МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. СОБОЛЕВ, Е.А. ЩЕПАКИНА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика и по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

САМАРА
Издательство Самарского университета
2021

УДК 517.9(075)
ББК 22.161.6я7
С 544

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. И. А. Б л а т о в,
д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Н о в и к о в

Соболев, Владимир Андреевич

С 544 **Дифференциальные и разностные уравнения:** учебное пособие / *В.А. Соболев, Е.А. Щепакина.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 224 с.

ISBN 978-5-7883-1617-8

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинарских занятий. Оно охватывает основной материал курсов дифференциальных и разностных уравнений, а также ряд междисциплинарных вопросов, на стыке с алгеброй и математическим анализом.

Предназначено для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика и по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии. Может пригодиться для сопровождения курса лекций, читаемого как в очной форме, так и дистанционной, а также для самостоятельного обучения.

УДК 517.9(075)
ББК 22.161.6я7

ISBN 978-5-7883-1617-8

Оглавление

Предисловие

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинарских занятий. Оно охватывает основной материал курсов дифференциальных и разностных уравнений, а также ряд междисциплинарных вопросов, на стыке с алгеброй и математическим анализом. В пособии изучаются вопросы существования и свойств решений дифференциальных и разностных уравнений, рассмотрены примеры реальных процессов и объектов, приводящих к возникновению таких уравнений. Понятия, определения и подробные доказательства иллюстрируются примерами. Для более глубокого изучения и закрепления материала каждой темы предложены задачи для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика и по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии. Для изучающих курс дифференциальных уравнений содержание глав 8 и 9, посвященных разностным уравнениям, является факультативным. Разностные уравнения возникают при построении математических моделей реальных процессов, характерной особенностью которых является то, что анализируемая величина измеряется через некоторые, чаще всего постоянные, промежутки времени.

Компьютерное моделирование непрерывных динамических систем требует построения дискретных алгоритмов. Для этого обыкновенные дифференциальные уравнения аппроксимируюся соответствующими дискретными уравнениями. При этом актуальной является не только разработка и обоснование численных методов анализа, но и изучение качественных аспектов динамики таких систем. Формальный перенос результатов теории дифференциальных уравнений на дискретный случай не всегда является корректным.

Студенты направления 02.03.02, изучающие курс дифференциальных и разностных уравнений, могут опустить доказательства теорем в разделах 3.1–3.3, 6.8, 7.3–7.9.

Пособие будет полезно как для сопровождения очного курса лекций, так и для дистанционного, а также для самостоятельного обучения.

Глава 1

Введение

1.1 Основные понятия и определения

Определение 1 *Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции:*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

где F — функция $(n+2)$ аргументов, x — независимая переменная, y — неизвестная функция. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной.

Уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.2}$$

или

$$y' = f(x, y).$$

Последнее уравнение называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.*

Определение 2 *Решением дифференциального уравнения называется некоторая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Функция*

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

называется общим решением уравнения (1.1), если подходящим набором параметров можно выделить любое решение этого уравнения.

Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

Определение 3 *Интегрирование в квадратурах — это нахождение решения дифференциального уравнения в виде элементарных функций и первообразных от них.*

Определение 4 *Выражение вида $\varphi(x, y)$ называется первым интегралом (1.1), если из уравнения*

$$\varphi(x, y) = 0$$

можно найти $y = y(x)$ — решение уравнения (1.1).

Выражение вида $\varphi(x, y, c_1, \ldots, c_n)$ называется общим первым интегралом (1.1), если из уравнения

$$\varphi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$$

можно найти $y = y(x, c_1, \ldots, c_n)$ — общее решение уравнения (1.1).

Кривая, являющаяся графиком некоторого решения дифференциального уравнения, называется *интегральной кривой.* Сопоставляя каждой точке $(x_0, y_0) \in G$ отрезок единичной длины с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$ с центром в этой точке, получим так называемое *поле направлений* [6,7]. При этом сами отрезки называются *направлениями поля.* Таким образом, кривая, лежащая в области G, является интегральной кривой тогда и только тогда, когда она гладкая и касательная в каждой ее точке совпадает с направлением поля в данной точке.

При построении поля направлений данного уравнения целесообразно использовать *изоклины* [9, 13].

Определение 5 *Изоклинами называют кривые, в которых направления поля имеют одинаковый угловой коэффициент.*

1.2 Задачи

Рассмотрим некоторые задачи, изучение которых методом математического моделирования приводит к исследованию дифференциальных уравнений.

1.2.1 Размножение бактерий

Рассмотрим случай простого деления, когда скорость размножения прямо пропорциональна количеству бактерий. Пусть $N(t)$ — число особей в момент времени t, тогда закон деления можно представить в следующем виде:

$$\frac{dN}{dt} = kN.$$

Решение этого дифференциального уравнения первого порядка имеет вид:

$$N = Ce^{kt}.$$

Пусть $N(t_0) = N_0$, тогда получаем

$$N = N_0 e^{k(t-t_0)}.$$

1.2.2 Радиоактивный распад

Радиоактивный распад осуществляется со скоростью, прямо пропорциональной массе радиоактивного вещества.

Пусть $R(t)$ — масса радиоактивного вещества в момент времени t. Закон распада можно описать при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{R} = -kR,$$

$$R(0) = R_0.$$

Следовательно, $R(t) = R_0 e^{-kt}$. Вычислим период полураспада T:

$$\frac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-kT} \quad \Rightarrow \quad e^{-kT} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\ln 2}{k}.$$

1.2.3 Модель Кейнса

Рассмотрим одну из простейших динамических моделей макроэкономики. Пусть Y — совокупный продукт, а D — агрегированный спрос. В рамках рассматриваемой модели предполагается, что скорость роста совокупного продукта прямо пропорциональна превышению агрегированного спроса над совокупным продуктом:

$$\dot{Y} = k(D - Y).$$

Обычно предполагается, что

$$D = C + I + G,$$

где $C = c_0 + cY$ — совокупное потребление, I — инвестиции, G — правительственные расходы. Следовательно,

$$\dot{Y} = k(c-1)Y + k(I + G + c_0).$$

Решение этого дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$Y = C_1 e^{k(c-1)t} - \frac{I + G + c_0}{c - 1},$$

где C_1 — произвольная постоянная. Если дополнительно предположить, что $Y(0) = Y_0$, то решение можно представить следующим образом:

$$Y = \left(Y_0 + \frac{I + G + c_0}{c - 1} \right) e^{k(c-1)t} - \frac{I + G + c_0}{c - 1}.$$

1.2.4 Свободное падение

Пусть $x(t)$ — высота свободно падающего тела над уровнем горизонтальной поверхности в момент времени t. Считая, что ускорение свободного падения постоянно, получим закон движения в виде дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} = -g.$$

Отсюда находим путем двукратного интегрирования

$$\dot{x} = -gt + C_1,$$

$$x = -gt^2/2 + C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Если известны начальная высота $x(0) = h$ и начальная скорость $\dot{x}(0) = v$, то

$$x(t) = -gt^2/2 + vt + h.$$

1.2.5 Реактивное движение

Как известно, одним из фундаментальных законов физики является закон сохранения импульса, который в одной из формулировок звучит так: при распаде тела на части сумма импульсов каждой из частей равна импульсу тела до распада. И хотя этот закон обычно представляется связанным с одноактным действием (одно тело единожды распалось), его оказывается разумно использовать и в более сложных процессах — когда от тела последовательно отпадают разные части и, как идеализация этого процесса (когда части мелкие и их очень много и интервал между их отпадениями очень мал), — когда из тела непрерывно вытекает (вылетает, высыпается) какая-то масса. Именно в такой форме и записывается закон реактивного движения:

$$m(t)v(t) = m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - \\ -\Big(m(t) - m(t+\Delta t)\Big)\left(v(t) - V\right) \qquad (1.3)$$

или, если обозначить $[f(t+\Delta t) - f(t)]$ через Δf,

$$-\Delta[m(t)v(t)] = -\Delta m(t)\left(v(t) - V\right). \qquad (1.4)$$

Здесь $m(t)$ и $v(t)$ — соответственно масса и скорость ракеты в момент времени t, V — скорость истечения горючего из ракеты (точнее, это $-V$: обычно систему координат направляют вдоль движения ракеты, тогда горючее вытекает с отрицательной скоростью $-V$, где V — положительное число, равное абсолютной величине этой скорости). Разность $[m(t)-m(t+\Delta t)]$ — это масса вытекшего горючего, а $(v(t) - V)$ — его скорость в неподвижной системе координат. На самом деле равенство в (1.3), (1.4) не является вполне точным, так как процесс истечения горючего и изменения скорости происходит не «толчкам», а непрерывно. Однако, если промежуток времени Δt уменьшать, то равенство перейдет в точное равенство относительно дифференциалов

$$-d[m(t)v(t)] = -dm(t)\left(v(t) - V\right)$$

или производных

$$-[m(t)v(t)]' = -m'(t)\left(v(t) - V\right).$$

После несложных преобразований получаем *закон реактивного движения*

$$mdv = Vdm \quad \text{или} \quad m(t)v'(t) = Vm'(t),$$

который иногда записывают также в форме

$$m\frac{dv}{dm} = V.$$

1.2.6 Из пушки на Луну

Еще один «космический» сюжет: тело (в классической интерпретации — барона Мюнхгаюзена) «выстреливается» с Земли в направлении Луны и долетает до нее в свободном полете. Опишем закон полета.

Пусть полет происходит по прямой, соединяющей центры Земли и Луны (расстояние между центрами обозначим R), расстояние до летящего тела от центра Земли в момент времени t будем описывать функцией $r(t)$. Тогда в начальный момент времени $r(t_{\text{нач}}) = R_{\text{Земли}}$, в конечный $r(t_{\text{кон}}) = R - R_{\text{Луны}}$, где $R_{\text{Земли}}$ и $R_{\text{Луны}}$ — радиусы Земли и Луны соответственно. Если масса тела m, то сила притяжения Земли равна $-\dfrac{gmM_{\text{Земли}}}{r^2(t)}$, сила притяжения Луны $\dfrac{gmM_{\text{Луны}}}{(R-r(t))^2}$, и второй закон Ньютона дает нам уравнение полета на Луну:

$$m\ddot{r} = -\frac{gmM_{\text{Земли}}}{r^2(t)} + \frac{gmM_{\text{Луны}}}{(R-r(t))^2}.$$

Глава 2

Задача Коши. Существование и свойства решений

2.1 Задача Коши

Рассмотрим уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x, y). \tag{2.1}$$

Дополним уравнение (2.1) начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Определение 6 *Задачей Коши или начальной задачей (2.1), (2.2) называется задача нахождения решения уравнения (2.1), удовлетворяющего условию (2.2).*

Обычно рассматриваются уравнения (2.1), правая часть которых $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области G плоскости Oxy.

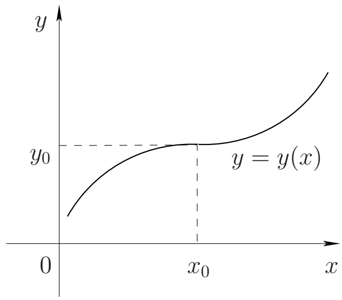


Рис. 2.1: Решение задачи Коши (2.1), (2.2)

Очевидно, что при этом решения являются непрерывно дифференцируемыми функциями [6].

С геометрической точки зрения задача Коши является задачей нахождения такого решения уравнения (2.1), график которого проходил бы через точку (x_0, y_0) (рис. 2.1).

2.2 Нормированные и метрические пространства

2.2.1 Норма и метрика

Определение 7 *Линейное пространство X над R называется нормированным, если на элементах этого пространства определена скалярная функция $\|\cdot\|$, называемая нормой, удовлетворяющая аксиомам:*

1. $\|x\| \geq 0,$ *причем* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$*;*

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$*;*

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X,\ \alpha \in R.$

Определение 8 *Пространство называют метрическим, если на любой паре элементов x и y этого пространства*

определена скалярная функция $\rho(x, y)$, называемая метрикой или расстоянием, удовлетворяющая следующим аксиомам:
1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y;$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z), \forall z \in X.$

Отметим, что нормированное пространство всегда можно сделать метрическим, задав метрику

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Метрическое же пространство не обязательно нормируемо, поскольку может не быть линейным пространством.

Задача 1 *Пусть X — множество, состоящее из ограниченных замкнутых выпуклых множеств на плоскости. Ввести метрику на этом множестве.*

Задача 2 *Доказать, что*

$$\rho(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p\right]^{1/p}, \quad p > 0$$

является метрикой.

Задача 3 *Проверить, является ли метрикой*

$$\rho(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p\right]^q, \quad p, q > 0.$$

Рассмотрим некоторые примеры метрик.

Пример 1 В пространстве R метрикой является функция

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Выполнение всех аксиом метрики очевидно. Можно ввести также метрику $\rho(x, y) = \alpha|x - y|$, где α – некоторая положительная константа.

Пример 2 На плоскости R^2 для любых двух элементов $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ метрику можно задать одним из следующих способов:

1) $\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,
2) $\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$,
3) $\rho(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

Пример 3 Аналогично, в пространстве R^3 для любых двух элементов $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ метрику можно задать одним из следующих способов:

1) $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$,
2) $\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$,
3) $\rho(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$.

Отметим, что эти метрики очевидным образом могут быть обобщены для случая пространства R^n.

Задача 4 *Проверить, является ли метрикой*

$$a)\ \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

$$b)\ \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$c)\ \rho(x, y) = \max_{1 \leq x \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

Пример 4 Рассмотрим пространство $C_{[a,b]}$ функций, определенных и непрерывных на $[a, b]$. Для любых двух элементов $y(x)$ и $z(x)$ этого пространства определим метрику

$$\rho(y(x), z(x)) = \max_{x \in [a,b]} |y(x) - z(x)|,$$

которая называется метрикой равномерной сходимости.

2.2.2 Шары в метрических пространствах

Определение 9 *Множество B элементов метрического пространства X называется замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x_0, если для всех элементов x этого множества $\rho(x, x_0) \leq r$.*

Определение 10 *Множество B элементов метрического пространства X называется открытым шаром радиуса r с центром в точке x_0, если для всех элементов x этого множества $\rho(x, x_0) < r$.*

Определение 11 *Множество S элементов метрического пространства X называется сферой радиуса r с центром в точке x_0, если для всех элементов x этого множества $\rho(x, x_0) = r$.*

Следует отметить, что шар в нормированном пространстве не является нормированным пространством (так как не для всех элементов шара их сумма также принадлежит шару). Замкнутый шар в метрическом пространстве является метрическим пространством (как, впрочем, и любое подмножество метрического пространства).

Задача 5 *Построить шары в пространствах R, R^2, R^3 и $C_{[a,b]}$ для метрик, рассмотренных в примерах 1–4 предыдущего параграфа.*

2.2.3 Полные метрические пространства. Полнота пространства $C_{[a,b]}$

Рассмотрим некоторую последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X.

Определение 12 *Говорят, что* $x_n \to x_0$ *(при* $n \to \infty$*), если* $\rho(x_n, x_0) \to 0$ *при* $n \to \infty$*, т. е.* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$, $\forall n : n > N(\varepsilon) \implies \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Определение 13 *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется фундаментальной, если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$, $\forall n, m : n > N$, $m > N$ $\implies \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Определение 14 *Метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность элементов данного пространства сходится к элементу этого пространства.*

Задача 6 *Доказать, что замкнутый шар в полном метрическом пространстве является полным метрическим пространством.*

Теорема 1 Пространство $C_{[a,b]}$ полно в метрике равномерной сходимости.

Доказательство

Рассмотрим некоторую фундаментальную последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций $\{y_n\}$, где $y_n = y_n(x)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$, $\forall n > N$, $m > N$,

$$\max_{x \in [a,b]} |y_n(x) - y_m(x)| < \varepsilon.$$

В последней записи фиксируем значение переменной $x = x_0$. Тогда, в силу определения, получим числовую фундаментальную последовательность $\{y_n(x_0)\}$, которая сходится к некоторому значению $y(x_0)$. Теперь зафиксируем другое значение переменной $x = x_1$. Получим числовую фундаментальную последовательность $\{y_n(x_1)\}$, которая сходится к $y(x_1)$. Сопоставляя каждому значению x некоторое значение $y(x)$, получим функцию $y = y(x)$, к которой последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится поточечно.

Докажем теперь, что последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится к $y(x)$ равномерно. Для этого в неравенстве

$$|y_n(x) - y_m(x)| < \varepsilon$$

перейдем к пределу при $m \to \infty$ (n фиксировано) $\forall x$. Получим

$$|y_n(x) - y(x)| < \varepsilon \ \ \forall x.$$

Согласно теореме о равномерной сходимости непрерывных функций, функция $y(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Таким образом, полнота $C_{[a,b]}$ доказана.

2.3 Операторы в метрических пространствах

2.3.1 Определения и примеры

Определение 15 *Оператор A, действует в пространстве X, если он отображает пространство X в себя:*

$$A : X \to X.$$

Определение 16 *Оператор A называется непрерывным в точке x_0, если для последовательности аргументов, сходящихся к x_0, соответствующая ей последовательность Ax_n сходится к Ax_0.*

Определение 17 *Оператор называется непрерывным на некотором множестве, если он непрерывен в каждой точке этого множества, т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall x, y \mid \rho(x, y) < \delta \Longrightarrow \ \rho(Ax, Ay) < \varepsilon.$$

Определение 18 *Говорят, что оператор A удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, если для любых элементов x, y метрического пространства имеет место неравенство:*

$$\rho(Ax, Ay) \leq L\rho(x, y).$$

Отметим, что оператор, удовлетворяющий условию Липшица, является непрерывным. Действительно, в этом случае достаточно положить $\delta = \varepsilon/L$ в определении непрерывности.

Определение 19 *Оператор A называется сжимающим, если для любых элементов x, y метрического пространства существует такая константа $q : 0 \leq q < 1$, что имеет место неравенство:*

$$\rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y).$$

Сжимающий оператор удовлетворяет условию Липшица с $L < 1$ и, следовательно, является непрерывным.

Рассмотрим примеры операторов, действующих в метрических пространствах.

Пример 5 В пространстве R рассмотрим оператор $Ax = ax+b$. Отметим, что этот оператор является линейным только при $b = 0$. Оператор A удовлетворяет условию Липшица с константой $|a|$. Действительно:

$$\rho(Ax_1, Ax_2) = |Ax_1 - Ax_2| = |ax_1 - ax_2| \leq |a||x_1 - x_2|.$$

Таким образом, A — непрерывный оператор и, при условии $|a| < 1$, является сжимающим.

Пример 6 На промежутке $(-a, a) \in R$, где $a > 0$, рассмотрим оператор $Ax = x^2$. Так как

$$\rho(x_1, x_2) = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \leq 2a|x_1 - x_2|,$$

то оператор A удовлетворяет условию Липшица с константой $2a$ и является сжимающим при $a < 0,5$.

Отметим, что непрерывно дифференцируемая на некотором отрезке $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Действительно, согласно теореме о среднем значении (теореме Лагранжа)

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - \bar{x}|,$$

где $\xi \in [a, b]$. Функция $\varphi'(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ как непрерывная функция на ограниченном множестве. Таким образом, константа Липшица $L = \max\limits_{\xi \in [a,b]} |\varphi'(\xi)|$.

Итак, функции, удовлетворяющие условию Липшица, составляют класс шире, чем класс непрерывно дифференцируемых функций, но уже, чем класс непрерывных функций (например, функция $y = |x|$ не является дифференцируемой, но удовлетворяет условию Липшица).

2.3.2 Интегральный оператор в $C_{[a,b]}$

Предположим, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике (рис. 2.2)

$$\Pi = \{(x, y) : \quad |x - x_0| \leq \alpha, \quad |y - y_0| \leq \beta\}.$$

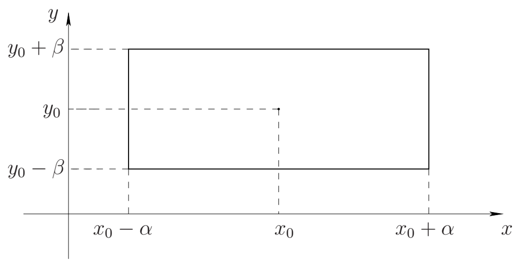


Рис. 2.2: Прямоугольник П

Будем предполагать, что при всех x из данного множества функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y с константой L:

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|.$$

Отметим, что в силу непрерывности на замкнутом ограниченном множестве функция $f(x,y)$ ограничена:

$$\exists M > 0: \quad |f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in \Pi.$$

Рассмотрим пространство

$$C_{[x_0-h, x_0+h]}, \quad 0 < h \leq \alpha.$$

В этом пространстве рассмотрим замкнутый шар радиуса β с центром в $y = y_0$. Обозначим этот шар через F:

$$F = \{y(x): \ \rho(y, y_0) = \max_{|x-x_0| \leq h} |y(x) - y_0| \leq \beta\}.$$

Определим на шаре F, который является полным метрическим пространством, интегральный оператор A:

$$Ay = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Выясним, при каких h оператор A действует в F и является сжимающим.

Необходимо отметить, что Ay — непрерывная функция в силу непрерывности функции $f(x, y(x))$. Оценим

$$|Ay - y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\right| \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y(s))| \, ds\right| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} M ds\right| \leq M\,|x - x_0| \leq Mh.$$

Таким образом, для того, чтобы оператор A действовал в F, должно выполняться условие

$$Mh \leq \beta \implies h \leq \frac{\beta}{M}.$$

Для любых элементов y и z из F, где

$$Az = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, z(s))ds,$$

оценим

$$|Ay - Az| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left(f(s, y(s)) - f(s, z(s)) \right) ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| \, ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} L|y(s) - z(s)|ds \right| \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} L\rho(y, z)ds \right| \leq$$

$$\leq L\rho(y, z)|x - x_0| \leq L\rho(y, z)h.$$

Отсюда получаем

$$\rho(Ay, Az) \leq Lh\rho(y, z).$$

Следовательно, оператор A является сжимающим при условии $Lh < 1$. Таким образом, если

$$h < \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{L}\right\},$$

то оператор A действует в F и является сжимающим.

2.4 Принцип сжатия

Теорема 2 Если оператор A действует в полном метрическом пространстве X и является сжимающим, то он имеет в этом пространстве единственную неподвижную точку, т. е. уравнение $x = Ax$ имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Возьмем произвольный элемент $x_0 \in X$ и построим последовательность элементов $\{x_n\}$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
&x_1 = Ax_0,\\
&x_2 = Ax_1,\\
&\dots\\
&x_{n+1} = Ax_n, \dots\ .
\end{aligned}$$

Мы хотим убедиться, что данная последовательность является фундаментальной. Пусть $\rho(x_1, x_0) = \nu$. Оценим расстояние между соседними элементами последовательности. С учетом того, что оператор A сжимающий, имеем

$$\begin{aligned}
&\rho(x_2, x_1) = \rho(Ax_1, Ax_0) \le q\rho(x_1, x_0) = q\nu,\\
&\rho(x_3, x_2) = \rho(Ax_2, Ax_1) \le q\rho(x_2, x_1) \le q^2\nu,\\
&...\\
&\rho(x_{n+1}, x_n) \le q^n\nu,\\
&...
\end{aligned}$$

где $0 \le q < 1$. Далее, применяя неравенство треугольника, получаем:

$$\rho(x_{n+m}, x_n) \le \rho(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le$$

$$\le q^{n+m-1}\nu + q^{n+m-2}\nu + \cdots + q^n\nu =$$

$$= q^n\nu(1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-2} + q^{m-1}) \le$$

$$\le q^n\nu(1 + q + \cdots + q^{m-1} + \cdots) = q^n\nu\frac{1}{1-q}.$$

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) :$

$$\forall n > N(\varepsilon), \; \forall m \;\; \rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $N(\varepsilon)$ из условия

$$\frac{q^n \nu}{1-q} < \varepsilon.$$

Отсюда

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln(\varepsilon(1-q)/\nu)}{\ln q} \right],$$

где $[\cdot]$ — целое число. Условие (2.3) выполняется, т. е. последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому x^*.

A — сжимающий оператор, следовательно он непрерывен, т. е.

$$\{x_n\} \to x^* \implies Ax_n \to Ax^*.$$

В силу построения последовательности $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = Ax_n.$$

Переходя в последнем уравнении к пределу при $n \to \infty$, получим

$$x^* = Ax^*.$$

Таким образом, x^* и является неподвижной точкой оператора A.

Докажем единственность неподвижной точки.
Предположим противное. Пусть есть еще одна неподвижная точка x^{**} оператора A, т. е.

$$x^{**} = Ax^{**}.$$

Тогда

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(Ax^*, Ax^{**}) \leq q\rho(x^*, x^{**}), \; 0 \leq q < 1.$$

Следовательно, $\rho(x^*, x^{**}) = 0$, отсюда $x^* = x^{**}$, что и требовалось доказать.

Замечание 1 *Все условия теоремы существенны.*

В качестве доказательства этого утверждения можно привести следующие примеры.

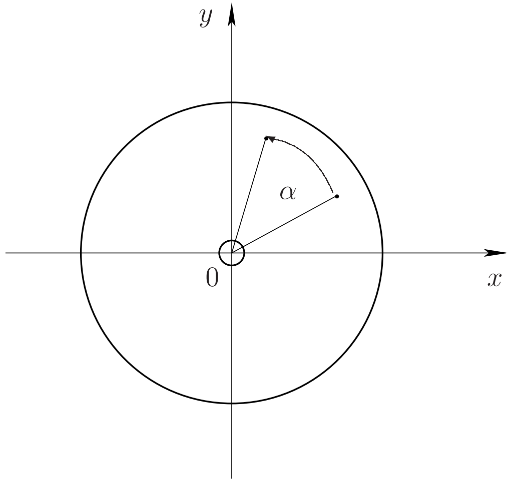


Рис. 2.3: Иллюстрация к примеру 7

Пример 7 В качестве пространства X рассмотрим кольцо в R^2 с центром O в начале координат. Оператор A переводит пространство X само в себя поворотом вокруг O на некоторый угол α (рис. 2.3). Оператор A не является сжимающим. Если $\alpha \neq 2\pi n$, то неподвижной точки не существует, если $\alpha = 2\pi n$ — такая точка не единственна.

Пример 8 Рассмотрим пространство $X = (0, 1)$. Относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y|$ пространство X не является полным метрическим пространством. Действительно, фундаментальная последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ сходится к нулю, то есть не к элементу X.

Определим на X оператор $A : Ax = x/2$. Очевидно, что A — сжимающий и $A : X \to X$. Единственной неподвижной точкой оператора A является $x = 0 \notin X$. Таким образом, полнота метрического пространства является существенным условием принципа сжатия.

Пример 9 Пусть $X = [0, 1]$. Рассмотрим оператор

$$Ax = \frac{1}{2}x + 2.$$

Очевидно, что X — полное метрическое пространство, оператор A является сжимающим, но A не действует в пространстве X. У оператора A нет неподвижной точки.

2.5 Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = f(x, y), \tag{2.4}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.5}$$

где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \le \alpha, |y - y_0| \le \beta\}$$

и удовлетворяет в Π условию Липшица по переменной y с константой L:

$$|f(x, y) - f(x, z)| \le L|y - z|.$$

Отметим, что из непрерывности на замкнутом ограниченном множестве П следует ограниченность $f(x, y)$, т. е.

$$\exists M > 0 : \quad |f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in \Pi.$$

Теорема 3 В данных предположениях задача Коши (2.4), (2.5) на промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$, где $h < \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{L}\right\}$, имеет единственное решение.

Доказательство

Докажем сначала, что задача Коши (2.4), (2.5) эквивалентна задаче о нахождении непрерывного решения интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{2.6}$$

Пусть $y(x)$ — решение начальной задачи (2.4), (2.5), т. е.

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)). \tag{2.7}$$

Интегрируя тождество (2.7), с учетом (2.5), получаем:

$$y(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds, \tag{2.8}$$

т. е. $y(x)$ является решением (2.6).

Пусть теперь $y(x)$ — непрерывное решение уравнения (2.6). Полагая в (2.8) $x = x_0$, получим начальное условие (2.5). Далее, в силу непрерывности $f(x, y(x))$, правая часть (2.8) — непрерывно дифференцируемая функция. Значит, $y(x)$ — непрерывно дифференцируема. Продифференцировав (2.8), получаем тождество (2.7), из которого следует, что $y(x)$ — решение задачи Коши (2.4), (2.5). Таким образом, эквивалентность доказана.

Рассмотрим теперь в пространстве функций, определенных и непрерывных на промежутке $|x - x_0| < h$, замкнутый шар F

с центром y_0 и радиусом β. На множестве F определим интегральный оператор

$$Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Отметим, что в силу выбора h, интегральный оператор A в полном метрическом пространстве F является сжимающим. Значит, согласно принципу сжатия, уравнение $y = Ay$ имеет единственное решение. Следовательно, в силу эквивалентности (2.4), (2.5) и (2.6), задача Коши имеет единственное решение, что и требовалось доказать.

Возникает вопрос: существенно ли условие Липшица в формулировке теоремы?

Рассмотрим уравнение $y' = \pm f(y)$, где

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \le y < \infty, \\ -\sqrt{-y}, & -\infty < y \le 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

По теореме Лагранжа

$$\frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi \in [y_1, y_2].$$

Таким образом,

$$L = \max_{\xi \in [y_1, y_2]} \frac{1}{2\sqrt{\xi}}.$$

Но если $y_1 \to 0$, $y_2 \to 0$, то и $\xi \to 0$. Следовательно, в этом случае не существует ограниченной постоянной L, т. е. функция $f(y)$ не удовлетворяет условию Липшица.

Решениями уравнения являются ветви парабол $y = \pm(x/2 + C)^2$ и прямая $y = 0$ (рис. 2.4). Но так как функция y в силу (2.9) монотонна, то решения уравнения (2.9) представляют собой часть нулевого решения, «склеенную» с ветвью параболы.

Таким образом, через точку $O(0, 0)$ проходит бесконечное множество интегральных кривых, представляющих собой «склеенные» части оси Ox и ветви парабол.

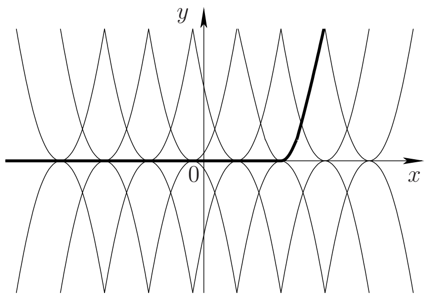


Рис. 2.4: Решения уравнения (2.9)

Итак, невыполнение условия Липшица повлекло за собой неединственность решения задачи Коши.

Замечание 2 *Если вместо метрики равномерной сходимости рассмотреть метрику*

$$\rho(y, z) = \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} e^{-\gamma |x - x_0|} |y(x) - z(x)|,$$

где $\gamma > L$, *то можно доказать существование единственного решения задачи Коши на промежутке* $[x_0 - h, x_0 + h]$, *где* $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Замечание 3 *Условие Липшица можно заменить условием непрерывной дифференцируемости функции* $f(x, y)$ *на отрезке.*

2.6 Теорема Коши — Пеано

Если в дифференциальном уравнении (2.4) на функцию $f(x, y)$ наложено лишь требование непрерывности по совокупности переменных, то можно доказать существование по крайней мере одного решения с начальными условиями (2.5) [6, 9]. Имеет место следующая теорема Коши — Пеано.

Теорема 4 Пусть в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y): \quad |x - x_0| \leq \alpha, \quad |y - y_0| \leq \beta\}$$

задана непрерывная по совокупности переменных функция $f(x, y)$. Отметим, что

$$\exists M > 0: \quad |f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in \Pi.$$

Тогда на промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши (2.4), (2.5).

2.7 Интегральная воронка. Теорема Кнезера

Определение 20 *Решение задачи Коши (2.4), (2.5)* $y = y^*(x)$ *называется верхним, если любое другое решение этой задачи* $y(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$y(x) \leq y^*(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + h].$$

Определение 21 *Решение задачи Коши (2.4), (2.5)* $y = y_*(x)$ *называется нижним, если любое другое решение этой задачи* $y(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$y(x) \geq y_*(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + h].$$

Имеет место теорема Кнезера [14]:

Теорема 5 Всегда существует верхнее и нижнее решение. Через каждую точку между этими решениями проходит хотя бы одно решение задачи Коши (2.4), (2.5).

Определение 22 *Множество всех решений между* $y^*(x)$ *и* $y_*(x)$ *называется интегральной воронкой.*

2.8 Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных данных

2.8.1 Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметров

Рассмотрим задачу Коши вида

$$y' = f(x, y, \mu), \tag{2.10}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.11}$$

где $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)$ — вектор параметров.

Предположим, что функция $f(x, y, \mu)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольном параллелепипеде

$$\Pi = \{(x, y, \mu) : |x - x_0| \leq \alpha,\ |y - y_0| \leq \beta,\ \|\mu - \mu^0\| \leq \nu\}.$$

Из непрерывности функции в замкнутой ограниченной области следует ее ограниченность:

$$\exists M > 0: \quad |f(x, y, \mu)| \leq M \quad \forall (x, y, \mu) \in \Pi.$$

Пусть функция $f(x, y, \mu)$ в Π удовлетворяет условию Липшица по переменной y:

$$|f(x, y, \mu) - f(x, \bar{y}, \mu)| \leq L|y - \bar{y}|.$$

Теорема 6 *(о непрерывной зависимости от параметров)*
В данных условиях задача Коши (2.10), (2.11) на промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$, где $h < \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{L}\right\}$, имеет единственное решение $y = y(x, \mu)$, причем это решение непрерывно зависит от параметра μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим пространство функций, определенных и непрерывных по совокупности переменных на множестве

$$|x - x_0| \le h, \quad \|\mu - \mu^0\| \le \nu.$$

В этом пространстве определим расстояние по следующему правилу:

$$\rho(y, z) = \max_{\substack{|x - x_0| \le h, \\ \|\mu - \mu^0\| \le \nu}} \left\{ |y(x, \mu) - z(x, \mu)| e^{-\gamma |x - x_0|} \right\},$$

где $\gamma \ge 0$.

