МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Ю.Н. ГОРЕЛОВ, Л.В. КУРГАНСКАЯ*

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ)

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2023

УДК 519.62(075)
ББК В192.321я7
Г687

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Ю. М. Заболотнов,
д-р техн. наук, проф. П. К. Кузнецов

***Горелов, Юрий Николаевич***

Г687 **Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге-Кутты):** учебное пособие / *Ю.Н. Горелов, Л.В. Курганская.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 76 с.

**ISBN 978-5-7883-1890-5**

Изложены теоретические основы и практические подходы к программной реализации численных методов решения задачи Коши или начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем. Рассматривается процедура поэтапной разработки программной реализации численного решения с применением формул Рунге-Кутты, которые получили наиболее широкое применение в вычислительной математике для решения широкого круга прикладных задач в различных областях естествознания, техники и экономики.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем и специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Подготовлено на кафедре дифференциальных уравнений и теории управления.

УДК 519.62(075)
ББК В192.321я7

ISBN 978-5-7883-1890-5

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы для значительного числа прикладных задач в различных областях естествознания (механика, физика и др.), техники и экономики являются математическими моделями. Как правило, эти задачи практически исключают получение аналитических решений. В первую очередь это относится к нелинейным дифференциальным уравнениям либо к системам линейных дифференциальных уравнений высокой размерности с переменными коэффициентами. В таких случаях единственная возможность их исследования или решения обычно связана с применением численных методов.

Задачи, математические модели которых содержат соответствующие дифференциальные уравнения, во многих случаях сводятся к численному решению задачи Коши или некоторого набора таких задач. Простейшим примером задачи Коши является начальная задача для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{0.1}$$

для которого требуется найти частное решение $y(x)$ на интервале $[x_0, x_f]$, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$y(x_0) = y_0, \tag{0.2}$$

где $x_0$ – начальная точка, $y_0$ – начальное значение, а также предполагается, что функция $f(x, y)$ – правая часть уравнения (0.1) – является непрерывной функцией, удовлетворяющей условиям Липшица [1–4]; это оговаривается сейчас и предполагается далее, что $f(x, y)$ такова, что решение задачи (0.1), (0.2) существует и единственно на любом заданном интервале $[x_0, x_f]$. Здесь $x_0 < x_f \le \infty$, хотя в общем случае задачу Коши можно рассматривать и на интервалах $[x_f, x_0]$, когда $-\infty \le x_f < x_0$.

Поскольку отыскание точного решения задачи Коши (0.1), (0.2) в виде $y(x)$ или, по крайней мере, значения $y(x_f)$, как правило, не представляется возможным, то эту задачу приходится решать приближенными методами вычислительной математики, которые в зависимости от формы представления получаемого решения можно разделить на две группы [1–5]:

1) аналитические методы, доставляющие приближенное решение уравнения (0.1) в виде некоторого аналитического выражения;
2) численные методы, доставляющие приближенное решение в виде некоторой таблицы значений искомой функции $y(x)$ в заданных точках $x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, совокупность которых называется сеткой на $[x_0, x_f]$, а каждая точка $x_i$, соответственно, – ее узлами.

В пределах настоящего введения кратко остановимся на первой группе методов, отметив лишь метод представления решения дифференциального уравнения (0.1) в виде отрезка ряда, а также метод последовательных приближений Пикара [1, 5].

В теории дифференциальных уравнений рассматривается задача о представлении решения уравнения (0.1) в виде ряда

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots , \quad (0.3)$$

где $a_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, – некоторые коэффициенты. Если искомое решение можно представить в виде (0.3) и, кроме того, если найти достаточно большое число коэффициентов $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, такое, чтобы абсолютная величина суммы остальных членов оказалась меньше наперед заданной допустимой погрешности, то соответствующий отрезок ряда (0.3) будет приближенным аналитическим представлением искомого решения.

Предположим, что искомое частное решение уравнения (0.1) может быть разложено в ряд Тейлора по степеням разности $x - x_0$:

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)\, y_0^{(1)} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, y_0^{(2)} + \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!}\, y_0^{(n)} + \mathrm{o}(\left| x - x_0 \right|^{n+1}), \qquad (0.4)$$

где $y_0^{(k)} = \left. \dfrac{d^k y(x)}{dx^k} \right|_{x = x_0}$ – производная $k$-го порядка, вычисляемая в точке $x_0$, а $\mathrm{o}(\left| x - x_0 \right|^{n+1})$ – члены разложения степени не ниже $n+1$. Очевидно, что непосредственно из (0.2) следует $a_0 = y_0$, а из (0.1), с учетом (0.2), – $a_1 = y_0^{(1)} = f(x_0, y_0)$. Значения производных $y_0^{(k)}$ для $k \geq 2$ в (0.4), а стало быть, и соответствующие им коэффициенты $a_k$ в (0.3) последовательно вычисляются дифференцированием уравнения (0.1) с учетом ранее полученных значений $y_0^{(k)}$. Например,

$$y_0^{(2)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} + f(x_0, y_0) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \quad \text{и т.д. (см. также [1 – 3]).}$$

Такая процедура определения всех коэффициентов $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, требует существования непрерывных частных производных правой части $f(x, y)$ уравнения (0.1) до порядка $n - 1$. Известно, что если правая часть $f(x, y)$ в окрестности точки

$(x_0, y_0)$ является аналитической функцией своих аргументов, то при значениях $x$, достаточно близких к значению $x_0$, существует единственное решение задачи Коши (0.1), (0.2), которое можно разложить в ряд Тейлора. Тогда любая частичная сумма этого ряда будет приближенным решением рассматриваемой задачи.

Аналогичным образом этот метод применяется и для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше первого, а также для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Еще один аналитический метод построения решения задачи Коши (0.1), (0.2) – метод последовательных приближений. Он состоит в том, что искомое решение $y(x)$ уравнения (0.1) получают как предел последовательности функций $\widetilde{y}_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, которые находятся по рекуррентной формуле

$$\widetilde{y}_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \widetilde{y}_{m-1}(x))\, dx \,. \qquad (0.5)$$

Известно, что в том случае, когда правая часть $f(x, y)$ уравнения (0.1) удовлетворяет условию Липшица по $y$, то независимо от выбора начальной функции $\widetilde{y}_0(x)$ последовательные приближения, вычисляемые по формуле (0.5), сходятся на некотором интервале $[x_0, x_0 + h]$, то есть для некоторого заданного $0 < h < \infty$, к решению задачи Коши (0.1), (0.2). При этом в качестве начального приближения допустимо выбирать любую функцию $\widetilde{y}_0(x)$, достаточно близкую к точному решению, в том числе и в виде какой-либо частичной суммы степенного ряда (0.4).

Если окажется, что $x_0 + h < x_f$, то далее указанная процедура может рассматриваться на подынтервалах $[x_0 + h, x_0 + 2h]$,

$[x_0+2h, x_0+3h]$ и т.д., пока для некоторого $q>1$ не будет выполнено $x_f \le x_0+qh$. Соответственно, решение исходной задачи Коши (0.1), (0.2) в этом случае сводится к последовательному решению аналогичных задач на подынтервалах $[x_0+ih, x_0+(i+1)h]$, $i=0,1,2,\ldots$, с начальными условиями: для $i=0$ с учетом (0.2) – $\hat{y}_{00}=y_0$, а для $i=1,2,3,\ldots$, $\hat{y}_{i0}=\widetilde{y}_{i-1}(x_0+ih)$, где $\widetilde{y}_{i-1}(x)$ – приближенное решение задачи Коши на предыдущем подынтервале $[x_0+(i-1)h, x_0+ih]$.

Отметим, что для разложения решения дифференциального уравнения (0.1) в степенной ряд требуется аналитичность его правой части, но при использовании метода последовательных приближений это необязательно. Поэтому область применения метода последовательных приближений по сравнению первым методом, вообще говоря, более широкая, хотя существенным недостатком здесь является необходимость вычисления на каждой итерации по формуле (0.5) все более громоздких интегралов.

Рассмотрение численных методов решения задачи Коши (0.1), (0.2) обычно начинают с изложения метода Эйлера, имеющего в основном лишь теоретическое значение. Итак, выбрав достаточно малый шаг $h$, построим на некотором интервале $[x_0, x_f]$ равномерную сетку в виде системы равноотстоящих узлов: $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,2,\ldots$. Приближенные значения $y_i \approx y(x_i)$ в методе Эйлера находят последовательно по формулам

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i, y_i),\ i=0,1,2,\ldots \ . \tag{0.6}$$

При этом искомая интегральная кривая $y=y(x)$ заменяется ломанной $M_0M_1M_2\ldots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$, координаты которых вычисляются последовательно по формулам (0.6).

На практике метод Эйлера не применяется, поскольку его точность, как правило, оказывается низкой. В связи с этим более удобным считается двойной просчет, когда расчеты по формулам (0.6) повторяются, но для сетки с шагом $h/2$. Кроме того, в этом случае появляется возможность контролировать точность получаемого решения задачи (0.1), (0.2).

Основная особенность метода Эйлера – как простейшего способа численного решения задачи Коши – связана с тем, что он относится к классу так называемых одношаговых методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. В этих методах на каждом шаге для вычисления приближенного значения $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ на интервале $[x_i, x_{i+1}]$, например, по формулам (0.6), используется только информация, доступная в точке $x = x_i$, то есть значение $y_i \approx y(x_i)$, полученное ранее на предыдущем шаге (а для $i = 0$, согласно (0.2), заданное в виде $y_0 = y(x_0)$). Если значения приближенного решения $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ находят, используя информацию о нем в нескольких узлах: $x_i$, $x_{i-1}$, … , $x_{i-r+1}$ ($r > 1$), то такие методы решения задачи Коши относят к классу многошаговых методов [2–4].

Многие важные вопросы, связанные с численными методами решения дифференциальных уравнений и их систем (а именно: вычислительная устойчивость, глобальная точность, решение жестких дифференциальных систем и т.д.) детально рассматриваются, например, в ряде учебников и монографий [2–4, 6].

В заключение отметим, что настоящее пособие является переработанным и дополненным вариантом учебного пособия [5], содержание которого в основном следовало изложению 2-го тома книги И.С. Березина и Н.П. Жидкова «Методы вычислений» [1].

# 1 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ

## 1.1 Идея метода Рунге-Кутты

Рассмотрим начальную задачу или задачу Коши на заданном интервале $[x_0, x_f]$ [2 – 4], в которой для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.1}$$

требуется найти решение, которое удовлетворяет начальному условию:

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.2}$$

где $x_0$, $y_0$ – некоторые числа, а для функции $f(x, y)$ – правой части этого уравнения – предполагается существование непрерывных частных производных до некоторого порядка $n-1$ в соответствующей области, содержащей точку $(x_0, y_0)$. В этом случае решение уравнения (1.1), по крайней мере, в окрестности точки $x = x_0$ будет иметь непрерывные до $n$-го порядка производные и, стало быть, для него можно записать следующее разложение в ряд Тейлора:

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)\, y_0^{(1)} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, y_0^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\, y_0^{(n)} + \mathrm{o}(\left| x - x_0 \right|^{n+1}), \tag{1.3}$$

где $y_0^{(k)} = \dfrac{d^k y(x)}{dx^k}\Big|_{x=x_0}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, – производные $k$-го порядка от $y(x)$, вычисленные в точке $x = x_0$, а $o(\cdot)$ – члены разложения степени не ниже ($n+1$)-й относительно $x - x_0$ или остаточный член ряда Тейлора $R_n(x - x_0)$. Если для всех $x$: $\left|x - x_0\right| < h$, и для некоторого $h$ функция $y(x)$ имеет ($n+1$)-ю производную $y^{(n+1)}(x)$, то остаточный член $R_n(x - x_0)$ для всех указанных $x$ имеет вид

$$R_n(x - x_0) = y^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $x_0 < \xi < x$, если $x > x_0$, или $x < \xi < x_0$, если $x < x_0$. Если при этом $\left|y^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1} < \infty$, то $\left|R_n(x - x_0)\right| < M_{n+1}\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ или, что то же самое, погрешность при отбрасывании $R_n(x - x_0)$ в (1.3) имеет порядок $h^{n+1}$.

Пусть решение задачи Коши (1.1), (1.2) вначале отыскивается только в точке $x = x_0 + h$, где $x_0 + h \le x_f$, а $h > 0$ – некоторое достаточно малое число. Тогда, обозначая $h = x - x_0$ и отбрасывая в разложении (1.3) члены $o(\left|x - x_0\right|^{n+1})$ или $R_n(x - x_0)$, разложение (1.3) можно переписать в виде

$$y(x_0 + h) \cong y_0 + hy_0^{(1)} + \frac{h^2}{2!}\, y_0^{(2)} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\, y_0^{(n)}.$$

Обозначив $\Delta y_0(h) \cong y(x_0+h) - y_0$, отсюда получим следующее выражение для приращения искомого решения на интервале $[x, x_0+h]$:

$$\Delta y_0 = h y_0^{(1)} + \frac{h^2}{2!} y_0^{(2)} + \ldots + \frac{h^n}{n!} y_0^{(n)}, \qquad (1.4)$$

Производные, входящие в выражение (1.4), можно непосредственно вычислить, как было уже отмечено во введении, по формулам последовательного дифференцирования уравнения (1.1). Однако получаемые при этом формулы – даже в операторной форме [1], – оказываются чрезмерно громоздкими, что снижает в конечном счете их практическую ценность. В связи с этим К. Рунге предложил (а впоследствии В. Кутта развил) идею метода [2, 3] – вместо вычислений по формуле (1.4) для $\Delta y_0$ искать линейные комбинации следующего вида:

$$\Delta y_0(h) = p_{r1} k_1(h) + p_{r2} k_2(h) + \ldots + p_{rr} k_r(h), \qquad (1.5)$$

где $p_{ri}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ – некоторые постоянные коэффициенты, для которых необходимо, чтобы $\sum_{j=1}^{r} p_{rj} = 1$ из условия аппроксимации (1.4) соотношением (1.5), а $k_i(h)$ – функции, вычисляемые по формулам:

$$k_i(h) = h f(\xi_i, \eta_i), \quad i = 1, 2, \ldots, r; \qquad (1.6)$$

здесь $\xi_i = x_0 + \alpha_i h$ и $\eta_i = y_0 + \beta_{i1} k_1(h) + \beta_{i2} k_2(h) + \ \ldots \ + \beta_{i,\, i-1} k_{i-1}(h)$ (для заданного $r \geq 1$ и всех $i = 1, 2, \ldots, r$), а $\alpha_i$ и $\beta_{ij}$ – некоторые постоянные (причем $\alpha_1 = 0$, $\beta_{11} = 0$). Таким образом, функции (1.6) имеют такой вид:

$$k_1(h) = hf(x_0, y_0);$$

$$k_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1);$$

$$k_3(h) = hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2);$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$k_r(h) = hf(x_0 + \alpha_r h, y_0 + \beta_{r1} k_1 + \beta_{r2} k_2 + \ \dots\ + \beta_{r,r-1} k_{r-1}). \qquad (1.7)$$

Формулы (1.5)–(1.7) задают целое семейство явных методов Рунге-Кутты. Конкретный метод определяется как числом $r$, так и коэффициентами $\alpha_i$ и $\beta_{ij}$ ($\alpha_1 = 0$, $\beta_{11} = 0$), которые упорядочивают (рис. 1) в виде таблицы Бутчера (Butcher) [3], а именно:

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & 0 & & & \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & \cdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\
\alpha_r & \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{r,r-1} & 0 \\
\hline
 & p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{r,r-1} & p_{rr}
\end{array} .$$

Рис. 1. Таблица Бутчера для явных методов Рунге-Кутты

Обычно вводится требование, чтобы коэффициенты $\alpha_i$ в (1.7) удовлетворяли следующим условиям:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r-1} \beta_{ij}, \quad i = 2, 3, \dots, r.$$

Выбрав в (1.7) величину $h$, которую называют также шагом интегрирования, и зная $\alpha_i$, $\beta_{ij}$ и $p_{ri}$, по формулам (1.7) можно последовательно вычислить функции $k_i(h)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, а затем по формуле (1.5) – искомое значение $\Delta y_0(h)$ или, что то же самое, – искомое значение $y(x_0 + h) = y_0 + \Delta y_0(h)$.

