial\Omega \in C^k$. Тогда для любой функции $f(x) \in W_2^k(\Omega)$ существует финитное продолжение $F(x) \in W_2^k(\Omega')$, при этом

$$||F||_{W_2^k(\Omega')} \leq C||f||_{W_2^k(\Omega)}. \tag{1.15}$$

Для дальнейшего нам будет полезна следующая теорема.

Теорема 1.11. Множество функций $C^\infty(\bar{\Omega})$ всюду плотно в пространстве $W_2^k(\Omega)$.

Доказательство. Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^k. Рассмотрим область Ω', для которой область Ω является строго внутренней. Возьмем произвольную функцию $u(x) \in W_2^k$ и продолжим ее в Ω'. Известно (см., например, [2]), что для любой функции $u(x) \in W_2^k(\Omega)$ существует финитное в Ω' продолжение $U(x) \in W_2^k(\Omega')$, причем

$$||U(x)||_{W_2^k(\Omega')} \leq C||u(x)||_{W_2^k(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Построим среднюю функцию $U_h(x)$. Согласно свойству средних функций, справедливо следующее соотношение

$$||U_h - u||_{W_2^k(\Omega)} = ||U_h - U||_{W_2^k(\Omega)} \to 0, \quad h \to 0.$$

Так как $U_h(x) \in C^\infty(\Omega)$, то теорема доказана.

Следствие. Если граница области $\partial\Omega \in C^k$, то замыкание множества $C^k(\bar{\Omega})$ в норме

$$||u|| = \{\sum_{|\alpha|=0}^{k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$$

совпадает с W_2^k.

Определение. Замыкание множества $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega})$ в норме пространства $W_2^k(\Omega)$ называется пространством $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

1.3.2. Неравенство Фридрихса

Пусть Ω — ограниченная область в R^n. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx. \qquad (1.17)$$

Доказательство. Неравенство (1.17) достаточно доказать для $u(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$, так как тогда оно получается замыканием в норме пространства $W_2^1(\Omega)$ для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Пусть $u(x)$ — произвольный элемент из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Аппроксимируем его в норме $W_2^1(\Omega)$ функциями $\{u_k(x)\}$, $k = 1, 2, ...$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$. Так как $supp u_k(x) \in \Omega$, то $u_k(x)$ можно продолжить нулем вне Ω и рассмотреть вместо Ω параллелепипед Π, внутри которого находится область Ω. Пусть

$$\Pi = \{x : \quad 0 < x_i < d_i\}.$$

Обозначим d_1 наименьшее из его ребер.

Функцию $u_k(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ можно представить следующим образом

$$u_k(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u_k(\xi, x_2, ... x_n)}{\partial \xi} d\xi.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и проинтегрируем по Π :

$$\int_{\Pi} u_k^2 dx = \int_0^{d_1} dx \int_{\Pi'} \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u_k(\xi, x')}{\partial \xi} d\xi \right)^2 dx'.$$

где

$$\Pi' = \{x' : \ 0 < x_i < d_i, \ i = 2, ...n\}.$$

Для оценки одномерного внутреннего интеграла применим неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u_k(\xi, x')}{\partial \xi} d\xi\right)^2 \leq \int\limits_0^{x_1} d\xi \int\limits_0^{x_1} (\frac{\partial u_k}{\partial \xi})^2 d\xi \leq x_1 \int\limits_0^{d_1} (\frac{\partial u_k}{\partial \xi})^2 d\xi.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Pi} u_k^2 dx \leq \int\limits_0^{d_1} dx_1 \int\limits_{\Pi'} [x_1 \int\limits_0^{d_1} (\frac{\partial u_k}{\partial \xi})^2 d\xi] dx' = \frac{d_1^2}{2} \int\limits_{\Pi} (\frac{\partial u_k}{\partial x_1})^2 dx.$$

Так как $u_k(x) \equiv 0$ вне Ω, то

$$\int\limits_{\Omega} u_k^2(x) dx \leq \frac{d_1^2}{2} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial u_k}{\partial x_1})^2 dx. \tag{1.18}$$

Переходя в (1.18) к пределу, получим неравенство Фридрихса.

Следствие

В $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, в случае ограниченной области, нормы

$$||u||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \{ \int\limits_{\Omega} [u^2 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2] dx\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$||u||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \{ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$$

эквивалентны.

1.3.3. След функции

Пусть Ω — область в R^n, а S — некоторая гладкая $(n-1)$-мерная поверхность, лежащая в Ω. Если в Ω задана определенная в каждой точке функция $u(x)$, то можно найти ее значения и на поверхности S. Если же функция $u(x)$ задана в Ω п.в., то ее значения на фиксированной поверхности S определяются неоднозначно: т.к. $mesS = 0$, то функция может иметь на S произвольное значение. Обобщением понятия значения на $(n-1)$-мерной поверхности почти всюду определенной функции является понятие **следа** функции.

Пусть функция $u(x)$ непрерывна. **Следом** $u|_S$ функции $u(x) \in C(\bar{\Omega})$ на поверхности S будем называть значение на этой поверхности определенной в каждой точке, непрерывной в $\bar{\Omega}$ функции, почти всюду совпадающей с $u(x)$.

Рассмотрим теперь понятие следа функции $u(x) \in W_2^1(\Omega)$.

Пусть S – поверхность класса C^1, лежащая в $\bar{\Omega}$, S_1 ее простой кусок, однозначно проектирующийся на некоторую область D плоскости $x_n = 0$ и имеющий уравнение

$$x_n = \varphi(x'), \ x' = (x_1, ..., x_{n-1}), \ \varphi(x') \in C(\bar{D}).$$

Так как область Ω ограничена, то она вся расположена в некотором кубе $\{0 < x_i < a, \ i = 1, ..., n\}$. Предположим, что $u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, и положим ее равной нулю вне $\bar{\Omega}$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница,

$$u(x)|_{S_1} = u(x', \varphi(x')) = \int\limits_0^{\varphi(x')} \frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n} dx_n.$$

Поэтому, на основании неравенства Буняковского,

$$|u|_{S_1}|^2 \le \varphi(x') \int\limits_0^{\varphi(x')} \left|\frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n \le a \int\limits_0^{a} \left|\frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n.$$

Умножая это неравенство на $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + ... + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ и интегрируя по D, получим неравенство

$$||u||^2_{L_2(S_1)} = \int\limits_{S_1} |u|_{S_1}|^2 dS_1 \le C^2 ||u||^2_{W_2^1(\Omega)}.$$

Так как поверхность S можно покрыть конечным числом простых кусков, то складывая соответствующие неравенства, получим

$$||u||_{L_2(S)} \le C ||u||_{W_2^1(\Omega)}. \tag{1.19}$$

Заметим, что неравенство (1.19)имеет место и для любой функции $u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$.

Пусть теперь $u(x) \in W_2^1(\Omega)$. Рассмотрим последовательность функций $\{u_m(x)\}$, $u_m(x) \in C^1(\Omega)$, сходящуюся в норме $W_2^1(\Omega)$ к функции $u(x)$. Запишем неравенство (1.19) для функции $u_m - u_k$:

$$||u_m - u_k||_{L_2(S)} \leq C||u_m - u_k||_{W_2^1(\Omega)}. \tag{1.20}$$

Так как $||u_m - u_k||_{H^1(\Omega)} \to 0$ при $m,\ k \to \infty$, то и $||u_m - u_k||_{L_2(S)} \to 0$ при $m,\ k \to \infty$. Это означает, что последовательность следов $u_m|_S$ гладких функций $u_m(x)$ является фундаментальной в $L_2(S)$. В силу полноты $L_2(S)$ существует функция $\bar{u}(x) \in L_2(S)$, к которой сходится последовательность следов $u_m|_S$ при $m \to \infty$. Переходя в (1.20) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$||u_k - \bar{u}||_{L_2(S)} \leq C||u_k - u||_{W_2^1(\Omega)}. \tag{1.21}$$

Функция $\bar{u}(x)$ **называется следом функции** $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ на поверхности S.

Формула интегрирования по частям

Пусть функции $u(x),\ v(x)$ принадлежат $W_2^1(\Omega),\ \partial\Omega \in C^1$. Тогда для любого $i = 1, ..., n$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int\limits_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv\cos(n, x_i) dS, \tag{1.22}$$

где n —внешняя единичная нормаль к поверхности $\partial\Omega$.

1.3.4. Неравенство Пуанкаре

Для функций $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega u^2 dx \leq C\left[\left(\int\limits_\Omega u dx\right)^2 + \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\right]. \tag{1.23}$$

Если область Ω ограничена, то ее можно поместить в параллелепипед Π. Не ограничивая общности, будем рассматривать $\Pi = \{x : 0 < x_i < d_i\}$. Продолжим функцию $u(x)$ вне области Ω нулем, будем рассматривать ее в параллелепипеде Π и покажем, что справедливо неравенство

$$\int\limits_\Pi u^2 dx \leq \frac{1}{mes\Pi}\left(\int\limits_\Pi u dx\right)^2 + \frac{n}{2}\int\limits_\Pi \sum_{k=1}^n d_k^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \tag{1.24}$$

Пусть $u(x) \in C^1(\Pi)$. Перейдем к новым координатам $y_i = x_i/d_i$, $i = 1,...n$. Тогда неравенство (1.24) перейдет в эквивалентное ему неравенство для куба $K = \{y : 0 < y_i < 1\}$ относительно функций $\tilde{u}(y) = u(d_1y_1, ..., d_ny_n)$:

$$\int\limits_K \tilde{u}^2 dy \le \left(\int\limits_K \tilde{u} dy\right)^2 + \frac{n}{2}\int\limits_K \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k}\right)^2 dy. \tag{1.25}$$