Через F обозначим замкнутый шар радиуса β с центром $y = y_0$ этого пространства. Заметим, что F — полное метрическое пространство в данной метрике.

Покажем, что задача Коши (2.10), (2.11) эквивалентна задаче о нахождении непрерывного решения интегрального уравнения:

$$y(x, \mu) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s, \mu), \mu) ds. \tag{2.12}$$

Отметим, что правая часть (2.12) непрерывно зависит от параметра. Все остальное доказательство проводится аналогично тому, как это делалось в теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Для каждого элемента F определим интегральный оператор

$$Ay = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s, \mu), \mu) ds.$$

Проверим, что оператор A является сжимающим, т. е.

$$\rho(Ay, Az) \le q \rho(y, z),$$

и действующим в F, т. е.

$$\rho(y_0, Ay) \le \beta.$$

Имеем

$$|Ay - Az| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} [f(s, y(s,\mu), \mu) - f(s, z(s,\mu), \mu)] ds\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{x_0}^{x} L|y(s,\mu) - z(s,\mu)| ds\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{x_0}^{x} L|y(s,\mu) - z(s,\mu)| e^{-\gamma|s-x_0|} e^{\gamma|s-x_0|} ds\right| = I.$$

Заметим, что

$$|y(s,\mu) - z(s,\mu)| e^{-\gamma|s-x_0|} \le \rho(y,z),$$

поэтому

$$I \le L\rho(y,z) \int\limits_{x_0}^{x} e^{\gamma|s-x_0|} ds =$$

$$= \begin{cases} L\rho(y,z)\gamma^{-1}\left(e^{\gamma(x-x_0)} - 1\right), & x \ge x_0 \\ L\rho(y,z)\gamma^{-1}\left(e^{-\gamma(x-x_0)} - 1\right), & x < x_0 \end{cases} =$$

$$= \gamma^{-1} L\rho(y,z)\left(e^{\gamma}|x - x_0| - 1\right) \le L\rho(y,z)\gamma^{-1} e^{\gamma|x-x_0|}.$$

Итак,

$$|Ay - Az| \le \frac{L}{\gamma}\rho(y,z) e^{\gamma|x-x_0|}$$

или

$$|Ay - Az| e^{-\gamma|x-x_0|} \le \frac{L}{\gamma}\rho(y,z).$$

Из последнего выражения получаем

$$\rho(Ay, Az) \le \frac{L}{\gamma}\rho(y, z).$$

Заметим, что если изначально выбрать $\gamma > L$, то $q = L/\gamma < 1$, следовательно A — сжимающий оператор.

Далее

$$|Ay - y_0| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s, \mu), \mu)ds\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} Mds\right| \le Mh \le \beta$$

или

$$\max_{|x-x_0|\le h}\left\{|Ay - y_0|e^{-\gamma|x-x_0|}\right\} \le \beta.$$

Приходим к заключению, что

$$A : F \to F.$$

Таким образом, выполнены все условия принципа сжатия, следовательно уравнение (2.12) имеет единственное решение, т. е. задача (2.10), (2.11) имеет единственное непрерывное по x и μ решение.

Задача 7 *Доказать, что F является полным метрическим пространством в данной метрике.*

2.8.2 Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных

В реальных задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений, начальные условия известны с некоторым приближением, так как они определяются экспериментально. В связи с этим возникает вопрос о том, как изменяется решение задачи Коши $y = y(x, x_0, y_0)$ при небольших изменениях начальных значений x_0, y_0.

Теорема 7 Если выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то решение задачи (2.4), (2.5) от начальных значений зависит непрерывно.

Доказательство

С помощью замены переменных:

$$\begin{cases} y &= z + y_0, \\ x &= t + x_0 \end{cases}$$

из (2.4), (2.5) получим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0) \equiv g(t, z, x_0, y_0), \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

в которую начальные значения x_0, y_0 входят как параметры. Для этой начальной задачи выполнены все условия теоремы о непрерывной зависимости от параметров. Таким образом, решение задачи Коши (2.4), (2.5) непрерывно зависит от начальных данных.

2.8.3 Дифференцируемость решения по начальным данным и параметрам

Приведем без доказательства утверждения о гладкой зависимости решений от параметров и начальных данных [5, 6].

Теорема 8 *(О дифференцируемости по параметрам)*
Пусть выполнены условия теоремы о непрерывности зависимости решения задачи Коши от параметров, и $f(x, y, \mu)$ k раз непрерывно дифференцируема по всем переменным.

Тогда решение задачи Коши $y = y(x, \mu)$ k раз дифференцируемо по параметру μ.

Теорема 9 *(О дифференцируемости по начальным данным)*
Пусть выполнены условия теоремы о существовании и един-

ственности решения задачи Коши и функции f k раз дифференцируемы по всем переменным. Тогда $y = y(x, x_0, y_0)$ k раз дифференцируема по переменным x_0, y_0.

2.9 Продолжимость решения

При доказательстве существования решения задачи Коши было установлено, что решение существует на промежутке, меньшем, чем тот, на котором задана сама задача Коши. Исключением является случай, когда

$$h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\} = \alpha$$

в условиях теоремы Коши — Пеано. Обсудим вопрос о продолжимости решения на весь промежуток в других случаях.

Пусть $\varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения, определенное на I_1, а $\psi(x)$ — решение дифференциального уравнения, определенное на I_2 (рис. 2.5).

Определение 23 *Будем говорить, что $\psi(x)$ является продолжением $\varphi(x)$, если $I_1 \subset I_2$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ при $x \in I_1$.*

Теорема 10 Пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в некоторой области G с границей Γ и (x_0, y_0) — внутренняя точка этой области. Тогда решение задачи Коши (2.4), (2.5) продолжимо в области G вплоть до границы Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Окружим точку (x_0, y_0) квадратом с максимальной стороной $2a_0$, так, чтобы квадрат целиком лежал внутри области G. В G выполняются все условия теоремы Коши — Пеано и, следовательно, существует решение задачи Коши на промежутке $[x_0, x_0 + h_0]$, где $h_0 = \min\{a_0, a_0/M\}$.

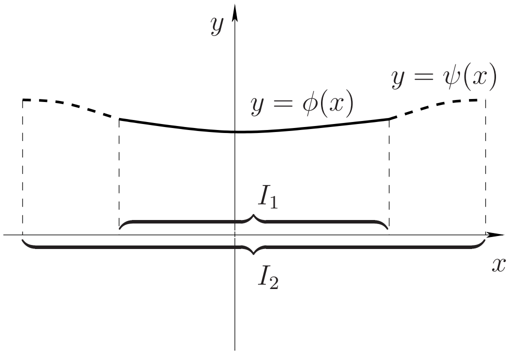


Рис. 2.5: Решение $\psi(x)$ является продолжением $\varphi(x)$ на промежуток I_2

Возьмем крайнюю точку (x_1, y_1), где

$$x_1 = x_0 + h_0, \quad y_1 = y(x_1) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_1} f(s, y(s))ds,$$

и, в свою очередь, окружим ее квадратом с максимальной стороной $2a_1$. Выпустим из (x_1, y_1) решение, которое существует, согласно теореме Коши — Пеано, на промежутке $[x_1, x_1 + h_1]$, $h_1 = \min\{a_1, a_1/M\}$. Получим точку (x_2, y_2):

$$x_2 = x_1 + h_1 = x_0 + h_0 + h_1, \quad y_2 = y(x_2)$$

и решение начальной задачи на отрезке $[x_0, x_2]$.

Продолжая этот процесс, мы либо за конечное число шагов продолжим решение до границы, либо мы построим бесконечную последовательность точек

$$\{(x_n, y_n)\}: \quad x_n = x_0 + h_0 + \cdots + h_{n-1},$$

$$y_n = y_{n-1} + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(s, y(s))ds = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_n} f(s, y(s))ds.$$

Здесь $y(t)$ — решение начальной задачи, продолженное на отрезок $[x_0, x_n]$.

Отметим, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена (областью G) и монотонно возрастает. Следовательно,

$$\exists x^* : \quad x_n \to x^* \quad (n \to \infty).$$

Из фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ следует фундаментальность $\{y_n\}$:

$$|y_{n+m} - y_n| = \left| \int\limits_{x_n}^{x_{n+m}} f(s, y(s)) ds \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{x_n}^{x_{n+m}} |f(s, y(s))| ds \leq M |x_{n+m} - x_n|.$$

Следовательно,

$$\exists y^* : \quad y_n \to y^* \quad (n \to \infty).$$

Таким образом, возможны два случая:

1) $(x^*, y^*) \in \Gamma$, тогда теорема доказана.

2) $(x^*, y^*) \notin \Gamma$, т. е. (x^*, y^*) — внутренняя точка области G.

Рассмотрим второй случай. Можно окружить (x^*, y^*) квадратом с максимальной стороной $2a^*$. Так как $\{(x_n, y_n)\} \to (x^*, y^*)$, то все точки последовательности $\{(x_n, y_n)\}$, начиная с некоторого номера, лежат внутри квадрата со стороной a^*. Для любой точки внутри квадрата a^* найдется квадрат со стороной $2a_n \geq a_*$. Таким образом,

$$a_n \geq \frac{a_*}{2} > 0.$$

С другой стороны,

$$h_n = x_{n+1} - x_n \to 0, \quad h_n = \min\left\{a_n, \frac{a_n}{M}\right\}.$$

Следовательно, $a_n \to 0$. Мы пришли к противоречию, значит, второй случай невозможен.

Аналогичным образом доказывается продолжимость решения до границы области G влево.

Глава 3

Интегральные и дифференциальные неравенства

3.1 Теорема о дифференциальном неравенстве

Будем рассматривать задачу Коши (2.4), (2.5) и предполагать, что эта задача имеет на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ единственное решение.

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, а $u(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[x_0, x_0 + h]$ функция, для которой на этом отрезке выполняются неравенства:

$$u(x_0) \leq y_0,$$

$$u'(x) \leq f(x, u(x)).$$

Теорема 11 В данных условиях $u(x) \leq y(x)$, где $y(x)$ — решение задачи (2.4), (2.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о

Заметим, что для случая строгих неравенств

$$u'(x) < f(x, u(x)),$$

$$u(x_0) < y(x_0),$$

теорема очевидна.

Введем непрерывную вспомогательную функцию $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \ y \geq u(x), \\ f(x, u(x)), \ y < u(x). \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} z' = F(x, z), \\ z(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Пусть $z(x)$ — решение дифференциального уравнения (оно существует согласно теореме Коши — Пеано).

Докажем, что $z(x) \geq u(x)$.

Предположим противное, т. е.

$$\exists \ x^* : \quad z(x^*) < u(x^*).$$

Пусть x_* — ближайшая к x^* точка слева, в которой $z(x_*) = u(x_*)$. Заметим, что такая точка обязательно найдется, в силу того, что

$$z(x_0) = y_0, \qquad u(x_0) \leq y_0.$$

Рассмотрим промежуток $[x_*, x^*]$, на нем $z(x) < u(x)$. Тогда, на этом промежутке $F(x, z) = f(x, u(x))$, и (3.1) принимает вид

$$z' = f(x, u(x)), \qquad z(x_0) = y_0.$$

Рассмотрим функцию $z(x) - u(x)$ на промежутке $[x_*, x^*]$.

Так как, по условию теоремы,

$$u' \leq f(x, u(x)),$$

то
$$(z-u)' \geq 0,$$
и, следовательно,
$$z(x) \geq u(x)$$
на всем рассматриваемом промежутке.
Таким образом, пришли к противоречию. Значит,
$$z(x) \geq u(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0+h],$$
и, следовательно, задача Коши (3.1) имеет вид
$$\begin{cases} z' = f(x,z), \\ z(x_0) = y_0. \end{cases}$$
Таким образом, задачи (3.1) и (2.4), (2.5) эквивалентны, т. е.
$$z(x) \equiv y(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0+h],$$
следовательно, $u(x) \leq y(x)$, что завершает доказательство.

3.2 Теорема об интегральном неравенстве

Теорема 12 Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных и не убывает по второму аргументу. Пусть на промежутке $[x_0, x_0+h]$ существуют единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши (2.4), (2.5) и непрерывная функция $u(x)$ такая, что
$$u(x) \leq y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, u(s))ds.$$
Тогда на промежутке $[x_0, x_0+h]$ справедливо неравенство
$$u(x) \leq y(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим функцию

$$v(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, u(s))ds.$$

Так как

$$v(x) \geq u(x),$$

то в силу монотонности $f(x, y)$ по y

$$v'(x) = f(x, u(x)) \leq f(x, v(x)).$$

Отметим, что

$$v(x_0) = y_0.$$

Таким образом, функция $v(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о дифференциальном неравенстве, поэтому $v(x) \leq y(x)$.

Тогда

$$u(x) \leq v(x) \leq y(x),$$

что и требовалось доказать.

Отметим важное следствие из последней теоремы.

Неравенство Гронуолла — Беллмана. Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$u(x) \leq C + \int\limits_{x_0}^{x} \lambda u(s)ds,$$

где $x \geq x_0$, а C и λ — неотрицательные числа. Тогда

$$u(x) \leq Ce^{\lambda(x-x_0)}.$$

3.3 Интегральные неравенства и продолжимость решений

Рассмотрим задачу Коши (2.4), (2.5). Справедлива следующая

Теорема 13 Пусть существует непрерывная неубывающая функция $w(y)$, такая, что $|f(x,y)| \le w(|y|)$, и задача Коши

$$\begin{cases} z' = w(z), \\ z(x_0) = |y_0| \end{cases} \tag{3.2}$$

имеет единственное решение на $[x_0, x_0 + h]$.

Тогда задача Коши (2.4), (2.5) имеет решение, продолжимое на промежуток $[x_0, x_0 + h]$.

Доказательство

Сведем задачу Коши (2.4), (2.5) к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Покажем ограниченность решения этого уравнения:

$$|y(x)| \le |y_0| + \int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y(s))|ds \le |y_0| + \int\limits_{x_0}^{x} w(|y(s)|)ds.$$

Пусть $|y(x)| = u(x)$, тогда последнее неравенство имеет вид

$$u(x) \le |y_0| + \int\limits_{x_0}^{x} w(u(s))ds,$$

и, по теореме об интегральном неравенстве, на промежутке $[x_0, x_0 + h]$

$$u(x) = |y(x)| \le z(x),$$

где $z(x)$ — непрерывное решение (3.2).

Как непрерывная на ограниченном замкнутом множестве функция $z(x)$ ограничена на промежутке $[x_0, x_0 + h]$:

$$\exists N > 0: \quad z(x) \le N,$$

следовательно, $|y(x)| \le N$.

Рассмотрим прямоугольник

$$\Pi = \{x_0 \le x \le x_0 + h, \ |y| \le N + 1\}$$

как область, в которой задана функция $f(x, y)$. Из точки (x_0, y_0) выпустим решение задачи Коши (2.4), (2.5). Это решение продолжимо вплоть до границы прямоугольника. Но $|y(x)| \le N$, значит, горизонтальная граница прямоугольника не может быть достигнута. Но это значит, что график функции $y = y(x)$ достигает правой вертикальной границы.

Таким образом, $y(x)$ продолжима на $[x_0, x_0 + h]$, что и требовалось доказать.

Задача 8 *Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(x, y)| \le a|y| + b,$$

$$a, b \ge 0.$$

Доказать, что тогда решение задачи Коши продолжимо на всю ось.

3.4 Метод малого параметра

Продолжая исследовать вопрос о зависимости решения задачи Коши от параметров, рассмотрим начальную задачу (2.10), (2.11) для случая скалярного параметра. Итак, рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \mu), \\ y(x_0, \mu) = \bar{y}_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Предположим, что функция $f(x, y, \mu)$ определена, непрерывна и $(k + 1)$ раз непрерывно дифференцируема по всем переменным в параллелепипеде

$$\Pi = \{(x, y, \mu) : \ |x - x_0| \leq \alpha, \ |y - \bar{y}_0| \leq \beta, \ |\mu| \leq \nu\},$$

где ν достаточно малая величина.

Из теоремы о дифференцируемости решения задачи Коши по параметру следует, что при таких предположениях решение $y(x, \mu)$ задачи (3.3) существует и является k раз непрерывно дифференцируемой функцией x и μ на множестве $|x - x_0| \leq \alpha$, $|\mu| \leq \nu$.

Определение 24 *Задача вида*

$$\begin{cases} y' = f(x, y, 0), \\ y(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

называется порождающей (вырожденной) задачей.

Предположим, что решение порождающей задачи известно:

$$y = y_0(x).$$

Покажем, что на промежутке $|x - x_0| \leq \alpha$ решение задачи (3.3) может быть представлено в виде *асимптотического разложения* [10] по степеням малого параметра μ:

$$y(x, \mu) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i y_i(x) + y_{k+1}(x, \mu), \quad y_{k+1}(x, \mu) = O(\mu^{k+1}). \tag{3.5}$$

Подставим разложение (3.5) в уравнение (3.3):

$$y' = \sum_{i=0}^{k} \mu^i y_i'(x) + y_{k+1}'(x, \mu) =$$

$$= f\left(x, \sum_{i=0}^{k} \mu^i y_i(x) + y_{k+1}(x, \mu), \mu\right) =$$

$$= F_0(x) + \mu F_1(x) + \mu^2 F_2(x) + \cdots + \mu^k F_k(x) + F_{k+1}(x, \mu), \quad (3.6)$$

где

$$F_0(x) = f(x, y_0(x), 0),$$

$$F_1(x) = f'_y(x, y_0(x), 0) y_1(x) + f'_\mu(x, y_0(x), 0),$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\{f''_{y^2}(x, y_0(x), 0) y_1^2(x) + 2 f''_{y\mu}(x, y_0(x), 0) y_1(x) +$$

$$+ 2 f'_y(x, y_0(x), 0) y_2(x) + f''_{\mu^2}(x, y_0(x), 0)\},$$

$$\ldots$$

$$F_k(x) = f'_y(x, y_0(x), 0) y_k(x) + \Phi(x, y_0, \ldots, y_{k-1}),$$

$$F_{k+1}(x, \mu) = O(\mu^{k+1}),$$

и в начальное условие:

$$y(x_0, \mu) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i y_i(x_0) + y_{k+1}(x_0, \mu) = \bar{y}_0. \quad (3.7)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра μ в (3.6) и (3.7), получим

$$\begin{cases} y'_0 = F_0(x) = f(x, y_0, 0), \\ y_0(x_0) = \bar{y}_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_1 = F_1(x) = a(x) y_1 + b_1(x), \\ y_1(x_0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_2 = F_2(x) = a(x) y_2 + b_2(x), \\ y_2(x_0) = 0, \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases} y'_k = F_k(x) = a(x) y_k + b_k(x), \\ y_k(x_0) = 0, \end{cases}$$

$$\ldots$$

где

$$a(x) = f_y(x, y_0(x), 0),$$
$$b_i(x) = b_i(x, y_0(x), \ldots, y_{i-1}(x)).$$

Очевидно, что функция $y_0(x)$ является решением порождающей задачи (3.4), а функции $y_1(x)$, …, $y_k(x)$ — решения задач Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Решая последовательно эти задачи, определим члены ряда (3.5) до k-го порядка включительно.

Рассмотрим функцию

$$Y_k(x, \mu) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i y_i(x).$$

Докажем, что

$$|y(x, \mu) - Y_k(x, \mu)| = O(\mu^{k+1}),$$

т. е. $Y_k(x, \mu)$ является приближением решения задачи Коши (3.3) и погрешность этого приближения есть величина порядка $O(\mu^{k+1})$.

Функция $Y_k(x, \mu)$ в силу выбора $y_0(x)$, …, $y_k(x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} Y_k'(x, \mu) = f(x, Y_k(x, \mu), \mu) + \Psi_{k+1}(x, \mu), \\ Y_k(x_0, \mu) = \bar{y}_0. \end{cases}$$

Так как

$$y(x, \mu) = \bar{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s, \mu), \mu) ds,$$

$$Y_k(x, \mu) = \bar{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} (f(s, Y_k(s, \mu), \mu) + \Psi_{k+1}(s, \mu)) ds,$$

то, используя тот факт, что функция $f(x, y, \mu)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой L, а $\Psi_{k+1}(x,\mu) = O(\mu^{k+1})$, т. е. существует константа $C > 0$: $|\Psi_{k+1}(x,\mu)| = \mu^{k+1}C$, получим

$$|y(x,\mu) - Y_k(x,\mu)| =$$

$$= \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s,\mu),\mu) - f(s, Y_k(s,\mu),\mu) - \Psi_{k+1}(s,\mu) ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y(s,\mu),\mu) - f(s, Y_k(s,\mu),\mu)| + |\Psi_{k+1}(s,\mu)| ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} (L|y(s,\mu) - Y_k(s,\mu)| + \mu^{k+1}C) ds \right|$$

или

$$|y_{k+1}(x,\mu)| + \frac{\mu^{k+1}C}{L} \leq$$

$$\leq \frac{\mu^{k+1}C}{L} + \left| \int\limits_{x_0}^{x} \Big[L|y_{k+1}(s,\mu)| + \mu^{k+1}C \Big] ds \right|.$$

Введем обозначение

$$|y_{k+1}(x,\mu)| + \frac{\mu^{k+1}C}{L} = U(x,\mu).$$

Тогда последнее неравенство можно представить в виде

$$U(x,\mu) \leq \frac{\mu^{k+1}C}{L} + \int\limits_{x_0}^{x} LU(s,\mu) ds.$$

Согласно неравенству Гроноулла — Беллмана, имеем при $|x - x_0| \leq \alpha$:

$$U(x,\mu) \leq \frac{\mu^{k+1}C}{L} e^{L(x-x_0)}$$

или

$$|y_{k+1}(x,\mu)| + \frac{\mu^{k+1}C}{L} \le \frac{\mu^{k+1}C}{L} e^{L(x-x_0)}.$$

Отсюда следует

$$|y_{k+1}(x,\mu)| \le \frac{\mu^{k+1}C}{L}\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right) = O(\mu^{k+1}).$$

Таким образом, мы доказали, что погрешность приближения решения есть величина порядка $O(\mu^{k+1})$. Заметим, что это справедливо для конечного промежутка. Следует отметить, что константа C зависит от k (обычно она возрастает при увеличении k). Это значит, что ряд может не сходиться.

Глава 4

Дифференциальные уравнения n-го порядка

4.1 Линейные уравнения n-го порядка

Дифференциальное уравнение вида:

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x), \quad p_0(x) \neq 0, \quad (4.1)$$

где функции $q(x)$, $p_i(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке $x \in [a, b]$, называется линейным уравнением n–го порядка [1, 5, 6, 9].

Если правая часть $q(x) \not\equiv 0$, то уравнение (4.1) называется неоднородным; если $q(x) \equiv 0$, то (4.1) — однородное уравнение.

Задача 9 *Пусть $\phi(t)$ — строго монотонная функция на промежутке $[t_1, t_2]$ и такая, что $\phi(t_1) = a$, $\phi(t_2) = b$.*

Если предполагать, что $\phi(t)$ n раз непрерывно дифференцируема на данном промежутке, то замена переменной $x = \phi(t)$ оставляет уравнение линейным.

Задача 10 *Пусть функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ определены, n раз непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a,b]$ и $\phi(x)$ не обращается в ноль на этом промежутке. Тогда замена переменной $y = \phi(x)z + \psi(x)$ приводит к линейному уравнению n-го порядка относительно переменной z.*

Поскольку в уравнении (4.1) коэффициент $p_0(x) \neq 0$, то на него можно разделить:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = d(x). \tag{4.2}$$

Здесь $a_i(x) = p_i(x)/p_0(x)$, $d(x) = q(x)/p_0(x)$ $(i = \overline{1,n})$.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \tag{4.3}$$

Пусть для уравнения (4.2) заданы начальные условия

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{0,1}, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Имеет место теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейных уравнений n-го порядка.

Теорема 14 Пусть функции $a_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ и $d(x)$ определены и непрерывны на промежутке $[a,b]$ и точка $x_0 \in [a,b]$. Тогда задача Коши (4.2), (4.4) на этом промежутке имеет единственное решение.

Доказательство этой теоремы будет представлено ниже как следствие теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем.

Определение 25 *Выражение вида*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y,$$

где $a_i(x)$ — непрерывные функции на промежутке $[a, b]$, называется линейным дифференциальным выражением n-го порядка.

С помощью дифференциального выражения можно задать линейный дифференциальный оператор:

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y.$$

Рассмотрим пространство $C^n_{[a,b]}$ функций, определенных и n раз непрерывно дифференцируемых на промежутке $[a, b]$. Пусть $y \in C^n_{[a,b]}$, тогда оператор $L : C^n_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$.

Проверим, что L — линейный оператор.

$$L(\alpha y) = \alpha y^{(n)} + a_1(x)\alpha y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\alpha y = \alpha Ly,$$

$$\begin{gathered}L(y + z) = (y + z)^{(n)} + a_1(x)(y + z)^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)(y + z) = \\ = y^{(n)} + z^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \\ + \cdots + a_n(x)y + a_n(x)z = Ly + Lz.\end{gathered}$$

Уравнения (4.2) и (4.3) удобно представить в виде

$$Ly = d(x),$$

$$Ly = 0.$$

Отметим основное свойство решений однородного уравнения.

Пусть $y_1(x),\ \ldots,\ y_k(x)$ — решения уравнения (4.3). Тогда их линейная комбинация

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$$

также является решением (4.3). Действительно:

$$L(c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)) = c_1Ly_1 + \cdots + c_kLy_k \equiv 0.$$

4.1.1 Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений

Определение 26 *Функции $\phi_1(x), \ \ldots, \ \phi_k(x)$ называются линейно зависимыми на промежутке $[a, b]$, если существует такой нетривиальный набор констант $c_1, \ \ldots, \ c_k$, что*

$$c_1\phi_1(x) + \cdots + c_k\phi_k(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Определение 27 *Функции $\phi_1(x), \ \ldots, \ \phi_k(x)$ называются линейно независимыми на промежутке $[a, b]$, если они не являются линейно зависимыми, т. е.*

$$c_1\phi_1(x) + \cdots + c_k\phi_k(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

Пример 10 Функции $1, \ x, \ \ldots, \ x^m$ — линейно независимы на любом промежутке, т. к. равенство

$$c_1 + c_2x + \cdots + c_{m+1}x^m = 0$$

справедливо только в конечном числе точек.

Пример 11 Функции $x^{k_1}, \ldots, x^{k_m} (k_1 < k_2 < \ldots < k_m)$ — линейно независимы на R.

Предположим противное: пусть функции линейно зависимы, тогда

$$\exists c_1, \ldots, c_m : \quad c_1x^{k_1} + \cdots + c_mx^{k_m} \equiv 0$$

или

$$x^{k_1}(c_1 + \cdots + c_mx^{k_m - k_1}) \equiv 0.$$

Если $x \neq 0$, то имеем

$$c_1 + c_2x^{k_2 - k_1} \cdots + c_mx^{k_m - k_1} \equiv 0.$$

Это тождество справедливо везде, кроме нуля. Но, в силу непрерывности функции, стоящей в левой части, равенство нулю будет и в точке $x = 0$. Тогда, при $x = 0$, имеем

$$c_1 + 0 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 0.$$

Аналогично делается вывод о том, что $c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Таким образом, получаем противоречие, которое доказывает линейную независимость функций.

Задача 11 *Рассмотреть пример 2 на произвольном промежутке, не содержащем ноль.*

Определение 28 *Любые n линейно независимых решений линейного однородного уравнения (4.3) называются фундаментальной системой решений (Ф.С.Р.).*

Теорема 15 Ф.С.Р. существует.

Доказательство

Рассмотрим n задач Коши вида:

$$\begin{cases} Ly = 0, \\ y(x_0) = 1, \\ y'(x_0) = 0, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Ly = 0, \\ y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0; \end{cases} \quad \ldots \begin{cases} Ly = 0, \\ y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{cases}$$

Каждая из этих начальных задач имеет единственное решение. Обозначим эти решения через

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x), \quad \ldots, \quad y = y_n(x).$$

Выясним, будут ли эти функции линейно независимыми.

Предположим противное: пусть они линейно зависимы. Следовательно, существует такой нетривиальный набор констант c_1, $\ldots$, c_n, что

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \equiv 0.$$

Дифференцируя последнее тождество $(n-1)$ раз, получим

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) \equiv 0,$$
$$\dots$$
$$c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0.$$

Из полученной системы при $x = x_0$ имеем

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = 0, \\ \dots \\ c_n = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили противоречие, что и доказывает теорему.

4.1.2 Определитель Вронского

Пусть есть n функций $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$, определенных и $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на промежутке $[a, b]$.

Определение 29 *Определителем Вронского (вронскианом) называется определитель вида:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема 16 Если функции $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на промежутке $[a, b]$, то определитель Вронского, составленный для этих функций, равен нулю: $W(x) \equiv 0$.

Доказательство

Так как функции линейно зависимы, то существует такой нетривиальный набор констант c_1, …, c_n, что

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) \equiv 0.$$

Пусть, для определенности, $c_1 \neq 0$, тогда, поделив это тождество на c_1, получим

$$y_1(x) \equiv \alpha_2y_2(x) + \dots + \alpha_ny_n(x), \quad \alpha_i = -c_i/c_1.$$

Дифференцируя последнее тождество $(n-1)$ раз, получим

$$y_1'(x) \equiv \sum_{i=2}^{n} \alpha_i y_i'(x), \quad \dots, \quad y_1(x)^{(n-1)} \equiv \sum_{i=2}^{n} \alpha_i y_i^{(n-1)}(x).$$

Следовательно, в силу линейной зависимости столбцов $\forall x \in [a,b]$, определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

тождественно равен нулю на всем промежутке $[a,b]$.

Теорема 17 Если функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ являются линейно независимыми на $[a,b]$ решениями однородного уравнения $Ly = 0$, то определитель Вронского, составленный для этих функций, не обращается в ноль ни в одной точке $[a,b]$.

Доказательство

Предположим, что определитель равен нулю хотя бы в одной точке $x = x_0$, т. е. $W(x_0) = 0$. Рассмотрим линейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + \dots + c_ny_n(x_0) = 0, \\ \dots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x_0) = 0$. Следовательно, система имеет нетривиальное решение $c_1^*, \ldots, c_n^*$. Построим функцию

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + \cdots + c_n^* y_n(x).$$

В точке x_0 функция $y(x)$ и все ее производные до $(n-1)$ включительно обращаются в ноль.

Кроме того, как линейная комбинация решений, функция $y(x)$ является решением уравнения $Ly = 0$.

Нулевое решение $Ly = 0$ обладает теми же свойствами. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши, $y(x) \equiv 0$, что означает линейную зависимость функций $y_1(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$.

Полученное противоречие завершает доказательство.

Пример 12 Рассмотрим функции

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

на любом промежутке, содержащем ноль в качестве внутренней точки. Построим определитель Вронского для этих функций:

для $x < 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

для $x > 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Функции линейно независимы, а $W \equiv 0$, т. к. эти две функции не являются решениями одного уравнения $Ly = 0$.

Теорема 18 Любое решение уравнения $Ly = 0$ можно представить в виде линейной комбинации ее Ф.С.Р.

Доказательство

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — Ф.С.Р. уравнения (4.3).

Пусть есть еще одно решение $y(x)$ этого уравнения с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{0,1}, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}. \end{cases}$$

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = y_0, \\ c_1 y_1'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) = y_{0,1}, \\ \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}. \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x_0) \neq 0$, следовательно, существует нетривиальное решение $c_1^*, \ \ldots, \ c_n^*$.

Рассмотрим функцию

$$z(x) = c_1^* y_1(x) + \cdots + c_n^* y_n(x).$$

Как линейная комбинация Ф.С.Р., функция $z(x)$ является решением (4.3) и удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $y(x)$. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши, $z(x) \equiv y(x)$.

Из последних двух теорем следует вывод, который может быть сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема 19 Множество решений линейного однородного уравнения представляет собой линейное n-мерное пространство. Роль базиса играет любая Ф.С.Р.

4.1.3 Формула Остроградского — Лиувилля

Рассмотрим производную определителя Вронского $W(x)$, составленного для решений $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$ уравнения (4.3). По правилу дифференцирования определителя имеем

$$W'(x) = W_1(x) + \dots + W_n(x),$$

где $W_i(x)$ — определитель, полученный из $W(x)$ дифференцированием i-й строки, при этом элементы всех других строк остаются неизменными. Определители

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$W_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

равны нулю, так как содержат по две одинаковых строки. Следовательно,

$$W'(x) = W_n(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Так как $y_1 = y_1(x)$ является решением (4.3), то

$$y_1^{(n)} = -a_1 y_1^{(n-1)} - a_2 y_1^{(n-2)} - \dots - a_n y_1 \quad \forall x \in [a, b].$$

Подставляя это выражение в последнее равенство и опуская аргумент x для краткости записи, получим

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_1^{(n-i)} & \dots & -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_n^{(n-i)} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1 \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} + \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{a_i y_1^{(n-i)}}{a_1} & \dots & y_n^{(n-1)} + \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{a_i y_n^{(n-i)}}{a_1} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$W'(x) = -a_1 W(x),$$

решая которое получим

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}$$

или

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(s)ds}.$$

Последнее равенство называется формулой Остроградского — Лиувилля.

