

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем

Н.С. Коротков

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
ЧАСТЬ 2**

Учебное пособие

Издательство "Универс-групп"
2004

УДК 538.56
ББК 22.313
К 687

К 687 **Коротков Н.С.** Излучение электромагнитных волн. Часть 2:
Учебное пособие. Самара: Изд-во "Универс-групп", 2004. 32с.

ISBN 5-467-00026-8

В учебном пособии рассмотрены вопросы теории и расчета простейших излучателей электромагнитного поля, используемых для создания сложных современных антенн. Учебное пособие предназначено студентам радиофизической специализации физического факультета для использования по дисциплинам специализации и в радиофизическом практикуме.

УДК 538.56
ББК 22.313

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Коротков Н.С.
Рецензент: доктор технических наук, профессор Котов А.Н.

ISBN 5-467-00026-8

© Коротков Н.С., 2004

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет М.А.Назарова

Подписано в печать 2.04.04. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл. печ. л. 1,8; уч.-изд. л. 2,0. Тираж 100. Заказ 172. Издательство "Универс-групп", 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано ООО "Универс-групп".

Излучатели электромагнитных волн

В данном учебном пособии рассмотрены элементарные (простейшие) излучатели электромагнитных волн. Элементарные излучатели используются как в качестве простых антенн, так и в качестве сложных современных антенн, позволяющих получить заданные характеристики излучаемых полей. Поэтому важно знать теорию и методы расчета элементарных излучателей (диполя Герца, рамочной антенны, прямолинейного тока, элемента излучающей плоскости).

Диполь Герца

Диполь Герца - это малый отрезок линейного проводника длиной l , значительно меньшей длины волны излучаемого поля, по которому течет ток J с постоянной амплитудой и фазой. На рис.1 показан диполь Герца в сферической системе координат. Ток J , как следует из закона сохранения количества электричества, может течь в том случае, если на концах проводника находятся меняющиеся во времени точечные заряды q и $-q$, связанные с током соотношением:

$$J = -\frac{dq}{dt}.$$

Найдем поле, созданное таким излучателем в точке, отстоящей на расстоянии r от средней точки отрезка l . Ввиду малости элемента l мы получим вектор-потенциал \vec{A} в виде [1]:

$$\vec{A} = \mu_a \frac{J \left(t - \frac{r}{v} \right) \vec{l}}{4\pi r},$$

где μ_a - магнитная проницаемость среды.

Скалярный потенциал U найдется как алгебраическая сумма потенциалов зарядов q и $-q$.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{q \left(t - \frac{r_1}{v} \right)}{r_1} - \frac{q \left(t - \frac{r_2}{v} \right)}{r_2} \right),$$

где ϵ_a - электрическая проницаемость среды.

Преобразуем выражение в скобках с помощью формулы

$$f(t, r + \Delta r) - f(t, r) = \frac{\partial f(t, r)}{\partial r} \Delta r.$$

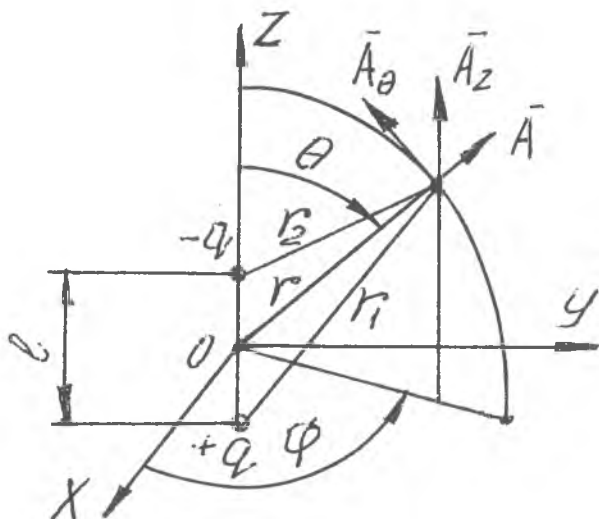


Рис.1. Диполь Герца в сферической системе координат

Поэтому

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q(t - \frac{r}{v})}{r} \right) \Delta r = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{-q'(t - \frac{r}{v})}{vr} - \frac{1}{r^2} q \left(t - \frac{r}{v} \right) \right) \Delta r ,$$

где $q'(t - \frac{r}{v})$ - производная по аргументу $t - \frac{r}{v}$.

В соответствии с рис.1

$$\Delta r = l \cos \theta .$$

Напряженности электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} будем вычислять, используя электродинамические потенциалы.

В нашем случае ток в элементе l совпадает с положительным направлением оси z , и вектор-потенциал имеет лишь одну проекцию A_z , равную

$$A_z = A = \mu_a \frac{J(t - \frac{r}{v})}{4\pi r} l .$$

В сферической системе координат проекции вектор-потенциала определяются выражениями:

$$A_r = A_z \cos \theta = \mu_a \frac{J(t - \frac{r}{v})}{4\pi r} l \cos \theta ,$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = -\mu_a \frac{J \left(t - \frac{r}{v} \right)}{4\pi r} l \sin \theta ,$$

$$A_\phi = 0 .$$

Напряженность магнитного поля находится по формуле

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \vec{A} .$$

Пользуясь выражением для ротора в сферической системе координат, получаем:

$$H_r = 0 ,$$

$$H_\theta = 0 ,$$

$$H_\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (Ar) \right) = \quad (1)$$

$$= \frac{l}{4\pi} \left(\frac{1}{vr} J' \left(t - \frac{r}{v} \right) + \frac{J \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r^2} \right) \sin \theta .$$

Напряженность электрического поля найдем, подставив значения проекций \vec{H} из (1) в формулу

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Вычисляя значение $\operatorname{rot} \vec{H}$ в сферической системе координат, получим:

$$\varepsilon_a \frac{\partial E_r}{\partial t} = \operatorname{rot}_r \vec{H} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (rH_\phi \sin \theta) =$$

$$= \frac{l}{2\pi} \left(\frac{J' \left(t - \frac{r}{v} \right)}{vr^2} + \frac{J \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r^3} \right) \cos \theta ,$$

$$\varepsilon_a \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) =$$

$$= \frac{l}{4\pi} \left(\frac{J'' \left(t - \frac{r}{v} \right)}{v^2 r} + \frac{J' \left(t - \frac{r}{v} \right)}{vr^2} + \frac{J \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r^3} \right) \sin \theta .$$

Интегрирование по переменной t дает:

$$E_r = \frac{l}{2\pi \varepsilon_a} \left(\frac{J \left(t - \frac{r}{v} \right)}{vr^2} - \frac{q \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r^3} \right) \cos \theta , \quad (2)$$

$$E_\theta = \frac{l}{4\pi \varepsilon_a} \left(\frac{J' \left(t - \frac{r}{v} \right)}{v^2 r} + \frac{J \left(t - \frac{r}{v} \right)}{vr^2} - \frac{q \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r^3} \right) \sin \theta . \quad (3)$$

Из (2) и (3) видно, что отдельные слагаемые в них пропорциональны $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ и $\frac{1}{r^3}$. Это позволяет написать более простые, но приближенные формулы для так называемых ближней и дальней зон.

Ближняя зона или зона индукции - это область, в которой члены, пропорциональные $\frac{1}{r^2}$ и $\frac{1}{r^3}$, в выражениях для \vec{E} и \vec{H} преобладают над остальными членами.