Зафиксируем две произвольные точки $y = (y_1, y_2, ...y_n)$ и $y* = (y_1', y_2', ..., y_n')$ и рассмотрим цепочку точек

$$y^1 = (y_1', y_2, ..., y_n),$$

$$y^2 = (y_1', y_2', ..., y_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^n = (y_1', y_2', ..., y_n') = y* .$$

По теореме Ньютона-Лейбница имеем:

$$\tilde{u}(y*) - \tilde{u}(y) = \int\limits_{y_1}^{y_1'} \frac{\partial \tilde{u}(\eta_1, y_2, ..., y_n)}{\partial \eta_1} d\eta_1 +$$

$$+ \int\limits_{y_2}^{y_2'} \frac{\partial \tilde{u}(y_1', \eta_2, y_3, ..., y_n)}{\partial \eta_2} d\eta_2 + ... + \int\limits_{y_2}^{y_2'} \frac{\partial \tilde{u}(y_1', y_2', ..., \eta_n)}{\partial \eta_n} d\eta_n.$$

Возведем обе части полученного равенства в квадрат и оценим правую часть, пользуясь элементарным неравенством $2ab \le a^2 + b^2$ и неравенством Коши-Буняковского. Тогда

$$\tilde{u}^2(y*) - 2\tilde{u}(y*)\tilde{u}(y) + \tilde{u}^2(y) \le n \left(\int\limits_0^1 (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta_1})^2 d\eta_1 + ... + \int\limits_0^1 (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta_n})^2 d\eta_n \right).$$

Это неравенство проинтегрируем сначала по $y \in K$, затем по $y* \in K$. В результате получим:

$$2\int\limits_K \tilde{u}^2(y)dy - 2\left(\int\limits_K \tilde{u}(y)dy\right)^2 \le n \int\limits_K \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k}\right)^2 dy.$$

откуда следует (1.25), а следовательно, и (1.24). Так как функции из $C^1(\Pi)$ плотны в $W_2^1(\Pi)$, то неравенство (1.24) справедливо для функций $u(x) \in W_2^1(\Pi)$. Вспоминая теперь, что функции были продолжены в параллелепипед Π нулем, следовательно, интегралы в (1.24) отличны от нуля только по Ω, приходим к (1.23).

Критерий принадлежности подпространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

Для того, чтобы функция из пространства $H^1(\Omega)$ принадлежала подпространству $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы ее след на границе области был равен нулю.

О компактности множеств в L_2

Предположим, что Ω — ограниченная область с гладкой границей: $\partial\Omega \in C^1$. Тогда функции из Ω можно продолжить на более широкую область с сохранением класса, т.е. так, что для них будет выполняться неравенство (1.15).

Теорема 1.12. Ограниченное в $W_2^1(\Omega)$ множество компактно в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Продолжим функции из $W_2^1(\Omega)$ вне Ω на параллелепипед $\Pi = \{x : 0 < x_i < d_i\}$, $\Omega \subset \Pi$, с сохранением класса. Разобьем Π на элементарные параллелепипеды Π_i со сторонами d_k/N, $k = 1, 2, ..., n$, и гранями, параллельными координатным плоскостям.

Для любой функции $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство Пуанкаре (1.24), в котором Π заменено на Π_i. Из него следует

$$\int\limits_{\Pi} u^2 dx \le \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|\Pi_i|} \left(\int\limits_{\Pi_i} u dx \right)^2 + \frac{n}{2} \int\limits_{\Pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d_k}{N} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx. \quad (1.26)$$

Рассмотрим множество функций $\{u_m(x)\}$, ограниченное в норме пространства $W_2^1(\Omega)$: $||u_m||_{W_2^1(\Omega)} \le C$. Из неравенства (1.15) следует, что это утверждение справедливо и для продолженных на Π функций. Пространство $W_2^1(\Pi)$ является гильбертовым, а в гильбертовом пространстве, как известно, всякое замкнутое ограниченное множество слабо компактно в себе. Это означает, что из последовательности $\{u_m(x)\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность $\{u_m(x)\}$ слабо сходится в $L_2(\Pi)$. Тогда для любых u_p, u_q из неравенства (1.26) получим следующее неравенство:

$$||u_p - u_q||^2_{L_2(\Omega)} \le ||u_p - u_q||^2_{L_2(\Pi)} \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|\Pi_i|} \left(\int_{\Pi_i} (u_p - u_q) dx \right)^2 + \frac{n}{2N^2} \sum_{k=1}^{n} d_k^2 || \frac{\partial u_p}{\partial x_k} - \frac{\partial u_q}{\partial x_k} ||^2_{L_2(\Pi)}. \qquad (1.27)$$

Последнее слагаемое в (1.27) можно сделать сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого N сразу для всех p и q. Зафиксируем это значение N. Первое слагаемое в правой части (1.27) для фиксированного N будет стремиться к нулю при $p, q \to \infty$ в силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\}$ в $L_2(\Pi)$. Тогда

$$||u_p - u_q||_{L_2(\Omega)} \to 0$$

при $p, q \to \infty$, что означает, что последовательность $\{u_m\}$ сходится в норме $L_2(\Omega)$.

Теорема доказана.

Аналогичное утверждение, доказательство которого здесь не приводится, справедливо для следов функций из $W_2^1(\Omega)$: если множество функций ограничено в $W_2^1(\Omega)$, то множество их следов на $(n-1)$-мерной поверхности $S \subset \bar{\Omega}$ класса C^1 компактно в $L_2(S)$.

1.3.5. Эквивалентные нормировки пространств

Пусть в области Ω, $\partial\Omega \in C^1$, задана вещественная, непрерывная в $\bar{\Omega}$, симметрическая матрица $P(x) = (p_{ij}(x))$, $i, j = 1, ..., n$. Пусть заданы также $q(x) \in C(\bar{\Omega})$, $r(x) \in C(\partial\Omega)$.

Рассмотрим билинейную форму

$$\mathbf{W}(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} dx + \int_{\Omega} quvdx + \int_{\partial\Omega} ruvdS. \qquad (1.28)$$

Теорема 1.13. Если матрица $P(x)$ положительно определена, $q(x) \ge 0$ на $\bar{\Omega}$, $r(x) \ge 0$ на $\partial\Omega$ и либо $q(x) \not\equiv 0$, либо $r(x) \not\equiv 0$, то билинейная форма (1.28) определяет на $W_2^1(\Omega)$ скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx. \qquad (1.29)$$

Доказательство. Согласно определению эквивалентности скалярных произведений, для доказательства теоремы нужно установить существование постоянных $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ таких, что для всех $u, v \in W_2^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\mathbf{W}(u,u) \leq C_1^2 ||u||^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad ||u||^2_{W_2^1(\Omega)} \leq C_2^2 \mathbf{W}(u,u). \tag{1.30}$$

Полагая в (1.28) $v = u$, получим

$$\mathbf{W}(u,u) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} dx + \int\limits_{\Omega} q u^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} r u^2 dS.$$

Заметим, что,в силу условий теоремы, каждое слагаемое в $\mathbf{W}(u,u)$ неотрицательно.

Оценим каждое.

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \leq A \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j}^{n} |u_{x_i}||u_{x_j}| dx \leq An \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq An ||u||^2_{W_2^1(\Omega)},$$

где $A = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} ||p_{ij}||_{C(\bar\Omega)}$;

$$\int\limits_{\Omega} q|u|^2 dx \leq A_1 ||u||^2_{L_2(\Omega)} \leq A_1 ||u||^2_{W_2^1(\Omega)};$$

где $A_1 = ||q||_{C(\bar\Omega)}$;

$$\int\limits_{\partial\Omega} r|u|^2 ds \leq A_2 ||u||^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq C^2 A_2 ||u||^2_{W_2^1(\Omega)},$$

где $A_2 = ||r||_{C(\partial\Omega)}$. Последнее неравенство справедливо на основании неравенства (1.19). Из полученных оценок следует существование $C_1^2 = An + A_1 + A_2 C^2$.

Теперь докажем справедливость второго неравенства в (1.30).

Предположим, что не существует постоянной C_2^2. Это означает, что для любого целого $m \geq 1$ найдется такая функция $u_m(x) \in W_2^1(\Omega)$, что $||u_m||^2_{W_2^1(\Omega)} > m\mathbf{W}(u_m, u_m)$. Введем функцию $g_m(x) = u_m(x)/||u_m||_{W_2^1(\Omega)}$. Для этой функции

$$\mathbf{W}(g_m, g_m) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j} g_{mx_i} g_{mx_j} dx + \int\limits_{\Omega} q g_m^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} r g_m^2 dS < \frac{1}{m},$$

к тому же

$$||g_m||_{W_2^1(\Omega)} = 1. \tag{1.31}$$

Из последнего неравенства вытекает, что каждое из слагаемых меньше $1/m$, а, в силу условия положительной определенности матрицы P, существует $\gamma > 0$ такое, что $\sum\limits_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$, поэтому

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g_m|^2 dx < \frac{1}{m\gamma}, \quad \int\limits_{\Omega} q|g_m|^2 dx < \frac{1}{m}, \quad \int\limits_{\partial\Omega} r|g_m|^2 ds < \frac{1}{m}. \tag{1.32}$$

В силу (1.31) последовательность $\{g_m\}$ ограничена в $W_2^1(\Omega)$, поэтому из нее можно выбрать подпоследовательность, фундаментальную в $L_2(\Omega)$. Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность фундаментальна в $L_2(\Omega)$, т.е. $||g_m - g_l||_{L_2(\Omega)} \to 0, \ \ m, l \to \infty$. Рассмотрим

$$||g_m - g_l||^2_{W_2^1(\Omega)} = ||g_m - g_l||^2_{L_2(\Omega)} + |||\nabla(g_m - g_l)|||^2_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq ||g_m - g_l||^2_{L_2(\Omega)} + 2|||\nabla g_m|||^2_{L_2(\Omega)} + 2|||\nabla g_l|||^2_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq ||g_m - g_l||^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{m\gamma} + \frac{2}{l\gamma}.$$

Отсюда следует, что $||g_m - g_l||_{W_2^1(\Omega)} \to 0$ при $m, l \to \infty$, т.е. последовательность $\{g_m\}$ фундаментальна в $W_2^1(\Omega)$. Так как пространство $W_2^1(\Omega)$ полное, то последовательность $\{g_m\}$ сходится к некоторому элементу $g \in W_2^1(\Omega)$. Переходя к пределу в равенстве (1.31) и неравенствах (1.32), получим

$$\text{a)} ||g||_{W_2^1(\Omega)} = 1, \quad \text{b)} \int\limits_{\Omega} |\nabla g|^2 dx = 0, \quad \text{c)} \int\limits_{\Omega} |g|^2 dx = 0, \quad \text{d)} \int\limits_{\partial\Omega} r|g|^2 ds = 0.$$

Из равенств b) и a) вытекает, что

$$g = const = 1/\sqrt{|\Omega|}, \quad x \in \Omega, \quad g = 1/\sqrt{|\Omega|}, \ x \in \partial\Omega.$$

Но это противоречит, если $q(x) \neq 0$, равенству c) или, если $r(x) \neq 0$, равенству d). Полученное противоречие подтверждает справедливость утверждения теоремы.