Если теперь в качестве начальных условий для уравнения (1.1) взять следующую начальную точку $x_1 = x_0 + h$ и вместо (1.2) начальное значение

$$y(x_1) = y_1 = y(x_0 + h),$$

то можно получить по тем же формулам значение искомого решения и в точке $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, а именно:

$$y(x_2) = y_2 = y(x_0 + 2h).$$

Повторяя указанный процесс далее, получим таблицу значений искомого решения дифференциального уравнения – $y(x_m)$, где $x_m = x_0 + mh$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. В связи с тем, что процедура построения такой таблицы является пошаговой (и на каждом шаге используется только информация, полученная на предыдущем шаге), то явные методы Рунге-Кутты относят к классу одношаговых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

В общем случае таблица Бутчера имеет вид, приведенный на рис. 2, где матрица $\left[\beta_{ij}\right]_{r\times r}$, иногда называемая матрицей Бутчера, – матрица общего вида, то есть хотя бы один из ее коэффициентов $\beta_{ij}$ при $j \ge i$ (хотя бы для одного из $i = 1, 2, \ldots, r$) отличен от нуля. Соответственно, в этом случае методы Рунге-Кутты будут относиться к классу так называемых неявных методов, которые в силу высокой устойчивости получили широкое применение при численном решении жёстких дифференциальных систем [2–4, 6].

$$\begin{array}{c|ccccc}
\alpha_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1,r-1} & \beta_{1r} \\
\alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2,r-1} & \beta_{2r} \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & \cdots & \beta_{3,r-1} & \beta_{3r} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\alpha_r & \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{r,r-1} & \beta_{rr} \\
\hline
 & p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{r,r-1} & p_{rr}
\end{array}.$$

Рис. 2. Таблица Бутчера для неявных методов Рунге-Кутты

Укажем теперь условия, которым должен быть подчинен выбор постоянных $\alpha_i$, $\beta_{ij}$ и $p_{ri}$ ($i = 2, 3, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, r-1$) в (1.5), (1.7), которые при заданном $r \geq 1$ определяют формулу Рунге-Кутты соответствующей степени, а именно, $r$-й степени. Как известно [1], эти условия состоят в том, чтобы разложение (1.4) и линейная комбинация (1.5) совпадали до возможно более высоких степеней $h$ для произвольных правых частей уравнения (1.1) – $f(x, y)$ и любых значений шага интегрирования – $h$. При этом функция ошибки

$$\varphi_r(h) = y(x_0 + h) - y_0 - [p_{r1}k_1(h) + p_{r2}k_2(h) + \ \ldots \ + p_{rr}k_r(h)]$$

будет удовлетворять следующим условиям:

$$\varphi_r(0) = \varphi_r^{(1)}(0) = \varphi_r^{(2)}(0) = \ \ldots \ \varphi_r^{(s)}(0) = 0\,; \quad \varphi_r^{(s+1)}(0) \neq 0\,,$$

где $s \geq 1$ – некоторое число. Очевидно, что любой выбор постоянных $\alpha_i$, $\beta_{ij}$ и $p_{ri}$ ($i = 2, 3, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, r-1$) и $p_{ri}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$)

необходимо, в первую очередь, подчинить условию максимума числа $s$ с учетом произвола в задании $f(x, y)$ и $h$. Тогда погрешность вычисления приращения $\Delta y_0(h)$ и, соответственно, значения $y(x_0+h)$ на интервале $[x, x_0+h]$, то есть для одного шага (называемая также локальной погрешностью метода), будет определяться остаточным членом в форме Лагранжа

$$R_r(h) = \frac{h^{s+1}\varphi_r^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}, \quad 0 \le \xi \le h.$$

При достаточно малых $h$ главный член этой погрешности пропорционален $h^{s+1}$ и в связи с этим число $s$ обычно называют порядком точности рассматриваемой формулы Рунге-Кутты. Следует отметить, что в общем случае имеет место $r \ge s$ [3, 7].

## 1.2 Примеры формул Рунге-Кутты различных степеней $r$

Рассмотрим некоторые частные случаи формул Рунге-Кутты (1.5)–(1.7), получаемых для различных $r$ и при соответствующем выборе $\alpha_i$, $\beta_{ij}$ и $p_{ri}$ ($i = 2, 3, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, r-1$). Справочная информация о некоторых вариантах формул Рунге-Кутты также приведена в Приложении 1.

***1.2.1 Случай $r = 1$.*** В этом случае имеет место

$$\varphi_1(h) = y(x_0+h) - y(x_0) - p_{11} f(x_0, y_0);$$

$$\varphi_1^{(1)}(h) = y^{(1)}(x_0+h) - p_{11} f(x_0, y_0).$$

Отсюда следует, что $\varphi_1^{(1)}(0) = y^{(1)}(x_0) - p_{11} f(x_0, y_0) = 0$, то есть для произвольной правой части $f(x, y)$ в (1.1) возможно только $p_{11} = 1$. Далее имеет место $\varphi_1^{(2)}(0) = y^{(2)}(x_0)$, то есть в силу произвола $f(x, y)$ в общем случае $y^{(2)}(x_0) \neq 0$, и, стало быть, здесь $s = 1$. Поэтому для $r = 1$ существует единственная формула Рунге-Кутты:

$$\Delta y_0 = h f(x_0, y_0), \tag{1.8}$$

погрешность которой (на одном шаге интегрирования) будет равна

$$R_1(h) = \frac{h^2}{2} \varphi_1^{(2)}(\xi), \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h,$$

или, что то же самое, погрешность формулы (1.8) соответственно имеет порядок $h^2$.

Процедура численного решения дифференциального уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2), основанная на применении формулы (1.8), – метод Эйлера (или метод ломаных).

***1.2.2 Случай*** $\boldsymbol{r = 2}$**.** Здесь необходимые и достаточные условия обращения в нуль первых двух производных функции $\varphi_2(h)$ при $h = 0$ имеют вид системы следующих уравнений:

$$p_{21} + p_{22} = 1; \; p_{22}\alpha_2 = \frac{1}{2}; \; p_{22}\beta_{21} = \frac{1}{2}. \tag{1.9}$$

Здесь производная $\varphi_2^{(3)}(0)$, вообще говоря, в нуль не обращается. Решение системы (1.9) с учетом какого-либо дополнительного условия доставляет формулы интегрирования, имеющие порядок точности $h^3$. Из последних двух соотношений (1.9) следует, что $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$ и $\alpha_2 = \beta_{21}$. Соответственно, можно принять $\alpha_2$ в качестве свободного параметра, то есть с учетом этого тогда будет иметь место:

$$\beta_{21} = \alpha_2\,;\; p_{22} = \frac{1}{2\alpha_2}\,;\; p_{21} = 1 - \frac{1}{2\alpha_2}\,.$$

Таким образом, получено однопараметрическое семейство формул Рунге-Кутты второго порядка точности, коэффициенты в которых следует выбирать так, чтобы получить удобные для проведения вычислений формулы. Например, если принять $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$, то из (1.9) получим $p_{21} = p_{22} = \frac{1}{2}$ и, стало быть, тогда имеет место:

$$\Delta y_0 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\,;\; k_1 = hf(x_0, y_0)\,;\; k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1)\,. \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) отвечают методу Эйлера-Коши (это второй улучшенный метод Эйлера или метод Хойна [3, 8]).

Еще одна формула будет получена, если взять $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$, тогда $p_{22} = 1$, $p_{21} = 0$ и, стало быть, имеем (первый улучшенный метод Эйлера или модифицированный метод Эйлера с пересчетом [8]):

$$\Delta y_0 = k_2\,;\; k_1 = hf(x_0, y_0)\,;\; k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)\,. \quad (1.11)$$

Кроме того, здесь подходят также значения: $p_{21} = \frac{1}{4}$, $p_{22} = \frac{3}{4}$, $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{2}{3}$. Отсюда следует

$$\Delta y_0 = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2),$$

где

$$k_1 = hf(x_0, y_0); \; k_2 = hf(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}k_1). \qquad (1.12)$$

Очевидно, что приведенные варианты формул Рунге-Кутты (1.10)–(1.12), имеющих порядок точности $h^3$, отнюдь не исчерпывают всего множества допустимых решений системы (1.9). В связи с этим отметим, что выбор той или иной формулы зачастую обусловлен только удобством программирования из-за предполагаемого произвола в задании правой части уравнения (1.1). Учет каких-либо особенностей функции $f(x, y)$ может существенно ограничить множество практически допустимых решений системы (1.9).

***1.2.3 Случай*** $\boldsymbol{r = 3}$**.** Если в (1.7) $r = 3$, то, вообще говоря, нельзя приравнять нулю четвертую производную от функции $\varphi_3(h)$ (при $h = 0$); то есть здесь имеет место $s = 3$. Соответственно, условия

$$\varphi_3^{(1)}(0) = \varphi_3^{(2)}(0) = \varphi_3^{(3)}(0) = 0$$

сводятся к таким условиям на коэффициенты $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_{21}$, $\beta_{31}$, $\beta_{32}$, $p_{31}$, $p_{32}$ и $p_{33}$:

$$\alpha_2 = \beta_{21}; \; \alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{22}; \; p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1;$$

$$p_{32}\alpha_2 + p_{33}\alpha_3 = \frac{1}{2}; \; p_{32}\alpha_2^2 + p_{33}\alpha_3^2 = \frac{1}{3}; \; p_{33}\beta_{22}\alpha_2 = \frac{1}{6}. \qquad (1.13)$$

Решение системы (1.13) – при каких-либо дополнительных условиях – доставляют формулы Рунге-Кутты, погрешность которых имеет порядок $h^4$. Отметим, что для системы (1.13) имеется два семейства решений [3], а именно:

а) двухпараметрическое семейство со свободными параметрами $\alpha_2$ и $\alpha_3$, причем $\alpha_2 \neq \alpha_3$ и $\alpha_2 \neq \frac{2}{3}$;

б) однопараметрическое семейство со свободным параметром $\beta_{32}$ (при $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2}{3}$).

Далее приводятся некоторые варианты таких формул.

Во-первых, для $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 1$ получим $\beta_{31} = -1$, $\beta_{32} = 2$, $p_{31} = \frac{1}{6}$, $p_{32} = \frac{2}{3}$, $p_{33} = \frac{1}{6}$. Отсюда следует, что

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\,, \tag{1.14}$$

где

$$k_1 = hf(x_0, y_0)\,, \quad k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)\,,$$

$$k_3 = hf(x_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2)\,.$$

Во-вторых, если $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{3}$, $\alpha_3 = \frac{2}{3}$, то получим $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = \frac{2}{3}$, $p_{31} = \frac{1}{4}$, $p_{32} = 0$, $p_{33} = \frac{3}{4}$ или (формулу метода Рунге-Кутты-Гейне):

$$\Delta y_0 = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3), \tag{1.15}$$

где

$$k_1 = hf(x_0, y_0), \quad k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}k_1),$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}k_2).$$

В-третьих, пусть $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{3}{4}$. Тогда $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = \frac{3}{4}$, $p_{31} = \frac{2}{9}$, $p_{32} = \frac{1}{3}$, $p_{33} = \frac{4}{9}$ и, стало быть, имеем

$$\Delta y_0 = \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3), \tag{1.16}$$

где

$$k_1 = hf(x_0, y_0), \quad k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{3}{4}h, y_0 + \frac{3}{4}k_2).$$

***1.2.4 Случай $r = 4$.*** Наконец, рассмотрим случай $r = 4$, так как он получил наиболее широкое применение в решении прикладных задач. Здесь удаётся обеспечить равенство нулю только первых четырех производных функции $\varphi_4(h)$ (при $h = 0$), а её пятая производная в силу произвольности правой части уравнения (1.1) при $h = 0$ тождественно в нуль не обращается ни при каких значениях постоянных $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\beta_{21}$, $\beta_{31}$, $\beta_{32}$, $\beta_{41}$, $\beta_{42}$, $\beta_{43}$, $p_{41}$,

$p_{42}$, $p_{43}$ и $p_{44}$. Они удовлетворяют следующей системе уравнений [1]:

$$\alpha_2 = \beta_{21};\ \alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{22};\ \alpha_4 = \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43};$$

$$p_{41} + p_{42} + p_{43} + p_{44} = 1;$$

$$p_{42}\alpha_2 + p_{43}\alpha_3 + p_{44}\alpha_4 = \frac{1}{2};\ p_{42}\alpha_2^2 + p_{43}\alpha_3^2 + p_{44}\alpha_4^2 = \frac{1}{3};$$

$$p_{42}\alpha_2^3 + p_{43}\alpha_3^3 + p_{44}\alpha_4^3 = \frac{1}{4};$$

$$p_{43}\beta_{32}\alpha_2 + p_{44}\beta_{42}\alpha_2 + p_{44}\beta_{43}\alpha_3 = \frac{1}{6};$$

$$p_{43}\beta_{32}\alpha_2\alpha_3 + p_{44}\beta_{42}\alpha_2\alpha_4 + p_{44}\beta_{43}\alpha_3\alpha_4 = \frac{1}{8};$$

$$p_{43}\beta_{32}\alpha_2^2 + p_{44}\beta_{42}\alpha_2^2 + p_{44}\beta_{43}\alpha_3^2 = \frac{1}{12};\ p_{44}\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2 = \frac{1}{24}. \quad (1.17)$$

Отсюда при дополнительных условиях следуют варианты формул Рунге-Кутты, погрешность которых имеет порядок $h^5$.