Дальняя зона или зона излучения - это область, в которой преобладающими членами в выражениях для \vec{E} и \vec{H} являются слагаемые, пропорциональные $\frac{1}{r}$.

Границы ближней и дальней зон определяются соотношением между величинами слагаемых, входящих в равенства. Легко заметить, что эти соотношения зависят от быстроты изменения токов и зарядов во времени.

Для конкретности рассмотрим наиболее важный для практики случай, когда ток в антенне меняется по гармоническому закону $J e^{i\omega t}$, так что

$$\begin{aligned} \dot{J} \left(t - \frac{r}{v} \right) &= J e^{i\omega \left(t - \frac{r}{v} \right)} = J e^{-i\frac{\omega}{v} r} e^{i\omega t}, \\ \dot{J}' \left(t - \frac{r}{v} \right) &= i\omega J e^{i\omega \left(t - \frac{r}{v} \right)}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже по тексту точка над величиной будет указывать на комплексный характер записи.

Подставляя значения тока и заряда, а также производных тока, из (1)÷(3) и опуская общий множитель $e^{i\omega t}$, для проекций \dot{H} и \dot{E} получим

$$\dot{H}_\phi = \frac{Jl}{4\pi} \left(i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta e^{-ikr}, \quad (4)$$

$$\dot{E}_r = \frac{k}{\omega \epsilon_a} \frac{Jl}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - i\frac{1}{kr^3} \right) \cos \theta e^{-ikr}, \quad (5)$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{k}{\omega \epsilon_a} \frac{Jl}{4\pi} \left(i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} - i\frac{1}{kr^3} \right) \sin \theta e^{-ikr}, \quad (6)$$

где $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Отсюда видно, что граница ближней и дальней зон для гармонического процесса определяется частотой поля или длиной волны.

Если $r \ll \lambda$ (ближняя зона), преобладающим в выражении для H будет член, пропорциональный $\frac{1}{r^2}$, а в выражении для E - член, пропорциональный $\frac{1}{r^3}$.

Если $r \gg \lambda$ (дальняя зона), преобладающими будут члены, пропорциональные $\frac{1}{r}$.

Взаимная ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} в поле электрического диполя изображена на рис.2.

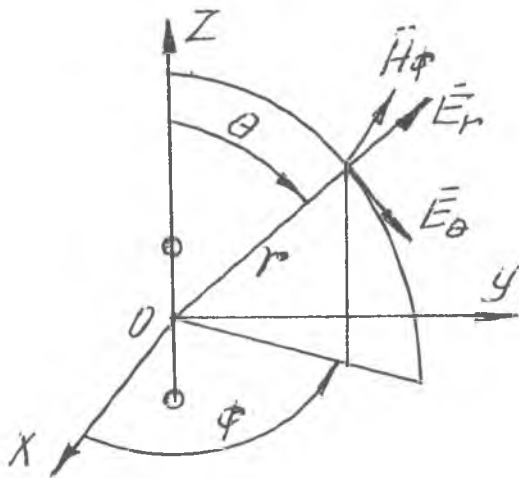


Рис.2. Ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} в поле электрического диполя

Рассмотрим подробнее поле в ближней и дальней зонах.

Ближняя зона (зона индукции)

Для этой зоны $r \ll \lambda$, следовательно, множитель e^{-ikr} , учитывающий запаздывание, можно приблизительно принять равным единице.

$$e^{-ikr} = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}r} \approx 1$$

Это означает, что при $r \ll \lambda$ запаздыванием можно пренебречь.

Сохраняя только наибольшие члены, пропорциональные $\frac{1}{r^3}$ в выражениях (5) и (6), а также члены, пропорциональные $\frac{1}{r^2}$ в выражении (4), получим приближенные значения для поля в ближней зоне в виде:

$$\dot{H}_\phi = \frac{jl}{4\pi r^2} \sin \theta, \quad (7)$$

$$\dot{E}_r = -\frac{\dot{q}l}{2\pi\epsilon_a r^3} \cos \theta = -i \frac{\lambda z_0 \dot{J}l}{4\pi^2 r^3} \cos \theta, \quad (8)$$

$$\dot{E}_\theta = -\frac{\dot{q}l}{4\pi\epsilon_a r^3} \sin \theta = -i \frac{\lambda z_0 \dot{J}l}{8\pi^2 r^3} \sin \theta, \quad (9)$$

где $z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_a}}$.

Эти формулы тем более точны, тем меньше r по сравнению с λ .

В ближней зоне магнитное поле определяется током, а электрическое - зарядом. Напряженность электрического поля отстает по фазе от напряженности магнитного поля на $\frac{\pi}{2}$ (множитель $-i$).

На рис.3 показан график изменения составляющих электрического и магнитного полей во времени. Вектор Пойнтинга меняется с двойной частотой, его среднее значение за период равно нулю.

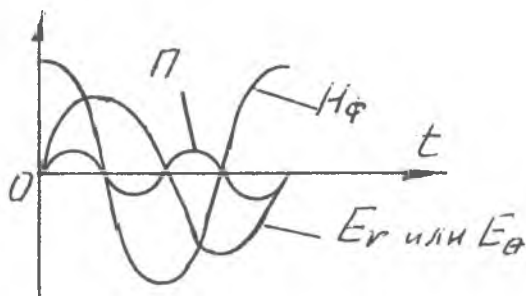


Рис.3. Зависимость векторов поля от времени

Характер движения главной части энергии определяется формулами (7)÷(9) и носит колебательный (реактивный) характер. Энергия четверть периода движется от источника поля в окружающее пространство, а в следующую четверть периода возвращается обратно.

Формулы (7) и (8) соответствуют значениям, которые мы получили бы, если бы для расчета полей переменных токов и зарядов воспользовались законами постоянных полей.

Для мгновенных значений переменных полей применим закон постоянных полей лишь в тех случаях, когда можно пренебречь запаздыванием. Это справедливо в точках, тем более удаленных от источников поля, чем медленнее поле меняется во времени. Для промышленной электротехники, где применяются медленно меняющиеся с частотой токи ($f = 50$ Гц, $\lambda = 6 \cdot 10^6$ м), запаздыванием можно пренебречь практически на любых удалениях от источника, где поле еще

имеет заметную величину. В радиотехнике, где применяются быстропеременные поля с длинами волн $\lambda < 10\text{см}$, границы ближней зоны становятся столь малыми, что все пространство вокруг источника должно рассматриваться как дальняя зона.

Дальняя зона (зона излучения)

Для этой зоны $r \gg \lambda$. Запоздыванием пренебречь нельзя. Приближенные значения для E и H в этой зоне получим, сохранив в (1) и (3) наибольшие члены пропорциональные $\frac{1}{r}$.