Задача 12 *Рассмотрим уравнение 2-го порядка*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

у которого известно одно решение $y_1(x)$. Применив формулу Остроградского — Лиувилля, понизить порядок уравнения и решить его.

4.1.4 Построение уравнения по Ф.С.Р.

Пусть функции $y_1, \ \dots, \ y_n$ образуют Ф.С.Р. сразу двух уравнений:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \qquad (4.5)$$

и

$$y^{(n)} + \tilde{a}_1(x)y^{(n-1)} + \dots + \tilde{a}_n(x)y = 0, \qquad (4.6)$$

где $a_i(x)$, $\tilde{a}_i(x)$ — непрерывные функции при $x \in [a, b]$.

Покажем, что это может иметь место только в случае

$$a_i(x) \equiv \tilde{a}_i(x).$$

Предположим противное.

Пусть в некоторой точке x_0

$$a_1(x_0) \neq \tilde{a}_1(x_0).$$

Тогда в силу непрерывности коэффициенты не совпадают и в некоторой окрестности этой точки. Следовательно, из уравнения

$$(a_1 - \tilde{a}_1)y^{(n-1)} + \dots + (a_n - \tilde{a}_n)y = 0,$$

полученного вычитанием (4.6) из (4.5), имеем

$$y^{(n-1)} + \frac{a_2 - \tilde{a}_2}{a_1 - \tilde{a}_1}y^{(n-2)} + \dots + \frac{a_n - \tilde{a}_n}{a_1 - \tilde{a}_1}y = 0.$$

Линейно независимые функции $y_1, \ \dots, \ y_n$ являются решением этого уравнения $(n-1)$-го порядка. Следовательно, функции $y_1(x), \ \dots, \ y_{n-1}(x)$ образуют его Ф.С.Р., а $y_n(x)$ является линейной комбинацией этих функций, как любое решение однородного уравнения $(n-1)$-го порядка. Но последнее означает, что функции $y_1(x), \dots, \ y_n(x)$ линейно зависимы. Получили противоречие.

Следовательно,

$$a_1(x) \equiv \tilde{a}_1(x).$$

Аналогично доказывается, что

$$a_2(x) \equiv \tilde{a}_2(x), \quad \dots, \quad a_n(x) \equiv \tilde{a}_n(x).$$

Таким образом, доказано

Утверждение 1 При сделанных предположениях уравнения (4.5) и (4.6) совпадают.

Поставим перед собой задачу построения дифференциального уравнения, для которого известна его Ф.С.Р.

Итак, пусть функции $y_1, \dots, y_n$ образуют Ф.С.Р. Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.7}$$

где y — неизвестная функция.

Все функции $y_1, \dots, y_n$ являются решением этого уравнения.

Действительно, подставляя вместо y одну из этих функций, в левой части уравнения мы получаем определитель с двумя одинаковыми столбцами. Следовательно, уравнение (4.7) обращается в тождество.

Разложим определитель в (4.7) по элементам последнего столбца:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y(n-1) + \dots + a_n(x)y = 0,$$

где

$$a_0(x) = W(x), \qquad a_1(x) = -W'(x).$$

Так как функции $y_1, \dots, y_n$ образуют Ф.С.Р., то они линейно независимы, следовательно

$$W(x) \neq 0.$$

Поэтому последнее уравнение можно переписать в виде:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0,$$

где

$$p_1 = -\frac{W'(x)}{W(x)}.$$

Замечание 4 *Отсюда можно получить формулу Остроградского — Лиувилля.*

Очевидно, что $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0.$$

Следовательно,

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(s)ds}.$$

Пример 13 Рассмотрим Ф.С.Р., состоящую из функций

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2.$$

Построим соответствующее уравнение третьего порядка.

Так как определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

это возможно.

Используя описанный выше алгоритм, имеем

$$2y^{(3)} = 0.$$

4.1.5 Понижение порядка линейных однородных уравнений

Рассмотрим уравнение:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \tag{4.8}$$

Пусть известно нетривиальное решение $y = y_1(x)$.

В уравнении (4.8) сделаем замену

$$y = y_1(x)z.$$

Для этого найдем все производные y до n-го порядка включительно с помощью формулы Лейбница:

$$y' = y_1'z + y_1z',$$

$$y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'',$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i y_1^{(i)} z^{(n-i)}.$$

Подставляя полученные выражения в дифференциальное уравнение, имеем

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i y_1^{(i)} z^{(n-i)} + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i y_1^{(i)} z^{(n-1-i)} +$$

$$+ \cdots + a_n y_1(x) z = 0. \tag{4.9}$$

Коэффициент при $z^{(n)}$ в уравнении (4.1.4) равен y_1, а при z:

$$a_n y_1 + a_{n-1} y_1' + \cdots + a_1 y_1^{(n-1)} + y_1^{(n)} \equiv 0,$$

так как $y_1(x)$ является решением (4.8).

Таким образом, (4.1.4) принимает вид

$$q_0 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + \cdots + q_{n-1} z' = 0.$$

Вводя новую функцию $u = z'$, последнее уравнение перепишем в виде

$$q_0 u^{(n-1)} + q_1 u^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} u = 0.$$

Отметим, что последнее уравнение имеет порядок $(n-1)$, т. е. порядок уравнения (4.8) понижен с помощью замены

$$u = \left[\frac{y(x)}{y_1(x)}\right]'.$$

Будем рассматривать это уравнение на промежутке, в котором $y_1(x)$ не обращается в ноль.

Пусть $u_1(x), \ \ldots, u_{n-1}(x)$ — линейно независимые решения полученного уравнения. Возникает вопрос: можно ли по этим решениям найти Ф.С.Р. уравнения (4.8)? Оказывается, это возможно.

Пусть

$$u_i = \left[\frac{y_{i+1}(x)}{y_1(x)}\right]', \ \ i = \overline{1, n-1}.$$

Отсюда, интегрируя, имеем

$$\frac{y_{i+1}(x)}{y_1(x)} = \int u_i(s) ds.$$

Следовательно,

$$y_{i+1} = y_1(x) \int u_i(s) ds, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Покажем, что полученные таким образом решения являются линейно независимыми.

Предположим противное: пусть они линейно зависимы, т. е. существует такой нетривиальный набор чисел $c_1, \ \ldots, c_n$, что

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \equiv 0. \tag{4.10}$$

Подставляя выражения для функций $y_i(x)$, получим

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int u_1(s) ds + \cdots + c_n y_1(x) \int u_{n-1}(s) ds \equiv 0$$

или

$$c_1 + c_2 \int u_1(s)ds + \cdots + c_n \int u_{n-1}(s)ds \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по x, получим

$$c_2 u_1(x) + \ldots + c_n u_{n-1}(x) \equiv 0,$$

откуда, с учетом линейной независимости функций $u_i(x)$, следует, что $c_2 = \ldots = c_n = 0$. Тогда из (4.10)

$$c_1 y_1(x) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0.$$

Пришли к противоречию, так как набор констант изначально нетривиален.

Пусть для рассматриваемого уравнения (4.8) известны k линейно независимых решений $y_1(x), \ldots, y_k(x)$. Сделав замену переменной $u = (y/y_1)'$, получим уравнение $(n-1)$-го порядка для u. При этой замене $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ перейдут в функции

$$u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \ldots, \quad u_{k-1} = \left(\frac{y_k}{y_1}\right)'.$$

Покажем, что полученные $(k-1)$ нетривиальные решения линейны независимы. Предположим противное: пусть u_1, …, u_{k-1} — линейно зависимы, т. е. существует нетривиальный набор чисел $c_1, \ldots, c_{k-1}$ такой, что

$$c_1 u_1 + \ldots + c_{k-1} u_{k-1} \equiv 0$$

или

$$c_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + \ldots + c_{k-1} \left(\frac{y_k}{y_1}\right)' \equiv 0.$$

Отсюда, интегрируя, имеем

$$c_1 \frac{y_2}{y_1} + \ldots + c_{k-1} \frac{y_k}{y_1} + c_k \equiv 0$$

или
$$c_1 y_2 + \ldots + c_{k-1} y_k + c_k y_1 \equiv 0.$$
В силу линейной независимости функций $y_1, \ \ldots, \ y_n$ последнее тождество означает, что $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство линейной независимости функций $u_1, \ldots, u_{k-1}$.

Повторяя описанную процедуру, можно понизить порядок исходного уравнения на k единиц, т. е. получить уравнение порядка $(n-k)$.

Рассмотрим пример.

Пример 14 Пусть для уравнения
$$y'' + 2y' + y = 0$$
известно решение
$$y_1 = e^{-x}.$$
Вводя замену
$$u = (ye^x)' = y'e^x + e^x y,$$
получим
$$u' = y''e^x + 2y'e^x + ye^x = (y'' + 2y' + y)e^x.$$
В силу исходного уравнения, получаем, что $u' = 0$, откуда $u = C$.

Итак, $(y_2 e^x)' = C$ или, после интегрирования,
$$y_2 e^x = C_1 + Cx.$$
Таким образом,
$$y_2 = (Cx + C_1)e^{-x},$$
т. е. в качестве второго решения фундаментальной системы можно взять $\quad y_2 = xe^{-x}$.

4.1.6 Линейные неоднородные уравнения

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = d(x),$$

которое удобнее записать в виде

$$Ly = d(x).$$

Исследуем сначала уравнение 2-го порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = d(x).$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Предположим, что функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ образуют Ф.С.Р. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x).$$

Решение неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных, т. е. в виде:

$$y(x) = c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x),$$

где $c_1(x)$, $c_2(x)$ — неизвестные функции.

Тогда $y' = c_1'(x)\phi_1(x) + c_1(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2(x) + c_2(x)\phi_2'(x)$. Потребуем дополнительно выполнения условия

$$c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x) = 0.$$

Тогда $y'' = c_1'(x)\phi_1'(x) + c_1(x)\phi_1''(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) + c_2\phi_2''(x)$. Подставляя выражения для y, y', y'' в неоднородное дифференциальное уравнение, получим

$$c_1'(x)\phi_1'(x) + c_1(x)\phi_1''(x) +$$

$$+c_2'(x)\phi_2'(x) + c_2\phi_2''(x) + p(x)\biggl(c_1(x)\phi_1'(x) + c_2(x)\phi_2'(x)\biggr) +$$

$$+q(x)\biggl(c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)\biggr) = d(x).$$

Представим последнее уравнение в виде

$$c_1(x)\biggl(\phi_1''(x) + p(x)\phi_1'(x) + q(x)\phi_1(x)\biggr) +$$

$$+c_2(x)\biggl(\phi_2''(x) + p(x)\phi_2'(x) + q(x)\phi_2(x)\biggr) +$$

$$+c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'\phi_2'(x) = d(x).$$

Выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю, следовательно, для c_1' и c_2' получается линейная алгебраическая система

$$\begin{cases} c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x) = 0, \\ c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) = d(x), \end{cases}$$

определитель которой есть вронскиан $W(x)$, составленный для ϕ_1 и ϕ_2. Так как этот определитель не обращается в ноль, то существует единственное решение данной системы

$$c_1(x) = C_1 + \int_{x_0}^{x} [\phi_2(s)d(s)/W(s)]\, ds,$$

$$c_2(x) = C_2 + \int_{x_0}^{x} [\phi_1(s)d(s)/W(s)]\, ds.$$

Таким образом найдено общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \phi_1(x)\int_{x_0}^{x} [\phi_2(s)d(s)/W(s)]\, ds +$$

$$+\phi_2(x)\int_{x_0}^{x} [\phi_1(s)d(s)/W(s)]\, ds.$$

Вернемся к уравнениям n-го порядка.

Утверждение 2 Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка представимо в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

Доказательство

Пусть $y = y_o(x)$ — общее решение однородного уравнения, $y = \tilde{y}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения. Тогда, в силу свойств линейного дифференциального оператора

$$L(y_o + \tilde{y}) = Ly_o + L\tilde{y} \equiv 0 + d(x) = d(x),$$

т. е. $y = y_o + \tilde{y}$ является решением неоднородного уравнения $Ly = d(x)$.

Пусть $z = z(x)$ — произвольное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим разность $(z - \tilde{y})$. Очевидно, что

$$L(z - \tilde{y}) = Lz - L\tilde{y} \equiv d(x) - d(x) \equiv 0,$$

т. е. функция $(z - \tilde{y})$ удовлетворяет однородному уравнению, следовательно, $z - \tilde{y} = y_o$.

Таким образом, произвольное решение неоднородного уравнения $z = y_o + \tilde{y}$, что и требовалось доказать.

Пусть функции $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ образуют Ф.С.Р. однородного линейного дифференциального уравнения $Ly = 0$.

Тогда решение неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$y = c_1(x)\phi_1(x) + \cdots + c_n(x)\phi_n(x),$$

где $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ — неизвестные функции.

Имеем

$$y' = c_1\phi_1' + \cdots + c_n\phi_n' + c_1'\phi_1 + \cdots + c_n'\phi_n.$$

Потребуем дополнительно выполнения условия

$$c_1'\phi_1 + \cdots + c_n'\phi_n = 0.$$

Тогда

$$y'' = c_1\phi_1'' + \cdots + c_n\phi_n'' + c_1'\phi_1' + \cdots + c_n'\phi_n'.$$

Беря в качестве следующего дополнительного условия

$$c_1'\phi_1' + \cdots + c_n'\phi_n' = 0,$$

и т. д., получим

$$y^{(n-1)} = c_1\phi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n\phi_n^{(n-1)} + c_1'\phi_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'\phi_n^{(n-2)}.$$

Пусть, далее,

$$c_1'\phi_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'\phi_n^{(n-2)} = 0,$$

тогда

$$y^{(n)} = c_1\phi_1^{(n)} + \cdots + c_n\phi_n^{(n)} + c_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'\phi_n^{(n-1)}.$$

Подставляя выражения для y, y', ..., $y^{(n)}$ в неоднородное дифференциальное уравнение $Ly = d(x)$, получим аналогично тому, как это было в случае уравнения второго порядка, линейную неоднородную алгебраическую систему относительно неизвестных $c_1', \ldots, c_n'$

$$\begin{cases} c_1'\phi_1 + \cdots + c_n'\phi_n = 0, \\ c_1'\phi_1' + \cdots + c_n'\phi_n' = 0, \\ \ldots \\ c_1'\phi_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'\phi_n^{(n-2)} = 0, \\ \\ c_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'\phi_n^{(n-1)} = d(x), \end{cases}$$

определитель которой есть $W(x)$, составленный для Ф.С.Р. ϕ_1, ..., ϕ_n. Следовательно, $W(x) \neq 0$ и данная система имеет единственное решение

$$c_1' = \gamma_1(x), \ \ \ldots \ , \ c_n' = \gamma_n(x).$$

Отсюда

$$c_1 = \int_{x_0}^{x} \gamma_1(s)ds + C_1, \ \dots \ , c_n = \int_{x_0}^{x} \gamma_n(s)ds + C_n.$$

Таким образом,

$$y = \phi_1(x) \left(\int_{x_0}^{x} \gamma_1(s)ds + C_1 \right) +$$

$$+ \dots + \phi_n(x) \left(\int_{x_0}^{x} \gamma_n(s)ds + C_n \right)$$

или $y = y_o(x) + \tilde{y}(x)$, где

$$y_o(x) = C_1\phi_1(x) + \dots + C_n\phi_n(x),$$

$$y_1(x) = \phi_1(x) \int_{x_0}^{x} \gamma_1(s)ds + \dots + \phi_n(x) \int_{x_0}^{x} \gamma_n(s)ds.$$

Пример 15 Рассмотрим уравнение $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения равно $(c_1x + c_2)e^{-x}$. Тогда решение неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$y = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)xe^{-x}.$$

Имеем

$$y' = -c_1e^{-x} + c_2(e^{-x} - xe^{-x}) + c_1'e^{-x} + c_2'xe^{-x}$$

и $\quad c_1'e^{-x} + c_2'xe^{-x} = 0,$

$$y'' = c_1e^{-x} + c_2(-2e^{-x} + xe^{-x}) - c_1'e^{-x} + c_2'(e^{-x} - xe^{-x}).$$

Подставляя выражения для y, y', ..., $y^{(n)}$ в неоднородное уравнение, получим систему

$$\begin{cases} c_1'e^{-x} + c_2'xe^{-x} = 0, \\ \\ c_1'(-e^{-x}) + c_2'(e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x}, \end{cases}$$

из которой находим

$$c_2' = x \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{2}x^2 + C_2,$$

$$c_1' = -x^2 \Longrightarrow c_1 = -\frac{x^3}{3} + C_1.$$

Следовательно,

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x}.$$

4.2 Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

4.2.1 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0, \tag{4.11}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа.

При $n = 1$ имеем уравнение 1-го порядка

$$y' + ay = 0,$$

решением которого является функция $y = e^{-ax}$.

Решения уравнения n-го порядка также будем искать в виде экспоненциальных функций $e^{\lambda x}$ (идея Эйлера), где λ — некоторые константы, подлежащие определению.

Подставляя эту функцию в уравнение (4.11), имеем

$$\lambda^ne^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_ne^{\lambda x} = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то из последнего выражения следует так называемое *характеристическое уравнение*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Многочлен, стоящий в левой части характеристического уравнения, обозначают через $P(\lambda)$ и называют *характеристическим.*

Итак, пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения. При этом возможны случаи простых и кратных, вещественных и комплексных корней. Рассмотрим все эти случаи.

Случай простых вещественных корней

Пусть все корни характеристического уравнения вещественны и различны. Тогда получим n различных линейно независимых решений

$$e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n x}$$

уравнения (4.11). Чтобы доказать это, составим вронскиан для этих функций и воспользуемся известным выражением для определителя Вандермонда:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n x} \cdot \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0.$$

Следовательно, $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ образуют Ф.С.Р.

Случай простых комплексных корней

Отметим, что при доказательстве линейной независимости решений в случае 4.1.6 нигде не использовался тот факт, что характеристические корни вещественны. Поэтому доказательство линейной независимости решений $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ в нашем случае совпадает с предыдущим.

Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тогда

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Вместо пары решений $e^{(\alpha\pm i\beta)x}$ возьмем другую пару: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Это можно делать в силу следующего факта.

Утверждение 3 Для того, чтобы комплексная функция $\phi(x)+ i\psi(x)$ была решением уравнения (4.11) с вещественными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы $\phi(x)$ и $\psi(x)$ являлись решениями этого уравнения.

Доказательство

Действительно, если ϕ и ψ — решения (4.11), то их линейная комбинация $(\phi + i\psi)$ также является решением (4.11).

Обратно, если

$$L(\phi + i\psi) \equiv 0 \implies L\phi + iL\psi \equiv 0.$$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его вещественная часть и коэффициент при мнимой части. Следовательно, $L\phi \equiv 0$ и $L\psi \equiv 0$, а это означает, что функции ϕ и ψ являются решениями (4.11).

Таким образом, вместо функций

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad e^{\lambda_3 x}, \quad \ldots\ , \ e^{\lambda_n x}$$

в качестве Ф.С.Р. возьмем набор функций

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad e^{\lambda_3 x}, \quad \ldots\ , \ e^{\lambda_n x}.$$

Покажем, что эти функции линейно независимы и, следовательно, действительно образуют Ф.С.Р.

Предположим противное. Тогда существует нетривиальный набор констант $C_1, \ldots, C_n$, таких, что

$$C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0.$$

Делая замену в тождестве

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}, \qquad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i},$$

получим

$$C_1 e^{\alpha x}\cdot\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2} + C_2 e^{\alpha x}\cdot\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i} +$$
$$+C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0.$$

Перегруппировав слагаемые, имеем

$$e^{\alpha x}\left(\frac{C_1 i(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}) + C_2(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})}{2i}\right)+$$
$$+C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} =$$
$$= e^{(\alpha+i\beta)x}\left(\frac{C_1}{2}-\frac{C_2 i}{2}\right) + e^{(\alpha-i\beta)x}\left(\frac{C_1}{2}+\frac{C_2 i}{2}\right)+$$
$$+C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0.$$

Из последнего тождества, в силу линейной независимости функций, получаем алгебраическую систему

$$\begin{cases} C_1 - iC_2 = 0, \\ C_1 + iC_2 = 0, \\ C_3 = 0, \\ \ldots \\ C_n = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пример 16 Для дифференциального уравнения

$$y^{(3)} + y' = 0$$

характеристическим является уравнение

$$\lambda^3 + \lambda = 0.$$

Для корней характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm i$ выпишем Ф.С.Р.:

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид линейной комбинации его Ф.С.Р.:

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Случай кратных корней

Пусть характеристический многочлен $P(\lambda)$ имеет вещественный корень $\lambda = \eta$ кратности k. Это означает, что

$$\begin{gathered} P(\eta) = 0, \quad P'(\eta) = 0, \quad P''(\eta) = 0, \quad \ldots, \\ P^{(k-1)}(\eta) = 0, \quad P^{(k)}(\eta) \neq 0. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Из курса алгебры известно, что в этом случае

$$P(\lambda) = (\lambda - \eta)^k Q(\lambda), \quad Q(\lambda) \neq 0.$$

Докажем, что функции

$$e^{\eta x}, \quad x e^{\eta x}, \quad x^2 e^{\eta x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{\eta x} \tag{4.13}$$

образуют Ф.С.Р. уравнения (4.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о

Функции (4.13) имеют вид

$$x^r e^{\eta x}, \qquad r = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Вычислим $L\,(x^r e^{\eta x})$. Для этого предварительно выпишем $L(uv)$, где u и v — некоторые n раз непрерывно дифференцируемые функции. Так как

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots,$$

$$(uv)^{(n-1)} = u^{(n-1)}v + C_{n-1}^1 u^{(n-2)}v' + \cdots,$$

$$(uv)^{(n-2)} = u^{(n-2)}v + C_{n-2}^1 u^{(n-3)}v' + \cdots,$$

$$\cdots$$

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$(uv)^{(0)} = uv,$$

то, умножая эти выражения на коэффициенты $1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, соответственно, имеем

$$L(uv) = vLu + \frac{v'}{1!}L_1 u + \frac{v''}{2!}L_2 u + \cdots, \tag{4.14}$$

где

$$Lu = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots,$$

$$L_1 u = nu^{(n-1)} + (n-1)a_1 u^{(n-2)} + \cdots,$$

$$L_2 u = n(n-1)u^{(n-2)} + (n-1)(n-2)a_1 u^{(n-3)} + \cdots,$$

$$\cdots$$

$$L_n u = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot u.$$

Через $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ и т. д. обозначим характеристические многочлены линейных дифференциальных операторов $L_1 u$, $L_2 u$ и т. д., соответственно. Легко видеть, что

$$P_1(\lambda) = P'(\lambda), \quad P_2(\lambda) = P''(\lambda), \quad \ldots .$$

Из выражения (4.14), полагая $u = e^{\eta x}$, $v = x^r$ $(r < k)$, с учетом условия (4.12), получим

$$L(uv) = x^r L(e^{\eta x}) + \frac{rx^{r-1}}{1!}L_1(e^{\eta x}) +$$

$$+\frac{r(r-1)x^{r-2}}{2!}L_2(e^{\eta x})+\dots=$$

$$=x^r e^{\eta x}P(\eta)+\frac{rx^{r-1}}{1!}e^{\eta x}P_1(\eta)+$$

$$+\frac{r(r-1)x^{r-2}}{2!}e^{\eta x}P_2(\eta)+\dots=$$

$$=x^r e^{\eta x}P(\eta)+\frac{rx^{r-1}}{1!}e^{\eta x}P'(\eta)+$$

$$+\frac{r(r-1)x^{r-2}}{2!}e^{\eta x}P''(\eta)+\dots\equiv 0.$$

Это тождество означает, что функции (4.13) являются решениями уравнения (4.11). Линейная независимость этих решений следует из примера 10. Таким образом, функции (4.13) образуют Ф.С.Р. уравнения (4.11).

Предположим, что все корни характеристического многочлена $P(\lambda)$ вещественные и кратные:

η_1 — корень кратности k_1,

η_2 — корень кратности k_2,

...

η_s — корень кратности k_s,

где $k_1+k_2+\dots+k_s=n$.

Тогда каждому корню η_i $(i=1,2,\dots,s)$ отвечают решения

$$e^{\eta_i x},\quad xe^{\eta_i x},\quad x^2e^{\eta_i x},\dots,x^{k_i-1}e^{\eta_i x}.$$

Покажем, что все эти решения линейно независимы и, следовательно, образуют Ф.С.Р.

Предположим противное. Пусть существует нетривиальный набор констант $c_1,\dots,c_n$, такой, что

$$P_1(x)e^{\eta_1 x}+P_2(x)e^{\eta_2 x}+\dots+P_s(x)e^{\eta_s x}\equiv 0,$$

где $P_1(x),\dots,P_s(x)$ многочлены порядка $(k_1-1),\dots,(k_s-1)$, соответственно, с коэффициентами $c_1,\dots,c_n$. В силу предположения, хотя бы один из многочленов отличен от нуля. Будем считать, что в сумме

$$\sum_{i=1}^{s} P_i(x)e^{\eta_i x} \equiv 0$$

опущены все слагаемые, тождественно равные нулю.

Без ограничения общности можно считать, что числа $\eta_1, \ldots, \eta_s$ упорядочены по возрастанию. Умножая последнее тождество на $e^{-\eta_1 x}$, получим

$$P_1(x) + \sum_{i=2}^{s} P_i(x)e^{(\eta_i-\eta_1)x} \equiv 0.$$

Продифференцируем полученное тождество k_1 раз. В результате имеем

$$\sum_{i\neq 1} Q_i(x)e^{(\eta_i-\eta_1)x} \equiv 0. \tag{4.15}$$

Отметим, что многочлен $Q_i(x)$ имеет ту же степень, что и $P_i(x)$.

Действительно,

$$\begin{gathered}(P_i(x)e^{\eta_i x})' = \big[(p_0x^m + p_1x^{m-1} + \cdots + p_m)e^{\eta_i x}\big]' = \\ = [p_0mx^{m-1} + p_1(m-1)x^{m-2} + \cdots + p_{m-1}]e^{\eta_i x} + \\ +\eta_i[p_0x^m + p_1x^{m-1} + \cdots + p_m]e^{\eta_i x} = \\ = [p_0\eta_i x^m + (p_0m + p_1\eta_i)x^{m-1} + \cdots]e^{\eta_i x},\end{gathered}$$

где $m = k_i - 1$. Итак, при дифференцировании таких выражений степень многочлена сохраняется.

Таким образом, $Q_i(x) \not\equiv 0$. Следовательно, можно повторить весь процесс для индекса $i = 2$: умножая (4.15) на $e^{(\eta_2-\eta_1)x}$, получим

$$Q_2(x) + \sum_{i\neq 1,2} Q_i(x)e^{(\eta_i-\eta_2)x} \equiv 0.$$

Дифференцируя k_2 раз, получим

$$\sum_{i\neq 1,2} S_i(x)e^{(\eta_i-\eta_2)x} \equiv 0$$

и т. д. Продолжая этот процесс, получим

$$T_s(x)e^{(\eta_s-\eta_{s-1})x} \equiv 0,$$

что означает равенство нулю всех коэффициентов многочлена $T_s(x)$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Случай кратных комплексных корней

Если характеристический многочлен $P(\lambda)$ имеет пару комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности k, то, согласно выводам, сделанным в предыдущих пунктах данного параграфа, этой паре соответствуют линейно независимые решения

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ \ldots,$$
$$x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (4.16)$$

Действительно, если повторить рассуждения предыдущего пункта, а затем выделить вещественную часть и коэффициент при мнимой части в каждом решении

$$x^r e^{(\alpha\pm i\beta)x}, \qquad r = 0, 1, \ldots, k-1,$$

то, согласно утверждению 3, функции (4.16) образуют Ф.С.Р. уравнения (4.11) в этом случае.

Пример 17 Рассмотрим уравнение

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

или

$$(\lambda^2+1)^2 = 0.$$

Следовательно, $P(\lambda)$ имеет пару комплексно сопряженных корней $\lambda = \pm i$ кратности $k = 2$. Таким образом, функции

$$\cos x, \quad \sin x, \quad x\cos x, \quad x\sin x$$

образуют Ф.С.Р. данного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y = (c_1 + xc_2)\cos x + (c_3 + xc_4)\sin x,$$

где $c_1, \ldots, c_4$ — произвольные постоянные.

4.2.2 Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = d(x), \tag{4.17}$$

где функция имеет вид квазиполинома

$$d(x) = e^{\alpha x}\left[R_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right].$$

Здесь $R_m(x)$ и $Q_l(x)$ — известные многочлены степени m и l, соответственно.

Как было доказано ранее, общее решение уравнения (4.17) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Поставим перед собой задачу нахождения частного решения уравнения (4.17). Для этого рассмотрим следующие случаи.

I. Пусть $\beta = 0$, т. е. правая часть уравнения (4.17) имеет вид

$$d(x) = R_m(x)e^{\alpha x}$$

и

$$P(\alpha) \neq 0,$$

где $P(\lambda)$ — характеристический многочлен уравнения.

В этом случае частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\tilde{y} = T_m(x)e^{\alpha x}, \tag{4.18}$$

где $T_m(x) = t_0x^m + t_1x^{m-1} + \dots + t_m$ — многочлен степени m, коэффициенты которого подлежат определению.

Используя формулу (4.14), где $u = e^{\alpha x}$, $v = T_m(x)$, имеем

$$L\left(T_m(x)e^{\alpha x}\right) = T_m(x)L(e^{\alpha x})+$$

$$+\frac{T'_m(x)}{1!}L_1(e^{\alpha x}) + \frac{T''_m(x)}{2!}L_2(e^{\alpha x}) + \dots =$$

$$= T_m(x)e^{\alpha x}P(\alpha) + \frac{T'_m(x)}{1!}e^{\alpha x}P_1(\alpha)+$$

$$+\frac{T''_m(x)}{2!}e^{\alpha x}P_2(\alpha) + \dots =$$

$$= T_m(x)e^{\alpha x}P(\alpha) + \frac{T'_m(x)}{1!}e^{\alpha x}P'(\alpha)+$$

$$+\frac{T''_m(x)}{2!}e^{\alpha x}P''(\alpha) + \dots \equiv R_m(x)e^{\alpha x}.$$

Отсюда следует

$$T_m(x)P(\alpha) + \frac{T'_m(x)}{1!}P'(\alpha)+$$

$$+\frac{T''_m(x)}{2!}P''(\alpha) + \dots \equiv R_m(x). \tag{4.19}$$

Так как многочлены $P(x)$ и $R_m(x)$ известны, то из (4.19) методом неопределенных коэффициентов можно найти коэффициенты многочлена $T_m(x)$.

II. Пусть $\beta = 0$ и α является корнем кратности k характеристического многочлена $P(\lambda)$, т. е.

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

В этом случае частное решение уравнения (4.17) будем искать в виде

$$\tilde{y} = x^k T_m(x) e^{\alpha x}. \tag{4.20}$$

III. Рассмотрим теперь случай, когда $\beta \neq 0$ и $P(\alpha \pm i\beta) \neq 0$.
Этот случай легко сводится к первому. Так как

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

то $d(x)$ можно записать в виде

$$d(x) = e^{\alpha x}\Big[R_m(x)\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q_l(x)\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}\Big] =$$

$$= e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{R_m(x)}{2} + \frac{Q_l(x)}{2i}\right] +$$

$$+e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{R_m(x)}{2} - \frac{Q_l(x)}{2i}\right] =$$

$$= e^{(\alpha+i\beta)x}A(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}B(x),$$

где через $A_s(x)$ и $B_s(x)$ обозначены многочлены степени $s = \max\{m, l\}$.

Таким образом, $d(x)$ представляет собой сумму двух функций, каждая из которых отвечает случаю I.

Имеет место

Утверждение 4 Пусть $y = \hat{y}(x)$ — решение уравнения $Ly = d_1(x)$, а $y = \check{y}(x)$ — решение уравнения $Ly = d_2(x)$, где d_1 и d_2 — непрерывные функции.

Тогда $\tilde{y} = \hat{y} + \check{y}$ является решением уравнения $Ly = d_1 + d_2$.

Так как, в силу линейности оператора L,

$$L\tilde{y} \equiv L\left(\hat{y} + \check{y}\right) \equiv L\hat{y} + L\check{y} \equiv d_1 + d_2,$$

то доказательство очевидно.

В силу этого утверждения и пункта I данного параграфа, в случае III частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\hat{y} + \check{y} = e^{(\alpha+i\beta)x}T_s(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}\bar{T}_s(x), \tag{4.21}$$

где $s = \max\{m, l\}$.

Отметим, что коэффициенты в уравнении (4.17) вещественны, следовательно, согласно утверждению 3, окончательно получим частное решение, выделяя вещественную часть и коэффициент при мнимой части в (4.21)

$$y = e^{\alpha x}[H_s(x)\cos\beta x + \bar{H}_s(x)\sin\beta x], \quad s = \max\{m, l\},$$

где $H_s(x)$ и $\bar{H}_s(x)$ — некоторые многочлены степени s.