Во-первых, одна из наиболее распространенных формул Рунге-Кутты четвертой степени и, соответственно, четвертого порядка точности (это так называемый стандартный метод Рунге-Кутты, правило «одной шестой») получается при следующих значениях:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{21} = \beta_{32} = \frac{1}{2},\ \alpha_4 = 1,\ \beta_{43} = 1,\ \beta_{31} = \beta_{41} = \beta_{42} = 0,$$

$$p_{41} = \frac{1}{6},\ p_{42} = \frac{1}{3},\ p_{43} = \frac{1}{3},\ p_{44} = \frac{1}{6},$$

а именно:

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{1.18}$$

где

$$k_1 = hf(x_0, y_0), \quad k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2), \ k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3).$$

Во-вторых, при

$$\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{3}, \ \alpha_3 = \frac{2}{3}, \ \alpha_4 = 1,$$

$$\beta_{31} = -\frac{1}{3}, \ \beta_{42} = -1, \ \beta_{32} = \beta_{41} = \beta_{43} = 1,$$

$$p_{41} = \frac{1}{8}, \ p_{42} = \frac{3}{8}, \ p_{43} = \frac{3}{8}, \ p_{44} = \frac{1}{8}$$

получаем следующую формулу (правило «трех восьмых»):

$$\Delta y_0 = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), \tag{1.19}$$

где

$$k_1 = hf(x_0, y_0), \quad k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}k_1),$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 - \frac{1}{3}k_1 + k_2), \ k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1 - k_2 + k_3).$$

В-третьих, при

$$\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{4},\ \alpha_3 = \frac{1}{2},\ \alpha_4 = 1,$$

$$\beta_{31} = 0,\ \beta_{32} = \frac{1}{2},\ \beta_{41} = 1,\ \beta_{42} = -2,\ \beta_{43} = 2,$$

$$p_{41} = \frac{1}{6},\ p_{42} = 0,\ p_{43} = \frac{2}{3},\ p_{44} = \frac{1}{6}$$

получим

$$\Delta y_0 = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), \tag{1.20}$$

где

$$k_1 = hf(x_0, y_0), \quad k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{4}h, y_0 + \frac{1}{4}k_1),$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2),\ k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1 - 2k_2 + 2k_3).$$

Погрешности формул (1.18)–(1.20) на одном шаге интегрирования оцениваются величиной

$$R_4(h) = \frac{h^5}{120}\varphi_4^{(5)}(\xi), \quad x_0 \le \xi \le x_0 + h.$$

Другие варианты формул метода Рунге-Кутты для четвертого порядка точности приведены в Приложении 1 с учётом данных [9]. В [10, 11] приведена соответствующая геометрическая интерпретация метода Рунге-Кутты для формулы (1.18).

***1.2.5 О случаях $r > 4$.*** Отметим, что при $r = 5$ увеличение порядка точности формул Рунге-Кутты не происходит; здесь оказывается возможным только $s = 4$. Поэтому такие формулы практического применения не находят. Можно получить соответствующие формулы, имеющие погрешность порядка $h^6$, но для этого необходимо выбирать $r \geq 6$ (получаемые при этом формулы численного интегрирования методом Рунге-Кутты, как правило, оказываются громоздкими и неудобными для практического применения).

В случае $r > 4$ соответствие между $r$ и $s$ нарушается. Метод Рунге-Кутты пятого порядка точности удается построить только при $r = 6$ (это формула Рунге-Кутты-Фельдберга [3, 7]), шестого – при $r = 7$, седьмого – при $r = 9$, а при $s > 7$ имеет место такая оценка: $r \geq s + 2$.

Формулы Рунге-Кутты-Фельдберга имеют следующий вид [7]:

$$\Delta \mathbf{y}_m = \frac{16}{35}\mathbf{k}_1 + \frac{6656}{12825}\mathbf{k}_3 + \frac{28561}{56430}\mathbf{k}_4 - \frac{9}{50}\mathbf{k}_5 + \frac{2}{55}\mathbf{k}_6,$$

где

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m), \quad \mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}\left(x_m + \frac{1}{4}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{4}\mathbf{k}_1\right),$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}\left(x_m + \frac{3}{8}h, \mathbf{y}_m + \frac{3}{32}\mathbf{k}_1 + \frac{9}{32}\mathbf{k}_2\right),$$

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}\left(x_m + \frac{12}{13}h, \mathbf{y}_m + \frac{1932}{2197}\mathbf{k}_1 - \frac{7200}{2197}\mathbf{k}_2 + \frac{7296}{2197}\mathbf{k}_3\right),$$

$$\mathbf{k}_5 = h\mathbf{f}\left(x_m + h, \mathbf{y}_m + \frac{439}{216}\mathbf{k}_1 - 8\mathbf{k}_2 + \frac{3680}{513}\mathbf{k}_3 - \frac{845}{4104}\mathbf{k}_4\right),$$

$$\mathbf{k}_6 = h\mathbf{f}\left(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m - \frac{8}{27}\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 - \frac{3544}{2565}\mathbf{k}_3 + \frac{1859}{4104}\mathbf{k}_4 - \frac{11}{40}\mathbf{k}_5\right).$$

## 1.3 Метод Рунге-Кутты для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

***1.3.1 Случай системы двух уравнений.*** Метод Рунге-Кутты применим и для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В связи с этим здесь рассмотрим вначале систему только из двух уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \tag{1.21}$$

решение которой должно удовлетворять следующим начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = z_0, \tag{1.22}$$

где $y_0$ и $z_0$ – некоторые заданные начальные значения для искомого решения системы (1.21), то есть $y(x)$ и $z(x)$.

Предполагая достаточную гладкость правых частей системы (1.21), то есть функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$, разложим её искомое решение в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0$:

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)y_0^{(1)} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0^{(2)} + \ \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} y_0^{(n+1)} + \mathrm{o}(|\, x - x_0|^{n+1}),$$

$$z(x) = z_0 + (x - x_0)zy_0^{(1)} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} z_0^{(2)} + \ \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} z_0^{(n+1)} + \mathrm{o}(|\, x - x_0|^{n+1}),$$

где $y_0^{(k)} = \left.\dfrac{d^k y(x)}{dx^k}\right|_{x=x_0}$, $z_0^{(k)} = \left.\dfrac{d^k z(x)}{dx^k}\right|_{x=x_0}$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ – суть производные $k$-го порядка. Обозначая

$$\Delta y_0(h) \cong y(x_0 + h) - y_0 \, , \; \Delta z_0(h) \cong z(x_0 + h) - z_0 \, ,$$

а также $x - x_0 = h$, перепишем приведенные разложения с точностью до членов $\mathrm{o}(\left| h \right|^{n+1})$ в виде

$$\Delta y_0 = h y_0^{(1)} + \frac{h^2}{2!} y_0^{(2)} + \ \ldots \ + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y_0^{(n+1)} \, ,$$

$$\Delta z_0 = h z_0^{(1)} + \frac{h^2}{2!} z_0^{(2)} + \ \ldots \ + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} z_0^{(n+1)} \, . \qquad (1.23)$$

В соответствии с методом Рунге-Кутты, введем следующие линейные комбинации для приближений $\Delta y_0$ и $\Delta z_0$ (1.23):

$$\Delta y_0 = p_{r1} k_1(h) + p_{r2} k_2(h) + \ \ldots \ + p_{rr} k_r(h) \, ;$$

$$\Delta z_0 = q_{r1} l_1(h) + q_{r2} l_2(h) + \ \ldots \ + q_{rr} l_r(h) \, . \qquad (1.24)$$

Здесь $p_{ri}$, $q_{ri}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) – некоторые постоянные, а функции $k_i(h)$ и $l_i(h)$ вводятся так (для заданного $r \geq 1$ и для всех $i = 1, 2, \ldots, r$):

$$k_i(h) = h f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \, , \; l_i(h) = h g(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\xi}_i) \, , \; i = 1, 2, \ldots, r \, , \quad (1.25)$$

где

$$\xi_i = x_0 + \alpha_i h \;\; (\alpha_1 = 0); \;\; \tilde{\xi}_i = x_0 + \tilde{\alpha}_i h \;\; (\tilde{\alpha}_1 = 0);$$

$$\eta_i = y_0 + \beta_{i1} k_1(h) + \beta_{i2} k_2(h) + \ \dots \ + \beta_{i,\, i-1} k_{i-1}(h) \ \ (\beta_{i1} = 0);$$

$$\tilde{\eta}_i = y_0 + \tilde{\beta}_{i1} k_1(h) + \tilde{\beta}_{i2} k_2(h) + \ \dots \ + \tilde{\beta}_{i,\, i-1} k_{i-1}(h) \ \ (\tilde{\beta}_{i1} = 0);$$

$$\varsigma_i = y_0 + \gamma_{i1}\, l_1(h) + \gamma_{i2}\, l_2(h) + \ \dots \ + \gamma_{i,\, i-1}\, l_{i-1}(h) \ \ (\gamma_{i1} = 0);$$

$$\tilde{\varsigma}_i = y_0 + \tilde{\gamma}_{i1}\, l_1(h) + \tilde{\gamma}_{i2}\, l_2(h) + \ \dots \ + \tilde{\gamma}_{i,\, i-1} l_{i-1}(h) \ \ (\tilde{\gamma}_{i1} = 0).$$

Как и ранее, задача заключается в таком выборе постоянных в (1.24), (1.25): $\alpha_i$, $\beta_{ij}$, $\gamma_{ij}$, $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_{ij}$, $\tilde{\gamma}_{ij}$, $p_{ri}$, $q_{ri}$, для которого разложения функций

$$\varphi_r(h) = \Delta y_0(h) - \sum_{i=1}^{r} p_{ri} k_i(h), \ \ \psi_r(h) = \Delta z_0(h) - \sum_{i=1}^{r} q_{ri} l_i(h)$$

по степеням $h$ начинаются с возможно более высоких степеней.

Например, в [1, с. 317] приведена полученная (для случая $r = 4$) система 17-ти уравнений, которым должны удовлетворять перечисленные выше постоянные в формулах Рунге-Кутты, имеющих порядок точности $h^5$. Значительное упрощение как этих формул, так и соответствующих им вычислительных алгоритмов достигается в общем случае с принятием следующих дополнительных условий:

$$\alpha_i = \tilde{\alpha}_i; \ \beta_{ij} = \tilde{\beta}_{ij} = \gamma_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij}; \ p_{ri} = q_{ri},$$

$$i = 1, 2, \dots, r \ \ (j = 1, 2, \dots, r-1). \qquad (1.26)$$

Тогда, для случая $r = 4$ и, к примеру, выбирая такую совокупность постоянных с учетом (1.18), (1.26):

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{21} = \beta_{32} = \gamma_{21} = \gamma_{32} = \frac{1}{2}\,;\ \alpha_4 = \beta_{43} = \gamma_{43} = 1\,;$$

$$\beta_{31} = \beta_{41} = \beta_{42} = \gamma_{31} = \gamma_{41} = \gamma_{42} = 0\,;\quad p_{41} = p_{44} = \frac{1}{6}\,;\ p_{42} = p_{43} = \frac{1}{3}\,,$$

получим из (1.24) и (1.25)

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,,$$

$$\Delta z_0 = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)\,, \tag{1.27}$$

где

$$k_1 = hf(x_0, y_0, z_0)\,,\quad l_1 = hg(x_0, y_0, z_0)\,,$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1, z_0 + \frac{1}{2}l_1)\,,$$

$$l_2 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1, \mathrm{z}_0 + \frac{1}{2}l_1)\,,$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2, z_0 + \frac{1}{2}l_2)\,,$$

$$l_3 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2, z_0 + \frac{1}{2}l_2)\,,$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)\,,$$

$$l_4 = hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)\,.$$

Следует отметить случай, когда в (1.21)

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z) = 1 .$$

Очевидно, что это уравнение с учетом одного из начальных условий (1.22) сразу же интегрируется; в результате здесь получим $z(x) = x - x_0$. Этот случай также можно рассматривать как замену независимой переменной в уравнении (1.1) на новую переменную, осуществляемую присоединением к уравнению (1.1) уравнения $\frac{dz}{dx} = 1$ с начальным условием $z(x_0) = x_0$; тогда задача Коши (1.1), (1.2) сводится к задаче (1.21), (1.22), в которой правые части не содержат независимой переменной. Такой прием часто используется в стандартных программах численного решения задачи Коши, поскольку это позволяет автоматически вычислять необходимые значения независимой переменной интегрированием, а не отдельным суммированием соответствующих шагов интегрирования.

Кроме того, этот же прием оказывается удобным в том случае, когда момент $x_f$, отвечающий моменту окончания интегрирования, не задан, а определяется из некоторого дополнительного условия – условия «останова».

***1.3.2 Система n уравнений.*** Рассмотренная в п. 1.3.1 процедура построения формул Рунге-Кутты для задачи (1.21), (1.22) в случае системы для двух дифференциальных уравнений применима и для систем, которые содержат любое конечное число обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме. А именно, рассмотрим начальную задачу для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy^1}{dx} = f^1(x, y^1, y^2, \dots, y^n)\,;\\
&\frac{dy^2}{dx} = f^2(x, y^1, y^2, \dots, y^n)\,;\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\frac{dy^n}{dx} = f^n(x, y^1, y^2, \dots, y^n)\,,
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

с начальными условиями

$$
y^1(x_0) = y_0^1\,;\ \ y^2(x_0) = y_0^2\,;\ \dots\,;\ y^n(x_0) = y_0^n\,. \tag{1.29}
$$

Вводя вектор-столбцы $\mathbf{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ и $\mathbf{f} = (f^1, f^2, \dots, f^n)$, задачу (1.28), (1.29) можно представить в векторно-матричном виде:

$$
\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})\,; \tag{1.30}
$$

$$
\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0\,, \tag{1.31}
$$

где $\mathbf{y}_0 = (y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n)$ – вектор-столбец начальных значений для искомого решения в точке $x = x_0$.