Следствие
Билинейная форма

$$\mathbf{W}(u,v) = \int\limits_{\Omega} (p(x)\nabla u \nabla v + q(x)uv)dx + \int\limits_{\partial\Omega} r(x)uvds,$$

где $p(x) \in C(\bar{\Omega})$, $q(x) \in C(\bar{\Omega})$, $r(x) \in C(\partial\Omega)$, $p(x) \geq const > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, $r(x) \geq 0$, $x \in \partial\Omega$ и $q(x)$, $r(x)$ не обращаются тождественно в нуль одновременно, определяет в $W_2^1(\Omega)$ скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (1.29).

Теорема 1.14. Если матрица $P(x)$– положительно определенная, функция $q(x) \geq 0$ в $\bar{\Omega}$, то билинейная форма

$$\tilde{\mathbf{W}}(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx + \int\limits_{\Omega} quvdx$$

задает скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, эквивалентное скалярному произведению (1.29).

Доказательство. Так как $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$, то из теоремы 3.4 вытекает, что в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ можно ввести скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (1.29), с помощью билинейной формы (1.28) $r(x) \equiv 1$ на $\partial\Omega$ и $q(x) \geq 0$, $x \in \Omega$. Но для $u(x)$, $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ значения билинейных форм $\mathbf{W}$ и $\tilde{\mathbf{W}}$ совпадают. Теорема доказана.

Пусть $P(x) = p(x)E$.

Следствие
Билинейная форма

$$\mathbf{W}(u,v) = \int\limits_{\Omega} (p\nabla u \nabla v + quv)dx,$$

где $p(x) \in C(\bar{\Omega})$, $q(x) \in C(\bar{\Omega})$, $p(x) \geq const > 0$, $q(x) \geq 0$ в Ω, определяет в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (1.29).

Заметим, что в частности, эквивалентным (1.29) скалярным произведением в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является

$$(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Упражнения

1. Пусть

   (a) $u(x) \in W_2^1(0,1)$,

   (b) $u(x) \in W_2^1(D),\ x \in R^2, D = \{x : 0 < x_1 < a,\ 0 < x_2 < b\}$,

   (c) $u(x) \in W_2^2(0,1)$,

   (d) $u(x) \in W_2^2(D),\quad D = \{x :\ \ 0 < x_1 < a,\ 0 < x_2 < a\}$.

   Написать скалярное произведение и норму в каждом случае.

2. Доказать, что для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)$ имеет место неравенство

$$\int_0^\pi u^2 dx \le \int_0^\pi u'^2 dx.$$

3. Доказать, что для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ имеет место неравенство

$$\int_a^b u^2 dx \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b u'^2 dx.$$

4. Доказать, что для любой функции $u \in W_2^1(0,2\pi)$ имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} u^2 dx \le \int_0^{2\pi} u'^2 dx + \left(\int_0^{2\pi} u dx\right)^2.$$

5. Доказать, что скалярные произведения

$$(u,v)_1 = \int_0^\pi (uv + u'v')dx, \quad (u,v)_2 = \int_0^\pi u'v'dx$$

   в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)$ эквивалентны.

6. Доказать, что скалярные произведения

$$(u,v)_1 = \int_0^{2\pi} (uv + u'v')dx,$$

$$(u,v)_2 = \int_0^{2\pi} u'v'dx + \left(\int_0^{2\pi} udx\right)\left(\int_0^{2\pi} vdx\right)$$

в пространстве $W_2^1(0,2\pi)$ эквивалентны.

7. Показать, что выражение $\int_\Omega (grad\ u, grad\ v)dx$ задает скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, эквивалентное скалярному произведению

$$\int_\Omega [uv + (grad\ u, grad\ v)]dx.$$

8. Показать, что существует такая постоянная $c > 0$, что для любой $u \in W_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_\Omega u^2 dx \le c \left[\int_\Omega |grad\ u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} u^2 ds\right].$$

9. Показать, что если $r \in C(\partial\Omega)$, $r(x) > 0$, то выражение

$$(u,v)_1 = \int_\Omega (grad\ u, grad\ v)dx + \int_{\partial\Omega} ruvds$$

задает в $W_2^1(\Omega)$ скалярное произведение, причем эквивалентное скалярному произведению

$$(u,v) = \int_\Omega [uv + (grad\ u, grad\ v)]dx.$$

10. Доказать неравенство Пуанкаре

$$\int_\Omega u^2 dx \le c \left[\left(\int_\Omega udx\right)^2 + \int_\Omega |grad\ u|^2 dx\right],\ u \in H^1(\Omega),\ c > 0.$$

11. Доказать, что для того, чтобы функция $u(x) \in L_2(0, 2\pi)$ принадлежала $W_2^1(0, 2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд с общим членом $n^2(a_n^2 + b_n^2)$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\cos nx dx, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\sin nx dx, \quad n = 0, 1, \ldots$$

при этом

$$||u||_1^2 = \int_0^{2\pi} (u^2 + u'^2)dx = \pi\sum_1^{\infty}(k^2+1)(a_k^2 + b_k^2) + \pi(\frac{a_0}{2})^2.$$

12. Доказать, что для того, чтобы функция $u(x) \in L_2(0, \pi)$ принадлежала $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд с общим членом $k^2 b_k^2$, $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x)\sin kx dx$. При этом

$$||u||^2 = \int_0^{\pi}(u^2 + u'^2)dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(k^2+1)b_k^2.$$

13. Показать эквивалентность скалярных произведений в пространстве $W_2^1(\Omega)$

$$(u, v)_1 = \int_\Omega [uv + (grad\ u, grad\ v)]dx,$$

$$(u, v)_2 = \int_\Omega (grad\ u, grad\ v)dx + \int_\Omega u dx \cdot \int_\Omega v dx.$$

14. Доказать полноту пространства $W_2^2(0, 1)$.

15. Доказать компактность вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Глава 2

Обобщенные решения краевых задач

2.1. Эллиптические уравнения

Классические и обобщенные решения краевых задач

Рассмотрим в области Ω уравнение

$$Lu \equiv div(a(x)\nabla u) - c(x)u = f(x), \tag{2.1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$a(x) \in C^1(\bar{\Omega}),\ a(x) > 0,\ \forall x \in \Omega,\ c(x) \in C(\bar{\Omega}).$$

Функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ называется классическим решением первой краевой задачи, или задачи Дирихле, для уравнения (2.1), если она удовлетворяет уравнению (2.1) и условию

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \tag{2.2}$$

Функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ называется классическим решением третьей краевой задачи для уравнения (2.1), если она удовлетворяет уравнению (2.1) и условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \tag{2.3}$$

Будем считать, что $\sigma(x) \in C(\partial\Omega),\ \sigma(x) \geq 0$.

Если $\sigma(x) \equiv 0$, то краевая задача (2.1)—(2.3) называется второй краевой задачей, или задачей Неймана.

Пусть функция $u(x)$ является классическим решением задачи Дирихле. Умножим тождество (2.1)на произвольную финитную функцию $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω. С помощью формулы Остроградского-Гаусса получим

$$\int\limits_{\Omega} (a\nabla u \nabla v + cuv)dx = -\int\limits_{\Omega} fv dx. \tag{2.4}$$

Интегральное тождество (2.4) имеет место и для

$$u(x) \in W_2^1(\Omega),\ v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ f(x) \in L_2(\Omega).$$

Определение 2.1. Функция $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (2.1) при $f(x) \in L_2(\Omega)$, если она удовлетворяет тождеству (2.4) для любой $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и условию (2.2), где равенство понимается как равенство элементов из $L_2(\partial\Omega)$, $u|_{\partial\Omega}$ — след функции $u(x)$.

Аналогично можно ввести понятие обобщенного решения третьей (второй) краевой задачи для уравнения (2.1).

Определение 2.2. Функция $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ называется обобщенным решением третьей краевой задачи для уравнения (2.1) при $f(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi(x) \in L_2(\partial\Omega)$, если для всех $v(x) \in W_2^1(\Omega)$ она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Omega} (a\nabla u \nabla v + cuv)dx + \int\limits_{\partial\Omega} a\sigma uv dS = -\int\limits_{\Omega} fv dx + \int\limits_{\partial\Omega} a\varphi v dS. \tag{2.5}$$

2.2. Обобщенное решение задачи Дирихле в простейшем случае

Рассмотрим сначала случай, когда граничное условие задачи Дирихле однородно. Тогда обобщенным решением этой задачи в силу определения 2.1 является функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ тождеству (2.4).