IV. Пусть $\alpha \pm i\beta$ является корнем кратности k характеристического многочлена. Тогда, согласно выводам, сделанным в пунктах II и III данного параграфа, частное решение уравнения (4.17) имеет вид

$$y = x^k e^{\alpha x}[H_s(x)\cos\beta x + \bar{H}_s(x)\sin\beta x], \quad s = \max\{m, l\},$$

где $H_s(x)$ и $\bar{H}_s(x)$ — некоторые многочлены степени s.

Пример 18 Частное решение уравнения

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = e^{2x},$$

согласно пункту I ($\alpha = 2, \beta = 0, m = 0, k = 0$), будем искать в виде

$$\tilde{y} = Ae^{2x},$$

где A — некоторая константа.

Пример 19 Частное решение уравнения

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = e^{2x}\cos 3x$$

$(\alpha = 2, \beta = 3, m = 0, k = 0)$ имеет вид

$$\tilde{y} = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x),$$

где A и B — некоторые константы.

Пример 20 Частное решение уравнения

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = \cos x$$

$(\alpha = 0, \beta = 1, m = 0, k = 2)$ имеет вид

$$\tilde{y} = x^2(A\cos x + B\sin x).$$

Пример 21 Решим уравнение

$$y^{IV} + y'' = x + \sin 2x.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i.$$

Ф.С.Р. уравнения составляют функции

$$1, \quad x, \quad \cos x, \quad \sin x,$$

а общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_o = c_1 + c_2 x + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

Так как правая часть уравнения представляет собой сумму двух функций, то частное решение также является суммой:

$$\tilde{y} = \hat{y} + \check{y},$$

где

$$\hat{y} = x^2(Ax + B) \qquad (\alpha = 0,\ \beta = 0,\ m = 1,\ k = 2),$$

$$\check{y} = C\cos 2x + D\sin 2x \qquad (\alpha = 0,\ \beta = 2,\ m = 0,\ k = 0),$$

A, B, C, D — некоторые константы.

Подставляя $y = \hat{y}$ в уравнение $Ly = x$, имеем

$$0 + 6Ax + 2B = x.$$

Отсюда получаем, что $A = \dfrac{1}{6}$, $B = 0$.

Подставляя $y = \check{y}$ в уравнение $Ly = \sin 2x$, имеем

$$16C\cos 2x + 16D\sin 2x - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x = \sin 2x$$

или

$$12C\cos 2x + 12D\sin 2x = \sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в обеих частях этого выражения, получаем

$$C = 0, \qquad D = \frac{1}{12}.$$

Таким образом, искомое решение $y = y_o + \hat{y} + \check{y}$ имеет вид

$$y = c_1 + c_2 x + c_3\cos x + c_4\sin x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}\sin 2x.$$

4.3 Механические колебания

Рассмотрим математическую модель колебаний механической системы, которая представляет собой абсолютно твердое тело массой m, с двух сторон горизонтально закрепленное пружинами (рис. 4.1).

Через $x(t)$ обозначим положение (смещение от начальной точки) центра тяжести тела в момент времени t. Колебания происходят под действием следующих сил:

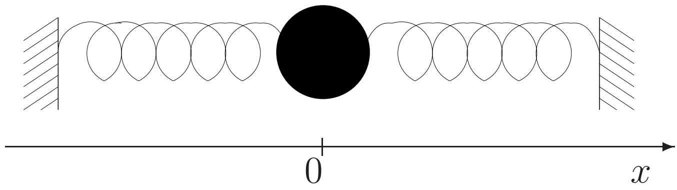


Рис. 4.1: Механическая система

- силы упругости $F_1 = -cx$, где c — коэффициент упругости пружин;
- силы трения $F_2 = -k\dot{x}(t)$, где k — коэффициент трения системы;
- внешней силы $F_3 = \rho \sin \omega t$.

Из второго закона Ньютона следует

$$m\ddot{x} = F_1 + F_2 + F_3$$

или

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = \rho \sin \omega t. \tag{4.22}$$

Левая часть уравнения (4.22) отражает внутренние свойства физической системы, а правая характеризует внешние силы.

Исследуем математическую модель (4.22).

4.3.1 Свободные колебания

В случае отсутствия внешней силы ($\rho = 0$), уравнение (4.22) имеет вид

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0. \tag{4.23}$$

При этом можно рассматривать модель как с учетом, так и без учета силы трения.

I. Пусть сила трения не учитывается, т. е. $k = 0$. Тогда уравнение (4.23) принимает вид

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

или

$$\ddot{x} + a^2 x = 0, \qquad a^2 = \frac{c}{m}.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm ia$. Следовательно, решение (4.23) имеет вид

$$x(t) = A\cos at + B\sin at =$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}\Big[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos at + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin at\Big] =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,[\sin\beta\cos at + \cos\beta\sin at] = R\sin(\beta + at),$$

где $R = \sqrt{A^2+B^2}$ называется *амплитудой колебаний.*

II. Пусть $k \neq 0$. Перепишем уравнение (4.23) в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + a^2 x = 0, \qquad 2n = \frac{k}{m}, \quad a^2 = \frac{c}{m}.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2n\lambda + a^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - a^2}$. Следовательно, если трение мало $(n < a)$, то

$$\lambda = -n \pm i\eta, \qquad \eta^2 = a^2 - n^2,$$

и решение имеет вид

$$x(t) = e^{-nt}\Big[A\cos\eta t + B\sin\eta t\Big] =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}e^{-nt}\Big[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\eta t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\eta t\Big] =$$

$$= Re^{-nt}\sin(\beta+\eta t).$$

При этом график решения представляет собой синусоиду с периодом $T = \frac{2\pi}{\eta}$ и со слабо гаснущей амплитудой, т. е. наблюдается почти колебательный процесс. Важной характеристикой скорости затухания такого процесса является величина

$$\gamma = \frac{-2\pi n}{\eta},$$

называемая *логарифмическим декрементом колебаний*, которая равна натуральному логарифму отношения двух последовательных максимумов решения $x(t)$. Таким образом, в этом случае твердое тело проходит через положение равновесия бесконечное число раз.

Если $n > a$, т. е. трение велико, то

$$\lambda_{1,2} = -n \pm b < 0, \qquad b^2 = n^2 - a^2,$$

и решение имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

В этом случае колебания сразу же затухают и маятник либо не проходит через положение равновесия, либо проходит один раз.

Аналогичное поведение системы наблюдается, если $n = a$, так как процесс описывается функцией

$$x(t) = e^{-nt}\left(c_1 + c_2 t\right).$$

4.3.2 Вынужденные колебания

Пусть $\rho \neq 0$.

I. Перепишем уравнение (4.22) для случая $k = 0$ в виде

$$\ddot{x} + a^2 x = p \sin \omega t, \qquad a^2 = \frac{c}{m}, \qquad p = \frac{\rho}{m}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Так как корни характеристического многочлена $\lambda = \pm ia$, то возможны два случая:

i) $a \neq \omega$, т. е. собственная частота колебаний системы не равна внешней частоте. Тогда функция

$$\tilde{x}(t) = \frac{p}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

является частным решением.

Очевидно, что чем меньше разница между собственной и внешней частотами, тем больше амплитуда колебаний

$$x(t) = R \sin(\beta + at) + \frac{p}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

ii). Если же $a = \omega$, то частное решение будем искать в виде

$$\tilde{x}(t) = t \Big[A \cos \omega t + B \sin \omega t \Big].$$

Подставляя $x = \tilde{x}(t)$ в уравнение, получим

$$A = \frac{-p}{2\omega}, \qquad B = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$x(t) = R \sin(\beta + at) - \frac{p}{2\omega} t \cos \omega t.$$

В этом случае амплитуда неограниченно возрастает. Такое явление получило название *резонанса.*

II. Рассмотрим случай:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + a^2 x = p \sin \omega t, \quad n < a.$$

Так как $\pm i\omega$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{x}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\sin(\omega t + \nu).$$

Следовательно, процесс описывается функцией

$$x(t) = Re^{-nt}\sin(\eta t + \beta) + C\sin(\omega t + \nu).$$

Очевидно, что при $t \to \infty$ собственные колебания (первое слагаемое) практически исчезнут.

При $n > a$, как уже отмечалось ранее, собственные колебания быстро затухают.

Таким образом, при наличии внешней силы, спустя некоторое время, роль собственных колебаний системы становится незначительной, и процесс полностью определяется внешним воздействием.

Глава 5

Краевые задачи

5.1 Краевые условия

Ранее мы рассматривали задачи, в которых дополнительные условия задавались при одном и том же значении независимой переменной. Однако часто приходится отыскивать решения дифференциальных уравнений, которые обладают определенными свойствами на границах интервала изменения независимой переменной. Такие задачи называются *краевыми* или *граничными* [10, 15].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + ... + a_n(x)y = f(x), \tag{5.1}$$

которое удобнее записать в виде $Ly = f(x)$.
Функции $a_i(x)$ $(i = 0, 1 \ldots, n)$ и $f(x)$ определены и непрерывны на промежутке $[x_0, x_1]$.

Рассмотрим так называемый *оператор краевых условий* $U_i(y)$ $(i = \overline{1, n})$:

$$U_i(y) = \alpha_{i0}y(x_0) + \alpha_{i1}y'(x_0) + \cdots + \alpha_{i,n-1}y^{(n-1)}(x_0) +$$

$$+\beta_{i0}y(x_1) + \beta_{i1}y'(x_1) + \cdots + \beta_{i,n-1}y^{(n-1)}(x_1).$$

Уравнение (5.1) и *краевые условия*

$$U_i(y) = 0, \qquad i = \overline{1, n} \tag{5.2}$$

определяют краевую задачу.

Решить краевую задачу — значит найти такое решение уравнения (5.1), которое удовлетворяло бы краевым условиям (5.2).

Отметим, что краевые условия (5.2) можно иначе записать в виде

$$U(y) = 0, \qquad U = \begin{pmatrix} U_1(y) \\ \vdots \\ U_n(y) \end{pmatrix}.$$

Краевые условия (5.2) являются однородными.

Неоднородные краевые условия можно свести к однородным, если найти какую-нибудь функцию $p(x)$, удовлетворяющую неоднородным уравнениям краевых условий $U(p) = b$. Действительно, с помощью замены

$$y = z + p, \quad p: \; U(p) = b,$$

получим

$$\begin{cases} Lz = f(x) - Lp, \\ Uz = 0. \end{cases}$$

Отметим, что начальные условия являются частным случаем неоднородных краевых условий.

Рассмотрим однородную краевую задачу

$$Ly = 0, \quad Uy = 0. \tag{5.3}$$

Пусть $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ — функции, образующие Ф.С.Р. Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$y = c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x).$$

Подставляя это решение в краевые условия, получим

$$U_i\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{n} c_jU_i\left(\phi_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j\gamma_{ij} = 0.$$

Здесь $\gamma_{ij} = U_i\left(\phi_j(x)\right)$ — фиксированные числа $(i,j=\overline{1,n})$.

Таким образом, получили линейную однородную алгебраическую систему относительно переменных $c_1,\ldots,c_n$ с определителем $\Gamma = \det\{\gamma_{ij}\}$.

Если $\Gamma \neq 0$, то задача (5.3) имеет только тривиальное решение.

Если $\Gamma = 0$, то задача (5.3) имеет нетривиальное решение.

Утверждение 5 Неоднородная краевая задача (5.1)–(5.2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда однородная задача (5.3) имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности предположим противное. Пусть есть два решения y_1, y_2 краевой задачи (5.1)–(5.2). Рассмотрим функцию

$$z = y_1(x) - y_2(x).$$

Так как

$$Lz = L(y_1(x)) - L(y_2(x)) \equiv f(x) - f(x) = 0, \quad U(z) \equiv 0,$$

следовательно, z удовлетворяет однородной краевой задаче.

Но задача (5.3) имеет лишь тривиальное решение, т. е.

$$z = y_1(x) - y_2(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow y_1(x) \equiv y_2(x).$$

В дальнейшем будем предполагать, что определитель $\Gamma \neq 0$.

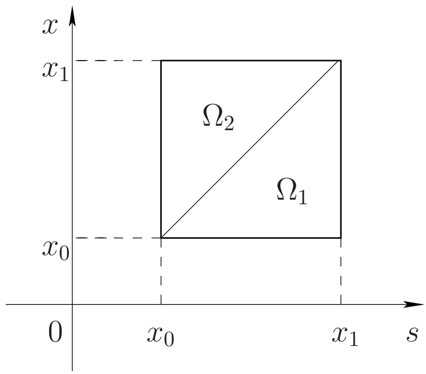


Рис. 5.1: Квадрат Ω

5.2 Функция Грина

Ниже будет показано, что решение краевой задачи (5.1)–(5.2) имеет вид

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds,$$

где $G(x,s)$ — *функция Грина*, определенная в некотором квадрате Ω, (рис. 5.1).

Определение 30 *Функция двух переменных $G(x,s)$, определенная на квадрате*

$$\Omega = \{(x,s): \quad x_0 \le x \le x_1, \quad x_0 \le s \le x_1\},$$

называется функцией Грина краевой задачи (5.1)–(5.2), если она удовлетворяет следующим условиям:
1^o. Функция $G(x,s)$ для любого фиксированного значения $s \in [x_0, x_1]$ по аргументу $x \in [x_0, x_1]$ удовлетворяет уравнению

$$LG = 0 \qquad \forall x \neq s.$$

2^o. *При каждом фиксированном* s *функция* $G(x,s)$ *удовлетворяет краевым условиям*

$$UG = 0.$$

3^o. *Рассмотрим треугольники*

$$\Omega_1 = \{x_0 \le x < s \le x_1\}, \quad \Omega_2 = \{x_0 \le s < x \le x_1\}.$$

При любом фиксированном s *в каждом треугольнике* Ω_1 *и* Ω_2 *функция* $G(x,s)$ *непрерывна вместе с ее производными*

$$G^{(k)}(x,s) = \frac{\partial^k G(x,s)}{\partial x^k}, \quad k = \overline{1,n}.$$

4^o. *Функция* $G(x,s)$ *на диагонали* $x = s$ *квадрата* Ω *непрерывна вместе со всеми своими частными производными по* x *до (n-2)-го порядка включительно, а производная (n-1)-го порядка претерпевает разрыв I рода со скачком, равным* $\frac{1}{a_0}$*:*

$$G^{(n-1)}(s+0,s) - G^{(n-1)}(s-0,s) = \frac{1}{a_0(s)}.$$

5.3 Решение краевой задачи

Утверждение 6 Если $G(x,s)$ — функция Грина краевой задачи (5.1)–(5.2), то решение этой задачи дается формулой

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds. \tag{5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Убедимся, что функция F, определяемая формулой (5.4), удовлетворяет краевым условиям (5.2) на основании свойств функции Грина. Действительно,

$$U_i(F) = U_i\left(\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} \int\limits_{x_0}^{x_1} G^{(j)}(x_0,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} \int\limits_{x_0}^{x_1} G^{(j)}(x_1,s)f(s)ds =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big[\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} G^{(j)}(x_0,s) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} G^{(j)}(x_1,s)\Big] f(s)ds =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} U_i(G(x,s))f(s)ds \equiv 0.$$

Осталось проверить тот факт, что функция F удовлетворяет и уравнению (5.1).

Вычислим производные функции $F(x)$ до n-го порядка включительно.

$$F' = \int\limits_{x_0}^{x_1} G'(x,s)f(s)ds,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x_1} G^{(n-2)}(x,s)f(s)ds,$$

$$F^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x_1} G^{(n-1)}(x,s)f(s)ds = \int\limits_{x_0}^{x} G^{(n-1)}(x,s)f(s)ds +$$

$$+ \int\limits_{x}^{x_1} G^{(n-1)}(x,s)f(s)ds = I_1(x) + I_2(x).$$

Последний интеграл разбили на два, так как функция $G^{(n-1)}$ претерпевает разрыв I рода в точке $x = s$. Для вычисления производной n-го порядка найдем производные интегралов $I_1(x)$ и $I_2(x)$.

$$I_1'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I_1(x+\Delta x) - I_1(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\int\limits_{x_0}^{x+\Delta x} \frac{G^{(n-1)}(x+\Delta x, s)}{\Delta x} f(s)ds - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{G^{(n-1)}(x, s)}{\Delta x} f(s)ds \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\int\limits_{x_0}^{x} \frac{G^{(n-1)}(x+\Delta x, s) - G^{(n-1)}(x, s)}{\Delta x} f(s)ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} G^{(n-1)}(x+\Delta x, s) f(s)ds \right].$$

Так как при вычислении I_1' мы имеем дело с областью Ω_2, в которой функция $G^{(n-1)}(x, s)$ является непрерывно дифференцируемой, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{G^{(n-1)}(x+\Delta x, s) - G^{(n-1)}(x, s)}{\Delta x} = G^{(n)}(x, s),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} G^{(n-1)}(x+\Delta x, s) f(s)ds =$$

$$= G^{(n-1)}(x+0, x) f(x).$$

Следовательно,

$$I_1' = \int\limits_{x_0}^{x} G^{(n)}(x, s) f(s)ds + G^{(n-1)}(x+0, x) f(x).$$

Аналогично получаем

$$I_2' = \int\limits_{x}^{x_1} G^{(n)}(x,s)f(s)ds + G^{(n-1)}(x-0,x)f(x).$$

Таким образом,

$$F^{(n)} = I_1' + I_2' = \int\limits_{x_0}^{x_1} G^{(n)}(x,s)f(s)ds +$$

$$+\left[G^{(n-1)}(x+0,x) - G^{(n)}(x-0,x)\right] f(x).$$

Подставим выражения для y и ее производных в уравнение $Ly = f(x)$. Получим

$$a_0(x)\int\limits_{x_0}^{x_1} G^{(n)}(x,s)f(s)ds +$$

$$+a_0(x)\left[G^{(n-1)}(x+0,x) - G^{(n)}(x-0,x)\right] f(x) +$$

$$+a_1(x)\int\limits_{x_0}^{x_1} G^{(n-1)}(x,s)f(s)ds +$$

$$+a_2(x)\int\limits_{x_0}^{x_1} G^{(n-2)}(x,s)f(s)ds +$$

$$+\cdots + a_n(x)\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds = f(x).$$

Выражение в квадратных скобках в правой части данного выражения, в силу свойства 4^o функции Грина, равно $1/a_0(x)$. Следовательно, последнее выражение можно переписать в виде

$$f(x) + \int\limits_{x_0}^{x_1}\Big[a_0(x)G^{(n)}(x,s) + a_1(x)G^{(n-1)}(x,s) +$$

$$+\cdots+a_n(x)G(x,s)\Big]f(s)ds=$$

$$=f(x)+\int\limits_{x_0}^{x_1}L\Big(G(x,s)\Big)f(s)ds\equiv f(x)+0\equiv f(x).$$

Данное тождество завершает доказательство.

5.4 Построение функции Грина

Согласно определению, в треугольниках Ω_1 и Ω_2 функция Грина $G(x,s)$ по аргументу x удовлетворяет уравнению $LG=0$. Следовательно, $G(x,s)$ есть линейная комбинация Ф.С.Р. уравнения (5.1) с коэффициентами, зависящими от s:

$$G(x,s)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}C_j(s)\phi_j(x), & x_0\le x\le s\le x_1,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\bar{C}_j(s)\phi_j(x), & x_0\le s\le x\le x_1.\end{cases}$$

Здесь $\phi_1(x),\ldots,,\phi_n(x)$ образуют Ф.С.Р. уравнения (5.1), функции $C_j(s)$, $\bar{C}_j(s)$ подлежат определению.

Перейдем от неизвестных C_j и $\bar{C}_j$ к A_j и B_j, где

$$C_j(s)=A_j(s)+B_j(s),\qquad \bar{C}_j(s)=A_j(s)-B_j(s).$$

Так как матрица перехода

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

невырожденная, то, найдя A_j и B_j, мы, тем самым, однозначно определим C_j и $\bar{C}_j$.

Итак, будем искать функцию Грина в виде

$$G(x,s)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(A_j(s)+B_j(s)\Big)\phi_j(x), & x_0\le x\le s\le x_1,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\Big(A_j(s)-B_j(s)\Big)\phi_j(x), & x_0\le s\le x\le x_1.\end{cases}\tag{5.5}$$

Отметим, что (5.5) представляет собой систему с $2n$ неизвестными. Для нахождения этих неизвестных воспользуемся свойствами функции Грина.

Свойство 1^o уже использовалось в представлении функции Грина в виде линейной комбинации Ф.С.Р.

Согласно свойству 4^o при $x = s$ функция $G(x, s)$ непрерывна, т. е.

$$G(s+0, s) - G(s-0, s) = 0.$$

С учетом (5.5) отсюда получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(A_j(s) - B_j(s)\Big)\phi_j(s) - \sum_{j=1}^{n} \Big(A_j(s) + B_j(s)\Big)\phi_j(s) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} B_j(s)\phi_j(s) = 0. \tag{5.6}$$

Далее, так как

$$G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = 0,$$

то

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(A_j(s) - B_j(s)\Big)\phi'_j(s) - \sum_{j=1}^{n} \Big(A_j(s) + B_j(s)\Big)\phi'_j(s) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} B_j(s)\phi'_j(s) = 0, \tag{5.7}$$

и т. д.

Из условия

$$G_x^{(n-2)}(s+0, s) - G_x^{(n-2)}(s-0, s) = 0$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{n} B_j(s)\phi_j^{(n-2)}(s) = 0. \tag{5.8}$$

Производная $(n-1)$-го порядка претерпевает разрыв:

$$G_x^{(n-1)}(s+0,s) - G_x^{(n-1)}(s-0,s) = \frac{1}{a_0(s)},$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} B_j(s)\phi_j^{(n-1)}(s) = -\frac{1}{2a_0(s)}. \tag{5.9}$$

Итак, для n неизвестных функций $B_i(s)$ мы получили линейную неоднородную алгебраическую систему n-го порядка (5.6)–(5.9), определителем которой является вронскиан Ф.С.Р. Так как $W(x) \neq 0$, то из полученной системы однозначно определяются функции $B_j(s)$, $(j = \overline{1,n})$.

Пусть все $B_j(s)$ известны. Введем обозначение

$$D(x,s) = \pm \sum_{j=1}^{n} B_j(s)\phi_j(x),$$

где знак «+» соответствует $x \in \Omega_1$, а знак «−» — $x \in \Omega_2$. Тогда

$$G(x,s) = \sum_{j=1}^{n} A_j(s)\phi_j(x) + D(x,s), \tag{5.10}$$

где $D(x,s)$ — известная функция. Воспользуемся теперь свойством 2^o. Подставляя (5.10) в краевые условия (5.2), получим

$$U_i(G) = U_i\left(\sum_{j=1}^{n} A_j(s)\phi_j(x) + D(x,s)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_j(s) U_i\left(\phi_j(x)\right) + U_i\Big(D(x,s)\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_j(s)\gamma_{ij} + U_i\Big(D(x,s)\Big) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(s)\gamma_{ij} = -U_i\Big(D(x,s)\Big), \quad i = \overline{1,n},$$

где $U_i\Big(D(x,s)\Big)$ — известные числа. Итак, для n неизвестных функций $A_j(s)$ мы получили линейную неоднородную алгебраическую систему n-го порядка, определителем которой является $\Gamma = \det\{\gamma_{ij}\} \neq 0$ по предположению. Следовательно, эта система однозначно определяет функции $A_j(s)$, $(j = \overline{1,n})$.

Таким образом, функция Грина построена.

5.5 Алгоритм построения функции Грина и решения краевой задачи

1. Найти Ф.С.Р. уравнения (5.1).
2. Вычислить определитель Г. Если $\Gamma \neq 0$, то
3. Записать систему для нахождения функций $B_j(s)$ $(j = \overline{1,n})$ и решить ее.
4. Записать систему для нахождения функций $A_j(s)$ $(j = \overline{1,n})$ и решить ее.
5. Записать функцию Грина по формуле (5.5).
6. Вычислить решение краевой задачи (5.1)–(5.2) с помощью формулы (5.4).

Глава 6

Системы дифференциальных уравнений

6.1 Основные понятия и определения

Определение 31 *Нормальной системой n-го порядка называется система вида*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad\qquad \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{6.1}$$

где x_1, $\ldots$,x_n — неизвестные функции (фазовые переменные), t — независимая переменная, функции f_i определены и непрерывны в некоторой области пространства R^{n+1}.

Определение 32 *Решением системы (6.1) называется набор определенных и непрерывно дифференцируемых на промежутке*

I функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, который при подстановке в систему (6.1) обращает ее в n тождеств.

Определение 33 *Пространство фазовых переменных $x_1, \ \ldots \ , x_n$ системы (6.1) называется фазовым пространством. График решения системы (6.1) в фазовом пространстве называется фазовой траекторией (или траекторией).*

Определение 34 *Пространство переменных $t, x_1, \ \ldots \ , x_n$ системы (6.1) называется расширенным фазовым пространством, а график решения системы (6.1) в нем называется интегральной кривой.*

Система (6.1) может быть представлена в векторной форме записи

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{6.2}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$.

Решением (6.2) является n-мерная функция $x = x(t)$, которая на интервале I удовлетворяет векторному уравнению (6.2).

Отметим, что систему дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, можно привести к нормальной системе.

Действительно, из системы

$$y_1^{(n_1)} = F_1\left(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_m, \dot{y}_m, \ldots, y_m^{(n_m-1)}\right),$$

$$y_2^{(n_2)} = F_2\left(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_m, \dot{y}_m, \ldots, y_m^{(n_m-1)}\right),$$

$$\cdots$$

$$y_m^{(n_m)} = F_m\left(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_m, \dot{y}_m, \ldots, y_m^{(n_m-1)}\right)$$

заменой

$$y_1 = x_1,\ \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = x_2,\ \ldots,\ y_1^{(n_1-1)} = x_{n_1},\ y_1^{(n_1)} = \dot{x}_{n_1},$$

$$y_2 = x_{n_1+1},\ \dot{y}_2 = \dot{x}_{n_1+1} = x_{n_1+2},\ \ldots,$$
$$y_2^{(n_2-1)} = x_{n_1+n_2},\ y_2^{(n_2)} = \dot{x}_{n_1+n_2}$$

$$\ldots$$

$$y_m = x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1},\ \dot{y}_m = x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+2},\ \ldots,$$
$$y_m^{(n_m-1)} = x_{n_1+\ldots+n_m},\ y_m^{(n_2)} = \dot{x}_{n_1+\ldots+n_m} \qquad (6.3)$$

получаем нормальную систему, состоящую из $(n-m)$ уравнений (6.3) и следующих m уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{n_1} = F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\ldots\\
&\dot{x}_{n_1+\ldots+n_m} = F_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

где

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

Рассмотрим пример приведения систем дифференциальных уравнений к нормальной форме.

Пример 22 Уравнение

$$y'' = f(x, y, y')$$

может быть записано в виде нормальной системы второго порядка

$$\begin{cases} y' = z,\\ z' = f(x, y, z), \end{cases}$$

где x — независимая переменная.

6.2 Задача Коши

Для системы (6.1) зададим начальное условие

$$\begin{array}{l} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0. \end{array} \tag{6.4}$$

А для системы (6.2):

$$x(t_0) = x^0, \tag{6.5}$$

где $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)^T$.

Задачей Коши (6.2), (6.5) называется задача нахождения такого интервала I ($t_0 \in I$) и такой векторной функции $x = x(t)$, где $t \in I$, которая являлась бы решением (6.2) на интервале I и удовлетворяла бы начальному условию (6.5).

Задача 13 *Дать пример системы, которую нельзя привести к уравнению n-го порядка.*

6.3 Теорема существования

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{6.6}$$

$x \in R^n$, $f(t, x) \in R^n$.

Рассмотрим цилиндр P с центром в (t_0, x^0):

$$P = \{(t, x) : \ |t - t_0| \le \alpha, \|x - x^0\| \le \beta\}.$$

Пусть векторная функция $f(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в цилиндре P и удовлетворяет условию Липшица по переменной x:

$$\|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \le L\|x - \bar{x}\|.$$

Из непрерывности функции $f(t,x)$ на замкнутом ограниченном множестве P следует:

$$\exists M > 0 \;\; \|f(t,x)\| \le M \;\; \forall (t,x) \in P.$$

Теорема 20 В данных условиях задача Коши (6.6) на промежутке $\|t - t_0\| \le h$, где $h < \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{L}\}$, имеет единственное решение.

Доказательство

Покажем, что задача Коши (6.6) эквивалентна задаче о нахождении непрерывного решения интегрального уравнения

$$x(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{6.7}$$

Пусть $x(t)$ — решение начальной задачи (6.6), т.е.

$$\dot{x}(t) \equiv f(t, x(t)). \tag{6.8}$$

Интегрируя тождество (6.8), с учетом $x(t_0) = x^0$, получаем:

$$x(t) \equiv x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \tag{6.9}$$

что означает, что $x(t)$ является решением (6.7).

Пусть теперь $x(t)$ — непрерывное решение уравнения (6.7). Тогда имеет место векторное тождество (6.9). Полагая в нем $t = t_0$, получим начальное условие (6.5).

В силу непрерывности $f(t,x)$, правая часть (6.9) — непрерывно дифференцируемая функция. Значит, $x(t)$ непрерывно дифференцируема. Продифференцировав (6.9), получаем тождество (6.8), из которого следует, что $x(t)$ — решение задачи Коши (6.6). Полагая в (6.9) $t = t_0$, получим начальное условие задачи Коши (6.6). Таким образом, эквивалентность доказана.

Рассмотрим замкнутый шар F радиуса β с центром в точке x^0 в пространстве ${}^nC_{[t_0-h,t_0+h]}$ непрерывных n-мерных векторных функций, заданных на интервале $[t_0-h, t_0+h]$. Отметим, что F является полным метрическим пространством в метрике равномерной сходимости

$$\rho(x,y) = \max_{|t-t_0|\le h} \|x(t) - y(t)\|.$$

Определим на элементах F интегральный оператор:

$$Ax = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds.$$

Для всех $s \in [t_0, t]$ функция $f(s, x(s))$ — непрерывная, следовательно $A \in {}^nC_{[t_0-h,t_0+h]}$. Докажем, что $A : F \to F$, и в метрике равномерной сходимости этот оператор является сжимающим. Так как оценка

$$\|Ax - x^0\| = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \right\| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))\|\, ds \right| \le M|t-t_0| \le Mh < \beta$$

имеет место при всех t, то выполняется и для максимума, т. е.

$$\max_{|t-t_0|\le h} \left\|Ax - x^0\right\| \le Mh \le \beta \;\Rightarrow\; \rho(Ax, x^0) \le \beta.$$

С учетом непрерывности Ax это означает, что $A : F \to F$.

Далее, оценим норму

$$\|Ax - Ay\| = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds - \int\limits_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \right\| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \, ds \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{t_0}^{t} L\|x(s) - y(s)\| ds \right| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} L\rho(x, y) ds \right| \le L\rho(x, y)h.$$

Так как $Lh < 1$, то последняя оценка означает, что оператор A — сжимающий. Действительно, переходя в левой части оценки к максимуму по $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, имеем

$$\rho(Ax, Ay) \le Lh \, \rho(x, y).$$

Таким образом, в силу принципа сжатия, существует единственная неподвижная точка, принадлежащая F, которая является единственным решением (6.7), а значит, и единственным решением (6.6), что и требовалось доказать.

6.4 Линейные системы

Нормальной линейной дифференциальной системой n-го порядка называется система вида [1, 5–7, 9–13, 15]

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{6.10}$$

где x — векторная функция размерности n, $A(t)$ — матричная функция $n \times n$, $f(t)$ — n-мерная векторная функция, t — независимая переменная.

Будем предполагать, что элементы матрицы $A(t)$ и компоненты векторной функции $f(t)$ определены и непрерывны на некотором промежутке $[\alpha, \beta]$. Если $f(t)$ — нулевая векторная функция, то система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{6.11}$$

называется однородной.

Рассмотрим задачу Коши для линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases}$$

где $t_0 \in I$. Для доказательства существования и единственности решения этой задачи достаточно проверить, что выполняются условия теоремы 20 о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальных систем. Проверим выполнение условия Липшица для правой части системы (6.10) на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$\|A(t)x + f(t) - A(t)y - f(t)\| = \|A(t)(x-y)\| \leq$$
$$\leq \|A(t)\|\|x - y\| \leq L\|x - y\|.$$

Здесь

$$L = \max_{t \in I} \|A(t)\|,$$

так как $A(t)$ — непрерывна, а значит ограничена на отрезке I. Отметим, что решение (6.10) продолжимо на весь промежуток I, что завершает доказательство.

Вернемся теперь к задаче Коши для линейного уравнения n-го порядка

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = d(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{0,1}, \\ \ldots \\ y_n^{n-1}(x_0) = y_{0,n-1}, \end{cases}$$

где функции $a_1(x), \ \ldots \ , a_n(x)$, $d(x)$ определены и непрерывны для $x \in [a, b]$.

Для доказательства существования единственного решения приведем уравнение к нормальной системе:

$$\begin{aligned} &x = t, \\ &y = x_1, \\ &\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \\ &\ldots \\ &\dot{x}_{n-1} = x_n, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_n = -a_1(t)x_n - a_2(t)x_{n-1} - \dots$$

$$-a_n x_1 + d(t).$$

Таким образом, получили систему вида (6.10), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \Big(0, 0, \dots, d(t)\Big)^T$$

и начальное условие $x(t_0) = x^0$, где

$$x^0 = \Big(y_0, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1}\Big)^T.$$

Тем самым доказательство завершено.

6.5 Линейные однородные системы

Теорема 21 Множество решений линейной однородной системы представляет собой линейное n-мерное пространство.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $y(t)$, $z(t)$ — решения системы (6.11), а c_1 и c_2 — произвольные числа. Покажем, что вектор $c_1 y(t) + c_2 z(t)$ также является решением (6.11).