Очевидно, что в предположении о достаточной гладкости компонент правой части уравнения (1.30) в виде вектор-функции $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ искомое решение также можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0$, а именно:

$$
\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + h\,\mathbf{y}_0^{(1)} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{y}_0^{(2)} + \ \dots\ + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\mathbf{y}_0^{(n+1)} + \mathrm{o}(|\,h\,|^{n+1})\,,
$$

где для фиксированного $x \neq x_0$ введено обозначение $h = x - x_0$.

Соответственно, с учетом предположений, аналогичных для (1.27), для $\Delta\mathbf{y}_0(h) = \mathbf{y}(x_0 + h) - \mathbf{y}_0$ здесь следует отыскивать такую линейную комбинацию:

$$\Delta\mathbf{y}_0(h) = p_{r1}\mathbf{k}_1(h) + p_{r2}\mathbf{k}_2(h) + \ \dots\ + p_{rr}\mathbf{k}_r(h)\,, \qquad (1.32)$$

где вектор-функции $\mathbf{k}_i(h)$, $i = 1, 2, \dots, r$, вводятся так:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k}_1(h) = h\mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0)\,;\\
&\mathbf{k}_2(h) = h\mathbf{f}(x_0 + \alpha_2 h, \mathbf{y}_0 + \beta_{21}\mathbf{k}_1)\,;\\
&\mathbf{k}_3(h) = h\mathbf{f}(x_0 + \alpha_3 h, \mathbf{y}_0 + \beta_{31}\mathbf{k}_1 + \beta_{32}\mathbf{k}_2)\,;\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\mathbf{k}_r(h) = h\mathbf{f}(x_0 + \alpha_r h, \mathbf{y}_0 + \beta_{r1}\mathbf{k}_1 + \beta_{r2}\mathbf{k}_2 + \ \dots\ + \ \beta_{r,\,r-1}\mathbf{k}_{r-1})\,. \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

Таким образом, назначив величину $h$ и задавая соответствующий набор постоянных $\alpha_i$, $\beta_{ij}$ и $p_{ri}$ в (1.32) и (1.33), можно получить конкретные формулы Рунге-Кутты для вычисления искомого приближенного решения системы (1.28) в виде

$$\mathbf{y}(x_0 + h) = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}_0(h)\,.$$

# 2 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 2.1 Основные варианты численного решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши на интервале $[x_0, x_f]$ ($x_0 < x_f < \infty$, где $x_f$ – некоторое заданное или определяемое из каких-либо условий число для векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})\,; \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0\,, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $\mathbf{f} = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$, а $\mathbf{y}_0 = (y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n)$ – вектор начальных значений искомого решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ в точке $x = x_0$.

В общем случае решение задачи Коши (2.1), (2.2) – вектор-функция $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$, $\forall x \in [x_0, x_f]$. Практически такое решение задачи Коши можно построить только в случае применения аналитических методов решения. Для случая численного решения задачи Коши можно построить лишь её приближенное решение в виде некоторой таблицы значений искомой функции $\mathbf{y}(x)$ в заданных точках $x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, совокупность которых называется сеткой на интервале $[x_0, x_f]$, а точки $x_i$ – её узлами. Наиболее удобной является равномерная сетка на $[x_0, x_f]$ с шагом $h$, когда её узлы задаются так: $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ .

Построение таблицы значений $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, для заданного шага $h$, как приближенного решения методом Рунге-Кутты задачи Коши (2.1), (2.2), сводится к решению последовательности задач Коши для дифференциального уравнения (2.1) на подынтервалах $[x_0 + ih, x_0 + (i+1)h]$. При этом начальные условия задаются так: для $i = 0$ или для первого подынтервала $[x_0, x_0 + h]$ это значение $\mathbf{y}_0$ согласно (2.2). Пусть на первом подынтервале приближенное решение представляется в виде вектор-функция $\tilde{\mathbf{y}}_1(x)$, для которой выполняется условие $\tilde{\mathbf{y}}_1(x_0) = \mathbf{y}_0$. Тогда, обозначая $\mathbf{y}_1 = \tilde{\mathbf{y}}_1(x_0 + h)$, получим начальное значение для второго подынтервала $[x_0 + h, x_0 + 2h]$, на котором приближенное решение – вектор-функция $\tilde{\mathbf{y}}_2(x)$. Очевидно, что $\mathbf{y}_2 = \tilde{\mathbf{y}}_2(x_0 + 2h)$ – начальное значение для третьего подынтервала $[x_0 + 2h, x_0 + 3h]$ и т.д.

В общем случае, в силу возможного произвола в задании $x_f$, для некоторого $i = i_f$ получим: $x_0 + (i_f - 1)h < x_f \le x_0 + i_f h$. Поэтому в таблицу значений $\mathbf{y}_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, i_f - 1$, следует включать также и значение $\mathbf{y}(x_f)$. Тем более, что в качестве одного из вариантов численного решения задачи Коши (2.1), (2.2) может быть определение только одного значения $\mathbf{y}(x_f)$. Очевидно, что на $i_f$-м подынтервале для вычисления $\mathbf{y}(x_f)$ тогда необходимо выбирать шаг $h_f = x_f - x_0 - (i_f - 1)h \le h$. Но равномерную сетку на интервале $[x_0, x_f]$ можно в самом начале задавать так, чтобы $h = (x_f - x_0)/i_f$, где $i_f$ – некоторое заданное число подынтервалов разбиения. При этом следует отметить, что выбор числа $i_f$ обусловлен в первую очередь требованиями ограничения локальной погрешности соответствующей формулы метода Рунге-Кутты, которая будет пропорциональна величине $h^{s+1}$, где $s$ – порядок точности применяемой формулы.

Таким образом, в качестве *основного варианта* численного решения задачи Коши (2.1), (2.2) методом Рунге-Кутты (для заданного $r \geq 1$ или, что то же самое, для заданной степени соответствующей формулы метода) примем вариант построения таблицы с заданным шагом $h > 0$ со значениями её приближенного решения $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, на некотором заданном интервале $[x_0, x_f]$. В общем случае в эту таблицу должно быть включено также и значение $\mathbf{y}(x_f)$.

Отметим, что результаты решения задачи Коши (2.1), (2.2) в рамках указанного варианта можно использовать и для построения приближенных аналитических решений $\tilde{\mathbf{y}}_i(x)$, при необходимости в этом, на каждом из подынтервалов $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, используя только соответствующие значения $\mathbf{y}_{i-1}$ и $\mathbf{y}_i$. Это же возможно и при необходимости построения таблицы с меньшим шагом, чем шаг, который был выбран для численного решения задачи Коши.

Например, аналитическое выражение для $\tilde{\mathbf{y}}_i(x)$ можно отыскивать в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{y}}_i(x) = \mathbf{a}_{i0} + (x - x_{i-1})\mathbf{a}_{i1} + (x - x_{i-1})^2\mathbf{a}_{i2} + (x - x_{i-1})^3\mathbf{a}_{i3}, \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{a}_{ik}$, $k = 0, 1, 2, 3$, – вектор-коэффициенты, которые подлежат определению. Для вычисления этих коэффициентов для вектор-функции (2.3) можно потребовать выполнения следующих условий (интерполирования), а именно:

во-первых, при $x = x_{i-1}$

$$\tilde{\mathbf{y}}_i(x_{i-1}) = \mathbf{y}_{i-1}; \;\; \tilde{\mathbf{y}}'_i(x_{i-1}) = \mathbf{f}(x_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}); \qquad (2.4)$$

во-вторых, при $x = x_i$

$$\tilde{\mathbf{y}}_i(x_i) = \mathbf{y}_i; \; \tilde{\mathbf{y}}'_i(x_i) = \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i). \qquad (2.5)$$

С учетом выражения (2.3), непосредственно из условий (2.4) следует: $\mathbf{a}_{i0} = \mathbf{y}_{i-1}$; $\mathbf{a}_{i1} = \mathbf{f}(x_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})$. Учитывая далее условия (2.5) и обозначая $x_i - x_{i-1} = h$, в соответствии с (2.3) получим:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{a}_{i0} + h\mathbf{a}_{i1} + h^2\mathbf{a}_{i2} + h^3\mathbf{a}_{i3}; \; \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i) = \mathbf{a}_{i1} + 2h\mathbf{a}_{i2} + 3h^2\mathbf{a}_{i3}.$$

Если ввести следующие обозначения:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1} - h\mathbf{f}(x_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})}{h^2}; \qquad \mathbf{c}_i = \frac{\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}(x_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})}{h},$$

то получим $\mathbf{a}_{i2} = 3\mathbf{b}_i - \mathbf{c}_i$, $\mathbf{a}_{i3} = (\mathbf{c}_i - 2\mathbf{b}_i)/h$.

Еще одним вариантом численного решения задачи Коши (2.1), (2.2), который часто возникает при решении широкого круга прикладных задач, является вариант построения таблицы с заданным шагом $h > 0$ значений её приближенного решения $\mathbf{y}_i = \tilde{\mathbf{y}}(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, при условии, что правая граница интервала $[x_0, x_f]$, то есть $x_f > x_0$, непосредственно определяется в ходе решения задачи, исходя из некоторых дополнительных условий. В общем случае совокупность таких условий можно записать в виде:

$$\psi_k(x_f, \mathbf{y}(x_f)) = 0\,;\; k = 1, 2, \ldots, l\,, \qquad (2.6)$$

где $\psi_k$ – некоторые заданные функции, а $l$ – число условий. При этом предполагается, что значение $x_f$ определяется при выполнении хотя бы одного из указанных условий (2.6), а именно, при достижении решением уравнения (2.1) – $\mathbf{y}(x)$ одного из многообразий $\psi_k(x, \mathbf{y}) = 0$. Поэтому (2.6) не являются условиями, налагаемыми на решение уравнения (2.1) $\mathbf{y}(x)$ на правой границе интервала $[x_0, x_f]$. Иначе, то есть требование выполнения всех перечисленных выше условий (2.6) фактически сводит задачу Коши к соответствующей краевой задаче. Таким образом, условия (2.6) суть условия «останова» процедуры решения задачи (2.1), (2.2).

Индикацией выполнения какого-либо из условий (2.6) в ходе решения задачи Коши может служить смена знака соответствующей функции $\psi_k$ на текущем или, для определенности, на $m$-м шаге интегрирования, то есть на подынтервале $[x_{m-1}, x_m]$, когда, например, хотя бы для одного из $1 \le k \le m$ выполняются условия:

$$\psi_k(x_{m-1}, \tilde{\mathbf{y}}(x_{m-1})) > 0 \text{ и } \psi_k(x_m, \tilde{\mathbf{y}}(x_m)) < 0\,.$$

Тогда определение точки $x = \tilde{x}_f$, для которой выполняется условие

$$|\psi_k(\tilde{x}_f, \tilde{\mathbf{y}}_m(\tilde{x}_f))| \le \varepsilon_k\,, \qquad (2.7)$$

где $\varepsilon_k$ – заданная точность выполнения $k$-го условия (2.6), равносильно решению уравнения $\psi_k(x, \tilde{\mathbf{y}}_m(x)) = 0$. В связи с этим следует отметить, что функции $\psi_k$ ($1 \le k \le l$) могут быть существенно нелинейными. Поэтому решение соответствующего уравнения тогда целесообразно будет отыскивать методом последовательных приближений. Например, в качестве начального приближения можно выбрать точку $x = \tilde{x}_f^0$, вычисляемую с учетом указанных выше знаков для функции $\psi_k$ в точках $x_{m-1}$ и $x_m$, а также с учетом дополнительного обозначения $h_0 = h$, так:

$$\tilde{x}_f^0 = x_{m-1} + \frac{h_0\, \psi_k(x_{m-1}, \tilde{\mathbf{y}}_m(x_{m-1}))}{\psi_k(x_{m-1}, \tilde{\mathbf{y}}_m(x_{m-1})) - \psi_k(x_m, \tilde{\mathbf{y}}_m(x_m))}. \tag{2.8}$$

Если для точки $\tilde{x}_f^0$, которая находится по формуле (2.8), условие (2.7) не выполняется, то рассматриваемая процедура может быть продолжена в зависимости от знака $\psi_k(\tilde{x}_f^0, \tilde{\mathbf{y}}_m(\tilde{x}_f^0))$. А именно, если $\psi_k(\tilde{x}_f^0, \tilde{\mathbf{y}}_m(\tilde{x}_f^0)) < 0$, тогда следует выбрать шаг интегрирования равным

$$h_1 = \frac{h_0\, \psi_k(x_{m-1}, \tilde{\mathbf{y}}_m(x_{m-1}))}{\psi_k(x_{m-1}, \tilde{\mathbf{y}}_m(x_{m-1})) - \psi_k(x_m, \tilde{\mathbf{y}}_m(x_m))} \tag{2.9}$$

и, соответственно, принять: $x_m = \tilde{x}_f^0$, $\tilde{\mathbf{y}}_m(x_m) = \tilde{\mathbf{y}}_m(\tilde{x}_f^0)$.

Если же для точки $\tilde{x}_f^0$ будет получено $\psi_k(\tilde{x}_f^0, \tilde{\mathbf{y}}_m(\tilde{x}_f^0)) > 0$, то тогда следует продолжить интегрирование с шагом (2.9) до тех пор, пока функция $\psi_k$ не изменит знак, либо когда будет выполнено условие (2.7).

В связи с изложенной процедурой обеспечения выполнения условий «останова» (2.6) следует отметить, что на подынтервале $[x_{m-1}, x_m]$ одновременно могут быть выполнены несколько условий:

$$\psi_{k_q}(x_{m-1}, \tilde{\mathbf{y}}(x_{m-1})) > 0\,;\ \psi_{k_q}(x_m, \tilde{\mathbf{y}}(x_m)) < 0\,,$$

где $k_q$, $q=1,2,\dots,\nu$ $(1\le\nu\le l)$, – соответствующие номера условий (2.6). В этом случае точкой «останова» $\tilde{x}_f$ может выбираться либо точка, для которой это значение является наименьшим, либо точка, определяемая из условия с минимальным номером $k_1 < k_2 < \dots < k_\nu$.