Пусть $c(x) \geq 0,\ x \in \Omega$. Введем в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ скалярное произведение

$$(u, v)_1 = \int\limits_{\Omega} (a\nabla u \nabla v + cuv)dx, \tag{2.6}$$

эквивалентное обычному

$$(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx.$$

Тогда тождество (2.4) может быть записано в виде

$$(u, v)_1 = -(f, v)_{L_2}. \tag{2.7}$$

При фиксированном $f \in L_2(\Omega)$ скалярное произведение $(f, v)_{L_2}$, где $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$, является линейным ограниченным функционалом, заданным на $\overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$. Согласно теореме Рисса, найдется функция $F \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$, для которой $-(f, v)_{L_2} = (F, v)_1$ для всех $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$. Такая функция единственна и удовлетворяет неравенству $||F||_1 \leq C||f||_{L_2}$. Следовательно, в $\overset{\circ}{H}{}^1 (\Omega)$ существует единственная функция $u = F$, удовлетворяющая тождеству (2.7).

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. Если $c(x) \geq 0$ в Ω, то для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение однородной задачи Дирихле для уравнения (2.1). При этом $||u||_1 \leq C||f||_{L_2}$, $C > 0$.

2.3. Обобщенные собственные функции

Не равная тождественно нулю функция $u(x)$ называется собственной функцией задачи Дирихле для оператора $L \equiv div(a(x)\nabla) - c(x)$, если существует такое число λ, что функция $u(x)$ является классическим решением следующей задачи

$$Lu = \lambda u, \ x \in \Omega, \tag{2.8}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.9}$$

Число λ называется собственным значением.

Пусть λ — собственное значение, $u(x)$ — собственная функция задачи Дирихле, причем $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$. Умножив (2.8) на произвольную функцию $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$ и проинтегрировав полученное равенство по области Ω, получим интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (a\nabla u \nabla v + cuv) dx = -\lambda \int_{\Omega} uv dx, \tag{2.10}$$

которому функция $u(x)$ удовлетворяет при всех $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Определение 2.3. Не равная нулю функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ называется обобщенной собственной функцией задачи Дирихле для оператора

$$L = div(a(x)\nabla) - c(x),$$

если существует такое число λ, что функция $u(x)$ при всех $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству (2.10). Число λ называется собственным значением.

Рассмотрим уравнение (2.1), но теперь не будем предполагать, что $c(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$. Пусть $m = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} c(x)$. Тогда функция $\tilde{c}(x) = c(x) - m + 1 \geq 1$, $x \in \Omega$. Теперь скалярное произведение, эквивалентное обычному в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, можно задать равенством

$$(u, v)_1 = \int\limits_{\Omega} (a\nabla u\nabla v + \tilde{c}uv)dx. \tag{2.11}$$

Тождество (2.10) можно переписать в виде

$$(u, v)_1 = (-\lambda - m + 1)(u, v)_{L_2} \tag{2.12}$$

Лемма 2.1. Существует такой линейный ограниченный оператор $A : L_2(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ с областью определения $L_2(\Omega)$, для которого при всех $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет место равенство

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = (Au, v)_1. \tag{2.13}$$

Оператор A имеет обратный A^{-1}. Оператор A, если его рассматривать как оператор из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным.

Доказательство. Пусть u– произвольная фиксированная функция из $L_2(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Линейный функционал $l(v) = (u, v)_{L_2(\Omega)}$ ограничен в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, так как

$$|l(v)| = |(u, v)_{L_2(\Omega)}| \leq ||u||_{L_2(\Omega)}|v||_{L_2(\Omega)} \leq C||u||_{L_2(\Omega)}||v||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Согласно теореме Рисса, существует единственная функция $h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что $l(v) = (h,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$ для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, причем $||h||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = ||l|| \le C||u||_{L_2(\Omega)}$. Это означает, что на $L_2(\Omega)$ задан оператор $A:\ Au = h$, для которого выполняется (2.13). Так как $||Au||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C||u||_{L_2(\Omega)}$, то оператор A из $L_2(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ограничен.

Если при некотором $u \in L_2(\Omega)$ $Au = 0$, то в силу (2.13) $(u,v)_{L_2(\Omega)} = 0$ для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т.е. $u = 0$. Это означает, что существует обратный оператор A^{-1}.

Из (2.13) вытекает, что оператор A из $L_2(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является самосопряженным:

$$(Au,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = (u,v)_{L_2(\Omega)} = \overline{(v,u)}_{L_2(\Omega)} = \overline{(Av,u)}_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = (u,Av)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Из (2.13) вытекает так же, что оператор A положителен.

Покажем, что оператор A из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является вполне непрерывным. Рассмотрим произвольное, ограниченное в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ множество функций. В силу теоремы 1.3, это множество компактно в $L_2(\Omega)$. Значит, из любого его бесконечного подмножества можно выбрать фундаментальную в $L_2(\Omega)$ последовательность $\{u_m\}$, $m = 1,2,...$ Так как оператор A из $L_2(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ограничен и, следовательно, непрерывен, то последовательность $\{Au_m\}$, $m = 1,2,...$ фундаментальна в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Лемма доказана.

В силу этой леммы, тождество (2.12) можно записать в виде операторного уравнения в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$-(\lambda + m - 1)Au = u. \tag{2.14}$$

Таким образом, число λ является собственным значением задачи Дирихле для оператора $L \equiv div(a(x)\nabla) - c(x)$, а $u(x)$ — соответствующей ему обобщенной собственной функцией тогда и только тогда, когда $-(\lambda + m - 1)$ есть характеристическое число самосопряженного вполне непрерывного оператора $A : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а $u(x)$ — соответствующий ему элемент.

Перепишем теперь тождество (2.4) так:

$$(u,v)_1 + (m-1)(u,v)_{L_2} = -(f,v)_{L_2}, \tag{2.15}$$

где скалярное произведение $(u, v)_1$ определено равенством (2.11). В силу леммы 2.1, тождество (2.15) эквивалентно операторному уравнению

$$u + (m-1)Au = -Af \tag{2.16}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Оператор A вполне непрерывен, поэтому для исследования разрешимости уравнения (2.16) можно применить теоремы Фредгольма. Заметим, что число $-m+1$ является характеристическим числом оператора A тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$– собственное значение задачи Дирихле для оператора L.

Теоремы Фредгольма

Рассмотрим уравнение

$$u - \lambda Au = f, \tag{2.17}$$

где A– вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. и сопряженное с ним

$$v - \bar{\lambda}A^*v = g. \tag{2.18}$$

Первая теорема Фредгольма

Вполне непрерывный оператор имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться лишь на бесконечности.

Вторая теорема Фредгольма

Если значение λ правильное, то как уравнение (2.17), так и сопряженное с ним (2.18) разрешимо при любой правой части, и решение каждого из этих уравнений единственно.

Третья теорема Фредгольма

Если λ– характеристическое, то однородные уравнения $u - \lambda Au = 0$ и $v - \bar{\lambda}A^*v = 0$ имеют одно и то же конечное число собственных функций.

Четвертая теорема Фредгольма

Для того, чтобы уравнение (2.17) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален всем собственным функциям сопряженного уравнения (2.18).

Из теорем Фредгольма вытекает

Альтернатива Фредгольма.

Либо уравнение (2.17) разрешимо, какова бы ни была его правая часть, либо соответствующее ему однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

Теперь, опираясь на теоремы Фредгольма, можно сделать вывод о разрешимости задачи Дирихле.

Теорема 2.2. Для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле с однородными условиями для уравнения (2.1), если нуль не является собственным значением оператора L. При этом имеет место неравенство

$$||u||_1 \le c||f||_{L_2},$$

в котором $c > 0$ и не зависит от f.

Теорема 2.3. Если нуль является собственным значением задачи Дирихле для оператора L, то для существования обобщенного решения этой задачи с однородными условиями необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $(f, u_p)_{L_2} = 0$ для всех обобщенных собственных функций u_p, соответствующих собственному значению $\lambda = 0$.

2.4. Обобщенное решение задачи Дирихле в общем случае

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \tag{2.19}$$

где $a_{ij}(x) \in C^1(\Omega)$, $b_i(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $c(x) \in C(\Omega)$, $i, j = 1, ...n$, матрица $||a_{ij}||$ симметрическая и положительно определенная, т.е. для любого вектора $(\xi_1, ..., \xi_n)$ и любой точки $x \in \Omega$ удовлетворяет с некоторой постоянной $\gamma > 0$ неравенству

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{2.20}$$

Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$.

Определение 2.4. Функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ называется обобщенным решением однородной задачи Дирихле для уравнения (2.19), если она при всех $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx + \int\limits_\Omega u \left[\sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + (\sum_{i=1}^n b_{ix_i} - c) v \right] dx = - \int\limits_\Omega f v dx. \tag{2.21}$$

Введем эквивалентное обычному скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$(u, v)_1^0 = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx. \tag{2.22}$$

Тогда тождество (2.21) можно переписать в виде

$$(u, v)_1^0 + \left(u, \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + (\sum_{i=1}^n b_{ix_i} - c) v \right)_{L_2(\Omega)} = -(f, v)_{L_2}. \tag{2.23}$$

Лемма 2.2. Для любых непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций $b_0(x)$, $b_1(x), ..., b_n(x)$ существует такой линейный ограниченный оператор A из $L_2(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, определенный на всем $L_2(\Omega)$, что для всех $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет место равенство

$$\left(u, \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + b_0 v \right)_{L_2(\Omega)} = (Au, v)_1^0.$$

Оператор A, если его рассматривать как оператор из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, вполне непрерывен.

Утверждение леммы доказывается так же, как и в лемме 2.1.

С помощью теоремы Рисса и леммы 2.2, где положим $b_0 = \sum\limits_{i=1}^n b_{ix_i} - c$, тождество (2.23) можно переписать в виде операторного равенства в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$u + Au = F, \tag{2.24}$$

где элемент F определяется из равенства $(f, v)_{L_2(\Omega)} = (F, v)_1^0$.