Расчетные формулы имеют вид:

$$H_\phi = \frac{l}{4\pi v r} J' \left(t - \frac{r}{v} \right) \sin \theta , \quad (10)$$

$$E_\theta = \frac{l}{4\pi \epsilon_0 v^2 r} J' \left(t - \frac{r}{v} \right) \sin \theta . \quad (11)$$

Кроме того, имеется еще незначительная составляющая E_r , приближенно равная

$$E_r = \frac{l}{2\pi \epsilon_0 v r^2} J \left(t - \frac{r}{v} \right) \cos \theta . \quad (12)$$

Для поля меняющегося во времени по гармоническому закону, будем иметь:

$$\dot{H}_\phi = i \frac{k}{4\pi} \dot{J} l \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta = \frac{\dot{J} l}{2\lambda r} e^{-ikr} \sin \theta , \quad (13)$$

$$\dot{E}_\theta = i \frac{\omega \mu_0}{4\pi} \dot{J} l \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta = z_0 \frac{\dot{J} l}{2\lambda r} e^{-ikr} \sin \theta , \quad (14)$$

$$\dot{E}_r = z_0 \frac{\dot{J} l}{2\pi r^2} e^{-ikr} \cos \theta , \quad (15)$$

где $z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.

Проекция \dot{E}_r электрического поля обратно пропорциональна r^2 и ее можно не учитывать.

Из (10) и (11) видно, что как электрическое, так и магнитное поле в дальней зоне пропорциональны производной тока в антенне.

Напряженность электрического и магнитного полей совпадает во времени по фазе. На рис.4 показаны графики изменения во времени \dot{E}_θ и H_ϕ и величины вектора Пойтинга, равного произведению $E_\theta H_\phi$.

В отличие от ближней зоны вектор Пойнтинга здесь не меняет знака, и энергия движется в течение всего периода в одном направлении от антенны в окружающее пространство. Взаимная ориентация векторов показана на рис.5.

Векторы \vec{E}_θ и \vec{H}_ϕ показаны для моментов времени, когда $J'(t) < 0$, когда $J'(t)$ изменяет знак, векторы \vec{E}_θ и \vec{H}_ϕ будут иметь противоположные направления, а направление Π сохранится без изменения. Следовательно, главная часть энергии в этой зоне уходит от антенны "излучателя", двигаясь вдоль радиуса r со скоростью v .

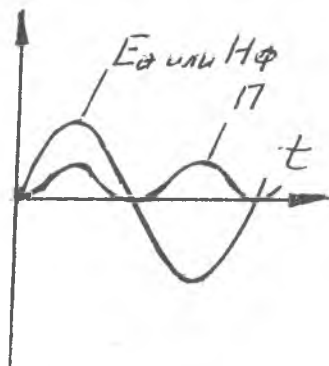


Рис.4. Зависимость векторов полей E_θ , H_ϕ и вектора Пойнтинга от времени

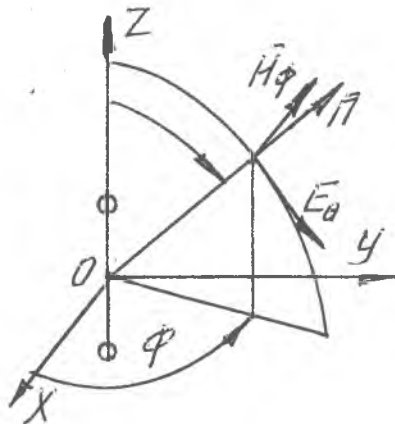


Рис.5. Взаимная ориентация векторов поля

При пренебрежении запаздыванием в выражениях для \vec{E} и \vec{H} исчезают слагаемые, соответствующие полю излучения. Следовательно, излучение непосредственно связано с конечными значениями скорости распространения.

Излученное электромагнитное поле в дальней зоне представляет собой сферическую волну, в которой электрический и магнитный векторы перпендикулярны направлению распространения (поперечная электромагнитная волна). Оба вектора \vec{E} и \vec{H} убывают обратно пропорционально первой степени расстояния.

Как видно из выражений (4) и (6) \vec{E}_θ и \vec{H}_ϕ относятся друг к другу

как

$$\frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\phi} = z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (16)$$

Напряженность излученного электромагнитного поля зависит от угла θ . Вдоль оси диполя при $\theta = 0$ излучение поля отсутствует. Поле максимально при $\theta = \frac{\pi}{2}$ в плоскости, перпендикулярной оси диполя.

Обозначая максимальные значения амплитуд E и H , соответствующие $\theta = \frac{\pi}{2}$, через E_{max} и H_{max} , получим, что при $r = \text{const}$

$$E_m(\theta) = E_{max} \sin \theta,$$

$$H_m(\theta) = H_{max} \sin \theta.$$

Зависимость $E_m(\theta)$ и $H_m(\theta)$ или $\frac{E_m}{E_{max}}$ и $\frac{H_m}{H_{max}}$ в функции угла θ обычно изображаются в виде полярных диаграмм направлений, в которых радиус-вектор, отложенный в направлении θ , численно равен $\frac{E_m(\theta)}{E_{max}}$ (или $\frac{H_m(\theta)}{H_{max}}$).

Такая диаграмма направленности для поля диполя Герца приведена на рис.6.

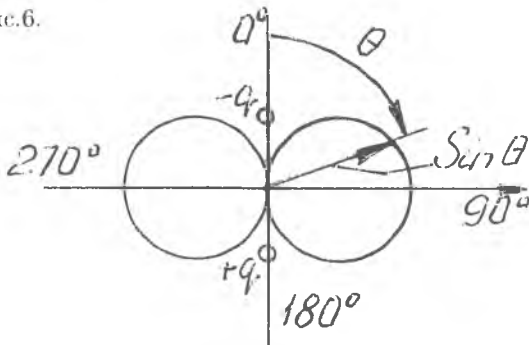


Рис.6. Диаграмма направленности диполя Герца

Так как поле диполя Герца не зависит от угла ϕ , то пространственная диаграмма направленности изображается в виде тела, образованного вращением фигуры 6 вокруг вертикальной оси.

Полную мощность P_Σ , излученную диполем, мы получим, проинтегрировав значение вектора $\vec{\Pi}_{cp}$ (среднее за период) по сфере произвольного радиуса r

$$P_\Sigma = \int_S \Pi_{cp} dS,$$

где $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ - элемент сферической поверхности.

$$P_{cp} = z_0 \frac{(J_m l)^2}{8c^2 \lambda^2} \sin^2 \theta ,$$

где J_m - амплитуда тока.

Тогда

$$\begin{aligned} P_{\Sigma} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{(J_m l)^2}{8c^2 \lambda^2} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \frac{Az_0 (J_m l)^2}{8\lambda^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{Az_0}{3\lambda^2} (J_m l)^2 . \end{aligned} \quad (17)$$

Излученная мощность не зависит от радиуса сферы. Этот результат является естественным следствием закона сохранения энергии, поскольку мы рассматриваем пространство, в котором отсутствуют токи проводимости, а стало быть, отсутствуют потери на джоулево тепло.

Излученную мощность можно представить как

$$P_{\Sigma} = \frac{J_m^2 R_{\Sigma}}{2} , \quad (18)$$

где R_{Σ} - так называемое сопротивление излучения, равное

$$R_{\Sigma} = \frac{2P_{\Sigma}}{J_m^2} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (19)$$

Для пустоты $z_0 = 120\pi$ Ом и

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (20)$$

Картины электрических силовых линий колеблющегося диполя для различных моментов времени были вычислены и построены Герцем (рис.7).

Как видно из рисунка вблизи диполя электрические силовые линии опираются на заряды диполя. В дальней зоне эти электрические силовые линии не опираются на заряды диполя, а образуют замкнутые кривые, лежащие в меридианальных плоскостях. Магнитные силовые линии представляют собой окружности с центром на оси диполя. Эти замкнутые электрические и магнитные силовые линии характеризуют сферическую волну, которая распространяется радиально со скоростью света.