## 2.2 Программная реализация формул Рунге-Кутты четвертой степени для численного решения задачи Коши на заданном интервале

В настоящем подразделе поэтапно будет изложена процедура разработки программы численного решения задачи Коши (2.1), (2.2) для формул Рунге-Кутты четвертой степени (четвертого порядка точности), так как они получили наибольшее применение для решения прикладных задач. Построение программной реализации метода Рунге-Кутты будет проведено для варианта решения задачи Коши на заданном интервале $[x_0, x_f]$, когда точка $x_f > x_0$ фиксирована. Кроме того, предполагается, что на этом интервале вводится равномерная сетка, шаг которой задан и равен $h$. Таким образом, интервал $[x_0, x_f]$ при этом разбивается на подынтервалы: $[x_0+(i-1)h, x_0+ih]$, $i=1,2,3,\dots$ . Для первого из них, то есть для $[x_0, x_0+h]$, начальное условие задается в соответствии с (2.2), то есть $\tilde{\mathbf{y}}_1(x_0)=\mathbf{y}_0$, где $\tilde{\mathbf{y}}_1(x)$ – приближенное решение задачи Коши (2.1), (2.2) для этого же подынтервала. Соответственно, на остальных подынтервалах $[x_0+(i-1)h, x_0+ih]$ (для $i>1$) начальные условия будут задаваться как значения получаемых решений на предшествующих подынтервалах, то есть в виде

$$\tilde{\mathbf{y}}_i(x_0+(i-1)h)=\mathbf{y}_{i-1}\quad(i=2,3,4,\dots,),\tag{2.10}$$

где $\mathbf{y}_{i-1} = \widetilde{\mathbf{y}}_{i-1}(x_0 + i\,h)$, а $\widetilde{\mathbf{y}}_i(x)$ – приближенное решение задачи Коши (2.1), (2.10) на $i$-м подынтервале. В силу произвола задания значений $h$ и $x_f$ для некоторого $i = i_f$ (это число подынтервалов разбиения на интервале $[x_0, x_f]$), в общем случае имеет место:

$$x_0 + (i_f - 1)h < x_f \le x_0 + i_f\,h\,.$$

Отсюда для $i_f$-го подынтервала $[x_0 + (i_f - 1)h, x_f]$ шаг сетки будет равен $h_f = x_f - x_0 - (i_f - 1)h \le h$.

В результате приближенного численного решения задачи Коши (2.1), (2.2) на интервале $[x_0, x_f]$ для выбранной формулы Рунге-Кутты будут получены значения: $\mathbf{y}_i$, $i = 0, 1, \ldots, i_f - 1$, где $x_i = x_0 + i\,h$, а также значение $\mathbf{y}_{i_f}(x_{i_f})$.

Совокупность определяемых выбранной формулой Рунге-Кутты однотипных вычислительных операций, выполняющихся на каждом подынтервале разбиения интервала $[x_0, x_f]$, далее будем называть шагом интегрирования. Следовательно, $i$-й шаг интегрирования будет соответствовать решению $i$-й задачи Коши (2.1), (2.10) на $i$-м подынтервале $[x_0 + (i-1)h, x_0 + ih]$.

С учетом соотношений (1.32), (1.33) значения $\Delta\mathbf{y}_i$ или, в конечном счете, значения $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{i-1} + \Delta\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_f$, на каждом шаге интегрирования для $r = 4$ определяются по формулам Рунге-Кутты:

$$\Delta\mathbf{y}_i = p_{41}\mathbf{k}_1 + p_{42}\mathbf{k}_2 + p_{43}\mathbf{k}_3 + p_{44}\mathbf{k}_4\,, \qquad (2.11)$$

где вектор-коэффициенты $\mathbf{k}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, вычисляются так:

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_0 + (i-1)h,\ \mathbf{y}_{i-1})\,; \qquad (2.12)$$

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_0 + (i-1)h + \alpha_2 h,\ \mathbf{y}_{i-1} + \beta_{21}\mathbf{k}_1)\,; \qquad (2.13)$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_0 + (i-1)h + \alpha_3 h,\ \mathbf{y}_{i-1} + \beta_{31}\mathbf{k}_1 + \beta_{32}\mathbf{k}_2)\,; \qquad (2.14)$$

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_0 + (i-1)h + \alpha_4 h,\ \mathbf{y}_{i-1} + \beta_{41}\mathbf{k}_1 + \beta_{42}\mathbf{k}_2 + \beta_{43}\mathbf{k}_3)\,. \qquad (2.15)$$

***2.2.1 Алгоритм-2.*** Для изложения соответствующего вычислительного алгоритма требуется конкретизация соотношений (2.11)–(2.15), то есть необходимо задавать как величину $h$, так и значения постоянных в применяемой формуле Рунге-Кутты:

$$\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \beta_{21},\ \beta_{31},\ \beta_{32},\ \beta_{41},\ \beta_{42},\ \beta_{43},\ p_{41},\ p_{42},\ p_{43},\ p_{44}.$$

В соответствии с (2.11)–(2.15), алгоритм последовательного (пошагового) решения следующих задач Коши: для $i = 1$ – (2.1), (2.2); для $i = 2, 3, 4, \ldots, i_f$ – (2.1), (2.10), тогда можно записать в следующем виде.

Шаг 1: инициализация локальных переменных программы, в том числе:

а) начальных условий для первого шага интегрирования в виде: $\xi_1 = \xi_0 = x_0$; $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_0$;

б) обнуление приращений $\Delta\mathbf{y} = 0$; в) обнуление счетчика шагов интегрирования: $step = 0$.

Шаг 2: $step = step + 1$ ($i = step$, номер текущего шага интегрирования) и обнуление массива приращений.

Шаг 3: если $\xi_0 + h > x_f$, то $h = x_f - \xi_0$ (коррекция шага интегрирования).

Шаг 4: вычисление: $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(\xi_1, \mathbf{z}_1)$; $\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y} + p_{41}\mathbf{k}_1$.

Шаг 5: $\xi_2 = \xi_0 + \alpha_2 h$; $\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_0 + \beta_{21}\mathbf{k}_1$.

Шаг 6: вычисление: $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(\xi_2, \mathbf{z}_2)$; $\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y} + p_{42}\mathbf{k}_2$.

Шаг 7: $\xi_3 = \xi_0 + \alpha_3 h$; $\mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_0 + \beta_{31}\mathbf{k}_1 + \beta_{32}\mathbf{k}_2$.

Шаг 8: вычисление: $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(\xi_3, \mathbf{z}_3)$; $\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y} + p_{43}\mathbf{k}_3$.

Шаг 9: $\xi_4 = \xi_0 + \alpha_4 h$; $\mathbf{z}_4 = \mathbf{z}_0 + \beta_{41}\mathbf{k}_1 + \beta_{42}\mathbf{k}_2 + \beta_{43}\mathbf{k}_3$.

Шаг 10: вычисление: $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(\xi_4, \mathbf{z}_4)$; $\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y} + p_{44}\mathbf{k}_4$.

Шаг 11: вычисление: $\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{y}$ (решение $i$-й задачи Коши (2.1), (2.2) или (2.10)).

Шаг 12: если $\xi_0 = x_f$ (или $\xi_0 \geq x_f$), то выход из программы.

Шаг 13: формирование начальных условий для следующего шага интегрирования: $\xi_0 = \xi_0 + h$; $\xi_1 = \xi_0$; $\mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_i$; $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0$.

Шаг 14: переход к шагу 2.

Очевидно, что в приведенном выше алгоритме (далее – Алгоритм-1) шаги № 4–10, связанные с вычислением вектор-коэффициентов $\mathbf{k}_j$ (2.12)–(2.15), можно реализовать с помощью одного цикла (далее – это основной цикл программы); список значений параметра для этого цикла, очевидно, имеет вид: $j = 1, 2, 3, 4$. Кроме того, следует учесть, что $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ в Алгоритме-1 – значения одной и той же переменной $\xi$. То же самое относится к векторам $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$, которые располагаются в одном и том же рабочем массиве $\mathbf{z}$, но с различными значениями компонент (или элементов). При этом переменная $\xi_0$ и вектор $\mathbf{z}_0$ предназначаются для хранения соответствующих значений в начале текущего шага интегрирования до его завершения. В результате модификаций Алгоритма-1 получим Алгоритм-2, запись которого имеет следующий вид.

Шаг 1: инициализация локальных переменных программы, в том числе:

а) начальных условий для первого шага интегрирования в виде: $\xi_0 = x_0$; $\xi = x_0$; $\mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_0$;

б) обнуление приращений $\Delta\mathbf{y} = 0$;

в) обнуление счетчика шагов интегрирования: $step = 0$.

Шаг 2: а) $step = step + 1$ ($i = step$, номер текущего шага интегрирования);

б) обнуление массива накопления приращений.

Шаг 3: если $\xi_0 + h > x_f$, то $h = x_f - \xi_0$ (коррекция шага интегрирования).

Шаг 4: $j = 0$ (начало основного цикла решения *i*-й задачи Коши (2.1), (2.2) или (2.10)).

Шаг 5: $j = j + 1$ (счетчик подшагов текущего шага интегрирования).

Шаг 6: вычисление: $\mathbf{k}_j = h\mathbf{f}(\xi, \mathbf{z})$; $\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y} + p_{4j}\mathbf{k}_j$.

Шаг 7: если $j < 4$, то переход к шагу 12.

Шаг 8: вычисление: $\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{y}$.

Шаг 9: формирование начальных условий для следующего шага интегрирования: $\xi_0 = \xi_0 + h$; $\xi = \xi_0$; $\mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_i$; $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$.

Шаг 10: если $\xi_0 \ge x_f$, то выход из программы.

Шаг 11: переход к шагу 2 (то есть переход на следующий шаг интегрирования).

Шаг 12: вычисление ( $j < 4$ ): $\xi = \xi_0 + \alpha_{j+1} h$; $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \sum_{l=1}^{j} \beta_{j+1,l} \mathbf{k}_l$,

и переход к шагу 5 (продолжение выполнения основного цикла; напомним также, что здесь должно быть $\alpha_1 = 0$ и $\beta_{11} = 0$).

***2.2.2 Текст программы, реализующей Алгоритм-2***. Текст программы, которая реализует Алгоритм-2 (см. Приложение 2), записанный с использованием простейших операторов ФОРТРАН, а именно, следующих операторов [11]: **DO** – оператор цикла (для выполнения группы операторов, из которых последний имеет метку); **IF (…) THEN** – условный оператор, который выполняется только при выполнении соответствующего условия; **GO TO** – оператор безусловной передачи управления на указанный (помеченный) оператор; **CALL** – оператор вызова подпрограммы (в программе RUNGE 4.2 вызываемой подпрограммой является подпрограмма вычисления правых частей системы (2.1) – $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$: соответственно, в подпрограмме CALCPR (T, Z, PR) T – входной параметр для независимой переменной ($x$), Z – входной массив вычисляемых в соответствии с Шагом 12 значений $\mathbf{z}$, PR – выходной массив значений вектора правых частей); **CONTINUE** – «пустой» оператор. В тексте программы, для удобства её чтения, используются строки комментариев, помеченные «Comment», и приведены только исполняемые операторы.

В таблице 1 приведен список всех используемых в программе RUNGE 4.2 переменных и соответствующих им идентификаторов.

Таблица 1. Обозначения идентификаторов, массивов и констант для программы RUNGE 4.2

| № п/п | Переменная, массив или константа | Идентификатор | Примечание |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_0$ | X0 | левая граница интервала интегрирования $[x_0, x_f]$ |
| 2 | $x_f$ | XFIN | правая граница интервала интегрирования ( $x_f > x_0$ ) |
| 3 | $\mathbf{y}_0$ | Y0 (1:N) | вектор начальных условий (2.2) |
| 4 | $n$ | N | порядок системы (2.1) |
| 5 | $h$ | HINT | шаг интегрирования |
| № п/п | Переменная, массив или константа | Идентификатор | Примечание |
| 6 | $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ | ALPHA (2:4) | константы формулы Рунге-Кутты |
| 7 | $\beta_{21}$, $\beta_{31}$, $\beta_{32}$, $\beta_{41}$, $\beta_{42}$, $\beta_{43}$ | BETTA (2:4, 1:3) | константы формулы Рунге-Кутты |
| 8 | $p_{41}$, $p_{42}$, $p_{43}$, $p_{44}$ | P4 (1:4) | константы формулы Рунге-Кутты |
| 9 | $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_4$ | K (1:4, 1:N) | вектор-коэффициенты (2.12) – (2.15) |
| 10 | $\xi$ | T | независимая переменная |
| 11 | $\xi_0$ | T0 | независимая переменная на начало текущего шага интегрирования |
| 12 | $\mathbf{z}$ | Z (1:N) | рабочий массив |
| 13 | $\mathbf{z}_0$ | Z0 (1:N) | массив начальных условий для текущего шага интегрирования |
| 14 | $\mathbf{y}_i$ | YI (1:N) | массив решений задач (2.1), (2.10) |
| 15 | $\Delta\mathbf{y}$ | DY (1:N) | массив для накопления приращений |
| 16 | $\mathbf{f}(\xi, \mathbf{z})$ | PR (1:N) | вектор правых частей системы (2.1) |
| 17 | — | STEP | счетчик шагов интегрирования |
| 18 | $i, j, l$ | I, J, L | параметры циклов |
| 19 | — | SUM | вспомогательная переменная |

***2.2.3 Замечания к программе RUNGE 4.2.*** Приведенный в Приложении 2 текст программы RUNGE 4.2 можно было бы представить и в более компактной форме, но только с применением алгоритмических языков программирования более высокого уровня (Паскаль, C + +, VBA и т.д.). Кроме того, программа RUNGE 4.2 допускает существенную модификацию и при используемых здесь средствах программирования. В связи с этим напомним, что в подразделе 1.4 также было рассмотрено применение метода Рунге-Кутты для системы вида (1.21), а именно:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z).$$

Там же был отмечен случай, когда второе из этих уравнений имеет вид $\frac{dz}{dx} = 1$. Поскольку это уравнение элементарно интегрируется: $z(x) = x - x_0$, то это можно рассматривать как замену независимой переменной $x = z$. Поэтому для системы (2.1) также можно ввести соответствующую замену независимой переменной: $x = y^{n+1}$. При этом задача Коши (2.1), (2.2) на интервале $[x_0, x_f]$ $(x_0 < x_f < \infty)$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, y^{n+1}); \ \frac{dy^{n+1}}{dx} = 1, \qquad (2.16)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \ y^{n+1}(x_0) = x_0. \qquad (2.17)$$

Очевидно, что правые части системы (2.16) не будут содержать независимую переменную, то есть (2.16) становится автономной системой. Но тогда, в соответствии с общими формулами Рунге-Кутты (1.33), не требуется явное вычисление приращений для независимой переменной: $x = x_0 + \alpha_j h$, для $j = 2, 3, 4$ (см. оператор № 28 в тексте программы RUNGE 4.2 в Приложении 2).