Лемма 2.3. Если $\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^n b_{ix_i} - c \geq 0$ в Ω, то однородное уравнение (2.24) имеет лишь нулевое решение.

Доказательство. Пусть u — ненулевое решение уравнения $u + Au = 0$. Умножим это равенство скалярно на u в $\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)$. Получим

$$||u||^2_{\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)} + (Au, u)_{\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)} = 0.$$

Так как $(Au, u)_{\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)} = (u, \sum\limits_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + b_0 u)_{L_2}$, то

$$(Au, u)_{\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} u + (\sum_{i=1}^{n} b_{ix_i} - c) u^2 \right) dx.$$

Первое слагаемое проинтегрируем по частям, после чего получим

$$(Au, u)_{\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_{ix_i} - c \right) u^2 dx \geq 0,$$

а поэтому $||u||^2_{\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)} \leq 0$, т.е. $u = 0$.

Из доказанной леммы и второй теоремы Фредгольма вытекает

Теорема 2.4. Если $\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ix_i} - c \geq 0$ в Ω, то для любой функции $f(x) \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (2.19).

Упражнения

1. Пусть $u(x)$ —классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Показать, что если $u \in C^1(\bar{\Omega})$, то $u(x)$ является обобщенным решением задачи Дирихле.

2. Пусть $u(x)$ —обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Показать, что если $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, то $u(x)$ является классическим решением задачи Дирихле.

3. Рассмотрим уравнение $\Delta u + 2xu = f(x, y)$ в области $D = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-2)^2 < 1\}$. Выяснить, разрешима ли для этого уравнения задача Дирихле с однородными условиями в пространстве $W_2^1(D)$.

4. Рассмотрим уравнение $\Delta u + x^2 u_x + y^2 u_y + yu = f(x, y)$ в области $D = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$. Выяснить, разрешима ли для этого уравнения задача Дирихле с однородными условиями в пространстве $W_2^1(D)$.

5. Показать, что обобщенное решение класса L_2 уравнения Лапласа является гармонической функцией.

   Указание: воспользоваться определением средних функций и свойством среднего арифметического гармонических функций.

6. Пусть Q — шар радиуса R : $Q = \{|x| < R\}$. Обозначим через S_1 полусферу $\{|x| = R\} \cup \{x_1 > 0\}$, а через S_2 — полусферу $\{|x| = R\} \cup \{x_1 \leq 0\}$. Функция $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(Q \cup S_1) \cap C(\bar{Q})$, удовлетворяющая уравнению Пуассона $\Delta u = f$, $x \in Q$, и граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_1} = 0\,, \quad u|_{S_2} = 0,$$

   называется классическим решением поставленной задачи.

   Обозначим $\bar{W}_2^1(Q)$ подпространство пространства $W_2^1(Q)$, состоящее из всех функций $u \in W_2^1(Q)$, след которых на S_2 равен нулю. Назовем обобщенным решением поставленной задачи функцию $u \in \bar{W}_2^1(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \nabla u \nabla v dx = -\int\limits_Q f v dx$$

   при всех $v \in \bar{W}_2^1(Q)$.

   Доказать, что при любой $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение этой задачи.

2.5. Обобщенное решение задачи Коши

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu - u_{tt} = f(x,t), \tag{2.25}$$

коэффициенты которого достаточно гладкие функции, а характеристическая квадратичная форма положительно определена. Поставим для этого уравнения задачу Коши

$$u(x,0) = \psi(x), \; u_t(x,0) = \varphi(x). \tag{2.26}$$

Пусть $u(x,t)$ — классическое решение поставленной задачи. Умножим обе части (2.25) на функцию $v(x,t) \in \dot{C}^\infty(R^{n+1})$ и проинтегрируем по области $R^{n+1}_+ = \{(x,t) : x \in R^n, t > 0.\}$ В результате интегрирования по частям придем к тождеству

$$\int\limits_{R^{n+1}_+} uL^*v\,dxdt + \int\limits_{R^n_0} (\psi v - \varphi v_t)dx = \int\limits_{R^{n+1}_+} fv\,dxdt, \tag{2.27}$$

где $R^n_0 = \{(x,t) : x \in R^n, t = 0\}$,

$$L^*v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2(a_{ij}v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(b_i v)}{\partial x_i} + cv - v_{tt},$$

где L^* — сопряженный по Лагранжу оператор.

Определение. Обобщенным решением класса L_2 задачи Коши для уравнения (2.25) называется функция $u(x,t) \in L_{2,loc}(R^{n+1}_+)$, (т.е. квадратично суммируемая по любой ограниченной подобласти в R^{n+1}_+), удовлетворяющая для любой $v(x,t) \in \dot{C}^\infty(R^{n+1})$ тождеству (2.27).

Если коэффициенты (2.25) имеют непрерывные производные, входящие в L^*, $f \in L_{1,loc}(R^{n+1}_+)$, φ, $\psi \in L_{1,loc}(R^n)$, то все интегралы, входящие в (2.27), сходятся. Таким образом, классическое решение задачи Коши для уравнения (2.25) является обобщенным.

Пусть теперь функция $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (2.27) при любой $v \in \dot{C}^\infty(R^{n+1})$ и дважды непрерывно дифференцируема при $t \geq 0$. Покажем, что тогда она будет классическим решением задачи (2.25) - (2.26). Выполним интегрирование по частям в (2.27). Это приведет к тождеству

$$\int\limits_{R^{n+1}_+} [Lu - f]v\,dxdt + \int\limits_{R^n_0} [(\psi - u_t)v - (\varphi - u)v_t]dx = 0. \tag{2.28}$$

Возьмем в этом тождестве $v \in \dot{C}^\infty(R^{n+1}_+)$, тогда в (2.28) интеграл по R^n_0 равен нулю, и из полученного тождества $Lu = 0$ в R^{n+1}_+. Но тогда (2.28) эквивалентно тождеству

$$\int\limits_{R^n_0} [(\psi - u_t)v - (\varphi - u)v_t]dx = 0. \tag{2.29}$$

Возьмем теперь лишь те $v \in \dot{C}^\infty(R^{n+1})$, которые равны нулю при $t = 0$. Тогда слагаемое, содержащее v в(2.29), обращается в нуль, из оставшегося тождества следует, что $\varphi(x) = u(x,0)$, и тождество редуцируется к тождеству

$$\int\limits_{R_0^n} (\psi - u_t) v dx = 0,$$

из которого аналогично заключаем, что $\psi(x) = u_t(x,0)$. Итак, мы убедились, что данное определение обобщенного решения задачи Коши действительно является расширением понятия ее классического решения.

Докажем теорему единственности решения задачи Коши в классе обобщенных решений из L_2 для частного случая уравнения (2.25) — волнового уравнения.

Пусть u_1, u_2 — два различных решения волнового уравнения

$$L_w u \equiv u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(x,t). \tag{2.30}$$

Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{R_+^{n+1}} u L_w v dx dt = 0 \tag{2.31}$$

для любых $v \in \dot{C}^\infty(R^{n+1})$. Рассмотрим полосу $\Pi = \{(x,t) : x \in R^n, t \in (0,T)\}$ и задачу

$$L_w v = \bar{f}(x,t), \quad v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \tag{2.32}$$

считая $\bar{f} \in \dot{C}^\infty(\Pi)$. Ее решение дается формулой Кирхгофа и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию, равную нулю при $t \geq T$. Умножив его на бесконечно дифференцируемую функцию $\chi(t)$, равную 1 при $t \geq 0$ и нулю при $t \leq -T$, мы получим функцию $\bar{v}(x,t) = v(x,t)\chi(t) \in \dot{C}^\infty(R^{n+1})$, совпадающую с $v(x,t)$ при $t \geq 0$. Поэтому мы можем взять в качестве v в (2.31) функцию $\bar{v}$. Учитывая, что $L_w v = \bar{f}$, получим

$$\int\limits_{R_+^{n+1}} u \bar{f} dx dt = 0.$$

Так как это равенство справедливо при любой функции $\bar{f} \in \dot{C}^\infty(\Pi)$, то $u = 0$ в Π. Ввиду произвольности выбора величины T, функция $u = 0$ всюду в R_+^{n+1} и, стало быть, $u_1 = u_2$.

Глава 3

Смешанные задачи для нестационарных уравнений

3.1. Смешанные задачи для гиперболических уравнений

Пусть Ω — некоторая ограниченная область пространства R^n. В пространстве $R^{n+1} = R^n \times \{-\infty < t < +\infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр $Q_T = \{x \in \Omega, \ \ 0 < t < T\}$. Обозначим через Γ_T боковую поверхность $\{x \in \partial\Omega, \ 0 < t < T\}$ цилиндра, Ω_τ — сечение $\{x \in \Omega, \ t = \tau\}$ этого цилиндра плоскостью $t = \tau$.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - div(a(x)\nabla u) + c(x)u = f(x,t), \tag{3.1}$$

где $a(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \ c(x) \in C(\bar{\Omega}), \ a(x) \geq a_0 = const > 0$.

Функция $u(x,t) \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{\Omega}_0)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (3.1), на Ω_0 — начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \tag{3.2}$$

а на Γ_T — одному из граничных условий

$$u|_{\Gamma_T} = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)|_{\Gamma_T} = 0,$$

где $\sigma(x)$ — некоторая непрерывная на Γ_T функция, называется классическим решением **первой** или соответственно **третьей смешанной задачи** для уравнения (3.1). Если $\sigma \equiv 0$ на Γ_T, то третья смешанная задача называется **второй смешанной задачей.**

Пусть $u(x,t)$ — классическое решение первой смешанной задачи. Умножим обе части равенства (3.1) на функцию $v(x,t) \in C^1(Q_T)$, $v(x,T) = 0$, $v|_{\Gamma_T} = 0$ и проинтегрируем по цилиндру Q_T. Преобразовав полученное выражение с помощью формулы Остроградского–Гаусса, получим, учитывая граничные свойства функций u, v тождество

$$\int\limits_{Q_T} (a\nabla u \nabla v + cuv - u_t v_t)dxdt = \int\limits_{\Omega_0} \psi v dx + \int\limits_{Q_T} f v dx dt. \qquad (3.3)$$

Будем теперь предполагать, что $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\psi(x) \in L_2(\Omega)$.