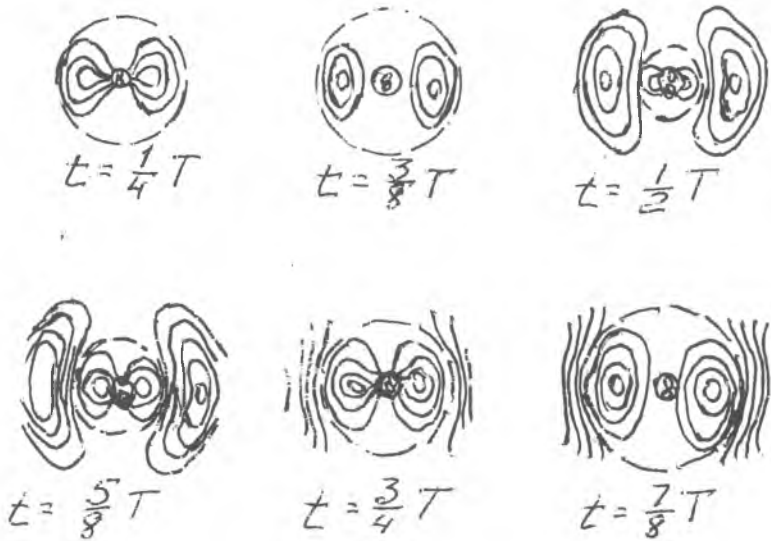


Рис.7. Структура электрических силовых линий диполя Герца в различные моменты времени

Рамочная антенна

Рассмотрим поле, создаваемое рамочной антенной в виде плоского круглого витка радиуса a (рис.8). Вектор-потенциал будет иметь лишь одну составляющую A_ϕ , которая равна

$$A_\phi = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{dl_1}{R}$$

(она создается составляющими dl_1 элементов $d\vec{l}$, симметричных относительно плоскости XOZ , составляющие dl_2 взаимно компенсируются). При этом

$$\begin{aligned} dl_1 &= dl \cos \phi = a \cos \phi d\phi, \\ R^2 &= a^2 + \rho^2 + z^2 - r a \rho \cos \phi, \\ \rho^2 + z^2 &= r^2, \\ R^2 &= a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi. \end{aligned}$$

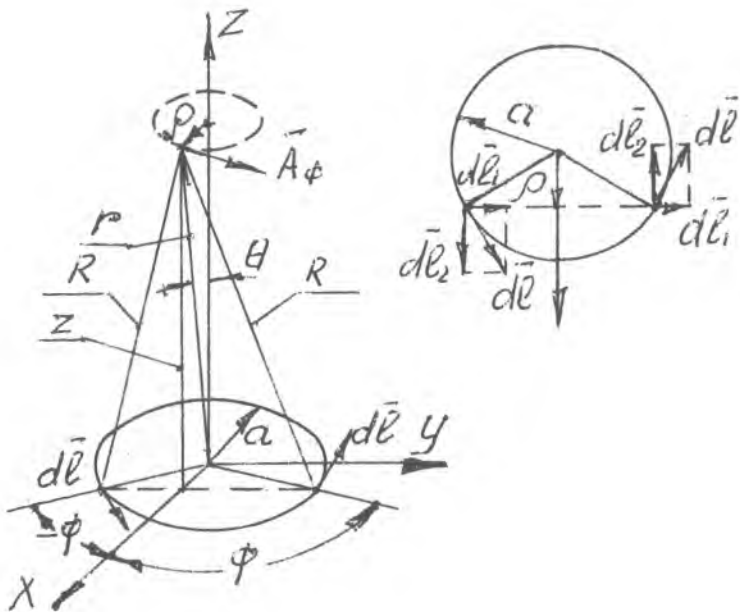


Рис.8. Рамочная антенна в сферической системе координат

Предположим, что по рамке течет синусоидальный ток

$$\mathbf{j} = \mathbf{j} e^{i\omega t}$$

одной и той же величины во всех точках рамки. Это будет иметь место, когда периметр рамки мал по сравнению с длиной волны. Вследствие симметрии вектор-потенциал будет иметь лишь одну составляющую A_ϕ , которая будет равна

$$\dot{A}_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} e^{i(\omega t - \omega \frac{R}{v})}}{R} dl_1,$$

где $dl_1 = dl \cos \phi = a \cos \phi d\phi$.

Подставляя значение dl_1 и опуская временной множитель $e^{i\omega t}$, получаем:

$$\dot{A}_\phi = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \mathbf{j} \int_0^\pi \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \phi d\phi, \quad (21)$$

где:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi} .$$

Непосредственное вычисление интеграла (21) представляет собой трудную задачу. Мы здесь рассмотрим два крайних случая:

$$1) R \ll a \quad \text{и} \quad 2) R \gg a .$$

Итак:

1. Зона рамки, $R \ll a$. Так как $a \ll \lambda$, то для этой зоны

$$kR = \frac{2\pi}{\lambda} R \ll 1 \quad \text{и} \quad e^{-ikR} \approx \cos(kr) - i \sin(kR) \approx 1 - ikR .$$

Подставляя последнее выражение в (21), получаем:

$$\dot{A}_\phi = \frac{\mu_a a}{2\pi} j \int_0^\pi \frac{\cos \phi d\phi}{R} - ik \frac{\mu_a a J}{2\pi} \int_0^\pi \cos \phi d\phi$$

Второй интеграл равен нулю. Первый интеграл совпадает со значением вектор-потенциала для поля тока в круглом витке, с той лишь разницей, что взамен постоянного тока в формулу (последнюю) входит переменный ток. Таким образом, значение поля в зоне рамки определяется теми же формулами, что и поле постоянного тока.

2. Зона, удаленная от рамки. $R \gg a$. Поэтому

$$R = r^2 \sqrt{1 - \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \phi + \frac{a^2}{r^2}} \simeq r - a \sin \theta \cos \phi ,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r - a \sin \theta \cos \phi} \simeq \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \sin \theta \cos \phi$$

и $e^{-ikR} \simeq e^{-ikr} (1 + ika \sin \theta \cos \phi)$.

Подставляя приближенные значения $\frac{1}{R}$ и e^{-ikR} в (21), получим

$$\dot{A}_\phi = \frac{\mu_a a}{2\pi} j e^{-ikr} \left(\left(\frac{1}{r} \int_0^\pi \cos \phi d\phi + \frac{a}{r^3} \sin \theta \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi \right) + \right. \\ \left. + ika \sin \theta \left(\frac{1}{r} \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi + \frac{a}{r^2} \sin \theta \int_0^\pi \cos^3 \phi d\phi \right) \right) .$$

Так как

$$\int_0^\pi \cos \phi d\phi = 0 , \quad \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi = \frac{\pi}{2} , \quad \int_0^\pi \cos^3 \phi d\phi = 0 ,$$

то

$$\dot{A}_\phi = \frac{\mu_a a^2}{4r} j \left(ik + \frac{1}{r} \right) \sin \theta e^{-ikr} . \quad (22)$$