Соответствующий вариант программы RUNGE 4.3 с использованием обозначений таблицы 1 приведен в Приложении 3. При этом предполагается, что N – порядок системы (2.16) равен $n+1$. Соответственно в подпрограмме для вычисления правых частей CALCPR (Z, PR) входной параметр T для независимой переменной также исключается.

## 2.3 О программной реализации численного решения задачи Коши на интервале с нефиксированным правым концом

В отличие от рассмотренного в подразделе 2.2 варианта численного решения задачи Коши (2.1), (2.2) на каком-либо заданном интервале $[x_0, x_f]$ (при $x_f > x_0$), здесь будет рассмотрен вариант её решения, в котором не предполагается явного задания правой границы интервала $[x_0, x_f]$, то есть значение $x_f$ не фиксировано. Такая постановка задачи Коши возникает при решении широкого круга прикладных задач, в которых значение $x_f$ определяется исходя из каких-либо дополнительных условий «останова», например в виде условий (2.6), процедуры численного решения дифференциального уравнения (2.1). В связи с этим представляет интерес соответствующая модификация программы RUNGE 4.3 (см. Приложение 3). Однако, вначале необходимо рассмотреть подходы к построению алгоритма определения значения $x_f$.

***2.3.1 Об условиях «останова» программы.*** Так как значение $x_f$ в рассматриваемом здесь варианте решения задачи Коши определяется, когда выполняется хотя бы одного из условий (2.6):

$\psi_k(x_f, \mathbf{y}(x_f)) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, l$), с заданной точностью $\varepsilon_k > 0$, то есть с учетом (2.7):

$$| \psi_k(\tilde{x}_f, \tilde{\mathbf{y}}_m(\tilde{x}_f)) | \le \varepsilon_k ,$$

то доработка программы RANGE 4.3 требуется только в той её части, которая непосредственно связана с определением условий выхода из неё или, что то же самое, выполнения условий завершения решения соответствующей задачи Коши. Поэтому в первую очередь следует дать описание дополнительных исходных данных, которые необходимы для модификации программы RANGE 4.3. Во-первых, это вспомогательная программа (подпрограмма, процедура), с помощью которой будут вычисляться значения функций $\psi_k(x, \mathbf{y})$, $k = 1, 2, \ldots, l$, для заданных $x$ и $\mathbf{y}$. Эта программа, как и программа для вычисления правых частей уравнения (2.1), – вызываемая подпрограмма, предназначенная для вычисления значений функций $\psi_k(x, \mathbf{y})$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Поскольку они по существу являются условиями «останова» решения рассматриваемой задачи, то далее их можно называть *функциями выхода*, а программу их вычисления – подпрограммой вычисления функций выхода.

В частности, следует отметить, что одну из функций выхода можно задавать, например, в виде $\psi_1(x, \mathbf{y}) = x_f^* - x$, где $x_f^*$ – желаемое значение для $x_f$ (значение $x_f^*$ может вводиться и с целью временного ограничения решения задачи). В том случае, когда $l = 1$ и функция $\psi_1(x, \mathbf{y})$ является единственной функцией выхода, рассматриваемый вариант численного решения задачи Коши фактически сводится к фиксированию правой границы интервала $[x_0, x_f]$ с точностью, задаваемой константой точности $\varepsilon_1 \ge 0$. В общем случае, когда $l > 1$, одну из функций выхода всегда можно задавать в виде: $\psi_1(x, \mathbf{y}) = x_f^* - x$, и в случае, если введена замена: $x = y^{n+1}$, то эту функцию можно записать так: $\psi_1(\mathbf{y}) = x_f^* - y^{n+1}$.

Помимо функций выхода и их числа $l$, дополнительными исходными данными также будут и значения точностей для них, то есть некоторые константы $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, l$.

***2.3.2 Алгоритм-4.*** Перейдем к описанию алгоритма, который реализует «останов» программы. С учетом условий (2.7) алгоритм состоит в том, чтобы в начале каждого шага интегрирования, быть может за исключением первого, осуществлять: во-первых, проверку выполнения условий (2.7), поскольку выполнение хотя бы одного из них означает завершение решения задачи, и, в частности, получения приближенного значения $\tilde{x}_f$; во-вторых, проверку всех функций выхода на смену знака. Например, пусть на начало $m+1$-го шага, то есть по завершении $m$-го шага, хотя бы для одной из функций выхода $\psi_k$ ($1 \le k \le l$) будет выполнено условие

$$\psi_k(x_{m-1}, \mathbf{y}_{m-1}) \cdot \psi_k(x_m, \mathbf{y}_m) < 0. \tag{2.18}$$

Но тогда это означает, что $k$-е условие в (2.6) выполняется для некоторой точки $x = \tilde{x}_f$, то есть имеет место:

$$\psi_k(\tilde{x}_f, \tilde{\mathbf{y}}_m(\tilde{x}_f)) = 0, \quad x_{m-1} < \tilde{x}_f < x_m,$$

где $\mathbf{y}_{m-1}$ – начальное условие на подынтервале $[x_{m-1}, x_m]$, а $\mathbf{y}_m = \tilde{\mathbf{y}}_m(x_m)$ – полученное приближенное решение. Начальное приближение для точки $\tilde{x}_f$ из (2.18) можно вычислять по формуле (2.8).

В общем случае, например, на том же $m$-м шаге, условия (2.18) могут быть выполнены для нескольких функций выхода $\psi_{k_q}$, где $q = 1, 2, \ldots, \nu$ $(1 \le \nu \le l)$, а $k_1 < k_2 < \ldots < k_\nu$. В связи с этим возможны два варианта определения приближенного значения $\tilde{x}_f$.

В первом варианте можно предполагать лексикографическое упорядочение функций выхода по их номерам, определять начальное приближение $\tilde{x}_f$ по формуле (2.8) только для функции $\psi_{k_1}$. Во втором – можно определить $\tilde{x}_f$ для всех $\psi_{k_q}$, $q = 1, 2, \ldots, \nu$, а затем выбрать тот номер $k_q$, для которого либо $\tilde{x}_f$, либо $h_1 < h$ (2.9) являются минимальными.

В любом случае повторные итерации для $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, на подынтервалах $[x_{m-1}, x_{m-1} + h_\lambda]$ позволяют получить требуемое решение, если только постоянные $\varepsilon_{k_q} > 0$ достаточно малы, хотя при этом «активные» функции могут быть различными (меняться от итерации к итерации).

В заключение обсуждения алгоритма «останова», в связи с возможностью выполнения хотя бы одного условия (2.7), особо следует отметить, что этот алгоритм не исключает тех случаев, когда какое-либо из условий (2.6) все-таки может выполняться внутри подынтервала $[x_{m-1}, x_m]$, при том, что ни одно из условий (2.18) не выполняется, то есть когда имеет место:

$$\psi_k(x_{m-1}, \mathbf{y}_{m-1}) \cdot \psi_k(x_m, \mathbf{y}_m) > 0.$$

Для исключения таких ситуаций можно рекомендовать выбор меньшего шага интегрирования или организацию дополнительной проверки внутри подынтервала с использованием аналитических выражений для $\tilde{\mathbf{y}}_i(x)$ вида (2.3). Дополнительно отметим, что выполнение одного из условий (2.7) может быть также вызвано тем, что точности $\varepsilon_k > 0$ для функций выхода, которые не меняют знака на $[x_{m-1}, x_m]$, заданы слишком грубо. Очевидно, что и в этом случае также необходимо дополнительное исследование поведения функций выхода (также с использованием выражений (2.3)).

Переходя непосредственно к описанию алгоритма «останова», укажем, что в программе RANGE 4.3 его аналог реализуется оператором № 10, соответствующему шагу № 3 Алгоритма-3. Кроме того, для работы алгоритма «останова» перед началом первого шага интегрирования следует вычислить значения всех функций выхода $\psi_{k0} = \psi_k(\mathbf{y}_0)$.

В соответствии с изложенным алгоритм «останова» (далее – Алгоритм-4), который включает процедуру повторных итераций с целью обеспечения выполнения условий (2.6) с требуемой точностью, будет иметь следующий вид.

Шаг 1: (см. описание Алгоритма-2);
*iter* = 0 – обнуление счетчика итераций.

Шаг 2: вычисление $\tilde{\psi}_k = \psi_{k0} = \psi_k(\mathbf{y}_0)$, $k = 1, 2, \ldots, l$.

Шаг 3: $step = step + 1$ ($i = step$, номер текущего шага интегрирования) и обнуление массива приращений.

Шаг 4: $j = j + 1$ (счетчик подшагов текущего шага интегрирования и начало основного цикла).

Шаг 5: если $j > 1$ или $i = 1$, то переход к шагу 8.

Шаг 6: вычисление значений функций выхода $\psi_k(\mathbf{y}_{i-1})$, $k = 1, 2, \ldots, l$, на начало $i$-го шага.

Шаг 7: проверка выполнения условий $|\psi_k(\mathbf{y}_{i-1})| \le \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots, l$; если хотя бы одно из условий выполняется (первое в порядке возрастания номеров *k*), то выход из программы.

Шаг 8: проверка выполнения условий (2.18); если нет ни одного условия, которое выполняется, то переход к Шагу 10.

Шаг 9: корректировка шага интегрирования по формуле (2.9);
$iter = iter + 1$ (счетчик итераций); переход к Шагу 3.

Шаг 10: сохранение значений функций выхода для Шага 8 ($\psi_k(\mathbf{y}_{i-1}) \to \tilde{\psi}_k$).

Шаг 11: вычисление правых частей (вызов программы CALCPR).

Шаг 12: выполнение шагов №№ 7 –12 программы RUNGE 4.3.

***2.3.3 Дополнительные описания к программе RUNGE 4.3.*** Для описания программной реализации численного решения задачи Коши – в виде соответствующей модификации программы RUNGE 4.3 с учетом вышеизложенного в подразделе 2.3.1 алгоритма «останова» (Алгоритм - 4) – дополнительно к введенным ранее описаниям переменных (см. таблицу 1 на стр. 46) необходимо ввести следующие идентификаторы и переменные:

– массив $\mathrm{EPS}(1:\mathrm{M})$ для чисел $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, где M – идентификатор для числа используемых функций выхода;
– массив $\mathrm{FV}(1:\mathrm{M})$ для текущих значений функций выхода на начало текущего шага интегрирования ($\mathrm{FV}(k) = \psi_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$);
– массив $\mathrm{FV1}(1:\mathrm{M})$, в котором хранятся значения функций выхода на начало предыдущего шага интегрирования;
– ITER идентификатор переменной *iter* (счетчик итераций).

Для вычисления текущих значений функций выхода должна использоваться вспомогательная подпрограмма $\mathrm{CALCFV}(\mathrm{Y}, \mathrm{FV})$, где $\mathrm{Y}(1:\mathrm{N})$ – входные параметры, а $\mathrm{FV}(1:\mathrm{M})$ – выходной параметр подпрограммы и массив. Соответственно, текст программы RUNGE4.4, реализующей Алгоритм-4, приведен в Приложении 4.

## 2.4 О выборе шага интегрирования при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем

***2.4.1 Об условиях сходимости методов Рунге-Кутты.*** Здесь рассмотрим условия сходимости методов Рунге-Кутты, при которых получаемое численное решение задачи Коши будет сходиться к её точному решению.

Итак, пусть $y(x)$ – точное решение задачи (1.1), (1.2), а $\widetilde{y}_k(x)$ – её решения, которые удовлетворяют условиям: $\widetilde{y}_k(x_k) = y_k$, где $y_k$ – значения, получаемые по формулам численного интегрирования на подынтервалах $[x_{k-1}, x_k]$. Соответственно, можно ввести в рассмотрение решение $\widetilde{y}_0(x)$, которое можно рассматривать как решение задачи (1.1), (1.2) для возмущенного начального условия. Погрешность $Q_k = \widetilde{y}_k(x_k) - y(x_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ можно представить в виде

$$Q_k = \widetilde{y}_k(x_k) - y(x_k) = \widetilde{y}_k(x_k) - \widetilde{y}_0(x_k) + \widetilde{y}_0(x_k) - y(x_k) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} [\widetilde{y}_j(x_k) - \widetilde{y}_{j-1}(x_k)] + [\widetilde{y}_0(x_k) - y(x_k)].$$

В [2, с. 376] показано, что разности решений одного и того же дифференциального уравнения, например (1.1), в какой-либо точке можно найти через их разности в другой точке, а именно:

$$Y_2(\beta) - Y_1(\beta) = \left(Y_2(\alpha) - Y_1(\alpha)\right) \exp\left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f_y(x, \hat{y}(x))\, dx \right\},$$

где $\hat{y}(x)$ заключено между $Y_2(x)$ и $Y_1(x)$. Если принять $\alpha = x_{j-1}$, $\beta = x_j$, $Y_1(x) = \tilde{y}_{j-1}(x)$ и $Y_2(x) = \tilde{y}_j(x)$, а также ввести $\hat{y}_j(x)$, которое заключено между $\tilde{y}_{j-1}(x)$ и $\tilde{y}_j(x)$, то получим

$$\tilde{y}_j(x_k)-\tilde{y}_{j-1}(x_k)=\left(\tilde{y}_j(x_j)-\tilde{y}_{j-1}(x_j)\right)\exp\left\{\int_{x_j}^{x_k} f_y(x,\hat{y}_j(x))\,dx\right\}.$$

Аналогично можно получить выражение и для $\tilde{y}_0(x_k)-y(x_k)$:

$$\tilde{y}_0(x_k)-\tilde{y}(x_k)=\left(\tilde{y}_0(x_0)-\tilde{y}(x_0)\right)\exp\left\{\int_{x_0}^{x_k} f_y(x,\hat{y}_0(x))\,dx\right\}.$$

Тогда выражение для $Q_k$ можно переписать в виде:

$$Q_k=\sum_{j=1}^{k}\left(\tilde{y}_j(x_j)-\tilde{y}_{j-1}(x_j)\right)\exp\left\{\int_{x_j}^{x_k} f_y(x,\hat{y}_j(x))\,dx\right\}+$$

$$+\left(\tilde{y}_0(x_0)-y(x_0)\right)\exp\left\{\int_{x_0}^{x_k} f_y(x,\hat{y}_0(x))\,dx\right\}. \qquad (2.19)$$

Так как $\tilde{y}_j(x_j)=y_j$, то $\tilde{y}_j(x_j)-\tilde{y}_{j-1}(x_j)=y_j-\tilde{y}_{j-1}(x_j)$. Но величина $\tilde{y}_{j-1}(x_j)$ – значение точного решения уравнения (1.1) в точке $x_j$, удовлетворяющего условию $\tilde{y}_{j-1}(x_{j-1})=y_{j-1}$, поэтому разность $y_j-\tilde{y}_{j-1}(x_j)$ представляет собой погрешность метода для одного шага рассматриваемого метода (локальная погрешность) [2]. Поскольку получаемые по формулам численного интегрирования решения включают также ошибки округления, постольку

$$\tilde{y}_j(x_j)-\tilde{y}_{j-1}(x_j)=\sigma_j+\delta_j,$$

где $\sigma_j$ – погрешность метода приближенного решения, полученного на подынтервале интегрирования $[x_{j-1},x_j]$, а $\delta_j$ – вычислительная погрешность (погрешность округления) приближенного решения на том же подынтервале.