Действительно, в силу линейности операции дифференцирования и операции умножения матрицы на вектор

$$\frac{d}{dt}\left[c_1 y(t) + c_2 z(t)\right] \equiv c_1 \dot{y}(t) + c_2 \dot{z}(t) \equiv$$

$$\equiv c_1 A(t) y(t) + c_2 A(t) z(t) \equiv A(t)\left[c_1 y(t) + c_2 z(t)\right].$$

Таким образом, линейность доказана.

Теперь докажем n-мерность.

Построим n линейно независимых решений. Для этого рассмотрим n задач Коши вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ x(t_0) = e_i, \end{cases} \tag{6.12}$$

где e_i — вектор, размерности n, у которого i-я компонента — единица, а все остальные равны нулю.

В силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши существуют ровно n векторных функций $x = \varphi_1(t), \ldots, x = \varphi_n(t)$ — решений соответствующих начальных задач. Предположим, что они линейно зависимы, т. е. существует нетривиальный набор констант $c_1, \ldots, c_n$, такой что:

$$c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0.$$

Полагая в этом тождестве $t = t_0$, из (6.12) имеем $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, что противоречит предположению. Значит, функции φ_1, …, φ_n — линейно независимые.

Пусть $x = \psi(t)$ — произвольное решение (6.11). Разложим $\psi(t_0)$ по векторам e_i:

$$\psi(t_0) = c_1^* e_1 + \cdots + c_n^* e_n.$$

Рассмотрим функцию $\chi(t) = c_1^*\varphi_1(t) + \cdots + c_n^*\varphi_n(t)$. Ясно, что функция χ является решением (6.11) как линейная комбинация ее решений, и в начальной точке она совпадает с $x = \psi(t)$. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши,

$$\chi(t) \equiv \psi(t).$$

Таким образом, произвольное решение $x = \psi(t)$ есть линейная комбинация функций φ_1, …, φ_n, т. е. теорема доказана.

6.5.1 Фундаментальные матрицы

Определение 35 *Любые n линейно независимых решений системы (6.11) образуют ее фундаментальную систему решений (Ф.С.Р.)*

Определение 36 *Фундаментальная матрица — это матрица, столбцы которой $\varphi_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ образуют Ф.С.Р.:*

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Лемма. Фундаментальная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению:

$$\dot{X} = A(t)X.$$

Доказательство

В матричном равенстве

$$\dot{\Phi} = A\Phi$$

сравним столбцы в левой и правой частях. Имеем

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_1 = A\varphi_1, \\ &\cdots \\ &\dot{\varphi}_n = A\varphi_n, \end{aligned}$$

что справедливо на всем промежутке, что и доказывает лемму.

Определение 37 *Определителем Вронского (вронскианом) для системы n-мерных непрерывно дифференцируемых векторных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ называется определитель вида*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Задача 14 *Показать, что для уравнения n-го порядка определение вронскиана получается как частный случай вронскиана для системы.*

6.5.2 Формула Остроградского — Лиувилля

Продифференцируем определитель фундаментальной матрицы (вронскиан) $W(t) = |\Phi(t)|$. Согласно правилу дифференцирования определителя, имеем

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + \cdots + W_n(t),$$

где $W_i(t)$ получено из $W(t)$ дифференцированием элементов i-й строки. Таким образом,

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_{11} & \cdots & \dot{\varphi}_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\varphi_{11} + \cdots + a_{1n}\varphi_{n1} & \cdots & a_{11}\varphi_{1n} + \cdots + a_{1n}\varphi_{nn} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}W(t).$$

Аналогично,

$$W_2(t) = a_{22}W(t), \quad \ldots, \quad W_n(t) = a_{nn}W(t).$$

Отсюда имеем

$$\dot{W}(t) = W(t)TrA(t)$$

или

$$W(t) = W(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t} TrA(s)ds}.$$

Полученное выражение называют формулой Остроградского — Лиувилля.

Задача 15 *Показать, что формула Остроградского — Лиувилля для уравнений n-го порядка есть следствие формулы Остроградского — Лиувилля для систем.*

6.5.3 Критерий фундаментальности матриц

Теорема 22 Для того чтобы матрица $\Phi(t)$, удовлетворяющая на $[\alpha, \beta]$ матричному дифференциальному уравнению:

$$\dot{X} = AX,$$

была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель не обращался в ноль ни в одной точке этого промежутка.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. Необходимость

Пусть матрица $\Phi(t)$ — фундаментальная. Покажем, что $\det\Phi(t) \neq 0$ на всем промежутке $[\alpha, \beta]$.

Предположим противное, т. е.

$$\exists t_0 : \quad \det\Phi(t_0) = 0.$$

Это означает, что столбцы $\phi_i(t_0)$, постоянные векторы, линейно зависимы, т. е. существует такой нетривиальный набор констант $c_1, \ldots, c_n$, что

$$c_1\varphi_1(t_0) + \cdots + c_n\varphi_n(t_0) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\xi(t) = c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t).$$

Как линейная комбинация Ф.С.Р. $\xi(t)$ является решением однородной системы, и $\xi(t_0) = 0$. Но нулевое решение однородной системы имеет то же начальное условие, тогда, в силу единственности решения задачи Коши, $\xi(t) \equiv 0$, т. е. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — линейно зависимы. Получили противоречие.

Следовательно,

$$\det\Phi(t) \neq 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

2. Достаточность

Пусть

$$\det \Phi(t) \neq 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Это означает, что столбцы матрицы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — линейно независимы. Тогда, по определению, матрица $\Phi(t)$ является фундаментальной.

6.5.4 Свойства фундаментальных матриц

I. Если фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ умножить на число $c \neq 0$, то матрица $c\Phi(t)$ — фундаментальная.

Доказательство этого свойства следует из критерия фундаментальности матриц.

II. Пусть C — постоянная невырожденная матрица, $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица. Тогда $\Phi(t)C$ — фундаментальная матрица.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Так как

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi(t)C\right) \equiv \frac{d\Phi(t)}{dt}C \equiv A\Phi(t)C$$

и $|\Phi(t)C| = |\Phi(t)| \cdot |C| \neq 0$, то, по критерию фундаментальности матриц, матрица $\Phi(t)C$ является фундаментальной.

III. Если $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ — фундаментальные матрицы, то существует такая постоянная невырожденная матрица C, что

$$\Psi(t) = \Phi(t)C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим матрицу

$$D(t) = \Phi^{-1}(t)\Psi(t).$$

Отметим, что $\det D(t) \neq 0$, как определитель произведения двух невырожденных матриц.

Для фундаментальных матриц $\Psi(t)$ и $\Phi(t)$ имеем

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \dot{\Psi} = A\Psi, \quad \Phi D = \Psi.$$

Тогда

$$\dot{\Phi} D + \Phi \dot{D} = \dot{\Psi}$$

или

$$A\Phi D + \Phi \dot{D} = A\Psi = A\Phi D.$$

Таким образом,

$$\Phi \dot{D} = 0$$

Отсюда

$$\dot{D} = 0,$$

что означает, что D — постоянная матрица.

6.6 Линейные неоднородные системы

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t).$$

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы. Тогда общее решение однородной системы можно записать в виде $\Phi(t)C$, где $C = (c_1, \ldots, c_n)^T$ — произвольный постоянный вектор.

Будем искать решение неоднородной системы в виде

$$x(t) = \Phi(t)C(t),$$

где $C(t)$ — неизвестная векторная функция, т. е. при помощи метода вариации произвольных постоянных. Подставляя функцию $x(t)$ в систему, получим

$$\dot{\Phi}(t)C(t) + \Phi(t)\dot{C}(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + f(t)$$

или

$$A(t)\Phi(t)C(t) + \Phi(t)\dot{C}(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + f(t),$$

откуда $\Phi(t)\dot{C}(t) = f(t)$, т. е. $\dot{C}(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$. Следовательно,

$$C(t) = \bar{C} + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Таким образом, общее решение неоднородной системы

$$x(t) = \Phi(t)\bar{C} + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

представляет собой сумму общего решения (x_o) соответствующей однородной системы и частного решения ($\tilde{x}$) неоднородной системы.

Если задано начальное условие

$$x(t_0) = x_0,$$

то

$$\bar{C} = \Phi^{-1}(t_0)x_0,$$

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Используя матрицу Коши $K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, получим

$$x(t) = K(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s)f(s)ds.$$

6.7 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, \tag{6.13}$$

где x — n-мерный вектор, A — постоянная матрица размерностью $n \times n$.

6.7.1 Матричная экспонента

Определение 38 *Матричной экспонентой e^A постоянной матрицы A называется сумма ряда*

$$I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots,$$

где I — единичная матрица.

Отметим, что этот ряд сходится для любой матрицы A.

Имеет место

Теорема 23 Матрица e^{At} является фундаментальной для системы (6.13).

Д о к а з а т е л ь с т в о

Проверим, что матрица e^{At} удовлетворяет соответствующему матричному уравнению $\dot{X} = AX$. Так как

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots,$$

то

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{A}{1!} + \frac{A^2t^2}{1!} + \cdots + \frac{A^nt^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots =$$

$$= A\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right) = Ae^{At}.$$

Кроме того, e^{At} — невырожденная матрица. Действительно, $\det e^{At_0} = \det I = 1$, следовательно, $\det e^{At} \neq 0$ при всех значениях t. Таким образом, в силу критерия фундаментальности матриц, e^{At} — фундаментальная матрица системы (6.13).

Отметим основные свойства матричной экспоненты. Пусть A, B, C — некоторые матрицы, тогда

1. $\left(e^{A}\right)^{-1} = e^{-A}$.
2. $e^{A+B} = e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A} \Longleftrightarrow AB = BA$.
3. $B = C^{-1}AC \Longrightarrow e^{B} = C^{-1}e^{A}C$.

Пусть Λ — жорданова нормальная форма матрицы A, т. е. существует постоянная матрица T, такая, что

$$\Lambda = T^{-1}AT.$$

Здесь матрица Λ — блочно диагональная:

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_k),$$

где $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ — жордановы клетки

$$\Lambda_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s),$$

$$\Lambda_i = \lambda_{s+i} I_{m_i} + Z_{m_i}, \qquad s + \sum_{i=s+1}^{k} m_i = n.$$

Здесь I_{m_i} — единичная $(m_i \times m_i)$-матрица, а $(m_i \times m_i)$-матрица Z_{m_i} имеет вид

$$Z_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$Z_{m_i}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots$$

$$Z_{m_i}^{m_i-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$Z_{m_i}^{m_i}$ — нулевая матрица.

Построить матричную экспоненту жордановой матрицы проще, поэтому изучим структуру матрицы $e^{\Lambda t}$, а затем воспользуемся свойствами матричной экспоненты. Для этого найдем сначала матрицу T.

Итак, имеем матричное уравнение

$$AT = T\Lambda. \tag{6.14}$$

Обозначим через $T_1, \dots, T_n$ — столбцы матрицы T. Тогда из (6.14) следует

$$AT_1 = \lambda_1 T_1,$$

т. е. λ_1 является *собственным (или характеристическим) числом*, а T_1 — собственным вектором матрицы A, соответствующим λ_1. Далее,

$$AT_2 = \lambda_2 T_2,$$

т. е. λ_2 — собственное число матрицы A, а T_2 — соответствующий собственный вектор, и т. д.

$$AT_s = \lambda_s T_s,$$

$$AT_{s+1} = \lambda_{s+1} T_{s+1},$$

$$AT_{s+2} = \lambda_{s+1} T_{s+2} + T_{s+1},$$

что означает, что T_{s+2} — присоединенный вектор к собственному вектору T_{s+1}. Аналогично,

$$AT_{s+3} = \lambda_{s+1} T_{s+3} + T_{s+2},$$

$$\dots$$

$$AT_{s+m_1} = \lambda_{s+1} T_{s+m_1} + T_{s+m_1-1},$$

$$AT_{s+m_1+1} = \lambda_{s+2} T_{s+m_1+1},$$

$$\dots$$

$$AT_{s+m_1+2} = \lambda_{s+2} T_{s+m_1+2} + T_{s+m_1+1},$$

$$\dots .$$

Таким образом, столбцами матрицы T являются собственные и присоединенные векторы матрицы A.

Так как $A = T\Lambda T^{-1}$, то $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$, где

$$e^{\Lambda t} = \mathrm{diag}(e^{\Lambda_0 t}, e^{\Lambda_1 t}, \dots, e^{\Lambda_k t}).$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$e^{\Lambda_0 t} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_s t}).$$

$$e^{\Lambda_1 t} = e^{(\lambda_{s+1} I_{m_1} + Z_{m_1})t} = e^{\lambda_{s+1} I_{m_1} t} e^{Z_{m_1} t},$$

где

$$e^{Z_{m_1} t} = I + \frac{Z_{m_1} t}{1!} + \frac{Z_{m_1}^2 t}{2!} + \dots + \frac{Z_{m_1}^{m_1-1} t^{m_1-1}}{(m_1-1)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m_1-3}}{(m_1-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, с учетом тождества $e^{\lambda_{s+1} I_{m_1} t} = e^{\lambda_{s+1} t} I_{m_1}$, получаем

$$e^{\Lambda_1 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{s+1} t} & te^{\lambda_{s+1} t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_{s+1} t} & \dots & \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!} e^{\lambda_{s+1} t} \\ 0 & e^{\lambda_{s+1} t} & te^{\lambda_{s+1} t} & \dots & \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!} e^{\lambda_{s+1} t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_{s+1} t} & \dots & \frac{t^{m_1-3}}{(m_1-3)!} e^{\lambda_{s+1} t} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{s+1} t} \end{pmatrix}.$$

Аналогичную структуру имеют матричные экспоненты $e^{\Lambda_2 t}$, …, $e^{\Lambda_k t}$.

6.7.2 Фундаментальная система решений

Как уже отмечалось ранее, столбцы фундаментальной матрицы e^{At} системы (6.13) образуют ее Ф.С.Р. В предыдущем параграфе были построены матрицы $e^{\Lambda t}$ и T, такие, что $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$.

Для нахождения Ф.С.Р. (6.13) обозначим в матричном равенстве

$$e^{At}T = Te^{\Lambda t} \tag{6.15}$$

столбцы матрицы $e^{At}T$ через векторные функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$. Тогда из (6.15) и вида матриц T и $e^{\Lambda t}$ следует, что

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}T_1,\\
&\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}T_2,\\
&\ldots\\
&\varphi_s(t) = e^{\lambda_s t}T_s,\\
&\varphi_{s+1}(t) = e^{\lambda_{s+1} t}T_{s+1},\\
&\varphi_{s+2}(t) = e^{\lambda_{s+1} t}[T_{s+2} + tT_{s+1}],\\
&\varphi_{s+3}(t) = e^{\lambda_{s+1} t}[T_{s+3} + tT_{s+2} + \tfrac{t^2}{2}T_{s+1}],\\
&\ldots\\
&\varphi_{s+m_1}(t) = e^{\lambda_{s+1} t}[T_{s+m_1} + tT_{s+m_1-1} + \ldots + \tfrac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}T_{s+1}],\\
&\varphi_{s+m_1+1}(t) = e^{\lambda_{s+2} t}T_{s+m_1+1},\\
&\ldots\ .
\end{aligned}$$

В заключение осталось отметить, что в силу второго свойства фундаментальных матриц, функции $\varphi_1(t)$, … , $\varphi_n(t)$ образуют Ф.С.Р.

6.8 Линейные однородные системы с периодическими коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad (6.16)$$

где x — вектор размерности n, A — матрица с периодическими коэффициентами размерности $n \times n$, т. е. $\exists \omega \neq 0 : A(t+\omega) \equiv A(t)$.

6.8.1 Теорема Флоке

Имеет место следующая теорема (Г. Флоке) [7].

Теорема 24 Фундаментальная матрица линейной системы с периодическими коэффициентами представима в виде произведения периодической матрицы на экспоненту от постоянной матрицы, т. е.

$$\Phi(t) = P(t)e^{Rt},$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица (6.16), $P(t)$ — матрица с периодическими коэффициентами, R — постоянная матрица.

Доказательство

Рассмотрим матрицу $\Phi(t)$. Из критерия фундаментальности матриц следует, что

$$\det \Phi(t+\omega) \neq 0 \ \forall t$$

и

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \equiv A(t)\Phi(t).$$

Заменяя t на $(t+\omega)$, из последнего тождества получим

$$\frac{d\Phi(t+\omega)}{d(t+\omega)} \equiv A(t+\omega)\Phi(t+\omega).$$

С учетом того, что $A(t+\omega) \equiv A(t)$, $d(t+\omega) \equiv dt$, имеем

$$\frac{d\Phi(t+\omega)}{dt} \equiv A(t)\Phi(t+\omega).$$

Последнее означает, что $\Phi(t+\omega)$ удовлетворяет матричному уравнению $\dot{X} = AX$. Следовательно, в силу критерия фундаментальности матриц, матрица $\Phi(t+\omega)$ также является фундаментальной для системы (6.16). Тогда, по третьему свойству фундаментальных матриц, существует такая постоянная невырожденная матрица C, что

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)C.$$

В силу невырожденности матрицы C существует такая матрица R, что $C = e^{\omega R}$ или $R = \frac{1}{\omega}\ln C$.

Рассмотрим теперь $P(t) = \Phi(t)e^{-Rt}$. Покажем, что эта матрица периодическая:

$$P(t+\omega) = \Phi(t+\omega)e^{-R(t+\omega)} = \Phi(t)Ce^{-Rt-R\omega} =$$

$$= \Phi(t)e^{\omega R}e^{-Rt}e^{-R\omega} = \Phi(t)e^{\omega R}e^{-\omega R}e^{-Rt} =$$

$$= \Phi(t)e^{-Rt} = P(t).$$

Из последнего равенства следует, что

$$\Phi(t) = P(t)e^{Rt}.$$

Определение 39 *Собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ матрицы C называются мультипликаторами системы (6.16).*

Определение 40 *Собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы R называются характеристическими показателями системы (6.16).*

Задача 16 *Доказать корректность определений (т. е., что мультипликаторы и характеристические показатели не зависят от выбора фундаментальной матрицы).*

Очевидна связь между характеристическими показателями и мультипликаторами системы, а именно

$$\mu_k = e^{\lambda_k \omega},$$
$$\lambda_k = \frac{1}{\omega} \ln \mu_k.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$Re\lambda_k = 0 \Longleftrightarrow |\mu_k| = 1,$$

$$Re\lambda_k < 0 \Longleftrightarrow |\mu_k| < 1,$$

$$Re\lambda_k > 0 \Longleftrightarrow |\mu_k| > 1.$$

6.8.2 Фундаментальная матрица

Рассмотрим систему (6.16). Пусть Λ — жорданова нормальная форма матрицы R, т. е. $\Lambda = T^{-1}RT$ или $R = T\Lambda T^{-1}$, где T — невырожденная постоянная матрица. Тогда, по свойству матричной экспоненты,

$$\Phi(t) = P(t)e^{Rt} = P(t)Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

или

$$\Phi(t)T = P(t)Te^{\Lambda t}.$$

По третьему свойству фундаментальных матриц, матрица $\Psi(t) = \Phi(t)T$ также является фундаментальной.

Введем следующие обозначения: через $\psi_1, \dots, \psi_n$ обозначим столбцы матрицы Ψ, а через $q_1, \dots, q_n$ обозначим столбцы периодической матрицы $Q(t) = P(t)T$.

Сравнивая столбцы в матричном равенстве

$$\Psi(t) = Q(t)e^{\Lambda t}$$

слева и справа, получим

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t} q_1(t),\\
&\psi_2(t) = e^{\lambda_2 t} q_2(t),\\
&\dots\\
&\psi_{s+1}(t) = e^{\lambda_{s+1} t} q_{s+1}(t),\\
&\psi_{s+2}(t) = e^{\lambda_{s+1} t}[q_{s+2}(t) + t q_{s+1}(t)],\\
&\psi_{s+3}(t) = e^{\lambda_{s+1} t}[q_{s+3}(t) + t q_{s+2}(t) + \tfrac{t^2}{2} q_{s+1}(t)],\\
&\dots\\
&\psi_{s+m_1}(t) = e^{\lambda_{s+1} t}[q_{s+m_1}(t) + t q_{s+m_1-1}(t) +\\
&\qquad\qquad + \dots + \tfrac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!} q_{s+1}(t)],\\
&\psi_{s+m_1+1} = e^{\lambda_{s+2} t} q_{s+m_1+1},\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Таким образом, структура фундаментальной матрицы систем с периодическими коэффициентами аналогична структуре фундаментальной матрицы систем с постоянными коэффициентами.

Глава 7

Устойчивость движения

7.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{7.1}$$

где t — независимая переменная, x — вектор размерности n, f — векторная функция, определенная и непрерывная по совокупности переменных при $t \in [t_0, \infty]$, $x \in D \subset R^n$.

Определение 41 *Решение $x = \varphi(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x^0$ и определенное при $\forall t \geq t_0$, называется устойчивым (устойчивым по Ляпунову), если для $\forall t_0$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что для любого решения $x = x(t)$ системы (7.1), удовлетворяющего условию $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$, выполняется:*
1) $x(t)$ определено при всех $t \geq t_0$,
2) $\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$.
Если выбор δ не зависит от t_0, а определяется лишь ε, то устойчивость называется равномерной.

Определение 42 *Решение $x = \psi(t)$ системы (7.1) называется неустойчивым, если $\exists t_0$ и $\exists \varepsilon > 0$ такие, что $\forall \delta$ существует такое решение $x = x(t)$ системы (7.1), что*

$$\|x(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta,$$

и существует такое $t^* > t_0$, что $x(t^*)$ либо не определено, либо $\|x(t^*) - \psi(t^*)\| \geq \varepsilon$.

Определение 43 *Решение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым (по Ляпунову), если оно является устойчивым, и δ в определении устойчивости может быть выбрано таким, что*

$$\|x(t) - \varphi(t)\| \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty.$$

Пример 23 Исследуем на устойчивость решение $x = \varphi(t)$ уравнения

$$\dot{x} = ax,$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = 1$.

Общее решение этого уравнения имеет вид $x(t) = x_0 e^{at}$, где $x_0 = x(0)$. Тогда $\varphi(t) = e^{at}$.

Запишем определение устойчивости решения $x = \varphi(t)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall x(t) = x_0 e^{at} : \|x_0 - 1\| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t) - x(t)\| = |x_0 e^{at} - e^{at}| = |x_0 - 1| e^{at} < \delta e^{at}.$$

Отсюда следует, что
при $a = 0$ решение $\varphi(t)$ устойчиво и $\delta = \varepsilon$;
при $a > 0$ — неустойчиво,
при $a < 0$ — асимптотически устойчиво ($\delta = \varepsilon$).

Исследование на устойчивость решения $x = \varphi(t)$ системы (7.1) можно свести к исследованию на устойчивость тривиального, то есть тождественно равного нулю решения некоторой другой системы. Действительно, с помощью замены $x = \varphi(t) + y$ из системы (7.1) получаем

$$\dot{y} = F(t, y), \tag{7.2}$$

где $F(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$. Очевидно, что решению $x = \varphi(t)$ соответствует решение $y \equiv 0$ системы (7.2).

Приведем определения устойчивости для тривиального решения.

Определение 44 *Тривиальное решение системы (7.2) называется устойчивым (устойчивым по Ляпунову), если* $\forall t_0$ *и* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ *такое, что для любого решения* $y(t)$ *системы (7.2), удовлетворяющего условию* $\|y(t_0)\| < \delta$, *выполняется:*
1) $y(t)$ *определено при всех* $t \geq t_0$,
2) $\|y(t)\| < \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$.

Определение 45 *Тривиальное решение системы (7.2) называется неустойчивым, если* $\exists t_0$ *и* $\exists \varepsilon > 0$ *такие, что* $\forall \delta$ *существует такое решение* $y(t)$ *системы (7.2), что* $\|y(t_0)\| < \delta$ *и* $\exists t = t^*$: $y(t^*)$ *либо неопределена, либо* $\|y(t^*)\| \geq \varepsilon$.

Определение 46 *Тривиальное решение системы (7.2) называется асимптотически устойчивым (по Ляпунову), если оно является устойчивым, и* δ *в определении устойчивости может быть выбрано таким, что* $\|y(t)\| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Пример 24 Исследуем на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\dot{x} = x^2.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = -\frac{1}{t - {x_0}^{-1}},$$

где $x_0 = x(0)$.

Отметим, что при $x_0 > 0$ в точке $t = {x_0}^{-1}$ решение $x(t)$ не определено, то есть первое условие в определении устойчивости нарушено. Следовательно, решение $x \equiv 0$ уравнения неустойчиво.

7.2 Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{7.3}$$

где $x \in R^n$ — векторная функция, A — постоянная $n \times n$-матрица.

Утверждение 7 Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, то существуют такие числа $\kappa \geq 1$ и $\alpha > 0$, что

$$\|e^{At}\| \leq \kappa e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть Λ — жорданова форма матрицы A, тогда

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}, \quad \|e^{At}\| \leq \|T\| \|T^{-1}\| \|e^{\Lambda t}\|.$$

Элементы матрицы $e^{\Lambda t}$ имеют вид:

либо $\quad \dfrac{t^k}{k!}e^{-\mu t} \quad$ при $\lambda = -\mu \quad (\mu > 0)$, либо $\dfrac{t^k}{k!}e^{-\mu t}\cos\nu t$ или $\dfrac{t^k}{k!}e^{-\mu t}\sin\nu t$ при $\lambda = -\mu \pm i\nu$.

Так как существует такое $\alpha > 0$, что $-\mu \leq -2\alpha < 0$, то для $t \geq 0$ имеет место оценка

$$\frac{t^k}{k!}e^{-\mu t} = e^{-\alpha t}\frac{t^k}{k!}e^{(\mu+\alpha)t} \leq Ce^{-\alpha t},$$

где C — некоторое положительное число.

В силу ограниченности функций $\sin\nu t$ и $\cos\nu t$, аналогичные оценки справедливы для всех элементов матрицы $e^{\Lambda t}$. Для завершения доказательства осталось отметить, что матрицы T и T^{-1} постоянные, следовательно их нормы равны константам.

Задача 17 *Получить выражение для нормы матрицы для следующих трех основных форм векторной нормали*
1. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots}$
2. $|x_1| + |x_2| + \ldots$
3. $\sup\limits_i |x_i|$

Утверждение 8 Если все собственные числа матрицы A, имеющие нулевые вещественные части, являются простыми и полупростыми, т. е. их геометрическая кратность (количество соответствующих линейно независимых собственных векторов) совпадает с их алгебраической кратностью (кратностью собственного корня), а у остальных собственных чисел вещественные части отрицательные, то существует такое число $\kappa \geq 1$, что

$$\|e^{At}\| \leq \kappa \quad \forall t \geq 0.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно отметить, что собственным числам с нулевой вещественной частью соответствуют элементы 1, $\sin\nu t$, $\cos\nu t$ матрицы $e^{\Lambda t}$ (Λ — жорданова форма матрицы A), которые являются ограниченными функциями. А элементы, отвечающие остальным собственным числам, удовлетворяют оценкам, полученным в предыдущем утверждении.

Теорема 25 *(об устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами)*
I. Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение системы (7.3) устойчиво, причем асимптотически.
II. Если хотя бы одно собственное число матрицы A имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение системы неустойчиво.
III. Пусть среди собственных чисел матрицы A имеются числа с нулевой вещественной частью, а у остальных собственных чисел вещественные части отрицательны. Если все собственные числа с нулевой вещественной частью являются простыми и полупростыми, то нулевое решение системы устойчиво. В противном случае нулевое решение этой системы неустойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о
I. Общее решение системы (7.3) можно записать в виде

$$x = x_0 e^{At}, \quad x(0) = x_0.$$

Если все собственные числа матрицы А имеют отрицательную вещественную часть, то, согласно утверждению 7,

$$\|x(t)\| \leq \kappa e^{-\alpha t} \|x_0\|.$$

Для доказательства устойчивости нулевого решения достаточно в определении устойчивости положить $\delta = \varepsilon / \kappa$. А так как

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0,$$

то эта устойчивость асимптотическая.

II. Если среди собственных чисел матрицы A есть вещественное положительное λ, тогда ему отвечает решение $x(t) = Ce^{\lambda t}p$, где p — соответствующий собственный вектор, C — некоторая константа. Выбирая C так, чтобы

$$\|x(0)\| = C\|p\| < \delta,$$

можно показать, что существуют такие

$$\varepsilon > 0,\ t^* = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\varepsilon}{\delta}: \quad \|x(t^*)\| > \varepsilon.$$

Следовательно, нулевое решение системы неустойчиво.

Если $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(\alpha > 0)$, то можно выбрать решение $x(t) = Ce^{\alpha t}\cos\beta t \cdot p$, где $C\|p\| < \delta$. Тогда

$$\exists\varepsilon > 0\ \ \exists t^* = \frac{\pi k}{\beta}\ \ (k \in N), \quad t^* > \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\varepsilon}{\delta}: \quad \|x(t^*)\| > \varepsilon.$$

Таким образом, и в этом случае нулевое решение системы неустойчиво.

III. В случае собственных чисел с нулевой вещественной частью, допускающих лишь простые элементарные делители, для доказательства устойчивости нулевого решения достаточно в определении положить $\delta = \varepsilon/\kappa$, так как, согласно утверждению 8,

$$\|x(t)\| = x_0e^{At} \leq \kappa\|x_0\|.$$

В противном случае существуют решения вида

$$p_1t + p_2, \quad (p_1t + p_2)\cos\beta t, \quad (p_1t + p_2)\sin\beta t,$$

где p_1 и p_2 — собственный и присоединенный векторы соответственно. Неустойчивость нулевого решения системы следует из неограниченности этих функций при $t \to \infty$.

Задача 18 *Доказать, что все решения системы*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)$$

одновременно устойчивы (асимптотически устойчивы) либо неустойчивы.

7.3 Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами

Теорема 26 *(об устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами)*
I. Если все мультипликаторы линейной системы с периодическими коэффициентами по модулю меньше единицы (все характеристические показатели имеют отрицательную вещественную часть), то нулевое решение системы устойчиво, притом асимптотически.
II. Если хотя бы один мультипликатор системы по модулю больше единицы (хотя бы один характеристический показатель имеет положительную вещественную часть), то нулевое решение системы неустойчиво.
III. Пусть часть мультипликаторов системы по модулю равны единице, а остальные по модулю больше ее (часть характеристических показателей имеют нулевую вещественную часть, а остальные — положительную). Если мультипликаторы, модули которых равны единице, допускают лишь простые элементарные делители, то нулевое решение устойчиво. В противном случае оно неустойчиво.

Доказательство теоремы основывается на аналогии структур фундаментальных матриц систем с постоянными и периодическими коэффициентами [4, 11].

7.4 Метод функций Ляпунова

Рассмотрим непрерывную функцию $V = V(x)$, определенную в некоторой окрестности нуля $U_0 = \{\|x\| < h\}$. Введем основные определения знакопостоянных и знакоопределенных функций.

Определение 47 *Функция $V(x)$ называется знакопостоянной (знакоположительной или знакоотрицательной) в U_0, если*

$$V(x) \geq 0 \ \ (V(x) \leq 0) \ \ \forall x \in U_0.$$

Определение 48 *Функция $V(x)$ называется положительно определенной в U_0, если*

$$V(x) > 0 \ \ \forall x \in U_0 \setminus 0, \quad V(0) = 0.$$

Определение 49 *Функция $V(x)$ называется отрицательно определенной в U_0, если*

$$V(x) < 0 \ \ \forall x \in U_0 \setminus 0, \quad V(0) = 0.$$

Определение 50 *Функция $V(x)$ называется знакопеременной, если она не является знакопостоянной, т. е. в любой окрестности нуля она принимает значения разных знаков.*

Пример 25 $V(x, y) = x^2 + y^2$ — положительно определенная функция.

Пример 26 $V(x, y) = x^2$ — знакоположительная функция.

Пример 27 $V(x) = x^2$ — положительно определенная функция.

Пример 28 $V(x, y) = x^2 + y^2 - y^3$ — положительно определенная функция.

Пример 29 $V(x, y) = x^2 + y$ — знакопеременная функция.

Пример 30 $V(x) = x$ — знакопеременная функция.

Пример 31 $V(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ — знакоположительная функция.

Утверждение 9 Пусть $V(x)$ — положительно определенная функция. Тогда при достаточно малых значениях c поверхности уровня $V(x) = c$ являются замкнутыми и окружают начало координат.

Доказательство

Для доказательства достаточно показать, что любая кривая, выпущенная из начала координат, обязательно пересечет поверхность уровня. Для этого рассмотрим функцию $V(x)$ на некоторой сфере S радиуса h

$$S = \{x : \ \|x\| = h\}.$$

В силу непрерывности функции $V(x)$ и замкнутости множества S имеем

$$\exists \min_{\|x\|=h} V(x) = l > 0.$$

Возьмем некоторое число c: $0 < c < l$. Проведем произвольную непрерывную кривую, соединяющую начало координат с некоторой точкой сферы S. Пусть $x = x(t)$ — параметрическое задание этой кривой, причем

$$\|x(t_0)\| = 0, \quad \|x(t_1)\| = h.$$

Для функции $v(t) = V(x(t))$ имеем

$$v(t_0) = 0, \quad v(t_1) \geq l.$$

В силу непрерывности функция $v(t)$ будет принимать все промежуточные значения от 0 до l. Следовательно, существует такое значение t^*, при котором $v(t^*) = V(x(t^*)) = c$, что и требовалось доказать.