Определение 3.1. Функция $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ называется обобщенным решением первой смешанной задачи для уравнения (3.1), если она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$, граничному условию $u|_{\Gamma_T} = 0$ и тождеству (3.3) для любой $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, для которой выполнены условия $v(x,T) = 0$, $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Аналогично можно ввести понятие обобщенного решения второй и третьей краевых задач.

Докажем существование единственного обобщенного решения первой смешанной задачи для уравнения(3.1).

Единственность решения

Теорема 3.1. Существует не более одного обобщенного решения первой смешанной задачи для уравнения (3.1).

Доказательство. Пусть $u(x,t)$– обобщенное решение первой смешанной задачи для уравнения (3.1) при $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Покажем, что $u = 0$ в Q_T. Возьмем произвольное $\tau \in (0,T)$ и рассмотрим функцию

$$v(x) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(x,\eta)d\eta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $v(x)$ имеет обобщенные производные первого порядка, принадлежащие $L_2(Q_T)$:

$$v_t(x) = \begin{cases} -u, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T; \end{cases}$$

$$v_{x_i}(x) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u_{x_i}(x,\eta)d\eta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Следовательно, $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ причем $v(x,T) = 0$, $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Подставим функцию $v(x,t)$ в тождество (3.3). Получим

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(a\nabla u \int\limits_t^\tau \nabla u d\eta - cvv_t + u_t u \right) dxdt = 0.$$

Преобразуем левую часть этого тождества, интегрируя по частям:

$$\int\limits_{Q_\tau} a\nabla u \int\limits_t^\tau \nabla u d\eta dt dx = \int\limits_\Omega a(x) \left(\int\limits_0^\tau \nabla u(x,\eta)d\eta \right)^2 dx - \int\limits_{Q_\tau} a\nabla u \int\limits_t^\tau \nabla u d\eta dt dx,$$

откуда

$$\int\limits_{Q_\tau} a\nabla u \int\limits_t^\tau \nabla u d\eta dt dx = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega a(x) \left(\int\limits_0^\tau \nabla u(x,\eta)d\eta \right)^2 dx.$$

Аналогично получим

$$\int\limits_{Q_\tau} cvv_t dxdt = -\frac{1}{2} \int\limits_\Omega c(x)v^2(x,0)dx,$$

$$\int\limits_{Q_\tau} uu_t dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega u^2(x,\tau)dx.$$

Следовательно, если $u(x,t)$– решение однородной первой смешанной задачи, то

$$\int\limits_\Omega a(x) \left(\int\limits_0^\tau \nabla u(x,t)dt \right)^2 dx + \int\limits_\Omega c(x)v^2(x,0)dx + \int\limits_\Omega u^2(x,\tau)dx = 0,$$

и так как $a(x) > 0$, $c(x) \geq 0$ в Q_T, то из этого равенства вытекает,что $\int\limits_\Omega u^2(x,\tau)dx = 0$. Поскольку τ– произвольное число из интервала $(0,T)$, то $u = 0$ в Q_T.

Существование решения

Доказательство существования обобщенного решения первой краевой задачи проведем методом Фурье.

Пусть $w(x)$– обобщенная собственная функция первой краевой задачи

$$div(a(x)\nabla w) - c(x)w = \lambda w, \quad w|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.4}$$

Это означает, что $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для всех $\eta(x)(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ выполняется тождество

$$\int_\Omega (a\nabla w\nabla\eta + cw\eta)dx + \lambda \int_\Omega w\eta dx = 0. \tag{3.5}$$

Рассмотрим ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций, состоящую из всех обобщенных собственных функций $w_1, w_2, ...$ задачи (3.4). Эта система является ортонормированным базисом в $L_2(\Omega)$ и $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Пусть функции $\varphi(x),\ \psi(x) \in L_2\Omega,\ \ f(x,t) \in L_2(Q_T)$. В силу теоремы Фубини, для п.в. $t \in (0,T)$ $f(x,t) \in L_2(\Omega)$. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и функцию $f(x,t)$ для п.в. $t \in (0,T)$ разложим в ряды Фурье по системе собственных функций задачи (3.4):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) w_k(x),$$

где

$$\alpha_k = (\varphi, wv_k)_{L_2(\Omega)},\ \beta_k = (\psi, w_k)_{L_2(\Omega)},\ f_k(t) = \int_\Omega f(x,t)w_k(x)dx,\ k = 1, 2, ...$$

Заметим, что так как

$$|f_k(t)|^2 \le \int_\Omega f^2(x,t)dx \cdot \int_\Omega w_k^2(x)dx = \int_\Omega f^2(x,t)dx.$$

то $f_k(t) \in L_2(0,T),\ k = 1,2,...$ В силу равенства Парсеваля-Стеклова,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = ||\varphi||_{L_2(\Omega)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 = ||\psi||_{L_2(\Omega)},$$

а для п.в. $t \in (0, T)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t) = \int_{\Omega} f^2(x,t)dx.$$

Интегрируя последнее равенство по t, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t)dt = ||f||_{L_2(Q_T)}.$$

Возьмем в качестве начальных данных в (3.2) функции $\alpha_k w_k(x)$, $\psi_k w_k(x)$, т.е. k-е слагаемые разложений в ряды Фурье функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, а в качестве правой части – функцию $f_k(t)w_k(x)$ и рассмотрим задачу

$$u_{tt} - div(a(x)\nabla u) + cu = f_k(t)w_k(x),$$

$$u(x,0) = \alpha_k w_k(x), \quad u_t(x,0) = \beta_k w_k(x).$$

Покажем, что обобщенным решением этой задачи является функция

$$u_k(x,t) = U_k(t)w_k(x), \tag{3.6}$$

где $w_k(x)$ – обобщенная собственная функция, соответствующая собственному значению λ_k задачи (3.4):

$$U_k(t) = \alpha_k \cos\sqrt{-\lambda_k}t + \frac{\beta_k}{\sqrt{-\lambda_k}}\sin\sqrt{-\lambda_k}t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int_0^t f_k(\tau)\sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)d\tau.$$

Функция $U_k(t) \in W_2^2(0,T)$, для п.в. $t \in (0,T)$ является решением уравнения

$$U_k''(t) - \lambda_k U_k(t) = f_k(t) \tag{3.7}$$

и удовлетворяет начальным условиям $U_k(0) = \alpha_k$, $U_k'(0) = \beta_k$. Из перечисленных свойств функций $U_k(t)$ и $w_k(x)$ легко следует, что $u_k(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, $u_k(x,0) = \alpha_k w_k(x)$, т.е. удовлетворяет первому начальному условию. Покажем, что $u_k(x,t)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{Q_T} (a\nabla u_k \nabla v + cu_k v - u_{kt}v_t)dxdt = \beta_k \int_{\Omega_0} w_k(x)vdx + \int_{Q_T} f_k w_k(x)vdxdt \tag{3.8}$$

для всех $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, $v(x,T) = 0$, $v|_{\Gamma_T} = 0$. В силу теоремы 1.11 достаточно установить справедливость тождества (3.8) для $v \in C^1(Q_T)$.

Рассмотрим левую часть (3.8). Учитывая свойства функций $u_k(x,t)$, $v(x,t)$, преобразуем одно из слагаемых:

$$\int\limits_{Q_T} u_{kt}(x,t)v_t dxdt = \int\limits_{Q_T} U_k'(t)w_k(x)v(x,t)dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega} w_k(x)\int\limits_0^T U_k'(t)v_t(x,t)dtdx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} w_k(x)\left[-\beta_k v(x,0) - \int\limits_0^T U_k''(t)v(x,t)dt\right]dx =$$

$$= \beta_k\int\limits_{\Omega} w_k(x)v(x,0)dx - \lambda_k\int\limits_{Q_T} u_k(x,t)v(x,t)dxdt - \int\limits_{Q_T} f_k(t)w_k(x)v(x,t)dxdt.$$

Теперь (3.8) можно записать так

$$\int\limits_{Q_T}(a\nabla u_k\nabla v + cu_k v - u_{kt}v_t)dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T U_k(t)dt\int\limits_{\Omega}(a(x)\nabla w_k\nabla v + cw_k v + \lambda_k w_k v)dx +$$

$$+\beta_k\int\limits_{\Omega} w_k(x)v(x,0)dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t)w_k(x)v(x,t)dxdt,$$

и так как $w_k(x)$, λ_k— обобщенная собственная функция и собственное значение задачи (3.4), то первый интеграл справа обращается в нуль и справедливость тождества (3.8) доказана.

Если теперь в качестве начальных функций и правой части уравнения взять соответственно частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^N \alpha_k w_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^N \beta_k w_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^N f_k(t)w_k(x)$, то обобщенным решением первой смешанной задачи будет функция

$$S_N(x,t) = \sum_{k=1}^N u_k(x,t) = \sum_{k=1}^N U_k(t)w_k(x).$$

Стало быть, она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (a\nabla S_N \nabla v + cS_N v - S_{Nt}v_t)dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \beta_k w_k(x)v(x,0)dx + \int\limits_{Q_T} \sum_{k=1}^{N} f_k(t)w_k(x)v(x,t)dxdt \tag{3.9}$$

при всех $v \in W_2^1(Q_T)$, $v(x,T) = 0$, $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Естественно предположить, что решение первой смешанной задачи для уравнения (3.1) можно представить в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)w_k(x). \tag{3.10}$$

Теорема 3.2. Пусть $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\psi(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда обобщенное решение первой смешанной задачи для уравнения (3.1) существует и представляется сходящимся в $W_2^1(Q_T)$ рядом (3.10) При этом имеет место неравенство

$$||u||_{W_2^1(Q_T)} \le C(||\varphi||_{W_2^1(\Omega)} + ||\psi||_{L_2(\Omega)} + ||f||_{L_2(Q_T)}), \tag{3.11}$$

в котором $C > 0$ и не зависит от φ, ψ, f.