Теперь можно вычислить магнитное поле из соотношения

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}.$$

Воспользуемся сферической системой координат r, ϕ, θ (см. рис.8).
Учитывая что

$$A_r = A_\theta = 0,$$

получаем:

$$\begin{aligned} \dot{H}_r &= \frac{1}{\mu_a} \text{rot}_r \dot{A} = \frac{1}{\mu_a r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \dot{A}_\phi \sin \theta) = \\ &= i \frac{a^2}{2} J \left(\frac{k}{r^2} - i \frac{1}{r^3} \right) \cos \theta e^{-ikr}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_\theta &= -\frac{1}{\mu_a r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_\phi \sin \theta) = \\ &= i \frac{a^2}{4} J \left(i \frac{k^2}{r} + \frac{k}{r^2} - i \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta e^{-ikr}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\dot{H}_\phi = 0.$$

Если в этих выражениях положить

$$k\pi a^2 = l_s, \quad (25)$$

то (23) и (24) можно переписать в виде:

$$\dot{H}_r = i \frac{J l_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - i \frac{1}{kr^3} \right) \cos \theta e^{-ikr}, \quad (26)$$

$$\dot{H}_\theta = i \frac{J l_s}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} - i \frac{1}{kr^3} \right) \sin \theta e^{-ikr}. \quad (27)$$

Из первого уравнения Максвелла следует, что вектор \vec{E} в поле рамки имеет только одну проекцию E_ϕ , комплексная амплитуда которой равна

$$\dot{E}_\phi = -i \frac{\omega \mu_a J l_s}{k} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} \right) \sin \theta e^{-ikr}. \quad (28)$$

Сравнивая формулы (26) и (27) с (5) и (6) для проекций электрического поля диполя Герца, можно убедиться, что линейное поле горизонтальной рамки идентично электрическому полю вертикального диполя Герца. Точно также, из формул (28) и (4) вытекает идентичность электрического и магнитного полей этих источников.

Следовательно, горизонтальная рамка создает такое же поле, как и вертикальный электрический диполь, разница между ними в том, что векторы \vec{E} и \vec{H} меняются в пространстве местами. А это значит, что горизонтальную рамочную антенну можно трактовать как фиктивный вертикальный магнитный диполь (рис.9).

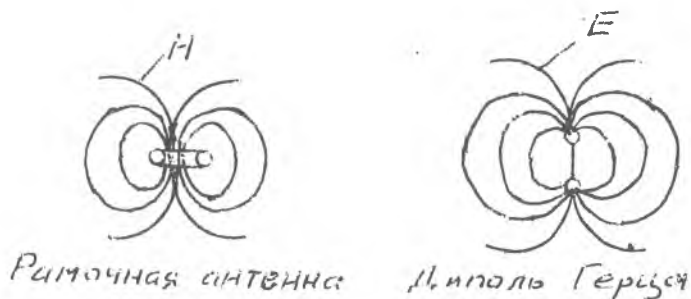


Рис.9. Сравнение конфигураций силовых линий H диполя Герца и рамочной антенны

Определим условия, при которых рамка будет эквивалентна магнитному диполю. Для расчета поля магнитного диполя целесообразно использовать свойство перестановочной двойственности уравнений Максвелла. Действительно, если в формулах (4)÷(6) относящихся к диполю Герца, произвести перестановку типа:

$$\vec{E} \rightleftharpoons \vec{H}, \quad \varepsilon_a \rightleftharpoons \mu_a, \quad \vec{j} \rightleftharpoons -\vec{j}_m, \quad \rho \rightleftharpoons -\rho_m,$$

то мы сразу же получим выражения, характеризующие поле магнитного источника:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\phi &= -\frac{\dot{J}_m l}{4\pi} \left(i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta e^{-ikr}, \\ \dot{H}_\phi &= \frac{k}{\omega\mu_a} \frac{\dot{J}_m l}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - i\frac{1}{kr^3} \right) \cos\theta e^{-ikr}, \\ \dot{H}_\theta &= \frac{k}{\omega\mu_a} \frac{\dot{J}_m l}{4\pi} \left(i\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} - i\frac{1}{kr^3} \right) \sin\theta e^{-ikr}, \end{aligned}$$

здесь \dot{J}_m - комплексная амплитуда фиктивного магнитного тока.

Следует иметь в виду, что эти выражения относятся к диполю, у которого положительная масса находится в точке $z = -\frac{l}{2}$, а отрицательная - в точке $z = \frac{l}{2}$. Чтобы поле магнитного диполя было полностью идентично рассматриваемому выше полю рамки, необходимо

знаки в правых частях последних равенств заменить на обратные. Полученные таким образом выражения будут совпадать с формулами (26)÷(28), если

$$-\frac{k}{\omega\mu_a} \dot{J}_{ml} = iJL_0 = i\dot{J}S$$

или

$$\frac{i}{\omega} \dot{J}_{ml} = \mu_a \dot{J}S,$$

где $\frac{i}{\omega} \dot{J}_{ml}$ представляет собой комплексную амплитуду магнитного момента диполя

$$\dot{M} = q_m l \quad \text{и} \quad q_m = - \int \dot{J}_m dt \quad - \quad \begin{array}{l} \text{комплексная амплитуда} \\ \text{магнитной массы} \end{array}$$

Таким образом, горизонтальная рамочная антенна эквивалентна вертикальному магнитному диполю с моментом

$$\dot{M} = \mu_a \dot{J}S.$$

Взаимная ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} в поле рамки изображена на рис.10.

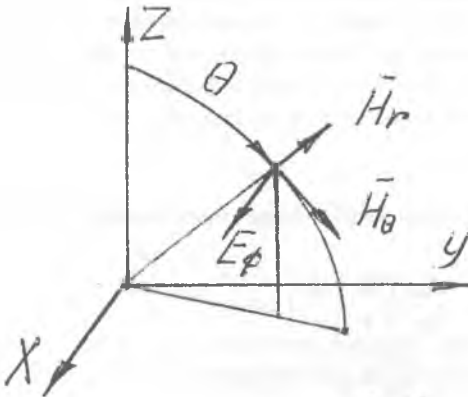


Рис.10. Ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} поля рамки

Диаграмма направленности горизонтальной рамки должна совпадать с диаграммой направленности вертикального электрического диполя.

Максимум излучения энергии в этом случае лежит в плоскости рамки. На основании рассмотренной выше аналогии с диполем Герца

можно написать, что сопротивление излучения рамочной антенны в воздухе равно

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{l_2}{\lambda}\right)^2 = \frac{320\pi^4 S^2}{\lambda^4}, \text{ Ом.} \quad (29)$$

Поле прямолинейного тока

Рассмотрим электромагнитное поле тонкого прямолинейного проводника с электрическим током. Источник такого типа на практике используется либо в качестве самостоятельного излучающего устройства, либо как составной элемент более сложной антенны. Пусть одиночный бесконечно тонкий прямолинейный проводник с током длиной $2l$ расположен вдоль оси Z так, что начало системы координат находится его середине (рис.11).