7.4.1 Теорема Ляпунова об устойчивости

Определение 51 *Автономной называется любая система, правая часть которой не зависит явным образом от t, т. е. система вида*

$$\dot{x} = f(x), \tag{7.4}$$

где $x \in R^n$, $f(x)$ — непрерывная n-мерная векторная функция.

Пусть $f(0) = 0$, что означает, что система (7.4) имеет тривиальное решение.

Пусть функция $V(x)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности U_0 начала координат. Продифференцируем $V(x)$ по t, считая, что x — решение системы (7.4):

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot f(x) = \dot{V}(x),$$

$$\dot{V}(x) = (\text{grad } V, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i. \tag{7.5}$$

Определение 52 *Функция $\dot{V}(x)$, определенная (7.5), называется полной производной функции $V(x)$ по времени, вычисленной в силу системы (7.4).*

Пример 32 Полная производная функции $V(x, y) = x^2 + y^2$ по времени, вычисленная в силу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

равна

$$\dot{V} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xy - 2yx = 0.$$

Пример 33 Полная производная функции $V = x^2 + y^2 + xz$ по времени, вычисленная в силу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + z, \\ \dot{y} = z^2, \\ \dot{z} = -5y, \end{cases}$$

равна

$$\dot{V} = (2x + z)(x + y + z) + 2yz^2 - 5xy.$$

Теорема 27 *(Ляпунова об устойчивости)*
Если для системы (7.4) существует положительно определенная функция $V(x)$, полная производная которой по времени, вычисленная в силу данной системы, является знакоотрицательной функцией, то нулевое решение системы устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, и рассмотрим сферу S_ε радиуса ε. В силу непрерывности функции $V(x)$ и замкнутости множества S_ε

$$\exists \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x) = l > 0.$$

Возьмем некоторое число c: $0 < c < l$, и рассмотрим поверхность уровня $V(x) = c$, которая лежит внутри сферы S_ε. Внутри этой поверхности выделим шар радиуса $\delta > 0$. Пусть x_0 — некоторая внутренняя точка этого шара, т. е. $\|x_0\| < \delta$. Выпустим из этой точки решение $x = x(t), \;\; x(0) = x_0$. Докажем, что для всех $t \geq 0$ это решение полностью лежит в сфере S_ε, что будет означать устойчивость нулевого решения, согласно определению.

Предположим противное: $\exists t^* \geq 0 : x(t^*) \in S_\varepsilon$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(x(t))$. Так как

$$\frac{dv}{dt} = \dot{V}(x(t)) \leq 0,$$

следовательно, функция V(t) на промежутке $[0, t^*]$ не возрастает, и

$$v(0) = V(x(t_0)) < l.$$

С другой стороны,

$$v(t^*) = V(x(t^*)) \geq l.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

7.4.2 Теорема об асимптотической устойчивости

Теорема 28 *(Ляпунова об асимптотической устойчивости)* Пусть для системы (7.4) существует положительно определенная функция $V(x)$, полная производная которой по времени, вычисленная в силу данной системы, есть отрицательно определенная функция. Тогда нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

Доказательство

В силу теоремы об устойчивости нулевое решение (7.4) устойчиво: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0:$

$$\forall x(t): \; \|x(0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

т. е. любое решение, выпущенное из точки x_0 ($\|x_0\| < \delta$), целиком находится внутри сферы S_ε.

Рассмотрим функцию $v(t) = V(x(t))$. Так как

$$\frac{dv}{dt} = \dot{V}(x(t)) < 0 \quad \forall t > 0,$$

т. е. функция $v(t)$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем. Следовательно, она имеет предел

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \alpha \geq 0.$$

Пусть $\alpha > 0$, тогда $\exists\beta > 0 : \|x(t)\| \geq \beta$. Действительно, если такого числа не существует, то $\|x(t)\|$ может принимать сколь угодно малые значения. Но в силу непрерывности функции $V(x(t))$, это означает, что и $v(t)$ может принимать сколь угодно малые значения, что противоречит условию $\alpha > 0$. Следовательно,

$$\exists\gamma > 0 : \dot{V}(x(t)) \leq -\gamma,$$

так как, если такого числа не существует, то функция $\dot{V}(x(t))$ может принимать сколь угодно малые значения. Но тогда, в силу ее непрерывности, $x(t)$ может принимать сколь угодно малые значения, что противоречит условию $\beta > 0$.

Тогда

$$v(t) = V(x(t)) = V(x_0) + \int\limits_0^t \dot{V}(x(s))ds \leq V(x_0) - \gamma t < 0$$

при достаточно больших t. Получили противоречие, которое доказывает, что α не может быть больше нуля.

Следовательно, $\alpha = 0$, т. е. $v(t) = V(x(t)) \to 0$ при $t \to \infty$. В силу непрерывности функции $V(x)$ это означает, что $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Пример 34 Применим теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3, \\ \dot{y} = -x + \alpha y^3. \end{cases}$$

Рассмотрим положительно определенную функцию $V = x^2 + y^2$. Так как

$$\dot{V} = 2\alpha(x^4 + y^4),$$

то при $\alpha = 0$ нулевое решение системы устойчиво, а при $\alpha < 0$ — асимптотически устойчиво.

7.4.3 Теорема Ляпунова о неустойчивости

Теорема 29 *(Ляпунова о неустойчивости)*
Пусть для системы (7.4) существует $V(x)$, полная производная которой по времени, вычисленная в силу системы, является положительно определенной функцией, и в любой окрестности начала координат существуют точки, в которой функция принимает положительные значения:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 : \ \|x_0\| < \varepsilon : \ V(x_0) > 0.$$

Тогда нулевое решение данной системы неустойчиво.

Доказательство
Выберем ε так, чтобы в шаре S_ε радиуса ε функция $\dot{V}(x)$ принимала только положительные значения. Зафиксируем произвольное $\delta < \varepsilon$. Согласно условиям теоремы, в шаре S_δ существует $x_0 : V(x_0) > 0$. Из этой точки выпустим решение $x(t) : \ x(0) = x_0$.

Покажем, что это решение $x(t)$ при некотором $t = t^*$ покидает шар S_ε, что означает неустойчивость нулевого решения системы согласно определению.

Предположим противное: $\forall t \ \|x(t)\| < \varepsilon$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(x(t))$. Так как

$$\frac{dv(t)}{dt} = \dot{V}(x(t)) > 0,$$

то функция $v(t)$ — возрастающая, при этом она ограничена в силу ограниченности $\|x(t)\|$.

Так как $v(t) \geq V(x_0) > 0$, то $\exists \beta > 0 : \|x(t)\| \geq \beta$. В противном случае функция $v(t)$ могла бы принимать сколь угодно малые значения (см. доказательство теоремы об асимптотической устойчивости, стр. 148).

Следовательно, $\gamma > 0: \ \dot{V}(x(t)) \geq \gamma \ \forall t \geq 0$. Тогда функция

$$v(t) = V(x(t)) = V(x_0) + \int\limits_0^t \dot{V}(x(s))ds \geq V(x_0) + \gamma t$$

неограниченно возрастает. Ранее было отмечено, что эта функция ограниченна для всех $t \geq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пример 35 Применим теорему Ляпунова о неустойчивости к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3, \\ \dot{y} = -x + \alpha y^3. \end{cases}$$

Рассмотрим положительно определенную функцию $V = x^2 + y^2$. Так как

$$\dot{V} = 2\alpha(x^4 + y^4),$$

то при $\alpha > 0$ нулевое решение системы неустойчиво.

7.4.4 Теорема Четаева о неустойчивости

Рассмотрим шар S_h с центром в начале координат и радиусом h. Пусть U — некоторое множество, примыкающее к началу координат. Через Γ обозначим ту часть границы множества U, которая лежит внутри шара S_h.

Теорема 30 Пусть для системы (7.4) существует функция $V(x)$, которая в области U принимает положительные значения и обращается в ноль на Γ, и полная производная этой функции по времени, вычисленная в силу данной системы $\dot{V}(x) > 0$ $\forall x \in U$. Тогда нулевое решение системы неустойчиво.

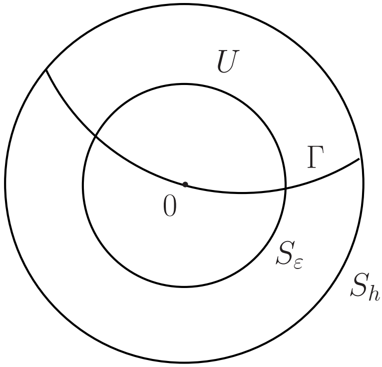


Рис. 7.1: Иллюстрация к теореме Четаева 30

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим сферу $S_\varepsilon = \{x : \ \|x\| = \varepsilon\}$ (рис. 7.1). Из произвольной точки x_0 области U, такой, что $\|x_0\| < \varepsilon$, выпустим траекторию $x = x(t)$.

Рассуждая аналогично, как при доказательстве теоремы Ляпунова о неустойчивости, можно показать, что со временем траектория $x = x(t)$ покинет область U. Докажем, что траектория покинет область U не через границу Γ.

Предположим противное:

$$\exists t^* : \quad x(t^*) \in \Gamma.$$

Рассмотрим функцию $v(t) = V(x(t))$. Так как

$$v(t_0) = V(x_0) > 0, \quad \frac{dv(t)}{dt} = \dot{V}(x(t)) > 0 \ \ \forall t \in [t_0, t^*],$$

следовательно, $v(t)$ возрастает $\forall t \in [t_0, t^*]$ и $v(t^*) > 0$. Но, с другой стороны,

$$x(t^*) \in \Gamma \implies v(t^*) = V(x(t^*)) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что решение $x = x(t)$ покидает область U, пересекая сферу S_ε, что означает неустойчивость нулевого решения.

Пример 36 Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Пусть $U = \{(x, y): \ x \geq 0, \ y \geq 0\}, \quad V(x, y) = x + xy.$

Так как на границе $\Gamma = \{x = 0, \ y = -x\}$ $\ V(x, y) = 0$, а в области U

$$V(x, y) > 0, \ \dot{V}(x, y) = x^2(1 + y) + y^2 x > 0,$$

то, согласно теореме Четаева, нулевое решение системы неустойчиво.

7.5 Устойчивость по тангажу спутника на круговой орбите

Рассмотрим плоское движение симметричного спутника по круговой орбите. Предполагается, что угол тангажа x и скорость $y = \dot{x}$ описываются системой двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x + l \sin 2x - \eta y. \end{cases} \tag{7.6}$$

Постоянные η и l определяются параметрами движения спутника, η — динамический коэффициент аэродинамического сопротивления, $l < 1/2$ — момент сил тяготения. Задача состоит в определении условий устойчивости нулевого решения системы (7.6). Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\eta^2 x^2 + \eta xy + y^2 + 4\left(1 - 2l\cos^2\frac{x}{2}\right)\sin^2\frac{x}{2}.$$

Для $\dot{V}(x, y)$ получается выражение

$$\dot{V}(x, y) = -\eta y^2 - \eta\left(1 - 2l\cos x\right) x \sin x.$$

Следовательно, нулевое решение системы (7.6) асимптотически устойчиво, так как при $l < 1/2$ выполнены условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

7.6 Устойчивость по первому приближению

Так как понятие устойчивости тривиального решения системы (7.4) связано с малой окрестностью начала координат в фазовом пространстве, то определяющими поведение решения системы будут главные члены разложения $f(x)$ по x в окрестности $x = 0$. Так как $f(0) = 0$, то главными будут линейные члены разложения f по x, т. е. члены первого приближения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) = Ax + g(x), \tag{7.7}$$

где $\dfrac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0$ при $\|x\| \to 0$. Система

$$\dot{x} = Ax \tag{7.8}$$

называется *системой первого приближения* для (7.7).

Рассмотрим сначала скалярный случай системы (7.4):

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0.$$

Используя формулу Тейлора для функции $f(x)$ и соотношение $f(0) = 0$, получим

$$f(x) = f'(0)x + g(x),$$

где $g(x) = O(x^2)$ при $x \to 0$. Роль системы первого приближения играет уравнение

$$\dot{x} = ax,$$

где $a = f'(0)$.

В векторном случае роль системы первого приближения играет система

$$\dot{x} = Ax,$$

где

$$
A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(0)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(0)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_2(0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n(0)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n(0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.
$$

Пример 37 Рассмотрим систему

$$
\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3, \\ \dot{y} = -x + \alpha y^3. \end{cases}
$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ тривиальное решение данной системы устойчиво, при $\alpha < 0$ асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ неустойчиво.

Однако нулевое решение соответствующей системы первого приближения

$$
\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}
$$

всегда устойчиво.

Следовательно, не всегда анализ системы первого приближения дает верный ответ об устойчивости нулевого решения исходной системы.

7.6.1 Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Теорема 31 Если все собственные числа матрицы A системы первого приближения имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение системы (7.7) асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Докажем теорему только для случая, когда все собственные числа матрицы A вещественные и имеют лишь элементарные делители, т. е. матрица A подобна вещественной диагональной матрице:

$$A = T\Lambda T^{-1}.$$

Пусть матрица A — диагональная: $A = \operatorname{diag}(-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n)$, где $\lambda_i > 0 \quad (i = \overline{1, n})$.

В противном случае можно привести A к диагональному виду заменой $x = Ty$:

$$T\dot{y} = ATy + g(Ty),$$

$$\dot{y} = T^{-1}ATy + T^{-1}g(Ty) = \Lambda y + T^{-1}g(Ty),$$

где

$$\|T^{-1}g(Ty)\| \le \|T\|C\|Ty\|^2 \le C_1\|y\|^2.$$

В этом случае система (7.7) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 + g_1(x), \\ \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_2 + g_2(x), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = -\lambda_n x_n + g_n(x). \end{cases}$$

Рассмотрим положительно определенную функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\lambda_1} + \frac{x_2^2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\lambda_n}\right).$$

Ее полная производная по времени, вычисленная в силу системы, равна

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 + \frac{x_1}{\lambda_1}g_1(x) - x_2^2 + \frac{x_2}{\lambda_2}g_2(x) + \ldots - x_n^2 + \frac{x_n}{\lambda_n}g_n(x) =$$

$$= -\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\left[1 - \frac{x_1\widetilde{g_1}(x) + \ldots + x_n\widetilde{g_n}(x)}{\|x\|^2}\right],$$

где

$$\widetilde{g_i} = \frac{g_i(x)}{\lambda_i}.$$

Так как

$$\frac{x_1\widetilde{g_1}(x) + \ldots + x_n\widetilde{g_n}(x)}{\|x\|^2} = \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{\widetilde{g}}{\|x\|}\right) \to 0$$

при $\|x\| \to 0$, то $\dot{V}(x)$ — отрицательно определенная функция. Для завершения доказательства осталось применить теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости.

7.6.2 Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению

Теорема 32 Если хотя бы одно собственное число матрицы A системы первого приближения имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение системы (7.7) неустойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Доказательство теоремы проведем для частного случая, подобно тому, как это делалось в предыдущей теореме.

Будем считать, что матрица A приведена к диагональному виду $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, -\lambda_{m+1}, \ldots, -\lambda_n)$, где $\lambda_i > 0 \quad (i = \overline{1, n})$, $1 \leq m \leq n$.

В этом случае система (7.7) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + g_1(x), \\ \ldots \\ \dot{x}_m = \lambda_m x_m + g_m(x), \\ \dot{x}_{m+1} = -\lambda_{m+1} x_{m+1} + g_{m+1}(x), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = -\lambda_n x_n + g_n(x). \end{cases}$$

Рассмотрим знакопеременную функцию Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\lambda_1} + \ldots + \frac{x_m^2}{\lambda_m} - \frac{x_{m+1}^2}{\lambda_{m+1}} - \ldots - \frac{x_n^2}{\lambda_n}\right).$$

Ее полная производная по времени, вычисленная в силу системы, равна

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + \frac{x_1}{\lambda_1} g_1(x) + \ldots + x_m^2 + \frac{x_m}{\lambda_m} g_m(x) -$$

$$-x_{m+1}^2 + \frac{x_{m+1}}{\lambda_{m+1}} g_{m+1}(x) - - \ldots - x_n^2 + \frac{x_n}{\lambda_n} g_n(x) =$$

$$= \|x\|^2 \left[1 + \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{\widetilde{g}}{\|x\|} \right) \right],$$

где

$$\widetilde{g} = \left(\frac{g_1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{g_m}{\lambda_m}, -\frac{g_{m+1}}{\lambda_{m+1}}, \cdots, -\frac{g_n}{\lambda_n} \right)^T.$$

Так как функция $\dot{V}(x)$ является положительно определенной, и в любой окрестности начала координат фазового пространства есть точки, в которых функция $V(x)$ принимает положительные значения, то, согласно теореме Ляпунова о неустойчивости, нулевое решение системы (7.7) неустойчиво.

7.7 Устойчивость полиномов

Определение 53 *Полином*

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

называют устойчивым, если все его корни лежат в левой открытой комплексной полуплоскости, т. е. имеют отрицательные вещественные части.

Можно сформулировать необходимое условие устойчивости полинома.

Утверждение 10 Для устойчивости полинома необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительны.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть полином $D(\lambda)$ имеет комплексные корни $\lambda_j = -\alpha_j \pm i\beta_j$, $(j = \overline{1,p})$ кратности k_j и вещественные корни $\lambda_m = -\gamma_m$, $(m = \overline{1,q})$ кратности s_m.

Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{p} 2k_j + \sum_{m=1}^{q} 2s_m = n.$$

Пользуясь известным разложением полинома $D(\lambda)$ на линейные множители, имеем следующее тождество:

$$D(\lambda) \equiv \prod_{j=1}^{p} (\lambda + \alpha_j - i\beta_j)^{k_j} (\lambda + \alpha_j + i\beta_j)^{k_j} \prod_{m=1}^{q} (\lambda + \gamma_m)^{s_m}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной λ в правой и левой частях данного тождества, получаем, что все коэффициенты полинома $D(\lambda)$ имеют одинаковые знаки, следовательно, положительны.

Отметим, что для случая $n = 1$ или $n = 2$ положительность коэффициентов полинома $D(\lambda)$ является не только необходимым, но и достаточным условием его устойчивости.

7.7.1 Критерий Рауса — Гурвица

Определение 54 *Матрицей Гурвица* $n \times n$ *полинома* $D(\lambda)$ *называется матрица вида*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 33 Для того, чтобы полином $D(\lambda)$ был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \tag{7.9}$$

$$\ldots$$

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$$

его матрицы Гурвица.

Пример 38 Для полинома первой степени $D(\lambda) = \lambda + a_1$ условие (7.9) имеет вид $\Delta_1 = a_1 > 0$. Действительно, так как корень этого многочлена $\lambda = -1/a_1 < 0$, то $D(\lambda)$ устойчив.

Пример 39 Для полинома второй степени

$$D(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

условия (7.9) имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0,$$

что следует из необходимого условия устойчивости полинома.

Пример 40 Для полинома третьей степени

$$D(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

условия (7.9) имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\Delta_2 > 0,$$

из которых, в частности, следует необходимое условие устойчивости полинома.

Пример 41 Для полинома четвертой степени

$$D(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$$

условия (7.9) принимают вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_4\Delta_3 > 0.$$

7.7.2 Критерий Льенара — Шипара

Приведем без доказательства еще один критерий устойчивости полиномов.

Теорема 34 Для того, чтобы полином $D(\lambda)$ был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все коэффициенты a_i $(i = \overline{1, n})$ и главные диагональные миноры

$$\Delta_{n-1}, \quad \Delta_{n-3}, \quad \Delta_{n-5}, \; \ldots$$

матрицы Гурвица данного полинома.

Пример 42 Для полинома пятой степени

$$D(\lambda) = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5$$

матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Льенара — Шипара, $D(\lambda)$ будет устойчив только тогда, когда

$$\Delta_4 = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1\Big[a_2a_3a_4 + a_4a_5 - a_1a_4^2 - a_5a_2^2\Big] -$$

$$-\Big[a_3^2a_4 + a_5^2 - a_5a_2a_3 - a_1a_5a_4\Big] =$$

$$= a_1a_2a_3a_4 + a_1a_4a_5 - a_1^2a_4^2 - a_1a_5a_2^2 -$$

$$-a_1a_5a_2^2 - a_3^2a_4 - a_5^2 + a_5a_2a_3 + a_1a_5a_4 =$$

$$= (a_1a_2 - a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_5)^2 > 0,$$

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_3 > 0.$$

Пример 43 Исследуем на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x - xyzu, \\ \dot{y} = \cos y + \ln(x + u + 1) + \operatorname{tg} x - z^2 - 1, \\ \dot{z} = -z - \operatorname{arcch}(u + 1), \\ \dot{u} = e^{xyz} + \ln 3^{x^{y+1}} - 1. \end{cases}$$

Система первого приближения имеет вид

$$
\begin{cases}
\dot{x} = x, \\
\dot{y} = 2x + u, \\
\dot{z} = -z, \\
\dot{u} = x.
\end{cases}
$$

Собственные числа матрицы

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

системы первого приближения являются корнями полинома

$$
|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2,
$$

и, следовательно,

$$
\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -1.
$$

Согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению, нулевое решение данной системы неустойчиво.

Применим теперь критерий Льенара — Шипара. Асимптотическая устойчивость нулевого решения системы эквивалентна устойчивости полинома

$$
\lambda^4 - \lambda^2
$$

с матрицей Гурвица

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Так как

$$\Delta_3 = \Delta_1 = 0,$$

то полином неустойчив, а следовательно, неустойчиво и нулевое решение системы.

7.8 Фазовые портреты линейных автономных систем на плоскости

Часто возникает потребность, помимо исследования начала координат фазового пространства на устойчивость, выяснить также расположение траекторий в окрестности этой точки.

Определение 55 *Совокупность фазовых траекторий называется фазовым портретом системы.*

Определение 56 *Особыми точками (точками покоя, положениями равновесия) автономной системы (7.4) называются точки $\overline{x}$, для которых правые части системы обращаются в нуль: $f(\overline{x}) = 0$.*

Не ставя целью рассматривать этот вопрос во всей общности, ограничимся случаем $n = 2$ (фазовое пространство является плоскостью R^2) и линейной системой уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

7.8.1 Случай единственной особой точки

Будем предполагать, что матрица A заранее приведена к вещественной жордановой форме и $\det A \neq 0$. Отметим, что единственной особой точкой системы (7.10) в этом случае является точка $(0,0)$ фазовой плоскости. Как будет показано, расположение траекторий в ее окрестности определяется, как и свойство ее устойчивости или неустойчивости, характеристическими числами матрицы A. Возможны следующие случаи.

I. Характеристические числа вещественны и одного знака. Тогда возможны три вида матрицы A:

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda\mu > 0;$

(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$

(3) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$

II. Характеристические числа вещественны и разных знаков:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda\mu > 0.$$

III. Характеристические числа — комплексно сопряженные. Тогда возможны два случая:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$

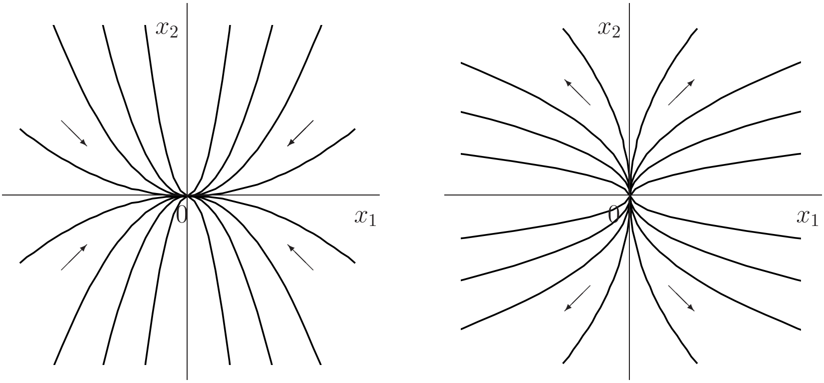
(2) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$

Итак, рассмотрим все возможные случаи. В случае I(1) система (7.10) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = \mu x_2, \end{cases}$$

а ее решениями являются функции $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$ и $x_2 = C_2 e^{\mu t}$. Чтобы получить фазовый портрет системы, исключим независимую переменную t, разделив одно уравнение на другое:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{x_1}{x_2}.$$



а б

Рис. 7.2: Неправильный узел, стрелки указывают направление движения при возрастании времени: а) $\mu/\lambda > 1$, $\mu < 0$, $\lambda < 0$; б) $\mu/\lambda < 1$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$

Интегрируя это уравнение, получим $x_2 = Cx_1^{\mu/\lambda}$, где $C = C_2C_1^{-\mu/\lambda}$.

Траекториями системы в этом случае являются сама особая точка, половинки парабол и части осей, которые отвечают решениям при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ и направлены вдоль собственных векторов матрицы A. Такой фазовый портрет называется *неправильным узлом* или просто *узлом*. Фазовый портрет для этого случая представлен на рис. 7.2. Неправильный узел может быть устойчивым, если $\lambda < 0$, $\mu < 0$ (рис. 7.2а) и неустойчивым, если $\lambda, \mu > 0$ (рис. 7.2б), что полностью соответствует теореме 25. Параболы касаются той оси, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютному значению собственному числу матрицы A.

В случае I(2) система (7.10) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2. \end{cases}$$

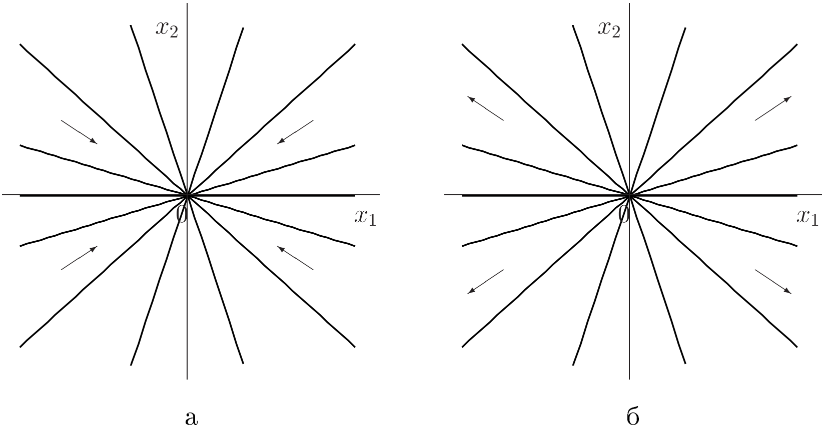


Рис. 7.3: Правильный узел, стрелки указывают направление движения при возрастании времени: а) $\lambda < 0$; б) $\lambda > 0$

Ее решениями являются функции $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$ и $x_2 = C_2 e^{\lambda t}$, откуда следует зависимость $x_2 = C x_1$. Фазовый портрет называется *правильным узлом*. Траекториями системы в этом случае являются сама особая точка, части прямых и части осей, которые отвечают решениям при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ и направлены вдоль собственных векторов матрицы A (рис. 7.3). Как и в предыдущем случае, правильный узел может бы устойчивым, если $\lambda < 0$ (рис. 7.3а), и неустойчивым, если $\lambda > 0$ (рис. 7.3б).

В случае I(3) система (7.10) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2. \end{cases}$$

Ее решениями являются функции

$$x_1 = C_1 e^{\lambda t} + t C_2 e^{\lambda t}, \quad x_2 = C_2 e^{\lambda t},$$

откуда следует

$$x_1 = x_2 \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{x_2}{C_2} \right| \right).$$

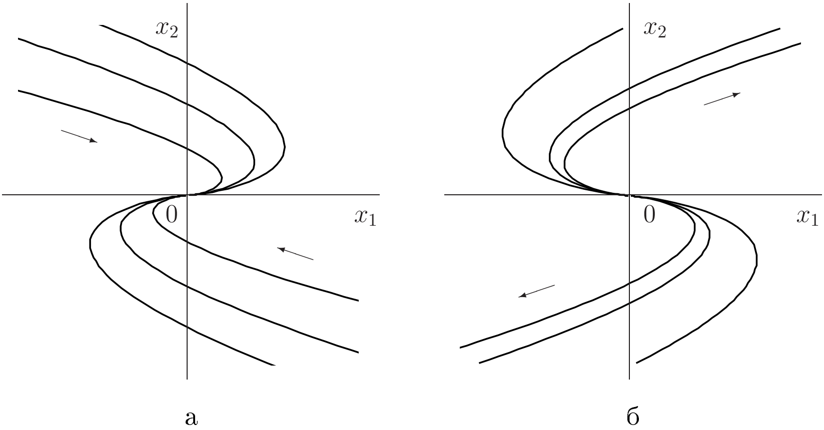


Рис. 7.4: Вырожденный узел: а) $\lambda < 0$; б) $\lambda > 0$

Фазовый портрет — *вырожденный узел.* Траекториями системы в этом случае являются сама особая точка, части кривых и части оси $x_2 = 0$, которые отвечают случаю $C_2 = 0$ и направлены вдоль единственного собственного вектора матрицы A (рис. 7.4). Вырожденный узел может бы устойчивым, если $\lambda < 0$ (рис. 7.4а) и неустойчивым, если $\lambda > 0$ (рис. 7.4б).

Рассмотрим случай II. Решениями системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 \end{cases}$$

являются функции $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$ и $x_2 = C_2 e^{-\mu t}$. Фазовый портрет системы — *седло.* Траекториями системы в этом случае являются сама особая точка, гиперболы $x_1 x_2^{\lambda/\mu} = C$ и части осей, которые называются *сепаратрисами.* Сепаратрисы отвечают решениям при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ и направлены вдоль собственных векторов матрицы A.

Отметим, что особая точка в случае седла всегда неустойчива, что соответствует теореме 25. Фазовый портрет для случая седла представлен на рис. 7.5.

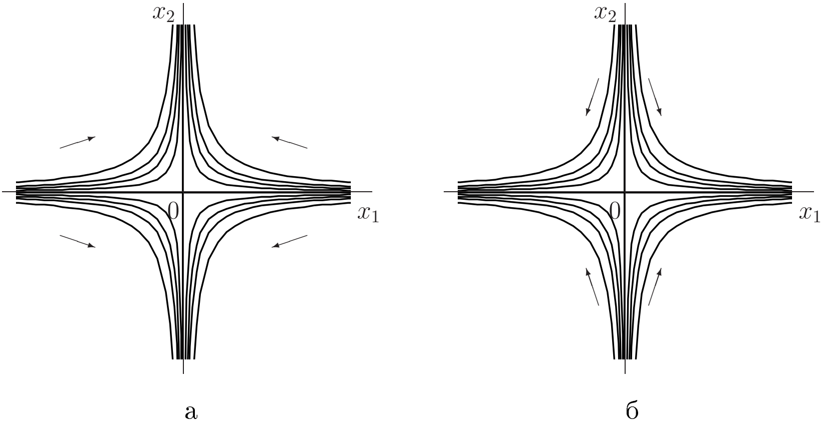


Рис. 7.5: Седло: а) $\lambda < 0$, $\mu < 0$; б) $\lambda > 0$, $\mu > 0$

В случае III(1) система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1. \end{cases}$$

Собственные числа $\lambda = \pm i\beta$ матрицы A определяют решения

$$x_1 = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t, \;\; x_2 = -C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t.$$

Чтобы получить зависимость между x_1 и x_2, разделим первое уравнение системы на второе:

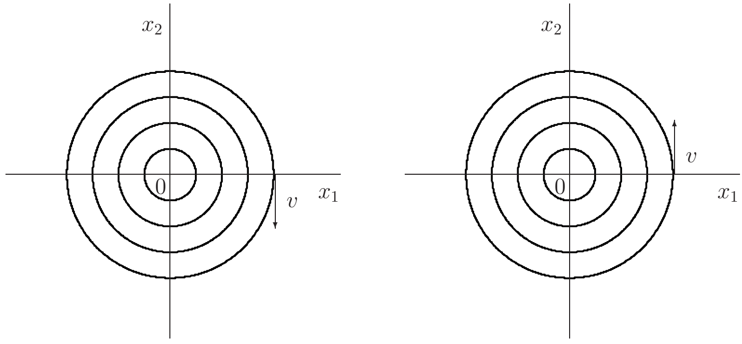
$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_1}{x_2}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{x_1^2}{2} = -\frac{x_2^2}{2} + C$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 = C.$$



а б

Рис. 7.6: Случай центра, вектор скорости v определяет направление движения при возрастании времени: а) $\beta > 0$; б) $\beta < 0$

Так как выражение в левой части не может быть отрицательным, то можно положить $C = r^2$. Таким образом, траекториями системы в этом случае являются концентрические окружности и сама особая точка ($C = 0$) (рис. 7.6). Такой фазовый портрет получил название *центр*. Центр всегда устойчив, что следует и из теоремы 25. Чтобы выяснить, в каком направлении осуществляется движение по траектории — по часовой стрелке или против нее, — нужно построить *вектор скорости*, см. подробнее [4, 12].

В случае III(2) собственные числа матрицы A системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$$

имеют ненулевую вещественную часть:

$$\lambda = \alpha \pm i\beta,$$

а решениями системы являются функции

$$x_1 = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t),$$

$$x_2 = e^{\alpha t}(-C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t).$$

Траекториями системы являются спирали

$$x_1^2 + x_2^2 = (C_1^2 + C_2^2)e^{2\alpha t}$$

и сама особая точка. Название фазового портрета — *фокус* (рис. 7.7).