Значение $Q_0 = \widetilde{y}_0(x_0) - y(x_0)$ – погрешность начального условия или неустранимая погрешность. Соответственно, тогда (2.19) можно записать в виде

$$Q_k = \sum_{j=1}^{k} (\sigma_j + \delta_j) \exp\left\{ \int_{x_j}^{x_k} f_y(x, \hat{y}_j(x)) dx \right\} + Q_0 \exp\left\{ \int_{x_0}^{x_k} f_y(x, \hat{y}_0(x)) dx \right\}. \quad (2.20)$$

Таким образом, погрешность приближенного решения, полученного на подынтервале $[x_{k-1}, x_k]$, содержит в себе погрешность метода (неустранимую погрешность) и вычислительную погрешность приближенных решений на подынтервалах $[x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1, k-1}$. Погрешность $Q_k$ (2.20) – глобальная погрешность приближенного решения.

Если при всех $x_0 < x_j \le x_f$ справедливо неравенство

$$|\sigma_j| \le C(x_j - x_{j-1})^{s+1},$$

где $C$ – положительная постоянная, а для всех $x_0 \le x_j \le x_k \le x_f$ выполняется неравенство

$$\exp\left\{ \int_{x_j}^{x_k} f_y(x, \hat{y}_j(x)) dx \right\} \le \exp(L(x_k - x_j)) \le \exp(L(x_f - x_0)),$$

то для $Q_k$ имеет место следующая оценка [2]:

$$|Q_k| \le \exp[L(x_f - x_0)][C(x_f - x_0)H^s + i_f \delta + |Q_0|],$$

где

$$\delta = \max_j |\delta_j|, \; L = \sup_{x_0 \le x \le x_f} |f_y| < \infty, \; H = \max_{0 < j \le i_f} (x_j - x_{j-1}),$$

а $i_f$ – число узлов на интервале $[x_0, x_f]$.

Из указанной выше оценки следует, что $\max\limits_{x_0 < x_k \le x_f} |Q_k| \to 0$ при $H \to 0$, если также $i_f \delta \to 0$, $|Q_0| \to 0$ [2]. То есть при достаточно малом шаге интегрирования $h$ (а также при малой вычислительной погрешности) приближенное решение задачи Коши (1.1), (1.2), получаемое методом Рунге-Кутты (а точнее, по соответствующей формуле этого метода), сходится к точному решению начальной задачи.

То же справедливо и в общем случае для решения задачи Коши (2.1), (2.2).

***2.4.2 Правило Рунге.*** При численном решении задач Коши (1.1), (1.2) или (2.1), (2.2) обычно требуется найти их приближенное решение с некоторой заданной точностью, которая определяется условиями решаемой прикладной задачи. Построение соответствующих алгоритмов, как правило, сопровождается оценкой погрешности приближенного решения. Приведенная в п.2.4.1 априорная оценка для $Q_k$ неудобна для практического применения, в частности, из-за сложности определения постоянной $C$. Кроме того, она может во много раз превосходить реальную ошибку. На практике обычно применяют апостериорные оценки для погрешности решения, а именно для локальной погрешности. Для формул Рунге-Кутты такая погрешность пропорциональна величине выбираемого шага, так как функция ошибки для формулы $r$-й степени $\varphi_r(h)$ на шаге имеет главный член, то есть для нее справедливо представление

$$\varphi_r(h) = w(x, y)h^{s+1} + \mathrm{o}(h^{s+2}),$$

где $s$ – порядок точности ($s \le r$) формулы, а $w(x, y)$ – некоторая функция, определенная в области: $x_0 \le x \le x_0 + h$; $|y| < \infty$ (здесь только для первого шага). Согласно формуле Тейлора, функцию $\varphi_r(h)$ также можно записать в виде

$$\varphi_r(h) = \frac{\varphi_r^{(s+1)}(0)}{(s+1)\,!} h^{s+1} + \frac{\varphi_r^{(s+2)}(\lambda h)}{(s+2)\,!} h^{s+2}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

то есть главный член погрешности на одном шаге интегрирования будет равен $\frac{\varphi_r^{(s+1)}(0)}{(s+1)\,!} h^{s+1}$.

Пусть $y(x)$ – точное решение задачи (1.1), (1.2) на $[x_0, x_0 + h]$, а $\tilde{y}_{(h)}$ – приближенное решение, получаемое по соответствующей формуле Рунге-Кутты с шагом $h$. Тогда имеет место:

$$\tilde{y}_{(h)}(x_0 + h) - y(x_0 + h) \approx \frac{\varphi_r^{(s+1)}(0)}{(s+1)\,!} h^{s+1}.$$

Если же применить ту же формулу Рунге-Кутты, но с шагом $h/2$, то, обозначив как $\tilde{y}_{(h/2)}$ соответствующее приближенное решение, получим

$$\tilde{y}_{(h/2)}(x_0 + h/2) - y(x_0 + h/2) \approx \frac{\varphi_r^{(s+1)}(0)}{(s+1)\,!} (h/2)^{s+1}.$$

В силу предполагаемой малости $h/2$ погрешность той же формулы на следующем шаге интегрирования, также равном $h/2$, будет иметь тот же главный член. В результате тогда (то есть после двух шагов) получим

$$\tilde{y}_{(h/2)}(x_0 + h) - y(x_0 + h) \approx 2 \frac{\varphi_r^{(s+1)}(0)}{(s+1)\,!} (h/2)^{s+1}.$$

Сравнивая выражения для $\tilde{y}_{(h)}(x_0 + h)$ и $\tilde{y}_{(h/2)}(x_0 + h)$, получим представление для главного члена погрешности на одном шаге интегрирования $h$ в следующем виде

$$\frac{\varphi_r^{(s+1)}(0)}{(s+1)\,!}h^{s+1} \approx \frac{\tilde{y}_{(h)}(x_0+h)-\tilde{y}_{(h/2)}(x_0+h)}{1-1/2^s}\ .$$

Если в качестве приближенного решения рассматривать значение $\tilde{y}_{(h)}(x_0+h)$, то для его погрешности можно записать:

$$\sigma_1 = \tilde{y}_{(h)}(x_0+h) - y(x_0+h) \approx \frac{\tilde{y}_{(h)}(x_0+h)-\tilde{y}_{(h/2)}(x_0+h)}{1-1/2^s}. \qquad (2.21)$$

Соответственно, если в качестве приближенного решения принять $\tilde{y}_{(h/2)}(x_0+h)$, то оценка его погрешности принимает вид:

$$\sigma_2 = \tilde{y}_{(h/2)}(x_0+h) - y(x_0+h) \approx \frac{\tilde{y}_{(h/2)}(x_0+h)-\tilde{y}_{(h)}(x_0+h)}{2^s-1}. \qquad (2.22)$$

Полученные оценки для локальной погрешности (2.21) и (2.22) связаны с *правилом Рунге*, которое реализуется следующим образом. Задается некоторый начальный шаг *h*. По выбранным формулам Рунге-Кутты вычисляется значение приближенного решения в точке $x_0+h$, а именно $\tilde{y}_{(h)}(x_0+h)$. Далее *h* уменьшают в два раза и вычисляют значение $\tilde{y}_{(h/2)}(x_0+h/2)$, а затем, принимая в качестве начальной точки $\xi_0 = x_0 + h/2$ и полученное в этой точке значение $y(\xi_0) = \tilde{y}_{(h/2)}(x_0+h/2)$, вычисляют $\tilde{y}_{(h/2)}(\xi_0+h/2)$ также с шагом $h/2$. По формуле (2.21) или (2.22) находят величину локальной погрешности. Очевидно, если абсолютная величина погрешности превосходит заданную точность, шаг интегрирования необходимо уменьшить.

В случае задачи Коши (2.1), (2.2) оценки (2.21) и (2.22) следует представить в векторном виде:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \tilde{\mathbf{y}}_{(h)}(x_0+h) - \mathbf{y}(x_0+h) \approx \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{(h)}(x_0+h)-\tilde{\mathbf{y}}_{(h/2)}(x_0+h)}{1-1/2^s};$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \tilde{\mathbf{y}}_{(h/2)}(x_0+h) - \mathbf{y}(x_0+h) \approx \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{(h/2)}(x_0+h) - \tilde{\mathbf{y}}_{(h)}(x_0+h)}{2^s-1}.$$

Соответственно, для вычисления локальных погрешностей в этом случае необходимо также выбрать подходящую векторную норму $\|\cdot\|$ для вычисления $\sigma_1 = \|\boldsymbol{\sigma}_1\|$ и $\sigma_2 = \|\boldsymbol{\sigma}_2\|$ и реализации правила Рунге.

***2.4.3 Оценки погрешности с помощью контрольных членов.*** Существует еще один способ оценки локальной погрешности, основанный на комбинации формул разных порядков точности. По сравнению с правилом Рунге этот способ требует меньшего количества вычислений правых частей уравнений (1.1), (2.1). Для оценки погрешности вычисляются значения функции в одной и той же точке при помощи формул разных порядков точности *s* и *t* с одним и тем же шагом *h* [2, 3], а именно:

во-первых,

$$y_1^s(x_0+h) = y_0 + \Delta y_0(h), \tag{2.23}$$

$$\Delta y_0(h) = p_{r1}k_1(h) + p_{r2}k_2(h) + \ldots + p_{rr}k_r(h),$$

где

$$k_1(h) = hf(x_0, y_0);$$

$$k_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21}k_1);$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$k_r(h) = hf(x_0 + \alpha_r h, y_0 + \beta_{r1}k_1 + \beta_{r2}k_2 + \ldots + \beta_{r,r-1}k_{r-1});$$

во-вторых,

$$y_1^t(x_0+h) = y_0 + \Delta\tilde{y}_0(h), \tag{2.24}$$

$$\Delta \tilde{y}_0(h) = \tilde{p}_{\tilde{r}1}\tilde{k}_1(h) + \tilde{p}_{\tilde{r}2}\tilde{k}_2(h) + \ldots + \tilde{p}_{\tilde{r}\tilde{r}}\tilde{k}_{\tilde{r}}(h),$$

где

$$\tilde{k}_1(h) = hf(x_0, y_0);$$

$$\tilde{k}_2(h) = hf(x_0 + \tilde{\alpha}_2 h, y_0 + \tilde{\beta}_{21}\tilde{k}_1);$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\tilde{k}_{\tilde{r}}(h) = hf(x_0 + \tilde{\alpha}_{\tilde{r}} h, y_0 + \tilde{\beta}_{\tilde{r}1}\tilde{k}_1 + \tilde{\beta}_{\tilde{r}2}\tilde{k}_2 + \ldots + \tilde{\beta}_{\tilde{r},\tilde{r}-1}\tilde{k}_{\tilde{r}-1}).$$

Пусть $s > t$, $r > \tilde{r}$. Тогда локальные погрешности для приближенных решений, найденных с учетом (2.23) и (2.24), будут иметь следующий вид:

$$\sigma^s = y(x_0 + h) - y^s(x_0 + h) = \mathrm{o}(h^{s+1});$$

$$\sigma^t = y(x_0 + h) - y^t(x_0 + h) = \mathrm{o}(h^{t+1}).$$

Отсюда тогда получаем $\sigma^t = y^s(x_0 + h) - y^t(x_0 + h) + \mathrm{o}(h^{s+1})$, то есть

$$\sigma^t \approx y^s(x_0 + h) - y^t(x_0 + h). \tag{2.25}$$

Если в (2.23) и (2.24) принять, что $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i$, $\beta_i = \tilde{\beta}_i$, $i = 1,2,\ldots,\tilde{r}$, то тогда $k_i = \tilde{k}_i$, $i = 1,2,\ldots,\tilde{r}$, и для погрешности (2.25) справедливо представление

$$\sigma^t \approx y^s(x_0 + h) - y^t(x_0 + h) = \sum_{i=1}^{r} u_i \cdot k_i,$$

где

$$u_i = p_i - \tilde{p}_i, \ i = 1,2,\ldots,\tilde{r}, \ u_i = p_i, \ i = \tilde{r} + 1,\ldots,r.$$

Величина $E = \sum_{i=1}^{r} u_i \cdot k_i$ называется *контрольным членом*, а в качестве приближенного решения принимается значение:

$$y_1^s(x_0+h) = y_0 + \Delta y_0(h).$$

В качестве примера для (2.23), (2.24) приведем соотношения метода Кутты-Мерсона [11], известного как пятиэтапный метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности ( $s = 4$ ):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5,$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0); \quad k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}k_1);$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2);$$

$$k_4 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3);$$

$$k_5 = hf(x_0 + h, y_0 + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4),$$

а также метод третьего порядка точности ( $t = 3$ ):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{10}(k_1 + 3k_3 + 4k_4 + 2k_5).$$

Контрольный член в данном случае имеет порядок $\mathrm{o}(h^4)$ :

$$E = \frac{1}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5).$$

Контрольные члены для некоторых методов 4 порядка точности включительно приведены в Приложении 1.

***2.4.4 Выбор шага интегрирования.*** После оценки величины локальной погрешности можно принять решение о том, с каким шагом необходимо вести дальнейшее интегрирование для того, чтобы получить решение с заданной точностью. Существует несколько способов выбора оптимального шага интегрирования. Один из них – это *метод деления шага пополам*, который заключается в следующем. Вначале вычисляется абсолютная величина $|\sigma_h|$ погрешности приближенного решения на некотором начальном шаге $h$ по правилам (2.21), (2.22). Для $\varepsilon_0$ и $\varepsilon_1$ – заданных мер погрешности (обычно, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и $\varepsilon_0 / \varepsilon_1 \approx 2^s$, где $s \le r$ – порядок формулы Рунге-Кутты) анализируются следующие неравенства.