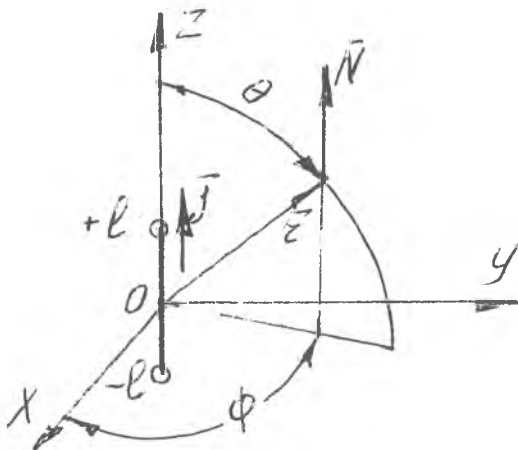


Рис.11. Излучение прямолинейного тока. Постановка задачи

Для определения электромагнитного поля проводника в дальней зоне необходимо найти векторы излучения. Так как в данном случае магнитные токи отсутствуют, то вектор $\vec{L} = 0$, а \vec{N} равен (см. (46)÷(50) в [1]):

$$\vec{N} = \int e^{ikr' \cos \Psi} d\vec{q}_e = \int_{-l}^{+l} \vec{j}(z') e^{ikr' \cos \Psi} dz',$$

ибо при линейном распределении токов величина $d\vec{q}_e = Jd\vec{l} = Jdz$, где $J(z')$ - функции тока в различных точках проводника. Из графика 11

следует, что сферические координаты точек имеют вид: $r' = z'$, $\theta' = 0$, $\Psi = \theta$ (см. рис.3 в [1]). Тогда

$$\vec{N} = \vec{i}_z \int_{-e}^{+e} J(z') e^{ikz' \cos \theta} dz' .$$

Проекция этого вектора на направления \vec{i}_θ , \vec{i}_ϕ сферической системы координат равны:

$$\begin{aligned} \dot{N}_\theta &= -\dot{N}_z \sin \theta = -\sin \theta \int_{-e}^{+e} J(z') e^{ikz' \cos \theta} dz' , \\ \dot{N}_\phi &= 0 . \end{aligned} \quad (30)$$

Подставив найденные значения \dot{N}_θ и N_ϕ в формулы (52)[1], получим общие выражения для составляющих векторов электромагнитного поля прямолинейного проводника с током в дальней зоне:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= \frac{i}{2\lambda} z_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta \int_{-e}^{+e} J(z') e^{ikz' \cos \theta} dz' , \\ \dot{H}_\phi &= \frac{\dot{E}_\theta}{z_0} . \end{aligned} \quad (31)$$

Из этих выражений видно, что структура поля в дальней зоне существенно зависит от характера распределения тока по проводнику, то есть от вида функции $J(z')$.

Принцип эквивалентных токов

В предыдущем параграфе был рассмотрен способ расчета электромагнитного поля по заданным источникам в безграничной однородной изотропной среде. Выведенные там формулы не могут быть непосредственно использованы для расчета полей в неоднородном пространстве.

Чтобы установить общие принципы решения таких задач, рассмотрим следующий пример (рис.12). Пусть в области I с параметрами среды ε_a , μ_a , σ_a имеются источники Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Требуется определить электромагнитное поле во внешнем пространстве (область II) с параметрами среды ε_{a2} , μ_{a2} , σ_{a2} . Поскольку среда разделена границей на две части с разными параметрами, то поле в первой и второй средах, излученное источниками, будет отличаться от поля,

расчитанного для безграничной среды с теми или иными параметрами (отражения должны быть учтены).

Чтобы определить поле в заданной области, необходимо иметь, как утверждает теорема единственности, касательные составляющие вектора \vec{E} или вектора \vec{H} на граничной поверхности S .

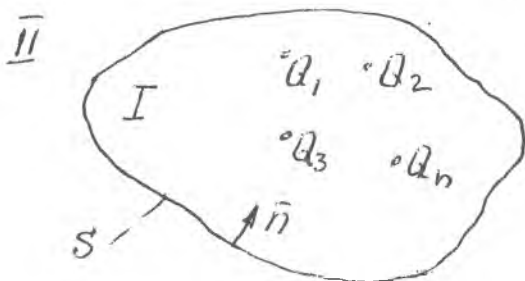


Рис.12. Принцип эквивалентных токов

Строго говоря, эти составляющие нам не известны, ибо они могут быть найдены лишь в результате полного решения поставленной задачи. Однако во многих интересных для практики случаях закон распределения касательных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} на граничной поверхности известен с точностью, достаточной для инженерных расчетов. Тогда задача по расчету электромагнитного поля во внешнем пространстве сводится к определению поля в области II по известным граничным значениям векторов \vec{E} и \vec{H} на поверхности S . Для решения такой задачи реальные источники целесообразно заменить некоторыми фиктивными эквивалентными источниками, поле которых в области I равно нулю, а во внешнем пространстве совпадает с электромагнитным полем истинных источников. Но поле эквивалентных источников (\vec{E}', \vec{H}') будет совпадать во внешнем пространстве с истинным электромагнитным полем, если на поверхности S

$$\begin{aligned} E'_{2\tau} &= E_{2\tau}, \\ H'_{2\tau} &= H_{2\tau} \end{aligned} \quad (32)$$

(штрих обозначает эквивалентные источники).

В самом деле, из теоремы единственности вытекает, что рассматриваемые поля будут одинаковы, если на поверхности S выполняется

только одно из условий (32), второе же условие при этом удовлетворяется автоматически. Разумеется, считается, что поле удовлетворяет также принципу излучения на бесконечности. Что касается области I, то на ее поверхности:

$$\begin{aligned} E'_{1\tau} &= 0, \\ H'_{1\tau} &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

ибо векторы \vec{E}' и \vec{H}' равны нулю в каждой точке этой области.

Из выражений (32) и (33) следует, что касательные составляющие векторов \vec{E}' и \vec{H}' электромагнитного поля эквивалентных источников при переходе через поверхность S испытывают скачок. Как известно, касательная составляющая вектора \vec{H} имеет разрыв непрерывности на граничной поверхности S , если на ней текут поверхностные электрические токи. Величина скачка касательной составляющей вектора \vec{H} связана с плоскостью поверхностных электрических токов соотношением

$$\left[\vec{n} \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \right] = \vec{j}_S. \quad (34)$$

Здесь \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности S , направленный в область I.

Уравнение (34) является следствием первого уравнения Максвелла в интегральной форме.

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \vec{j} + \frac{d\vec{N}}{dt}$$

при наличии поверхностных токов.

Аналогично можно показать, что разрыв непрерывности касательной составляющей вектора \vec{E} на поверхности S обусловлен наличием поверхностных магнитных токов. При этом из второго уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\vec{j}_m - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

следует, что величина скачка \vec{E}_τ связана с поверхностной плотностью магнитных токов \vec{j}_{mS} соотношением

$$-\left[\vec{n} \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \right] = \vec{j}_{mS}. \quad (35)$$

На основании изложенного можно утверждать, что источниками электромагнитного поля \vec{E}' и \vec{H}' являются поверхностные электрические и магнитные токи, текущие по граничной поверхности S .