Доказательство. Сначала покажем справедливость (3.11). Так как

$$U_k(t) = \alpha_k \cos\sqrt{-\lambda_k}t + \frac{\beta_k}{\sqrt{-\lambda_k}}\sin\sqrt{-\lambda_k}t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)d\tau,$$

то из этой формулы легко следует, что для всех $t \in [0,T]$

$$|U_k(t)| \le |\alpha_k| + |\beta_k||\lambda_k|^{-1/2} + |\lambda_k|^{-1/2}\int\limits_0^T |f_k(t)dt|.$$

Но тогда

$$U_k^2(t) \le 3\alpha_k^2 + 3\beta_k^2|\lambda_k|^{-1} + 3|\lambda_k|^{-1}\left(\int\limits_0^T |f_k|dt\right)^2 \le$$

$$\leq C(T)\left(\alpha_k^2+\beta_k^2|\lambda|^{-1}+|\lambda_k|^{-1}\int\limits_0^T f_k^2(t)dt\right).$$

Аналогично получим

$$\left(\frac{dU_k}{dt}\right)^2\leq C(T)\left(\alpha_k^2|\lambda_k|+|\beta_k|^2+\int\limits_0^T f_k^2dt\right).$$

Рассмотрим частичную сумму ряда (3.10):

$$S_N(x,t)=\sum_{k=1}^N U_k(t)w_k(x).$$

Заметим, что, в силу свойств функций $U_k(t)$ и $w_k(x)$, $S_N(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при каждом $t\in[0,T]$.

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ введем скалярное произведение

$$\int\limits_\Omega(a\nabla u\nabla v+cuv)dx.$$

Рассмотрим $||S_N(x,t)-S_M(x,t)||_{W_2^1(\Omega)}$. Вспомним, что функции $w_k(x)$ ортонормированы в $L_2(\Omega)$ и являются собственными функциями задачи (3.4). Учитывая это, будем иметь

$$||S_N(x,t)-S_M(x,t)||_{W_2^1(\Omega)}=||\sum_{k=M+1}^N U_k(t)w_k(x)||^2_{W_2^1(\Omega)}=\sum_{k=M+1}^N U_k^2(t)|\lambda_k|\leq$$

$$\leq C(T)\sum_{k=M+1}^N\left(\alpha_k^2|\lambda_k|+\beta_k^2+\int\limits_0^T f_k^2dt\right).\qquad(*)$$

Поясним второе равенство из цепочки равенств.

$$||\sum_{k=M+1}^N U_k(t)w_k(x)||^2_{W_2^1(\Omega)}=$$

$$=\int\limits_\Omega\left[\left(\sum_{k=M+1}^N U_k(t)a|\nabla w_k|\right)^2+c\left(\sum_{k=M+1}^N U_k(t)w_k(x)\right)^2\right]dx=$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)\left(a|\nabla w_k|^2 + cw_k^2\right) dx =$$

$$= \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t) \int\limits_{\Omega} (a|\nabla w_k|^2 + cw_k^2)dx = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)|\lambda_k|.$$

Аналогично получим

$$||\frac{\partial S_N}{\partial t} - \frac{\partial S_N}{\partial t}||^2_{L_2(\Omega)} = || \sum_{k=M+1}^{N} U_k'(t) w_k(x)||^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{k=M+1}^{N} U_k'^2(t) \le C_1(T) \sum_{k=M+1}^{N} \left(\alpha_k^2|\lambda_k| + \beta_k^2 + \int\limits_0^T f_k^2 dt\right). \qquad (**)$$

Неравенства $(*)$ и $(**)$ проинтегрируем по $t \in (0, T)$, а затем сложим. Тогда получим

$$S_N(x,t) - S_M(x,t)||^2_{W_2^1(Q_T)} \le C_3 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\alpha_k^2|\lambda_k| + \beta_k^2 + \int\limits_0^T f_k^2 dt\right). \quad (3.12)$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty\beta_k}$, как известно, сходится. Покажем, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k\alpha_k$. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\varphi, w_k)^2_{L_2(\Omega)} \le \lambda_k(\varphi, w_k)^2_{W_2^1(\Omega)}.$$

Но

$$(\int\limits_{\Omega} \varphi w_k dx = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{\Omega} (a\nabla\varphi\nabla w_k + c\varphi w_k)dx = \frac{1}{\lambda_k}(\varphi, w_k)_{W_2^1(\Omega)},$$

так как w_k — собственные функции задачи (3.4). Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(\varphi, w_k)^2_{W_2^1(\Omega)} \le ||\varphi||^2_{W_2^1(\Omega)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

где c_k — коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Теперь из (3.12) вытекает, что ряд (3.10) сходится в

$W_2^1(Q_T)$ к функции $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, причем эта функция удовлетворяет первому начальному и граничному условиям. Переходя к пределу при $N \to \infty$ в (3.9), получим, что $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (3.3), что и означает, что u– обобщенное решение первой смешанной задачи для уравнения (3.1). Теорема доказана.

Упражнения

1. Получить тождество, определяющее обобщенное решение из класса $W_2^1(Q_T)$ второй смешанной задачи для уравнения (3.1).

2. Получить тождество, определяющее обобщенное решение из класса $W_2^1(Q_T)$ третьей смешанной задачи для уравнения (3.1).

3. Доказать существование и единственность обобщенного решения из $W_2^1(D)$, где $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, задачи:
$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t),\ f(x,t) \in L_2(D),$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ u(0,t) = u(l.t) = 0.$$

4. Доказать существование и единственность обобщенного решения из $W_2^1(D)$, где $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, задачи:
$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t),\ f(x,t) \in L_2(D),$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0.$$

5. Доказать существование и единственность обобщенного решения из $W_2^1(D)$, где $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, задачи:
$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t),\ f(x,t) \in L_2(D),$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),$$
$$u_x(0.t) + \alpha u(0,t) = u_x(l,t) + \beta u(l,t) = 0.$$

6. Доказать существование и единственность обобщенного решения из $W_2^1(D)$, где $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, задачи:
$$u_{tt} = (x+1)u_{xx} - x^2 u,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

7. Доказать существование и единственность обобщенного решения из $W_2^1(Q_T)$, где $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω — ограниченная область в R^n, задачи:
$$u_{tt} = \Delta u,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x.0) = \psi(x),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)|_{\Gamma_T} = 0,$$
где $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \geq 0$, $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Для этого получить тождество:
$$\int\limits_{Q_T}(u_tv_t - \nabla u\nabla v)dxdt = \int\limits_{\Gamma_T}\sigma uv_tdSdt + \int\limits_{\Omega_0}\psi vdx + \int\limits_{\partial\Omega_0}\sigma\varphi vdS,$$
$v \in C^1(\bar{Q}_T)$, $v_{t=T} = 0$.

3.2. Смешанная задача для параболического уравнения

Рассмотрим уравнение теплопроводности
$$u_t - \Delta u = f(x,t) \tag{3.13}$$
в ограниченной области $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \in R^n$.

Поставим для него смешанную задачу с начальным условием
$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.14}$$
и граничным условием
$$u|_S = 0, \tag{3.15}$$
где S— боковая поверхность цилиндра Q : $S = \partial\Omega \times [0,T]$. Нас будет интересовать существование и единственность обобщенного решения этой задачи. На этом простом примере продемонстрируем еще один иетод доказательства существования обобщенного решения — метод Галеркина. Заметим, что этот метод применим и для уравнений других типов — эллиптических и гиперболических. В предыдущем параграфе мы доказали существование обобщенного решения смешанной задачи для гиперболического уравнения методом Фурье. При реализации этого метода было существенным то, что коэффициенты уравнения зависели только от пространственных переменных. В отличие от метода Фурье, метод

Галеркина позволяет исследовать смешанные задачи в том случае, когда коэффициенты зависят и от t. Кроме того, этот метод не использует свойства собственных функций.

Обозначим $W_2^{1,0}(Q)$– гильбертово пространство, элементами которого являются функции $u \in L_2(Q)$, имеющие обобщенные производные $u_{x_i} \in L_2(Q)$. Скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(u,v)^{1,0} = \int\limits_Q (uv + u_x v_x)dxdt.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ обозначим подпространство, являющееся замыканием в норме, порожденной этим скалярным произведением, множества гладких функций, равных нулю на боковой поверхности S.

Пусть $f(x,t) \in L_2(Q)$.

Определение 3.2. Обобщенным решением задачи (3.13) - (3.14) - (3.15) назовем функцию $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$, которая удовлетворяет $\forall v(x,t) \in W_2^{1,1}(Q)$, такой, что $v(x,T) = 0, \quad v|_S = 0$, тождеству:

$$\int\limits_Q (-uv_t + \nabla u \nabla v)dxdt = \int\limits_Q fvdxdt \tag{3.16}$$

Теорема 3.3. Существует не более одного обобщенного решения задачи (3.13) - (3.14) - (3.15).