Во-первых, если $|\sigma_h| > \varepsilon_0$, то шаг интегрирования уменьшают вдвое и вычисляют величину $|\sigma_{h/2}|$. Если $|\sigma_{h/2}| > \varepsilon_0$, то шаг снова уменьшают вдвое и находят значение $|\sigma_{h/4}|$ и это повторяется до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $|\sigma_{h^*}| \le \varepsilon_0$. Шаг $h^*$, для которого будет справедливо указанное неравенство, является оптимальным, и он может быть использован для вычисления значения приближенного решения $\tilde{y}_{(h^*)}(x + h^*)$.

Во-вторых, если $|\sigma_h| \le \varepsilon_1$, то шаг интегрирования увеличивают вдвое, и, наконец, если окажется, что (возможно нескольких итераций) для некоторого шага $h^*$ будут выполняться неравенства $\varepsilon_1 \le |\sigma_{h^*}| \le \varepsilon_0$, то тогда этот шаг интегрирования далее не меняется и он может быть использован для вычисления значения приближенного решения $\tilde{y}_{(h^*)}(x + h^*)$.

Аналогичным образом осуществляется выбор допустимого шага интегрирования и в случае решения системы уравнений (2.1), (2.2). В этом случае при выборе шага интегрирования оценивается соответствующая величина $\|\boldsymbol{\sigma}_h\|$.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. М.: ГИФМЛ, 1960. 620 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 4-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 636 с.

3. Современные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Дж. Хола и Дж. Уайта. М.: Мир, 1979. 312 с.

4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.2. М.: Наука, 1977. 400 с.

5. Горелов Ю.Н. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге-Кутта): учебное пособие. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. 48 с.

6. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990. 512 с.

7. Математическая энциклопедия: Рунге-Кутта метод. Т.4, С. 1056-1058. М.: Изд-во «Советская энциклопедия». 1984.

8. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 368 с.

9. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник / С.А. Горбатенко [и др.]. М.: Машиностроение, 1971. 352 с.

10. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. Изд. 2 перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1069. 500 с.

11. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.

**Приложение 1**

## Формулы метода Рунге-Кутты (до четвертого порядка точности)

| Номер/ порядок формулы | Название метода (формулы) | Формула для вычисления $\Delta\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_{m+1} - \mathbf{y}_m$ | Формулы для вычисления коэффициентов $\mathbf{k}_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1/1 | Метод Эйлера, метод ломаных | $\Delta\mathbf{y}_m = \mathbf{k}_1$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ |
| 2/2 | Улучшенный метод Эйлера (или метод Хойна) | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ; $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m + \mathbf{k}_1)$ |
| 3/2 | Метод Эйлера с пересчетом (модифицированный) | $\Delta\mathbf{y}_m = \mathbf{k}_2$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ; $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$ |
| 4/2 | | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{4}(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ; $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{2}{3}h, \mathbf{y}_m + \frac{2}{3}\mathbf{k}_1)$ |
| 5/3 | | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ; $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$ ; $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m - \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2)$ |
| 6/3 | Метод Рунге-Кутты-Гейне | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{4}(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_3)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ; $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{3}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{3}\mathbf{k}_1)$ ; $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{2}{3}h, \mathbf{y}_m + \frac{2}{3}\mathbf{k}_2)$ |

Продолжение прил. 1

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 7/3 | | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{9}(2\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2 + 4\mathbf{k}_3)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ;<br>$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$ ;<br>$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{3}{4}h, \mathbf{y}_m + \frac{3}{4}\mathbf{k}_2)$ |
| 8/4 | Стандартный метод Рунге-Кутты (правило «1/6») | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ ;<br>контрольный член:<br>$\mathbf{E} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ;<br>$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$ ;<br>$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2)$ ;<br>$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m + \mathbf{k}_3)$ |
| 9/4 | Метод Рунге-Кутты (правило «3/8») | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{8}(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2 + 3\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ;<br>$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{3}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{3}\mathbf{k}_1)$ ;<br>$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{2}{3}h, \mathbf{y}_m - \frac{1}{3}\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ ;<br>$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$ |
| 10/4 | | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{8}(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2 + 3\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ;<br>$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{4}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{4}\mathbf{k}_1)$ ;<br>$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2)$ ;<br>$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m + \mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3)$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 11/4 | Первый метод Гилла | $\Delta \mathbf{y}_m = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}_2 +$ <br> $+2\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ; <br> $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$ ; <br> $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}_1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}_2)$ ; <br> $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}_3)$ |
| 12/4 | Второй метод Гилла | $\Delta \mathbf{y}_m = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ; <br> $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$ ; <br> $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m - \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ ; <br> $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_3)$ |
| 13/4 | Метод Рунге-Кутты-Мерсона | $\Delta \mathbf{y}_m = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5)$ ; <br> контрольный член Мерсона $o(h^5)$ : <br> $\mathbf{E} = \frac{1}{5}\left(\mathbf{k}_1 - \frac{9}{2}\mathbf{k}_3 + 4\mathbf{k}_4 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_5\right)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$ ; <br> $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{3}h, \mathbf{y}_m + \mathbf{k}_1)$ ; <br> $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{3}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2)$ ; <br> $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{3}{8}\mathbf{k}_1 + \frac{9}{8}\mathbf{k}_3)$ ; <br> $\mathbf{k}_5 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m + \frac{3}{2}\mathbf{k}_1 - \frac{9}{2}\mathbf{k}_3 + 6\mathbf{k}_4)$ |

Окончание прил. 1

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 14/4 | Метод Рунге-Кутты-Ингланда | $\Delta\mathbf{y}_m = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$; оценка локальной ошибки метода $o(h^5)$: $\mathbf{E} = \frac{1}{336}\left(-42\mathbf{k}_1 - 224\mathbf{k}_3 - 21\mathbf{k}_4 + +162\mathbf{k}_5 + 125\mathbf{k}_6\right)$ | $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_m, \mathbf{y}_m)$; $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$; $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_m + \frac{1}{4}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{k}_2)$; $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_m + h, \mathbf{y}_m - \mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3)$; $\mathbf{k}_5 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{28}{27}h, \mathbf{y}_m + \frac{7}{27}\mathbf{k}_1 + \frac{10}{27}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{27}\mathbf{k}_3)$; $\mathbf{k}_6 = h\mathbf{f}(x_m + \frac{1}{5}h, \mathbf{y}_m + \frac{28}{625}\mathbf{k}_1 - \frac{125}{625}\mathbf{k}_2 + +\frac{546}{625}\mathbf{k}_3 + \frac{54}{625}\mathbf{k}_4 - \frac{378}{625}\mathbf{k}_5)$ |

**Приложение 2**

Текст программы RUNGE 4.2

| № п/п | метка | оператор |
|---|---|---|
| | Comment | **Шаг 1** |
| 01 | | T0 = X0 |
| 02 | | T = X0 |
| 03 | | **DO** 10 I = 1, N |
| 04 | | Z0 (I) = Y0 (I) |
| 05 | | Z (I) = Y0 (I) |
| 06 | 10 | DY (I) = 0. |
| 07 | | STEP = 0 |
| | Comment | **Шаг 2** |
| 08 | 15 | STEP = STEP + 1 |
| 09 | | **DO** 10 I = 1, N |
| 10 | 20 | DY (I) = 0. |
| | Comment | **Шаг 3** |
| 11 | | **IF** (T0 + HINT > XFIN) **THEN** HINT = XFIN – T0 |
| | Comment | **Шаг 4 и 5** (начало основного цикла по $j$) |
| 12 | 25 | **DO** 90 J = 1, 2, 3, 4 |
| | Comment | **Шаг 6** |
| 13 | | **CALL** CALCPR (T, Z, PR) |
| 14 | | **DO** 30 I = 1, N |
| 15 | | K (J, I) = HINT ∗ PR (I) |
| 16 | 30 | DY (I) = DY (I) + P4 (J) ∗ K (J, I) |
| | Comment | **Шаг 7** |
| 17 | | **IF** (J < 4) **THEN GO TO** 60 |

```
      Comment  Шаг 8
               DO 40 I = 1, N
         40    YI (I) = Z0 (I) + DY (I)
      Comment  Шаг 9
               T0 = T0 + HINT
               T = T0
               DO 50 I = 1, N
               Z0 (I) = YI (I)
         50    Z (I) = Z0 (I)
      Comment  Шаг 10
               IF (T0 ≥ XFIN) THEN GO TO 100
      Comment  Шаг 11
               GO TO 15
      Comment  Шаг 12
         60    CONTINUE
               T = T0 + ALPHA (J + 1) ∗ HINT
               DO 80 I = 1, N
               SUM = 0.
               DO 70 L = 1, J
         70    SUM = SUM + BETTA (J + 1, L) ∗ K (L, I)
         80    Z (I) = Z0 (I) + SUM
      Comment  Конец основного цикла по j
         90    CONTINUE
        100    CONTINUE
```

**Приложение 3**

Текст программы RUNGE 4.3

| № п/п | метка | оператор |
|---|---|---|
| | Comment | **Шаг 1** |
| 01 | | **DO** 10 I = 1, N |
| 02 | | Z0 (I) = Y0 (I) |
| 03 | | Z (I) = Y0 (I) |
| 04 | 10 | DY (I) = 0. |
| 05 | | STEP = 0 |
| | Comment | **Шаг 2** |
| 06 | 15 | STEP = STEP + 1 |
| 07 | | **DO** 20 I = 1, N |
| 09 | 20 | DY (I) = 0. |
| | Comment | **Шаг 3** |
| 10 | | **IF** (Z0 (N) + HINT > XFIN) **THEN**<br>HINT = XFIN – Z0 (N) |
| | Comment | **Шаг 4 и 5** (начало основного цикла по *j*) |
| 11 | 25 | **DO** 90 J = 1, 2, 3, 4 |
| | Comment | **Шаг 6** |
| 12 | | **CALL** CALCPR (Z, PR) |
| 13 | | **DO** 30 I = 1, N |
| 14 | | K (J, I) = HINT ∗ PR (I) |
| 15 | 30 | DY (I) = DY (I) + P4 (J) ∗ K (J, I) |
| | Comment | **Шаг 7** |
| 16 | | **IF** (J < 4) **THEN GO TO** 60 |

Окончание прил. 3

```
Comment   Шаг 8
          DO 40 I = 1, N
    40    YI (I) = Z0 (I) + DY (I)
Comment   Шаг 9
          DO 50 I = 1, N
          Z0 (I) = YI (I)
    50    Z (I) = Z0 (I)
Comment   Шаг 10
          IF (Z0 (N) ≥ XFIN) THEN GO TO 100
Comment   Шаг 11
          GO TO 15
Comment   Шаг 12
    60    CONTINUE
          DO 80 I = 1, N
          SUM = 0.
          DO 70 L = 1, J
    70    SUM = SUM + BETTA (J + 1, L) * K (L, I)
    80    Z (I) = Z0 (I) + SUM
Comment   Конец основного цикла по j
    90    CONTINUE
   100    CONTINUE
```

**Приложение 4**

Текст программы RUNGE 4.4

| № п/п | метка | оператор |
|---|---|---|
| | Comment | **Шаг 1** |
| 01 | | **DO** 10 I = 1, N |
| 02 | | Z0 (I) = Y0 (I) |
| 03 | | Z (I) = Y0 (I) |
| 04 | 10 | DY (I) = 0. |
| 05 | | STEP = 0 |
| | | ITER = 0 |
| | Comment | **Шаг 2** |
| 06 | | **CALL** CALCFV (Z, FV1) |
| | Comment | **Шаг 3** |
| 07 | 15 | **DO** 20 I = 1, N |
| 08 | 20 | DY (I) = 0. |
| 09 | | STEP = STEP + 1 |
| | Comment | **Шаг 4** (начало основного цикла по *j*) |
| 10 | 25 | **DO** 90 J = 1, 2, 3, 4 |
| | Comment | **Шаг 5** |
| 11 | | **IF** (J >1 **«ИЛИ»** STEP = 1) **GO TO** 45 |
| | Comment | **Шаг 6** |
| | | **CALL** CALCFV (Z, FV1) |

Comment **Шаг 7** (проверка условий (2.7))

**DO** 30 I2 = 1, M

**IF** (ABS (FV (I2) ≤ EPS (I2)) **THEN GO TO** 100

30 **CONTINUE**

Comment **Шаг 8** (проверка условий (2.18))

**DO** 35 I2 = 1, M

M1 = I2

**IF** (FV (I2) ∗ FV1 (I2) > 0) **THEN GO TO** 35

Comment **Шаг 9** (коррекция шага интегрирования по (2.9)

HINT = HINT ∗ FV1 (M1) / (FV1 (M1) – FV (M1)

ITER = ITER + 1

**GO TO** 15

35 **CONTINUE**

Comment **Шаг 10**

**DO** 40 I2 = 1, M

40 FV1 (I2) = FV (I2)

Comment **Шаг 11** (Шаг 6 в программе RUNGE 4.3; далее вводится обозначение для соответствующих подшагов Алгоритма – 4 в виде Шаг 11/К, где К – номер шага в программе RUNGE 4.3.

45 **CALL** CALCPR (Z, PR)

**DO** 50 I = 1, N

K (J, I) = HINT ∗ PR (I)

50 DY (I) = DY (I) + P4 (J) ∗ K (J, I)

```
Comment   Шаг 12/7
          IF (J < 4) THEN GO TO 65
Comment   Шаг 12/8
          DO 55 I = 1, N
     55   YI (I) = Z0 (I) + DY (I)
Comment   Шаг 12/9
          DO 60 I = 1, N
          Z0 (I) = YI (I)
     60   Z (I) = Z0 (I)
Comment   Шаг 12/10
          IF (T0 ≥ XFIN) THEN GO TO 100
Comment   Шаг 12/11
          GO TO 15
Comment   Шаг 12/12
     65   CONTINUE
          DO 80 I = 1, N
          SUM = 0.
          DO 70 L = 1, J
     70   SUM = SUM + BETTA (J + 1, L) * K (L, I)
     80   Z (I) = Z0 (I) + SUM
Comment   Конец основного цикла по j
     90   CONTINUE
    100   CONTINUE
```

Учебное издание

***Горелов Юрий Николаевич***
***Курганская Любовь Викторовна***

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ**
**ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**
**(МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ)**

*Учебное пособие*

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 4.05.2023. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,75.
Тираж 27 экз. Заказ . Арт. – 10(Р1УП)/2023

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.