Так как в рассматриваемом случае

$$\vec{E}'_1 = \vec{E}_1 = 0 ; \quad \vec{H}'_1 = \vec{H}_1 = 0 ,$$

то из (34) и (35) следует, что плотности эквивалентных поверхностных токов равны

$$\left. \begin{aligned} \vec{j}_S &= - [\vec{n}\vec{H}_2] = [\vec{H}_2\vec{n}] \\ \vec{j}_{mS} &= - [\vec{E}_2\vec{n}] = [\vec{n}\vec{E}_2] \end{aligned} \right\} \text{ на } S \quad (36)$$

Следовательно, расчет электромагнитного поля во внешнем пространстве сводится к определению поля эквивалентных источников в однородной среде. Так, вектор-потенциал искомого электромагнитного поля находится из выражений:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \vec{j}_S \frac{e^{-ikR}}{R} dS = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S [\vec{H}_2\vec{n}] \frac{e^{-ikR}}{R} dS , \\ \vec{F} &= \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \int_S \vec{j}_{mS} \frac{e^{-ikR}}{R} dS = \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \int_S [\vec{n}\vec{E}_2] \frac{e^{-ikR}}{R} dS . \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогично, векторы излучения \vec{N} и \vec{L} можно рассчитать по формулам:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \int_S [\vec{H}_2\vec{n}] e^{ikr' \cos \Psi} dS = \int_S \vec{j}_S e^{ikr' \cos \Psi} dS , \\ \vec{L} &= \int_S [\vec{n}\vec{E}_2] e^{ikr' \cos \Psi} dS = \int_S \vec{j}_{mS} e^{ikr' \cos \Psi} dS . \end{aligned} \quad (38)$$

При использовании (37) и (38) по формулам (41) и (52)[1] можно определить \vec{E} и \vec{H} , а по формулам (53)[1] - характеристику направленности.

Изложенный метод называется методом (принципом) эквивалентных токов. Он позволяет рассчитать электромагнитное поле любой ограниченной в пространстве системы источников, если известны касательные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} на некоторой замкнутой поверхности S , охватывающей источники.

Следует иметь в виду, что граничные значения для касательных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} нельзя вводить независимо друг от друга, ибо это противоречит теории единственности решения уравнений Максвелла. Из теоремы единственности вытекает, что заданой на границе области составляющей E_τ (или H_τ) соответствует совершенно определенная составляющая H_τ (или E_τ), которая может иметь

только единственное значение. Следовательно, вводя какие-либо подходящие, но в сущности независимые друг от друга выражения для касательных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} на граничной поверхности и производя затем расчет поля с помощью изложенного метода, мы допускаем принципиальную ошибку. В результате оказывается, что найденной поле может не удовлетворять поставленным граничным условиям. Однако, если приближенные граничные условия для векторов \vec{E} и \vec{H} достаточно близки к истинным, подобная ошибка получается небольшой.

Излучение элемента плоскости с поверхностными электрическими и магнитными токами

Существенный интерес для практики представляет расчет электромагнитного поля поверхностных электрических и магнитных токов, распределенных некоторым образом в пределах некоторого элемента плоской поверхности. Многие реальные антенны на основании рассмотренного выше принципа эквалентных токов могут быть представлены в виде источничков подобного типа.

Пусть источником поля является элемент S плоскости $z = 0$ (рис.13) с заданными на нем поверхностными электрическими и магнитными токами:

$$\begin{aligned} \vec{j}_S &= \vec{i}_x \dot{j}_0(x, y), \\ \vec{j}_{mS} &= \vec{i}_y \dot{j}_{m0}(x, y). \end{aligned}$$

В этом случае векторы излучения, определяющие диаграмму направленности источника, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{i}_x \int_S \dot{j}_0(x', y') e^{ikr' \cos \Psi} dS, \\ \vec{L} &= \vec{i}_y \int_S \dot{j}_{m0}(x', y') e^{ikr' \cos \Psi} dS. \end{aligned} \tag{39}$$

Если полагать, что электрические и магнитные токи связаны соотношением

$$\begin{aligned} \dot{j}_{m0} &= z_0 \dot{j}_0, \\ \vec{N} &= \vec{i}_x \dot{N}_x, \quad \vec{L} = \vec{i}_y z_0 \dot{N}_x, \end{aligned}$$

причем

$$\dot{N}_x = \int_S \dot{j}(x', y') e^{ikr' \cos \Psi} dS . \quad (40)$$

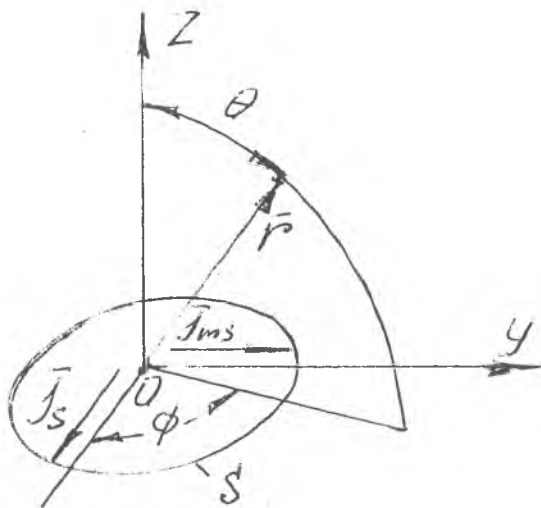


Рис.13. Плоский излучатель в сферической системе координат

Рассчитаем проекции векторов излучения на направления θ и ϕ сферической системы координат. При этом будем полагать, что угол θ отсчитывается от оси Z, а угол ϕ - от оси X (рис.13). Так как проекции любого вектора \vec{C} в сферической системе координат выражабтся через проекции в прямоугольных координатах соотношениями:

$$C_\theta = (C_x \cos \phi + C_y \sin \phi) \cos \theta - C_z \sin \theta , \quad (41)$$

$$C_\phi = -C_x \sin \phi + C_y \cos \phi ,$$

то в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \dot{N}_\theta &= \dot{N}_x \cos \theta \cos \phi , & \dot{N}_\phi &= -\dot{N}_x \sin \phi , \\ \dot{L}_\theta &= z_0 \dot{N}_x \cos \theta \cos \phi , & \dot{L}_\phi &= z_0 \dot{N}_x \sin \phi . \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения проекций векторов \vec{N} и \vec{L} в формулы (52)[1], получим для компонент векторов поля источника в даль-

ней зоне:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_\theta &= -\frac{i}{2\lambda} z_0 \dot{N}_x \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos \theta) \cos \phi, \\
 \dot{E}_\phi &= -\frac{i}{2\lambda} z_0 \dot{N}_x \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos \theta) \sin \phi, \\
 \dot{H}_\theta &= -\frac{E_\phi}{z_0}, \\
 \dot{H}_\phi &= \frac{E_\theta}{z_0}.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Предположим, что элемент полкости S имеет форму прямоугольника со сторонами a и b (рис.14), а величины токов в каждой точке поверхности S неизменны, то есть

$$\dot{j}_0(x, y) = \dot{j}_0, \quad \dot{j}_m(x, y) = \dot{j}_{m0},$$

причем

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}.$$

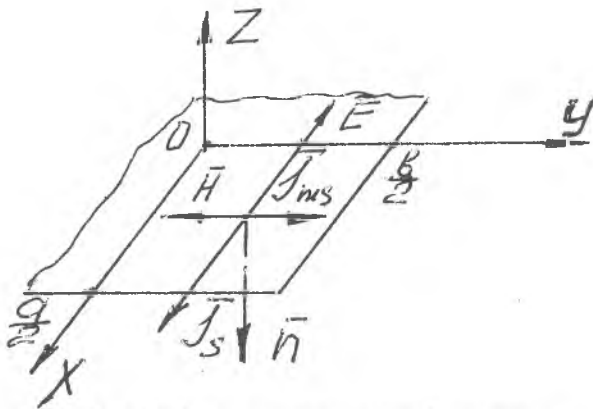


Рис.14. Элемент излучающей плоскости

В этом случае проекция N_x будет равна

$$\dot{N}_x = \dot{j}_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{ikr' \cos \Psi} dx' dy'.$$

Используя соотношение $\cos \Psi = \vec{p} \vec{p}'$, где \vec{p} - единичный вектор, направленный от начала координат в точке наблюдения p , \vec{p}' - единичный вектор, направленный из начала координат к элементу тока

Q (см. рис.3 в [1]) и выражая их через единичные векторы системы $OXYZ$, получаем

$$\cos \Psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi') ,$$

где r' , ϕ' , θ' - координаты элемента источника.