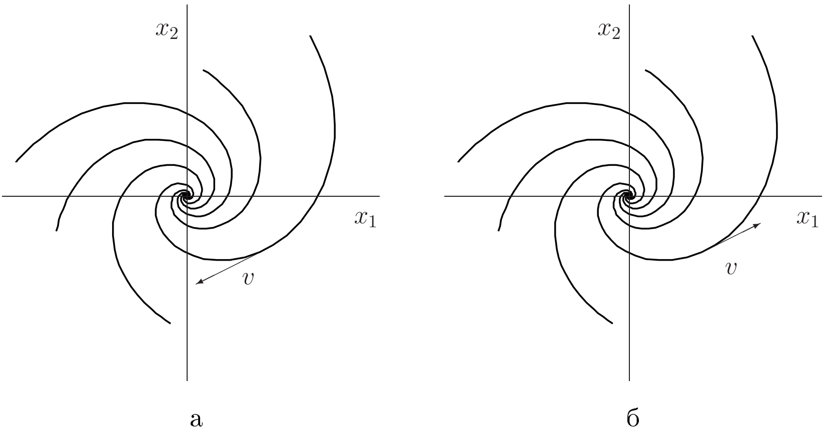


Рис. 7.7: Фокус: а) $\alpha < 0$, $\beta > 0$; б) $\alpha > 0$, $\beta < 0$

Фокус может быть устойчивым (в этом случае спирали закручиваются при возрастании t), если $\alpha < 0$ (рис. 7.7а), и неустойчивым (в этом случае спирали раскручиваются при возрастании t), если $\alpha > 0$ (рис. 7.7б). Чтобы выяснить, в каком направлении закручиваются (раскручиваются) спирали — по часовой стрелке или против нее, — нужно построить вектор скорости [12].

Если A не приведена к жордановой форме, то нужно воспользоваться заменой $x = Ty$. Тогда система (7.10) принимает вид

$$T\dot{y} = ATy$$

или

$$\dot{y} = \Lambda y, \tag{7.11}$$

где $\Lambda = T^{-1}AT$ — жорданова форма матрицы A. При этом фазовый портрет системы (7.10) получается из фазового портрета системы (7.11) такими преобразованиями, как сжатие (растяжение), поворот вокруг начала координат [13]. При этом тип, устойчивость (неустойчивость) особой точки, направление обхода траекторий сохраняются. В случае узла и седла траектории, представляющих собой прямые линии, так же направлены вдоль собственных векторов (но если матрица A не является жордановой, то направления ее собственных векторов не совпадают с направлениями осей координат фазовой плоскости).

7.8.2 Вырожденный случай

Пусть матрица A — жорданова и $\det A = 0$. Тогда возможны следующие случаи:

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В случае (i) система (7.10) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2, \end{cases}$$

а ее решениями являются функции $x_1 = C_1$ и $x_2 = C_2 e^{\lambda t_2}$. Согласно определению, особые точки системы в этом случае полностью заполняют ось $0x_1$, которая направлена вдоль собственного вектора матрицы A. Остальные траектории системы — части прямых, параллельных оси $0x_2$, которая направлена вдоль второго собственного вектора. Каждая из особых точек является устойчивой (но не асимптотически) при $\lambda < 0$ (рис. 7.8а) и неустойчивой при $\lambda > 0$ (рис. 7.8б), что полностью соответствует теореме 25.

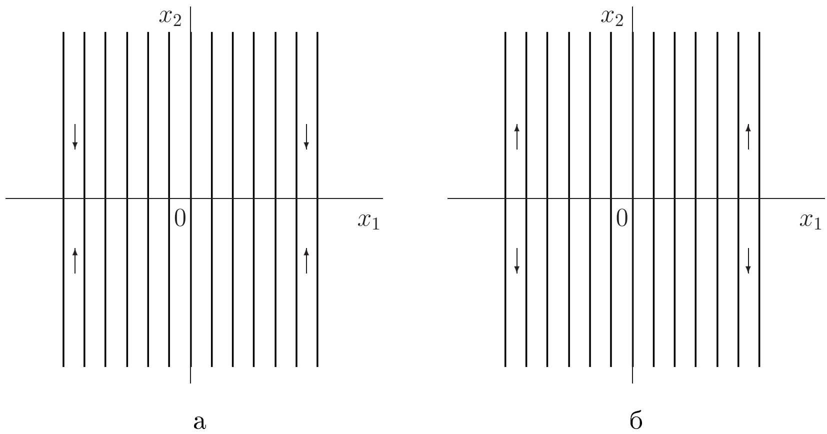


Рис. 7.8: Фазовый портрет системы (7.10) в случае (i): а) $\lambda < 0$; б) $\lambda > 0$

В случае (ii) система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, \end{cases}$$

имеет решения $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, и любая точка фазовой плоскости является особой. Других траекторий нет. Каждая особая точка является устойчивой (но не асимптотически).

В случае (iii) система (7.10) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0, \end{cases} \tag{7.12}$$

имеет решения $x_1 = C_1 t + C_2$, $x_2 = C_2$ (рис. 7.9). Особые точки системы, как и в случае (i), полностью заполняют ось $0x_1$, но остальные траектории системы — части прямых, параллельных оси $0x_1$, которая направлена вдоль единственного собственного вектора матрицы A. Каждая из особых точек является неустойчивой, что хорошо видно на фазовом портрете и соответствует теореме 25.

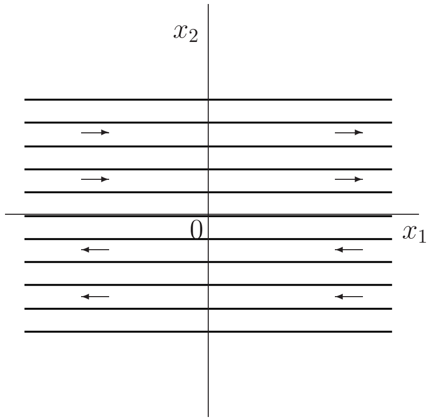


Рис. 7.9: Фазовый портрет системы (7.12). Ось $0x_1$ полностью состоит из особых точек системы

7.9 Особые точки нелинейных автономных систем на плоскости

Рассмотрим нелинейную автономную систему (7.4) при $n = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 & = & f_2(x_1, x_2). \end{array} \right. \tag{7.13}$$

Особые точки (7.13) удовлетворяют системе

$$f_i(x_1, x_2) = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Соответствующей заменой переменных каждую особую точку можно перевести в начало координат. Пусть, например, $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ — особая точка (7.13):

$$f_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = 0, \quad f_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = 0.$$

Тогда, если f_i $(i = 1, 2)$ допускают разложения в ряд Тейлора

$$f_i(x_1, x_2) = f_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}) +$$

$$+\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x_1},\overline{x_2})(x_1-\bar{x_1})+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{x_1},\overline{x_2})(x_2-\bar{x_2})+g_i(x_1,x_2),$$

где

$$g_i(x_1,x_2)=0(\|\Delta\|^2),\ \text{при } \|\Delta\|\to 0,\quad \Delta=\begin{pmatrix} x_1 & \overline{x_1}\\ x_2 & \overline{x_2}\end{pmatrix},$$

то система первого приближения (7.8) для (7.13) совпадает с (7.10):

$$\dot{y}=Ay,\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1-\overline{x_1}\\ x_2-\overline{x_2}\end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Здесь

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},$$

$$a_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_1},\overline{x_2}),\quad a_{12}=\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x_1},\overline{x_2}),$$

$$a_{21}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x_1},\overline{x_2}),\quad a_{22}=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x_1},\overline{x_2}).$$

Согласно теоремам 31, 32, в случае $\mathrm{Re}\lambda\neq 0$ устойчивость или неустойчивость особой точки $(\overline{x_1},\overline{x_2})$ системы (7.13) обеспечивается теми же требованиями на λ, которые обеспечивают устойчивость или неустойчивость точки $(0,0)$ для системы первого приближения (7.14). Что касается расположения траекторий, то точное исследование показывает (см., например, [7]), что при наличии узла, седла или фокуса (во всех этих случаях $\mathrm{Re}\lambda\neq 0$) качественный характер расположения траекторий системы (7.13) в достаточно малой окрестности особой точки будет тем же самым, что и для системы (7.14).

Если же особая точка системы первого приближения — центр ($\mathrm{Re}\lambda=0$), то без дополнительного исследования о характере расположения траекторий системы (7.13) ничего сказать нельзя.

С повышением размерности фазовая картина существенно усложняется, возникают новые явления, для изучения которых развиты многочисленные методы.

Исследование фазового портрета системы дифференциальных уравнений является одной из задач так называемой *качественной теории дифференциальных уравнений.*

Пример 44 Исследуем особые точки нелинейной автономной системы

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & x_1^2 - x_2^2,\\ \dot{x}_2 & = & x_1 x_2 - 1.\end{array}\right. \tag{7.15}$$

Из системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl}x_1^2 - x_2^2 & = & 0,\\ x_1 x_2 - 1 & = & 0\end{array}\right.$$

найдем особые точки $S_1(1,1)$ и $S_2(-1,-1)$. Делая перенос начала системы координат в точку S_1 и вычисляя матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

получим систему первого приближения

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_2\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2.\end{array}\right.$$

Собственные числа матрицы A этой системы определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0,$$

и

$$\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{7}i)/2.$$

Таким образом, точка S_1 — неустойчивый фокус.

Аналогично, для точки S_2 найдем матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

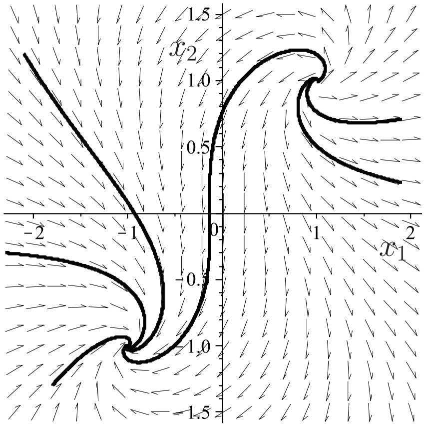


Рис. 7.10: Фазовый портрет системы (7.15)

Следовательно, система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Собственные числа матрицы A определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)(1+\lambda) + 2 =$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0,$$

откуда имеем

$$\lambda_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{7}i)/2.$$

Таким образом, точка S_2 — устойчивый фокус (рис. 7.10).

Глава 8

Разностные уравнения

8.1 Введение

Выше мы рассматривали обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), которые содержат переменную $x(t)$ и ее производные $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и т. д. В этой главе мы имеем дело с разностными уравнениями (РУ), включающими в себя переменную x_t и ее разности Δx_t, $\Delta^2 x_t$ и т. д. Независимая переменная в уравнении меняется дискретно, или, возможно, хотя она изменяется непрерывно, наблюдения этих изменений делаются только через определенные интервалы времени. Например, если x — это валовой национальный продукт (ВНП) за время t, он измеряется раз в год, скажем, 31 декабря, и записывается в тот же день. Такие уравнения называются разностными, так как они содержат разности функций. Например, если $x_t = f(t)$, то первая разность имеет вид

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t = f(t+1) - f(t),$$

$$\Delta x_{t+1} = x_{t+2} - x_{t+1} = f(t+2) - f(t+1),$$

а вторая разность —

$$\Delta^2 x_t = \Delta x_{t+1} - \Delta x_t =$$

$$= (x_{t+2} - x_{t+1}) - (x_{t+1} - x_t) =$$
$$= x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t. \qquad (8.1)$$

Для простоты предположим, что наблюдения делаются через постоянные интервалы, то есть между t существуют одинаковые промежутки. Также мы будем писать x_t, x_{t+1} и т. д. вместо $x(t)$ и $x(t+1)$ для простоты, а также для отличия от ОДУ.

Глава будет посвящена краткому изложению основ теории разностных уравнений первого, второго и высших порядков [3, 8, 16]. В силу аналогии их с ОДУ, — только разность является переменной в дискретном времени, — изложение будет кратким. Более того, мы сконцентрируем внимание на случаях разностных уравнений первого и второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 57 *Обыкновенные разностные уравнения (с этого времени для краткости называемые разностными уравнениями) — это уравнения, включающие в себя одну переменную x, вычисленную дискретно в разные моменты времени.*

Например,

$$F(x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+k}) = 0 \qquad (8.2)$$

или, в более удобной форме,

$$x_{t+k} = f(x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+k-1}).$$

Порядок разностных уравнений задается самой большой разностью, которая есть в уравнении. Например,

$$x_{t+2} = ax_{t+1} + bx_t$$

является линейным разностным уравнением второго порядка.

Определение 58 *Под решением разностного уравнения понимаются все значения x_t, не включающие в себя разности и удовлетворяющие (8.2).*

Отметим, что решение разностных уравнений порядка n требует n начальных условий для нахождения n произвольных постоянных, которые появятся в решении.

Мы будем обсуждать разностные уравнения первого, второго и высших порядков, и их устойчивость.

8.2 Разностные уравнения первого порядка

8.2.1 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Обычная форма линейных разностных уравнений первого порядка имеет вид

$$x_{t+1} = ax_t; \quad x(0) = x_0 \tag{8.3}$$

в случае однородного уравнения, и

$$x_{t+1} = ax_t + b; \quad x(0) = x_0 \tag{8.4}$$

в случае неоднородного уравнения. Здесь x_0 — значение x_t при $t = 0$, называемое *начальным значением.*

Теорема 35 Решение однородного разностного уравнения (8.3) имеет вид

$$x_t = a^t x_0. \tag{8.5}$$

Доказательство

Задавая разные значения t, получим

$$\begin{aligned}
&x_1 = ax_0,\\
&x_2 = ax_1 = a(ax_0) = a^2x_0,\\
&\vdots\\
&x_n = ax_{n-1} = a^n x_0.
\end{aligned}$$

Следовательно, для любого t, $x_t = a^t x_0$.

Теорема 36 Решение неоднородного разностного уравнения первого порядка (8.4) имеет вид

$$x_t = a^t c + \frac{b}{1-a}, \quad a \neq 1, \tag{8.6}$$

$$x_t = x_0 + bt, \quad a = 1, \tag{8.7}$$

где $c = x_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Задавая разные значения t, получим

t	$x_{t+1} = ax_t + b$
0	$x_1 = ax_0 + b$
1	$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2 x_0 + (1+a)b$
2	$x_3 = ax_2 + b = a^3 x_0 + (1 + a + a^2)b$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$x_n = a^n x_0 + (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})b.$

Так как

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}$$

как сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$x_n = a^n x_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

Следовательно, для любого t имеем

$$x_t = a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1).$$

Если $a = 1$, то

$$x_n = a^n x_0 + b\sum_{i=0}^{n-1} a^i = x_0 + bn.$$

Следовательно, в этом случае $x_t = x_0 + bt$, что и требовалось доказать.

Замечание 5 *Однородный случай (8.5) является частным случаем (8.6), где* $b = 0$ *и, если* $a = 1$, $b = 0$, *то* $x_t = a^t x_0 = x_0$.

Замечание 6 *Как и в случае ОДУ, решение (8.6) состоит из двух частей,* x_o *и* $\tilde{x}$. *Первая часть,*

$$x_o(t) = a^t c = a^t\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) = a^t(x_0 - \tilde{x}),$$

является общим решением однородного уравнения $x_{t+1} - ax_t = 0$. *Вторая часть,*

$$\tilde{x} = \frac{b}{1-a},$$

представляет собой постоянное значение, которое является частным решением уравнения (8.4).

Из этого замечания следует, что мы можем начать процесс решения, взяв в качестве решения однородного уравнения $x_o(t) = c\lambda^t$, где c — произвольная константа и λ подлежит определению. Получаем

$$c\lambda^{t+1} - ac\lambda^t = c\lambda^t(\lambda - a) = 0,$$

что дает $\lambda = a$ и, таким образом,

$$x_o(t) = c\lambda^t = ca^t.$$

Для данного x_0 мы имеем при $t = 0$

$$x(0) = x_0 = ca^0 + \frac{b}{1-a} = c + \frac{b}{1-a},$$

т. е.

$$c = x_0 - \frac{b}{1-a},$$

что показывает начальное отклонение x_0 от его равновесного значения $x_e = b/(1-a)$.

Замечание 7 *Если $|a| < 1$, то*

$$\lim_{t\to\infty} a^t = 0 \implies \lim_{t\to\infty} x^t = 0 + \frac{b}{1-a},$$

что означает, что система устойчива, т. е. x_t будет сходиться к своему равновесному значению $x_e = \tilde{x}$ с течением времени.

Если $|a| > 1$, то

$$\lim_{t\to\infty} \left|a^t\right| = \infty,$$

и система неустойчива.

Пример 45

$$x_{t+1} = 0,5x_t + 2, \quad x_0 = 10.$$

Решением, согласно (8.6), будет

$$x_t = (0,5)^t(x_0 - \tilde{x}) + \tilde{x} = (0,5)^t(10-4) + 4.$$

Здесь $0 < a = 0,5 < 1$. Система устойчива, так как $x_t \to 4$ с течением времени.

8.2.2 Нелинейные разностные уравнения

Нелинейное разностное уравнение первого порядка имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x(0) = x_0. \tag{8.8}$$

Точную форму функции f знать не обязательно; если даны некоторые свойства, касающиеся ее наклона, выпуклости (вогнутости), поведения в $x_t = 0$ и $x_t = \infty$, то уравнение качественно решается с помощью фазовых диаграмм (рис. 8.1).

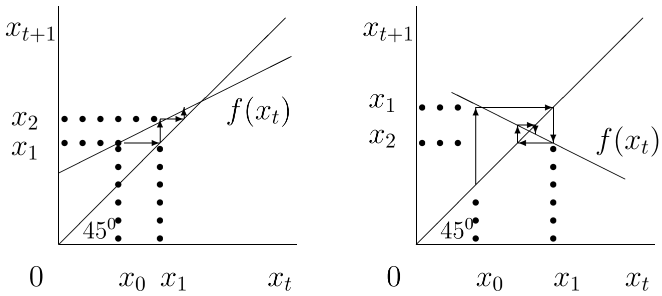


Рис. 8.1: $x_{t+1} = f(x_t)$

Решение заключается в том, чтобы нарисовать прямую под углом 45°, т. е. прямую $x_{t+1} = x_t$ в плоскости переменных x_{t+1} и x_t, и отыскать фиксированную точку, в которой график функции $f(x_t)$ пересекает линию, а потом исследовать на устойчивость.

Для произвольного $x(0) = x_0$ можно найти $x_1 = f(x_0)$. Затем пересечение с прямой $x_{t+1} = x_t$ переводит x_1 для $t = 1$ из вертикальной в горизонтальную ось, где x_1 теперь берется как начальное условие для $t = 1$. Затем $x_2 = f(x_1)$ дает x_2 для $t = 2$ и т. д. Точка равновесия x_e — это фиксированная точка, если она существует, то там, где $f(x_t)$ пересекает линию $x_{t+1} = x_t$, то есть, где $x_{t+1} = x_t$. Легко заметить, что если такая фиксированная точка существует, то условием устойчивости является $|f'(x_e)| < 1$. В линейном случае $f' = a$ и, следовательно, $|a| < 1$

является условием устойчивости. Ясно, что существование равновесного решения зависит от того, пересекает ли $f(x_t)$ линию $x_{t+1} = x_t$. Очевидно, что если $|f'| > 1$, то система неустойчива: x_t будет удаляться от линии $x_{t+1} = x_t$ с течением времени [16].

8.3 Линейные разностные уравнения второго порядка

Обычная форма разностного уравнения второго порядка имеет вид

$$ax_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = g(t); \quad x(0) = x_0, \; x(1) = x_1. \tag{8.9}$$

Если $g(t) = 0$, (8.9) называют *однородным разностным уравнением*, его решение задается функцией $x_o(t)$. Если $g(t) \neq 0$, это *неоднородное разностное уравнение.* Частное решение $(\tilde{x})$ отвечает $g(t)$ в (8.9).

8.3.1 Частное решение

Рассмотрим случай, когда $g(t) \equiv d$, где d — константа. Будем искать частное решение в виде $\tilde{x} = kt^{\nu}$, где k — константа и

I) $\nu = 0$, если $a + b + c \neq 0$;

II) $\nu = 1$, если $a + b + c = 0$;

II) $\nu = 2$, если $b + 2c = 0$.

Рассмотрим случай I. Тогда частное решение $\tilde{x}_t = k$ для всех t, применительно к (8.9) дает

$$ak + bk + ck = d \;\Rightarrow\; k = \frac{d}{a+b+c} \;\Rightarrow\; \tilde{x} = \frac{d}{a+b+c}.$$

В случае II $\nu = 1$, тогда, подставляя $\tilde{x}_t = kt$ в (8.9), получим

$$ak(t+2) + bk(t+1) + ckt = d$$

или

$$(a+b+c)k(t+2) - (b+2c)k = d,$$

откуда, в силу $a+b+c=0$, имеем

$$k=-\frac{d}{b+2c} \;\Rightarrow\; \tilde{x}=-\frac{d}{b+2c}t.$$

Задача 19 *Рассмотреть случай III, когда наряду с условием $b+2c=0$ выполняется условие $a+b+c=0$.*

Если $g(t)$ — некоторая функция от времени, для нахождения частного решения можно попробовать взять функцию аналогичного ей вида. Например, если $g(t)=cm^t$, можно искать частное решение в виде $\tilde{x}_t=km^t$, подставляя его в (8.9), как и раньше.

Если $g(t)=at^2$, следует взять частное решение в виде $\tilde{x}_t=at^2+bt+c$. Такой подход аналогичен случаю ОДУ второго порядка со специальной правой частью.

8.3.2 Общее решение однородного уравнения

Рассмотрим (8.9) при $g(t)=0$:

$$ax_{t+2}+bx_{t+1}+cx_t=0.$$

По аналогии с разностным уравнением первого порядка мы можем попробовать искать его общее решение в виде $x_o(t)=A\lambda^t$, где A — некоторая произвольная константа. Подстановка $x_o(t)$ в (8.9) при $g(t)=0$ дает

$$Aa\lambda^{t+2}+bA\lambda^{t+1}+cA\lambda^t=A\lambda^t\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right)=0.$$

Так как $A\lambda^t\neq 0$, то получаем характеристическое уравнение

$$P(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c=0. \tag{8.10}$$

Оно имеет два корня $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2a}\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)$.

Как и для однородного ОДУ второго порядка, следует рассмотреть 3 случая:

I. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, тогда λ_1 и λ_2 — действительные и различные корни уравнения $P(\lambda) = 0$. В этом случае общее решение имеет вид

$$x_o = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t, \tag{8.11}$$

где A_1 и A_2 — две произвольные константы и могут быть определены с помощью двух начальных условий x_0 и x_1.

II. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, т. е. $P(\lambda) = 0$ имеет два одинаковых корня $\lambda = \frac{-b}{2a}$. В этом случае кроме $A\lambda^t$ решением является также функция

$$x_t = At\lambda^t,$$

которую следует подставить в (8.9) при $g(t) = 0$, помня, что

$$b^2 = 4ac, \quad \lambda = \frac{-b}{2a}.$$

Итак, общее решение примет вид

$$x_o(t) = (A_1 + A_2t)\lambda^t. \tag{8.12}$$

III. $\Delta < 0$, тогда (8.10) дает

$$\lambda = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm i\beta,$$

где $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$.

Решение (8.11) теперь имеет вид

$$x_o(t) = A_1(\alpha + i\beta)^t + A_2(\alpha - i\beta)^t. \tag{8.13}$$

В полярных координатах $\alpha = r\cos\theta$ и $\beta = r\sin\theta$, где θ — угол между действительной осью α и радиусом r (рис. 8.2).

По формуле Муавра для $\alpha \pm i\beta = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ получаем

$$(\alpha \pm i\beta)^t = r^t(\cos\theta t \pm i\sin\theta t).$$

Используя эту формулу, (8.13) можно записать в виде

$$x_o(t) = A_1r^t(\cos\theta t + i\sin\theta t) + A_2r^t(\cos\theta t - i\sin\theta t) =$$

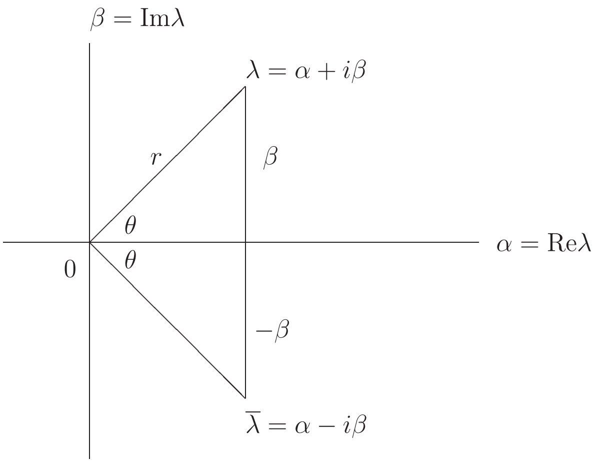


Рис. 8.2: $\lambda = \alpha \pm i\beta$

$$= r^t(B_1 \cos\theta t + B_2 \sin\theta t), \tag{8.14}$$

где $B_1 = A_1 + A_2$ и $B_2 = i(A_1 - A_2)$, как и для ОДУ.

Так как $(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \lambda\overline{\lambda} = \alpha^2 + \beta^2 = r^2$, то

$$r = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pm\sqrt{c/a}.$$

Угол θ можно найти из выражений

$$\sin\theta = \frac{\beta}{r},\ \cos\theta = \frac{\alpha}{r},\ \mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\beta}{\alpha},$$

т. е.

$$\theta = \arcsin(\beta/r) = \arccos(\alpha/r) = \mathrm{arctg}(\beta/\alpha).$$

Это позволяет подставить r и θ в (8.14).

Замена

$$B_1 = A\cos\omega,\ B_2 = A\sin\omega,$$

и, следовательно,

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \frac{B_2}{B_1}\ \Rightarrow\ \omega = \mathrm{arctg}\left(\frac{B_2}{B_1}\right),$$

где B_1, B_2 определены выше, дают нам (8.14) в другой форме

$$x_o(t) = Ar^t \cos(\theta t - \omega). \tag{8.15}$$

Величина A, зависящая от начальных условий, характеризует начальную амплитуду, и $r = \sqrt{c/a}$ определяет, возрастает ($r > 1$) или убывает амплитуда с течением времени. Если $r = 1$, то $x_o(t)$ совершает регулярные колебания постоянной амплитуды и периодом $T = 2\pi\theta$.

8.3.3 Решение неоднородного уравнения

Из предыдущих рассуждений следует, что справедлива [16]

Теорема 37 Решение разностного уравнения второго порядка

$$ax_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = g(t)$$

имеет вид

$$x_t = x_o + \tilde{x}, \tag{8.16}$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения (8.10), а x_o — общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{x}$ — частное решение неоднородного уравнения.

Решение (8.16) принимает вид

$$x_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + \tilde{x}, \tag{8.17}$$

когда λ_1 и λ_2 оба действительны и различны;

$$x_t = (A_1 + A_2 t)\lambda^t + \tilde{x}, \tag{8.18}$$

при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -b/(2a)$;

$$x_t = r^t(B_1 \cos\theta t + B_2 \sin\theta t) + \tilde{x}, \tag{8.19}$$

или

$$x_t = Ar^t \cos(\theta t - \omega) + \tilde{x}, \tag{8.20}$$

если λ_1 и λ_2 — комплексные корни уравнения $P(\lambda) = 0$.

Пример 46 Рассмотрим задачу Коши

$$x_{t+2} + 4x_{t+1} + 3x_t = 8; \quad x_0 = 3, \quad x_1 = 5.$$

Характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$ имеет действительные различные корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$. Согласно случаю I из раздела 8.3.1,

$$\tilde{x} = \frac{d}{a+b+c} = \frac{8}{1+4+3} = 1.$$

Решение (8.17) неоднородного уравнения принимает вид

$$x_t = A_1(-3)^t + A_2(-1)^t + 1.$$

Учитывая начальные условия, получаем:

$$t = 0: \quad x_0 = A_1(-3)^0 + A_2(-1)^0 + 1 = A_1 + A_2 + 1 = 3,$$

$$t = 1: \quad x_1 = A_1(-3)^1 + A_2(-1)^1 + 1 = -3A_1 - A_2 + 1 = 5.$$

Отсюда находим $A_1 = -3$ и $A_2 = 5$, и, таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$x_t = 1 - 3(-3)^t + 5(-1)^t.$$

Пример 47 Рассмотрим задачу Коши

$$x_{t+2} + 4x_{t+1} + 4x_t = 9; \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 3.$$

Характеристическое уравнение $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ дает $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Применяя случай I из раздела 8.3.1 и формулу (8.18), получаем решение в виде

$$x_t = (A_1 + A_2 t)(-2)^t + 1 = (1 - 2t)(-2)^t + 1,$$

где $A_1 = 1$, $A_2 = -2$ определяются из начальных условий.

Пример 48 Рассмотрим задачу Коши

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + 10x_t = 9; \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 3.$$

Корни характеристического уравнения $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ являются комплексно-сопряженными: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$. Частное решение $\tilde{x} = 1$ находится так же, как в предыдущих примерах. В соответствии с (8.19) имеем

$$x_t = r^t(B_1 \cos\theta t + B_2 \sin\theta t) + 1,$$

где $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{10} \approx 3,16$ и $\theta = \operatorname{arctg}\beta/\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71,56$. Следовательно,

$$x_t = (3,16)^t \left(B_1 \cos 71,56t + B_2 \sin 71,56t\right) + 1.$$

Учитывая начальные условия, получаем:

$$t = 0: \quad x_0 = B_1 + 1 = 2 \;\Rightarrow\; B_1 = 1,$$

$$t = 1: \quad x_1 = 3,16\,(0,3163 + 0,9486B_2) + 1 = 3 \;\Rightarrow\; B_2 \approx 0,333.$$

В итоге имеем

$$x_t = (3,16)^t(\cos 71,56t + 0,333 \sin 71,56t) + 1.$$

В другой форме (8.20) решение будет иметь вид

$$x_t = Ar^t \cos(\theta t - \omega) + 1 =$$

$$= 1,05 \cdot (3,16)^t \left(\cos 71,56t - 18,435\right) + 1,$$

где $\omega = \operatorname{arctg}(B_2/B_1) \approx \operatorname{arctg}(0,333) \approx 18,435$, а $r \approx 3,16$, как и ранее.

8.4 Разностные уравнения высших порядков

Разностное уравнение n-го ($n > 2$) порядка имеет вид:

$$a_0 x_{t+n} + a_1 x_{t+n-1} + \ldots + a_n x_t = g(t), \tag{8.21}$$

где a_0 и a_n отличны от нуля. Задача Коши для (8.21) должна быть дополнена заданными n начальными условиями.

Не теряя общности, мы можем задать $a_0 = 1$. При $g(t) = 0$ мы получаем аналогию с ОДУ.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^{t+n} + a_1 \lambda^{t+n-1} + \ldots + a_n \lambda^t =$$

$$= \lambda^t (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n) = \lambda^t P(\lambda) = 0, \tag{8.22}$$

где $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ — характеристический полином n-й степени, имеющий n корней, которые могут быть действительными или комплексными, различными или кратными.

Решением разностного уравнения для n различных корней будет

$$x_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \ldots + A_n \lambda_n^t. \tag{8.23}$$

Если некоторый корень λ_j имеет кратность m_j, то

$$x_t = \lambda_j^t (A_{1j} + A_{2j} t + \ldots + A_{mj} t^{m_j - 1}). \tag{8.24}$$

Если корни комплексные, но различные, они образуют сопряженные пары и каждая пара имеет вид (8.14)

$$r^t (B_1 \cos \theta t + B_2 \sin \theta t). \tag{8.25}$$

Если некоторый комплексный корень λ_j имеет кратность m_j, то решением будет

$$r_j^t \left(p_j(t) \cos \theta t + q_j(t) \sin \theta t \right), \tag{8.26}$$

$$p_j(t) = B_{1j} + B_{2j} t + \ldots + B_{mj} t^{m_j - 1},$$

$$q_j(t) = C_{1j} + C_{2j}t + \ldots + C_{mj}t^{m_j-1},$$

где B_{ij} и C_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m_j)$ — произвольные константы.

8.5 Условия устойчивости

Определение 59 *Точка равновесия x_e устойчива, если каждое решение, начинающееся в точке x_0 близко к ней, останется близким к ней и дальше. Формально говорят, что x_e устойчиво, если $\forall\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$|x_0 - x_e| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_e| < \varepsilon \;\; \forall n > 0. \tag{8.27}$$

8.5.1 Устойчивость разностных уравнений первого порядка

Напомним, что решением уравнения $x_{t+1} = ax_t + b$ при заданном x_0 будет

$$x_t = a^t(x_0 - \tilde{x}) + \tilde{x}.$$

Динамическая система устойчива, если

$$x_t \to x_e \equiv \tilde{x} \;\text{ при }\; t \to \infty.$$

Чтобы это выполнялось, требуется $|a| < 1$.

Если $0 < a < 1$, то $a^t \to 0$ при $t \to \infty$ положительными убывающими шагами.

Например, если $a = 1/2$, то

$$a^t = 1,\; \frac{1}{2},\; \frac{1}{4},\; \frac{1}{8},\; \frac{1}{16} \;\text{ при }\; t = 0,\; 1,\; 2,\; 3,\; 4,$$

другими словами, $(1/2)^t$ стремится к нулю убывающими шагами (рис. 8.3а).

Если $-1 < a < 0$, то a^t проскакивает положение равновесия x_e, будучи попеременно то положительной то отрицательной величиной, приближаясь к нему (рис. 8.3б).