Доказательство. Положим в (3.16) $f = 0$ и покажем, что тогда $u(x,t) \equiv 0$ в Q. Пусть

$$v(x,t) = \int\limits_T^t u(x,\tau)d\tau.$$

Легко видеть, что выбранная так функция $v(x,t) \in W_2^{1,1}(Q)$, $v(x,T) = 0$ и $v|_S = 0$. Подставив ее в (3.16), получим

$$\int\limits_Q u^2(x,t)dxdt + \int\limits_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \int\limits_T^t \frac{\partial u}{\partial x_i} d\tau dxdt = 0.$$

Второй интеграл преобразуем интегрированием по частям. Тогда

$$\int\limits_Q u^2(x,t)dxdt + \int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} d\tau \right)^2 dx = 0,$$

откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

Существование решения

Обозначим через $w_k(x)$ полную в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ линейно-независимую систему функций. Приближенное решение задачи (3.13) - (3.14) - (3.15) будем искать в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) w_k(x), \tag{3.17}$$

где $c_k(t)$ неизвестны, из соотношений

$$\int\limits_\Omega [u_t^m w_l + \sum_{i=1}^m u_{x_i}^m w_{lx_i}]dx = \int\limits_\Omega f(x,t) w_l(x) dx. \tag{3.18}$$

Подставив в (3.18) из (3.17), получим

$$\sum_{k=1}^m [c_k'(t)(w_k, w_l)_{L_2(\Omega)} + (\nabla w_k, \nabla w_l)_{L_2(\Omega)}] = f_l(t), \tag{3.19}$$

где $f_l(t) = \int\limits_\Omega f(x,t) w_l(x) dx$. Зададим начальные условия для $c_k(t)$: $c_k(0) = 0$. Тогда приближенное решение будет удовлетворять начальному условию (3.14), а для определения получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.19).

Так как матрица при производных невырожденная (матрица Грама!), то, по известной теореме о разрешимости таких систем, она имеет единственное решение $(c_1(t), ...c_m(t))$, причем $c_k(t)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0, T]$. Покажем, что построенная последовательность приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ сходится к обобщенному решению поставленной задачи. Доказательство этого утверждения разобьем на две части.

Сначала покажем сходимость последовательности $\{u^m(x,t)\}$. Для этого установим априорную оценку.

Обе части (3.18) умножим на $c_j(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. Получим

$$\int_0^\tau\int_\Omega [u_t^m u^m + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^m)^2] dxdt = \int_0^\tau\int_\Omega f(x,t)u^m(x,t)dxdt.$$

Первое слагаемое слева проинтегрируем по частям, учтем начальное условие и получим

$$\int_0^\tau\int_\Omega u^m u_t^m dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega (u^m)^2 dx.$$

Интеграл справа оценим с помощью неравенства $ab \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$:

$$\int_0^\tau\int_\Omega f u^m dxdt \leq \int_0^\tau \left(\int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} f^2 dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2}(u^m)^2 dx\right) dt.$$

В силу неравенства Фридрихса

$$\int_\Omega (u^m)^2 dx \leq C(\Omega)\sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_{x_i}^m)^2 dx,$$

тогда

$$\int_0^\tau\int_\Omega f u^m dxdt \leq \int_0^\tau \left(\int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} f^2 dx + C(\Omega)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_{x_i}^m)^2 dx\right) dt.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $\frac{\varepsilon}{2}C(\Omega) < 1$, и получим оценку

$$\int_\Omega (u^m(x,t))^2 dx + C_1\int_0^\tau\int_\Omega \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^m)^2 dxdt \leq C_2\int_0^\tau\int_\Omega f^2(x,t)dxdt. \quad (3.20)$$

Заметим, что полученная оценка равномерна по m, так как ее правая часть не зависит от m. Из оценки следует, что

$$\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^m)^2 dxdt = \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u^m}{\partial x_i}\|^2_{L_2(Q)} \leq C_3,$$

$$\int_0^T \int_\Omega (u^m)^2 dxdt = ||u^m||^2_{L_2(Q)} \le C_4,$$

стало быть, норма $||u^m||_{W_2^{1,0}(Q)}$ равномерно ограничена относительно m. Но тогда из теоремы о слабой компактности ограниченного множества из гильбертова пространства следует, что из последовательности можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$: $u^m \to u(x,t)$, $u^m_{x_i} \to u_{x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Докажем, что слабый предел и есть обобщенное решение нашей задачи в смысле определения 3.2. Умножим (3.18) на произвольную функцию $d_j(t) \in W_2^1(0,T)$, $d_j(T) = 0$, просуммируем по j от 1 до m и затем проинтегрируем по t от 0 до T. Обозначим

$$v^m(x,t) = \sum_{j=1}^m d_j(t) w_j(x). \tag{3.21}$$

Тогда получим

$$\int_Q (u^m_t v^m + \nabla u^m \nabla v^m) dxdt = \int_Q f v^m dxdt.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое слева, получим

$$\int_Q (-u^m v^m_t + \nabla u^m \nabla v^m) dxdt = \int_Q f v^m dxdt.$$

Последнее равенство можно записать так:

$$(-u^m, v^m_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (u^m_{x_i}, v^m_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v^m)_{L_2(Q)}. \tag{3.22}$$

В (3.22) зафиксируем v^{m_0} и, на основании слабой сходимости при $m \to \infty$, получим

$$(-u, v^{m_0}_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}, v^{m_0}_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v^{m_0})_{L_2(Q)}. \tag{3.23}$$

Однако, этим доказательство еще не завершено, так как в (3.23) v^m– не любая функция из $W_2^{1,1}(Q)$, а выражается через базисную систему. Из проведенных рассуждений ясно, что $v(x,t)$может быть представлена в виде

$$v(x,t) = \int\limits_T^t \eta(x,\tau)d\tau, \tag{3.24}$$

где $\eta(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$. Докажем, что функцию (3.24) с помощью линейной комбинации функций $w_k(x)$ можно аппроксимировать в норме $W_2^{1,1}(Q)$.

Так как $\eta(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$, то она принадлежит $L_2(0,T)$, и на отрезке $[0,T]$ ее можно разложить в ряд Фурье по t :

$$\eta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \sin\frac{k\pi t}{T}, \tag{3.25}$$

сходящийся в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$, где

$$a_k(x) = \frac{2}{T}\int\limits_0^T \eta(x,\tau)\sin\frac{k\pi\tau}{T}d\tau.$$

Очевидно, что $a_k(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, так как $\eta(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ по x.

Не ограничивая общности, можно считать, что полная в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ система $\{w_k(x)\}$ ортонормирована. Разложим $a_k(x)$ в ряд Фурье по $\{w_k(x)\}$:

$$a_k(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl} w_l(x),$$

где $\alpha_{kl} = (a_k(x), w_l(x))_{L_2(\Omega)}$, сходящийся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда $a_k(x)$ для каждого $k = 1, 2, ...$ можно аппроксимировать частичной суммой ряда Фурье: $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N$ такое, что для $n_1 > N$

$$||a_k(x) - \sum_{l=1}^{n_1} \alpha_{kl} w_l(x)||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} < \varepsilon. \tag{3.26}$$

Теперь из (3.25) и (3.26) для достаточно больших n_1, n_2 имеем

$$||\eta(x,t) - \sum_{k=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{n_1} \alpha_{kl}\sin\frac{k\pi t}{T} w_l(x)||_{W_2^{1,0}(Q)} < \varepsilon. \tag{3.27}$$

Обозначим

$$\eta_{n_1 n_2}(x,t) = \sum_{k=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{n_1} \alpha_{kl} \sin\frac{k\pi t}{T} w_l(x).$$

Тогда (3.27) для $v(x,t) = \int\limits_0^T \eta(x,\tau)d\tau$ можно переписать так:

$$||v_t - \eta_{n_1 n_2}(x,t)||_{L_2(Q)} < \varepsilon.$$

Легко получить также

$$||v_{x_i} - \int\limits_T^t \frac{\partial \eta_{n_1 n_2}(x,t)}{\partial x_i}||_{L_2(Q)} < \varepsilon.$$

Применив теперь неравенство Фридрихса, получим

$$||v(x,t) - \int\limits_T^t \eta_{n_1 n_2}(x,\tau)d\tau||_{W_2^{1,1}(Q)} < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует, что функции $v(x,t)$ действительно можно аппроксимировать линейными комбинациями $w_k(x)$ в норме $W_2^{1,1}(Q)$. Таким образом, мы доказали, что множество функций вида (3.21) плотно в $W_2^{1,1}(Q)$. Так как тождество (3.23) выполняется для произвольно зафиксированного m_0, то, переходя в нем к пределу при $m_0 \to \infty$, получим

$$(-u, v_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f,v)L_2(Q),$$

что может быть переписано так:

$$\int\limits_Q (-uv_t + \nabla u \nabla v)dxdt = \int\limits_Q fvdxdt,$$

что и означает завершение доказательства существования обобщенного решения поставленной задачи.

Заключение

В этом пособии изложены только некоторые методы исследования дифференциальных уравнения в частных производных. Эти методы стали уже классическими, но до сих пор успешно применяются при исследовании математических моделей широкого круга физических явлений.

Однако потребности современного естествознания стимулировали активное развитие новых методов исследования дифференциальных уравнений и постановку качественно новых задач.

За рамками пособия остались задачи для уравнений смешанного типа, сингулярные уравнения, задачи с нелокальными условиями и другие интересные и современные задачи.

Автор искренне надеется, что данное пособие будет полезно читателю и, может быть, станет для кого-то отправной точкой в изучении красивой, современной и важной для приложений теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Литература

[1] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая Школа, 1977.

[2] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

[3] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

[4] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. T.IV. Ч.2.М.: Наука, 1981.

[5] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1958.

[6] *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Изд-во МГУ, 1982.

[7] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

[8] *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

[9] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985.

[10] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

[11] *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

[12] *Масленникова В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Изд-во РУДН, 1997.

Учебное издание

Людмила Степановна Пулькина

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редактор Ю.В. Яценко.
Компьютерная верстка в системе LaTeX, макет Л.С. Пулькина

Лицензия ИД №061786 от 01.11.2001. Подписано в печать 15.11.2004.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура *LH Roman*.
Усл.-печ.л. 8,14; уч.-изд.л. 8,75. Тираж 150 экз. Заказ №224
Издательство «Самарский университет»,
443011, Самара, ул.Акад. Павлова, 1.

Отпечатано ООО «Универс-групп»