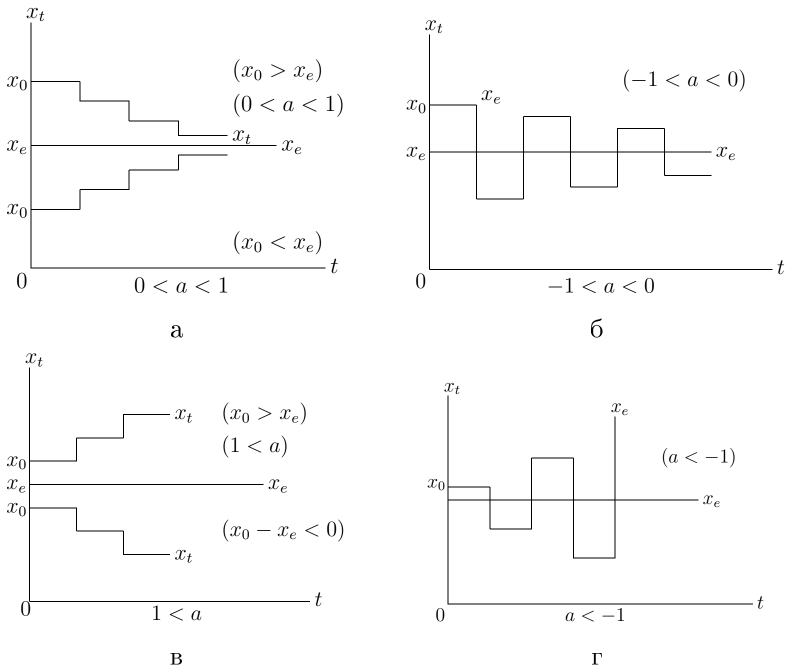


Рис. 8.3: $x_t = a^t(x_0 - x_e) + x_e$

Например, если $a = -1/2$, то

$$a^t = 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ \text{ при }\ t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

При $a > 1$ a^t будет неограниченно возрастать, отклоняясь от x_e все больше и больше (рис. 8.3в), и, если $a < -1$, a^t будет отклоняться от x_e все больше и больше то положительными, то отрицательными шагами (рис. 8.3г).

8.5.2 Устойчивость разностных уравнений второго порядка

Устойчивость зависит от корней характеристического уравнения $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, т. е. от

$$\lambda = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Случай (i): $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Имеем два действительных и различных корня, и для устойчивости требуется $|\lambda_i| < 1$ $(i = 1, 2)$, что влечет условие $|\lambda_1 \lambda_2| = |c/a| < 1$.

Случай (ii): $\Delta = 0$. Для устойчивости требуется $|\lambda < 1|$, так как элемент λ^t доминирует над $A_2 t$ в решении уравнения $x_o(t) = \lambda^t(A_1 + A_2 t)$.

Случай (iii): $\Delta < 0$. Для устойчивости требуется $|r| < 1$, т. е. $-1 < \sqrt{c/a} < 1$, так как r^t при $|r| < 1$ будет подавлять колебания, вызванные членом $(B_1 \cos\theta t + B_2 \sin\theta t)$. Отметим, что для устойчивости должно выполняться

$$\lambda_1 \lambda_2 = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \lambda\overline{\lambda} = \alpha^2 + \beta^2 = r^2 < 1.$$

8.5.3 Устойчивость разностных уравнений n-го порядка

Рассмотрим разностное уравнение n-го порядка

$$x_{t+n} + a_1 x_{t+n-1} + \ldots + a_n x_t = 0 \tag{8.28}$$

с соответствующим характеристическим многочленом $P(\lambda)$.

Условиями устойчивости являются $|\lambda_j| < 1$ для всех j в случае действительных и различных корней $P(\lambda)$, и $|r| < 1$ — в случае комплексных корней.

Теорема Шура [2] часто используется для проверки этих условий устойчивости. Для использования теоремы следует выписать определитель Δ_n по следующему правилу:

$$
\Delta_n = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\
a_1 & 1 & & & 0 & & & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\
a_{n-1} & & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & a_n \\
\hline
a_n & 0 & & 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\
a_{n-1} & & & 0 & & & & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\
a_1 & & & a_n & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right| =
$$

$$
= \left|\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{array}\right|.
$$

Пусть Δ_1 будет Δ_n, где сохраняются только элементы первой строки и первого столбца каждой подматрицы A_i и $\bar{A}_i$, $(i = 1, 2)$; Δ_2 будет Δ_n, где сохраняются только элементы первых двух строк и первых двух столбцов каждой подматрицы и так далее:

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_n \\ a_n & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \left|\begin{array}{cc|cc}
1 & 0 & a_n & a_{n-1} \\
a_1 & 1 & 0 & a_n \\
\hline
a_n & 0 & 1 & a_1 \\
a_{n-1} & a_n & 0 & 1
\end{array}\right|,
$$

и т. д. Теорема Шура гласит, что $|\lambda_i| < 1$ для всех i, если все величины $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ положительны.

8.6 Заключительные замечания

Эта глава была посвящена краткому рассмотрению разностных уравнений первого, второго и высших порядков, линейных и нелинейных. Изложение было кратким из-за схожести их с ОДУ. В то же время были рассмотрены основные вопросы, которые полезны для понимания динамических систем.

Наконец, это будет полезным — иметь в виду различия между решениями ОДУ и РУ. Для случая линейных уравнений второго порядка, который рассмотрен для определенности, они обобщены в табл. 1.

Таблица 1. Вид решений обыкновенных дифференциальных (ОДУ) и разностных (РУ) линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

	ОДУ	РУ
	$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$	$ax_{t+2} + bx_{t+1} + cx_t = 0$
$P(\lambda)$	$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ $\lambda = \frac{1}{2}a(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$	$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ $\lambda = \frac{1}{2}a(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$
$\Delta > 0$	$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$	$x(t) = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$
$\Delta = 0$	$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t}$	$x(t) = (A_1 + A_2 t)\lambda^t$
$\Delta < 0$	$x(t) = e^{\alpha t}(B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t)$ или $x(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + \omega)$	$x_t = r^t(B_1 \cos \theta t + B_2 \sin \theta t)$ или $x_t = r^t A \cos(\theta t - \omega)$

Глава 9

Системы разностных уравнений первого порядка

Системы разностных уравнений нуждаются лишь в кратком рассмотрении ввиду их сходства с системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В этой главе мы кратко обсудим линейные системы разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, их решения в различных случаях, сведение к системам первого порядка и условия устойчивости.

9.1 Линейные системы первого порядка

Задача Коши для нормальной однородной системы имеет вид

$$x_{t+1} = Ax_t; \quad x(0) = x_0, \tag{9.1}$$

а для неоднородной —

$$x_{t+1} = Ax_t + b; \quad x(0) = x_0, \tag{9.2}$$

где A — $n \times n$ вещественная матрица.

Теорема 38 Решение (9.1) имеет вид

$$x_t = A^t x_0. \tag{9.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Интегрируя (9.1) по $t = 0, 1, \ldots$, получим

$$\begin{aligned} &x_1 = Ax_0, \\ &x_2 = Ax_1 = A^2 x_0, \\ &\vdots \\ &x_t = A^t x_0 \quad \forall t, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Если A — диагонализируемая, что соответствует случаям попарно различных собственных значений или кратных, арифметическая кратность которых равна геометрической, то (9.3) может быть записано в более удобной форме по следующей теореме.

Теорема 39 Если A — диагонализируемая, то решение (9.3) может быть записано в виде

$$\begin{gathered} x_t = A^t x_0 = T\Lambda^t T^{-1} x_0 = \\ = c_1 v_1 \lambda_1^t + c_2 v_2 \lambda_2^t + \ldots + c_n v_n \lambda_n^t, \end{gathered} \tag{9.4}$$

где $T = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — невырожденная матрица собственных векторов, отвечающих собственным значениям λ_j ($j = \overline{1, n}$) матрицы A, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Если A — диагонализируемая, то существует невырожденная матрица T, приводящая A к ее жордановой форме Λ:

$$\Lambda = T^{-1}AT, \quad A = T\Lambda T^{-1},$$

причем

$$A^2 = (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1}) = T\Lambda^2 T^{-1}, \quad A^3 = T\Lambda^3 T^{-1}$$

и так далее. Тогда имеем:

$$x_t = A^t x_0 = T\Lambda^t T^{-1} x_0 = c_1 v_1 \lambda_1^t + c_2 v_2 \lambda_2^t + \ldots + c_n v_n \lambda_n^t,$$

где c_j — элемент j вектора $c = T^{-1}x_0$ $(1 \le j \le n)$; v_j — j-й собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_j.

В координатной записи (9.4) для каждого $x_i(t)$ получим

$$x_i(t) = k_{i1}\lambda_1^t + k_{i2}\lambda_2^t + \ldots + k_{in}\lambda_n^t, \tag{9.5}$$

где постоянная $k_{ij} = c_j v_{ij}$ определяется начальными условиями, а v_{ij} — i-й элемент собственного вектора v_j $(i, j = \overline{1, n})$.

Теорема 40 Решение задачи Коши (9.2) имеет вид

$$x_t = A^t(x_0 - \tilde{x}) + \tilde{x} \tag{9.6}$$

или

$$x_t = T\Lambda T^{-1}(x_0 - \tilde{x}) + \tilde{x}, \tag{9.7}$$

где частное решение $\tilde{x} = (I - A)^{-1}b = x_e$ является положением равновесия, I — единичная матрица $(n \times n)$, при условии, что A в (9.6) диагонализируемая, и $(I - A)$ — невырожденная.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Интегрируя, получим

$$x_1 = Ax_0 + b,$$

$$x_2 = Ax_1 + b = A(Ax_0 + b) + b + A^2x_0 + Ab + b,$$

$$x_3 = A^3x_0 + (I + A + A^2)b,$$

и так для любого t,

$$x_t = A^t x_0 + (I + A + \ldots + A^{t-1})b.$$

При этом

$$(I + A + \ldots + A^{t-1}) = (I - A^t)(I - A)^{-1},$$

так как

$$(I + A + \ldots + A^{t-1})(I - A) = I - A^t, \quad \det(I - A) \neq 0.$$

Учитывая это, имеем

$$x_t = A^t x_0 + (I - A^t)(I - A)^{-1} b =$$

$$= A^t \left[x_0 - (I - A)^{-1} b\right] + (I - A)^{-1} b = A^t (x_0 - \tilde{x}) + \tilde{x}.$$

Так как A — диагонализируемая по предположению, то преобразование подобия дает

$$T^{-1} A T = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

а (9.6) с учетом

$$A = T \Lambda T^{-1}, \quad A^2 = T \Lambda^2 T^{-1}, \quad \ldots, \quad A^t = T \Lambda^t T{-1},$$

дает

$$x_t = A^t (x_0 - \tilde{x}) + \tilde{x} = T \Lambda^t T^{-1} (x_0 - \tilde{x}) + \tilde{x},$$

что совпадает с (9.7).

А л ь т е р н а т и в н о е   д о к а з а т е л ь с т в о

Более простое доказательство этой теоремы может быть получено при использовании отклонения x_t от точки равновесия $x_e \equiv \tilde{x}$, определяемого как $y_t = x_t - x_e$ или $x_t = y_t + x_e$, где

$$x_e = (I - A)^{-1} b.$$

Подставляя в (9.2) выражение для x_t, получим:

$$y_t + x_e = A(y_{t-1} + x_e) + b,$$

откуда следует

$$y_t = Ay_{t-1} - (I - A)x_e + b,$$

или

$$y_t = Ay_{t-1},$$

с учетом $(I - A)x_e = b$.

Таким образом, получили однородную систему (9.1), решение которой имеет вид $y_t = A^t y_0$.

Обратный переход к x_t дает (9.7), что завершает доказательство.

Пример 49 Решим систему

$$x_{t+1} = Ax_t, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0,$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение, в соответствии с (9.4), имеет вид

$$x_t = T\Lambda^t T^{-1} x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} 3^t - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2^t = c_1 v_1 \lambda_1^t + c_2 v_2 \lambda_2^t.$$

Пример 50 Решим систему

$$x_{t+1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$$

и

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\tilde{x} = (I - A)^{-1} b = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_0 - \tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}(x_0 - \tilde{x}) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}.$$

Решение, в соответствии с (9.7), имеет вид

$$x_t = T\Lambda^t T^{-1} + \tilde{x} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^t & 0 \\ 3 & (-3)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1)^t - \frac{9}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-3)^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 v_1 \lambda_1^t + c_2 v_2 \lambda_2^t + \tilde{x}.$$

9.2 Жорданова каноническая форма

Вышеприведенные теоремы справедливы для всех случаев. Случай, когда матрица A имеет n различных (вещественных или комплексных) собственных значений, очевиден: n соответствующих собственных векторов линейно независимы и A полностью диагонализуема. Теоремы справедливы для случая кратных собственных значений, для которых арифметическая кратность равна геометрической: A полностью диагонализуема, так как n собственных векторов линейно независимы. Данные теоремы также справедливы и для случая вырожденной матрицы A, когда для некоторого собственного значения λ_j, повторяющегося m_j раз, геометрическая кратность меньше, чем m_j: всегда может быть найдена невырожденная матрица T, приводящая A к блочно-диагональному виду, т. е. к ее жордановой канонической форме Λ, где $T^{-1}AT = \Lambda$ и Λ — блочно-диагональная матрица вида

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\lambda_1 & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \lambda_k & & & \\
\hline
& & & \lambda_j & 1 & 0 \\
& & & & \lambda_j & 1 \\
& & & & & \lambda_j
\end{array}\right).$$

Полная диагонализация соответствует частному случаю, когда $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Канонические формы проще для анализа, особенно когда проблема устойчивости и качественные решения сложны: исходная и каноническая системы топологически эквивалентны.

Мы исследуем случаи вещественных различных, кратных и комплексных корней уравнения $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ отдельно.

9.2.1 Случай вещественных различных собственных значений

В этом случае собственные векторы линейно независимы и A полностью диагонализируема:

$$TP^{-1}AT = \Lambda.$$

Для заданной системы (9.1) каноническая форма может быть получена при помощи замены переменных $x_t \equiv Ty_t$ (или $y_t = T^{-1}x_t$). Подстановка этой замены в (9.1) дает:

$$x_t = Ty_t = ATy_{t-1} \equiv Ax_{t-1},$$

откуда

$$y_t = T^{-1}ATy_{t-1} \equiv \Lambda y_{t-1}, \tag{9.8}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Решение системы (9.8) есть

$$y_t = \Lambda^t y_0,$$

т. е. $y_i(t) = y_{i0}\lambda_i^t$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример 51

$$x_t = Ax_{t-1}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В жордановой канонической форме система $x_t = Ax_{t-1}$ имеет вид

$$y_t = \Lambda^t y_0 = \begin{pmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

где

$$y_0 = T^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование к $x_t = Ty_t$ дает

$$x_t = Ty_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} 3^t - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2^t.$$

9.2.2 Случай кратных собственных значений

Если матрица A системы (9.1) имеет некоторое собственное значение λ_j, повторяющееся m_j раз, то ее решение в жордановой канонической форме, получаемой при замене $x_t = Ty_t$ (или $y_t = T^{-1}x_t$), имеет вид

$$y_t = T^{-1}ATy^{t-1} \equiv \Lambda y_{t-1},$$

где

$$\Lambda = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \lambda_j & 1 & 0 \\ & 0 & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & & \lambda_j \end{array} \right).$$

Для простоты рассмотрим случай 2×2.

Характеристическое уравнение

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

дает

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

и, согласно (9.8), получаем

$$y_t = \Lambda y_{t-1} \equiv \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y_{t-1}, \tag{9.9}$$

где $x_t = Ty_t$, а столбцы матрицы $T = (v_1, v_2)$ выбраны так, что

$$(A - \lambda I)v_1 = 0,$$

$$(A - \lambda I)v_2 = v_1.$$

Отметим, что в общем случае

$$(A - \lambda I)v_j = v_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, m_j,$$

где m_j — арифметическая кратность λ_j.

Таким образом, (9.8) приведена к системе разностных уравнений первого порядка (9.9), решение которой имеет вид

$$y_t = \Lambda^t y_0 = \begin{pmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix} y_0,$$

где $y_0 = T^{-1}x_0$. Очевидно, система (9.9) имеет треугольную матрицу, последнее уравнение

$$y_2 = \lambda^t y_{20}$$

может быть решено непосредственно и подставлено в первое (в общем случае, в предпоследнее, затем в предпредпоследнее и так далее).

Пример 52 Решить систему

$$x_t = Ax_{t-1}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = 0$$

дает кратный корень $\lambda = 2$ с собственным вектором

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{удовлетворяющим} \quad (A - \lambda I)v_1 = 0,$$

и присоединенным вектором v_2, который находится из уравнения

$$(A-\lambda I)v_2 = v_1,$$

или

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ T = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1},$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ T^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = y_0.$$

Решение имеет вид

$$y_t = \Lambda^t y_0 = \begin{pmatrix} 2^t & 2^{t-1}t \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3t/2 \\ 3 \end{pmatrix} 2^t.$$

Очевидно, что второе уравнение может быть решено непосредственно, так как

$$y_2(t) = 2^t y_{20} = 2^t \cdot 3,$$

и подставлено в первое уравнение:

$$y_1(t) = 2y_1(t-1) + y_2(t-1)$$

или

$$y_1(t+1) = 2y_1(t) + 2^t \cdot 3.$$

Решение последнего уравнения есть

$$y_1(t) = \left(y_{10} + y_{20}\frac{t}{2}\right) 2^t = \left(-1 + 3\frac{t}{2}\right) 2^t,$$

где

$$y_0 = vT^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}.$$

9.2.3 Случай комплексных собственных значений

Если есть комплексные собственные значения λ_j матрицы A системы $x_t = Ax_{t-1}$, то они существуют парами: $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$, где α_j и β_j — вещественные числа и $i^2 = -1$.

Для простоты рассмотрим случай 2×2. Характеристическое уравнение

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

дает $\lambda = \alpha \pm i\beta$, где α и β — вещественные числа. Переход к полярным координатам

$$\alpha = r\cos\theta, \quad \beta = r\sin\theta,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{9.10}$$

и в канонической форме, при помощи замены $x_t = Ty_t$, система (9.1) приводится к системе

$$y_t = \Lambda y_{t-1}, \tag{9.11}$$

с решением

$$y_t = \Lambda^t y_0 = r^t \begin{pmatrix} \cos\theta t & \sin\theta t \\ -\sin\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{9.12}$$

где $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(\beta/\alpha)$, $c = T^{-1}x_0 = y_0$.

Пример 53 Решить систему

$$x_t = Ax_{t-1}, \text{ где } A = r\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $P(\lambda) = 0$ дает $\lambda = 1 \pm i$, и соответствующие собственные векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$v_2 = \overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

из (9.10)–(9.12) получаем:

$$x_t = A^t x_0 = T \Lambda^t T^{-1} x_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^t & 0 \\ 0 & (1-i)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4})t & \sin(\frac{\pi}{4})t \\ -\sin(\frac{\pi}{4})t & \cos(\frac{\pi}{4})t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{\pi}{4})t + 4\sin(\frac{\pi}{4})t \\ -2\sin(\frac{\pi}{4})t + 4\cos(\frac{\pi}{4})t \end{pmatrix},$$

где $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(1) = 45^\circ = \pi/4$ и $r = 1$ в уравнении (9.12), что в точности то же самое, что и в скалярном случае.

Предыдущее обсуждение может быть сформулировано в виде теоремы, при этом для простоты рассмотрим системы на плоскости.

Теорема 41 Система $x_t = Ax_{t-1}$ может быть приведена к своей канонической форме

$$y_t = \Lambda y_{t-1},$$

решение которой есть:

$$y_t = \Lambda^t y_0,$$

где

(i) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ для случая вещественных различных собственных значений;

(ii) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ для случая вещественных кратных собственных значений;

(iii) $\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ для случая комплексных собственных значений и

$\Lambda^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix}$ для (i),

$\Lambda^t = \begin{pmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix}$ для (ii),

$\Lambda^t = r^t \begin{pmatrix} \cos\theta t & \sin\theta t \\ -\sin\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix}$ для (iii).

На практике для системы $x_t = Ax_{t-1}$ решение принимает форму:

(i) $x_t = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j \lambda_j^t$ для случая различных собственных значений;

(ii) $x_t = \sum_{j=1}^{h} c_j v_j \lambda_j^t + \left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{m-1}^{m-1}\right) \lambda_p^t$ в случае некоторого собственного значения λ_p, повторяющегося m раз и

(iii) $x_t = r^t \begin{pmatrix} x_{10}\cos\theta t + x_{20}\sin\theta t \\ \\ x_{20}\cos\theta t - x_{10}\sin\theta t \end{pmatrix}$ для каждой пары собственных значений $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$, $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(\beta_j/\alpha_j)$, как в примере 53.

9.3 Приведение к системе первого порядка

Разностное уравнение n-го порядка вида

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \ldots + a_n x_{t-n}, \tag{9.13}$$

с заданными n начальными условиями может быть приведено к системе разностных уравнений первого порядка при помощи следующего переопределения переменных

$$y_1(t) = x_{t-n} = y_2(t-1),$$

$$y_{n-1}(t) = y_n(t-1),$$

$$y_n(t) = x_t.$$

Перепишем (9.13) в новых переменных:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_n & \ldots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t-1) \\ \vdots \\ y_n(t-1) \end{pmatrix} \tag{9.14}$$

или

$$y_t = Ay_{t-1}.$$

Решение этой системы, см. (9.3), имеет вид:

$$y_t = A^t y_0 = T\Lambda^t T^{-1} y_0.$$

Матрица A в (9.14) играет роль фундаментальной матрицы уравнения (9.13).

9.4 Условия устойчивости

9.4.1 Локальная устойчивость

Из (9.3), (9.4) и (9.5) следует, что решение системы (9.1)

$$x_t = A^t x_0$$

имеет вид

$$x_t = A^t x_0 = T\Lambda^t T^{-1} x_0 = c_1 v_1 \lambda_1^t + \ldots + c_n v_n \lambda_n^t,$$

или в канонической форме

$$y_t = \Lambda^t y_0.$$

Условия асимптотической устойчивости записываются просто

$$|\lambda_j| < 1 \quad \forall j,$$

т. е. все собственные значения λ_1, λ_2,…,λ_n лежат внутри единичного круга, так как

$$\lim_{t\to\infty} y_j(t) = \lim_{t\to\infty} \lambda_j^t y_{j0} = 0.$$

Это фундаментальное условие справедливо для всех случаев. Для случая вещественных корней это очевидно независимо от того, являются ли эти корни λ_i различными или кратными. В случае комплексных корней условия устойчивости задаются неравенством $|r| < 1$ для решения

$$x_t = r^t \begin{pmatrix} \cos\theta t & \sin\theta t \\ -\sin\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix},$$

см. (9.12). Но $\lambda = \alpha \pm i\beta$ в комплексном случае, а

$$|\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda} = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = r^2 = \det A,$$

т. е. $|\lambda| = r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, так как радиус r является положительным (рис. 8.2, стр. 189).

Таким образом, $|\lambda| < 1$ тогда и только тогда, когда $|r| < 1$, т. е. для устойчивости все собственные значения должны лежать внутри единичного круга (круга радиуса $r = 1$).

Заметим, что при $\lambda_j > 0$, при возрастании t движение к положению равновесия (при $0 < \lambda_j < 1$) или от него (при $\lambda_j > 1$) происходит с сохранением направления, так как λ_j^t в (9.5) положительны для всех t. Однако, когда $\lambda_j < 0$, траектория меняет направление при движении к положению равновесия (при $-1 < \lambda_i < 0$) или от него (при $\lambda_i < -1$), так как λ_j^t в (9.5) попеременно положительны (для четных t) и отрицательны (для нечетных t).

Это фундаментальное условие устойчивости $|\lambda_j| < 1$ $\forall i$ содержится в различных формах во множестве теорем. Приведем некоторые из них.

Теорема 42 *(Теорема Шура)* Корни характеристического уравнения

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

будут меньше единицы по абсолютному значению тогда и только тогда, когда следующие определители положительны:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & c_n \\ c_n & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_2 = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c_n & c_{n-1} \\ c_1 & 1 & 0 & c_n \\ \hline c_n & 0 & 1 & c_1 \\ c_{n-1} & c_n & 0 & 1 \end{array}\right| > 0,$$

$$\ldots$$

$$
\Delta_n = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
1 & & & 0 & c_n & & \dots & c_1 \\
c_1 & 1 & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \ddots & \\
c_{n-1} & & \dots & 1 & 0 & & & c_n \\
\hline
c_n & & & & 1 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\
c_{n-1} & & & 0 & & 1 & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & & \ddots & \\
c_1 & & & c_n & 0 & & & 1
\end{array}\right| > 0.
$$

На практике, более легким для проверки (хотя более сильным, чем необходимо) является условие $\|A\| < 1$, где $\|A\|$ — любая норма матрицы A, например наибольшая сумма элементов столбцов. Это условие легко получить, если учесть, что по определению

$$Av = \lambda v.$$

Беря норму от обеих частей

$$\|A\| \; \|v\| \geq |\lambda| \; \|v\|,$$

получаем

$$|\lambda| \leq \frac{\|A\| \; \|v\|}{\|v\|} = \|A\| < 1.$$

Это неравенство относится к тому, что иногда называют «быстрой проверкой» условий устойчивости.

Теорема 43 Для системы (9.1) условиями асимптотической устойчивости являются

$$|\det A| < 1, \quad |\mathrm{tr}\ A| < n.$$

Доказательство этого легко получить, если вспомнить, что

$$\det A = \det \Lambda = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad |\lambda_j| < 1 \Rightarrow |\det A| < 1;$$

$$\mathrm{tr}\ A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad |\lambda_j| < 1 \Rightarrow |\mathrm{tr}\ A| < n.$$

Теорема 44 Для системы (9.1) на плоскости с характеристическим многочленом

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta$$

условиями асимптотической устойчивости являются

$$|P(0)| < 1, \quad P(-1) > 0, \quad P(1) > 0,$$

из которых следует

$$|\delta| < 1, \quad |\tau| < 1 + \delta.$$

Эти условия легко получить, если заметить, что квадратное уравнение $P(\lambda) = 0$ описывает выпуклую кривую, так как $P''(\lambda) = 2 > 0$, и, если λ_1 и λ_2 — его два вещественных корня, то по определению $P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = 0$. В этих точках кривая $P(\lambda) = 0$ пересекает ось λ, и для устойчивости эти точки должны находиться в интервале $(-1, 1)$:

$$-1 < \lambda_1, \quad \lambda_2 < 1.$$

Очевидно, что $P(\lambda_j) > 0$ для всех $|\lambda_j| \geq 1$ и, в частности, для $\lambda_j = \pm 1$. Таким образом, если система устойчива, т. е., если

$$|\lambda_1| < 1 \ \text{ и } \ |\lambda_2| < 1,$$

то $P(-1) > 0$ и $P(1) > 0$. Но

$$P(1) = 1 - \tau + \delta > 0 \ \text{ и } \ P(-1) = 1 + \delta > 0,$$

что совместно означает $|\tau| < 1 + \delta$. Наконец,

$$P(0) = \delta = \lambda_1 \lambda_2,$$

следовательно, $|P(0)| = |\delta| < 1$.

9.4.2 Глобальная устойчивость

Имеется следующая теорема [16].

Теорема 45 Система $x_t = Ax_{t-1}$ глобально устойчива тогда и только тогда, когда существует симметричная положительно определенная матрица B такая, что матрица

$$C = A^T BA - B,$$

отрицательно определена (здесь A^T — транспонированная матрица A).

Д о к а з а т е л ь с т в о

Возьмем функцию Ляпунова $V(x_t)$ вида

$$V(x_t) = x_t^T Bx_t,$$

где B — положительно определённая, x_t^T — транспонированная векторная функция x_t. Легко проверить, что $V(x_t)$ удовлетворяет условиям для функции Ляпунова ($V \geq 0$, $\Delta V < 0$).

$$\Delta V(x_t) \equiv V(x_{t+1}) - V(x_t) = x_{t-1}^T Bx_{t+1} - x_t^T Bx_t.$$

Подстановка $x_{t+1} = Ax_t$ дает

$$\Delta V(x_t) = x_t^T A^T BAx_t - x_t^T Bx_t =$$

$$= x_t^T (A^T BA - B)x_t = x_t^T Cx_t < 0.$$

Справедливо и обратное утверждение.

9.5 Фазовые портреты

Для системы разностных уравнений $x_t = Ax_{t-1}$ на плоскости фазовые портреты строятся так же, как и для линейных систем дифференциальных уравнений, с той разницей, что в данном случае траектории дискретны и соединяются непрерывными кривыми лишь для наглядности. Мы будем анализировать систему для простоты в ее жордановой канонической форме, а не в исходной: фазовые портреты в обоих случаях топологически эквивалентны.

Характеристическое уравнение

$$c(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$$

имеет корни $\lambda = \tau/2 \pm \sqrt{\Delta}/2$, где $\Delta = \tau^2 - 4\delta$. Рассмотрим отдельно три случая в соответствии со знаком Δ.

(i) $\Delta > 0$: два действительных различных корня λ_1, λ_2. Фазовый портрет является:

- устойчивым узлом, если $|\lambda_i| < 1$;
- неустойчивым узлом, если $|\lambda_i| > 1$;
- седлом, если $|\lambda_i| < 1 < |\lambda_j|$ для $i, j = 1, 2$ и $i \neq j$.

(ii) $\Delta = 0$: равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Фазовый портрет — вырожденный узел.

(iii) $\Delta < 0$: $\lambda = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = \tau/2$, $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Если

$$\alpha = 0, \quad \beta \neq 0, \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \beta < 1,$$

фазовый портрет — устойчивый фокус. При $r = \beta > 1$ фазовый портрет — неустойчивый фокус.

Различные случаи, рассмотренные выше, можно резюмировать с использованием параметров τ и δ так же, как это было сделано выше для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$$

с решением $\lambda = \tau/2 \pm \sqrt{\Delta}/2$. Возвращаясь к теореме 44, мы видим, что три условия устойчивости принимают вид

$$|P(0)| = |\delta| < 1, \quad P(1) > 0, \quad P(-1) > 0.$$

Предельные случаи $\Delta = 0$ ($\tau^2 = 4\delta$) и $P(1) = P(-1) = 0$ отделяют устойчивые зоны от неустойчивых.

График функции $\Delta = 0$ представляет собой параболу $\tau^2 = 4\delta$, а $P(1) = 0$ и $P(-1) = 0$ изображаются двумя прямыми линиями:

$$P(1) = 1 - \tau + \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \tau - 1$$

и

$$P(-1) = 1 + \tau + \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = -\tau - 1.$$

Для выполнения условий устойчивости нужно, чтобы τ и δ находились внутри треугольника, вершины которого — точки касания параболы $\tau^2 = 4\delta$ и прямых $\delta = \pm\tau - 1$ и точка пересечения этих прямых, т. е. выше линий $P(1) = 0$ и $P(-1) = 0$. При этом $-1 < \delta < 1$ на вертикальной оси.

Литература

[1] Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / Ю. Н. Бибиков. — Москва: Высшая школа, 1991. — 303 с. — ISBN 5-06-001006-6.

[2] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — Изд. 5-е. — Москва: Физматлит, 2004. — 559 с. — ISBN 5-9221-0524-8.

[3] Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — Изд. 4-е. — Москва: УРСС, 2006. — 376 с. — ISBN 5-484-00399-7.

[4] Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости: учебное пособие / Б. П. Демидович. — Санкт-Петербург: Лань, 2008. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-0891-7.

[5] Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / Н. М. Матвеев. — Санкт-Петербург: Лань, 2003. — 832 с. — ISBN: 5-8114-0476-X.

[6] Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / И. Г. Петровский. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 206 с. — ISBN 978-5-9221-1144-7.

[7] Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для вузов / Л. С. Понтрягин. — Москва: URSS, 2018. — 208 с. — ISBN 978-5-354-01586-3.

[8] Романко, В. К. Разностные уравнения: учебное пособие / В. К. Романко. — Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010. — 112 с. — ISBN 978-5-94774-343-2.

[9] Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений: учебник для университетов / В. В. Степанов. — Изд. 11, испр., обновл. — Москва: URSS, 2016.— 512 с. — ISBN 978-5-382-01622-1.

[10] Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения: учебник для вузов / А. Н. Тихонов, А. В. Васильева, А. Г. Свешников. — Москва: Физматлит, 2002. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-0277-3.

[11] Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / М. В. Федорюк. — Москва: Наука, 1985. — 448 с. — ISBN 978-5-9710-4791-9.

[12] Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — Москва: URSS, 2015. — 240 с. — ISBN 978-5-9710-1846-9.

[13] Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник для вузов / А. Ф. Филиппов. — Москва: URSS, 2015. – 240 с. — ISBN 978-5-9710-2029-5.

[14] Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Ф. Хартман. — Москва: Мир, 1970. — 719 с.

[15] Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — Москва: Наука, 1965. – 424 с.; Москва: URSS, 2019. — 208 с. — ISBN 978-5-382-01844-7.

[16] Tu, P. N. V. Dynamical Systems. An Introduction with Applications in Economics and Biology / P. N. V. Tu. — Berlin: Springer–Verlag, 1994. — 314 p. — ISBN 3-540-57661-4.

Учебное издание

Соболев Владимир Андреевич,
Щепакина Елена Анатольевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор *А.С. Никитина*
Компьютерная верстка *А.С. Никитиной*

Подписано в печать 09.06.2021. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 14,0.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 6(Р2У)/2021.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА» (САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.