Теперь учитывая известные соотношения между сферическими и прямоугольными координатами точек источника

$$r' \sin \theta' \cos \phi' = x' , \quad r' \sin \theta' \sin \phi' = y' , \quad r' \cos \theta' = z' ,$$

и $z = 0$ имеем:

$$r' \cos \Psi = x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{N}_x &= j_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{ik(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' = \\ &= j_0 ab \frac{\sin \left(\frac{ka}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \sin \left(\frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi \right)}{\frac{ka}{2} \sin \theta \cos \phi \quad \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi} . \end{aligned}$$

Подставив найденное значение \dot{N}_x в (42), получим:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= -\frac{i}{2\lambda} j_0 z_0 S \frac{e^{-ikz}}{r} \frac{\sin X \sin Y}{X Y} (1 + \cos \theta) \cos \phi , \\ \dot{E}_\phi &= -\frac{i}{2\lambda} j_0 z_0 S \frac{e^{-ikz}}{r} \frac{\sin X \sin Y}{X Y} (1 + \cos \theta) \sin \phi , \\ \dot{H}_\theta &= -\frac{\dot{E}_\phi}{z_0} , \\ \dot{H}_\phi &= \frac{\dot{E}_\theta}{z_0} , \end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned} X &= \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \phi , \\ Y &= \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi , \\ S &= ab . \end{aligned}$$

Исследуем электромагнитное поле рассматриваемого источника при $\phi = 0$ (плоскость XOZ) и $\phi = \frac{\pi}{2}$ (плоскость YOZ). Из (43) следует, что при $\phi = 0$ проекция $E_\phi = 0$, а

$$\dot{E}_\theta(0,0) = -\frac{i}{2\lambda} j_0 z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta} (1 + \cos\theta) .$$

Аналогично, при $\phi = \frac{\pi}{2}$, $E_\theta = 0$, а

$$\dot{E}_\phi = -\frac{i}{2\lambda} j_0 z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta} (1 + \cos\theta) .$$

Из последних двух выражений можно заключить, что характеристика направленности прямоугольного элемента с равномерным распределением токов в главных плоскостях ($\phi = 0$ и $\phi = \frac{\pi}{2}$) имеет вид:

$$E_m(\theta) = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} \sin\theta} (1 + \cos\theta) , \quad (44)$$

где $l = a$, если $\phi = 0$, $l = b$, если $\phi = \frac{\pi}{2}$, $E_0 = \text{const}$.

Вид диаграммы направленности (44) существенно зависит от отношения $\frac{l}{\lambda}$ (то есть от величины $\frac{a}{\lambda}$ или $\frac{b}{\lambda}$). На рис. 15 изображены нормированные кривые $E_m(\theta)$, построенные для различных значений $\frac{l}{\lambda}$.

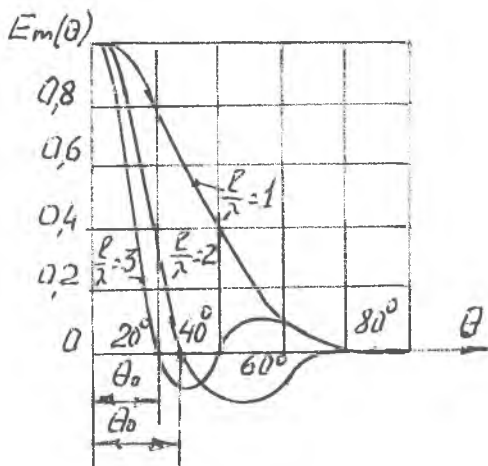


Рис. 15. Диаграмма направленности плоского источника

Из рисунка следует, что при $\frac{l}{\lambda} > 1$ диаграмма направленности источника имеет большой по величине главный лепесток и несколько небольших боковых лепестков. Наличие минимумов и максимумов в диаграмме направленности источника, очевидно, есть результат интерференции полей, созданных элементарными участками излучающей поверхности S .

В количественном отношении ширина главного максимума диаграммы направленности характеризуется углом раствора $2\theta_0$, где θ_0 - минимальный угол, при котором функция $E_m(\theta)$ обращается в нуль. Из (44) вытекает, что $E_m(\theta) = 0$, если

$$\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \sin \theta_0\right) = 0$$

и, следовательно

$$\sin \theta_0 = \frac{\lambda}{l}.$$

Поэтому величина угла раствора главного максимума равна

$$2\theta_0 = 2 \arcsin \frac{\lambda}{l}.$$

Если $\frac{l}{\lambda} \ll 1$, то $2\theta_0 \approx \frac{2\lambda}{l}$

Таким образом, с увеличением отношения $\frac{l}{\lambda}$ ширина главного максимума диаграммы направленности уменьшается, то есть излучение становится более направленным.

Этот вывод имеет важное значение, ибо он определяет принципы построения направленных антенн.

Аналогичные расчеты можно провести и в том случае, когда излучающий элемент имеет форму круга с равномерно распределенными электрическими и магнитными токами. Если радиус круга равен a , то характеристика направленности источника будет определяться выражением

$$E_m(\theta) = E'_0 \frac{J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta} (1 + \cos \theta). \quad (45)$$

где $E'_0 = \text{const}$, $J_1(x)$ - функция Бесселя первого порядка.

Ввиду того, что $\frac{J_1(x)}{x}$ весьма близка к $\frac{\sin x}{x}$, диаграмма направленности в главных плоскостях будет аналогична диаграмме направленности прямоугольного источника и выводы для последнего будут качественно применимы и для круглого источника.

Если излучающий элемент имеет малые (углы в пределе бесконечно малые) размеры, то есть величина $S \rightarrow 0$, то при любой форме элемента S проекция \dot{N}_x будет равна

$$\dot{N}_x = \int_{\Delta S} \dot{j}_0(x', y') e^{ikr' \sin \psi} dS = \dot{j}_0 \Delta S .$$

Поставив \dot{N}_x в (42), получим выражения для компонент векторов электромагнитного поля элементарного поверхностного источника в дальней зоне:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\theta &= -\frac{i}{2\lambda} \dot{j}_0 z_0 \Delta S \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos \theta) \cos \phi , \\ \dot{E}_\phi &= \frac{i}{2\lambda} \dot{j}_0 z_0 \Delta S \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos \theta) \sin \phi . \end{aligned} \quad (46)$$

Из (46) следует, что характеристика направленности подобного элементарного источника, называется источником Гюйгенса, в главных плоскостях имеет вид:

$$E_{nl}(\theta) = E_0 (1 + \cos \theta)$$

и является кардиоидой (рис.16).

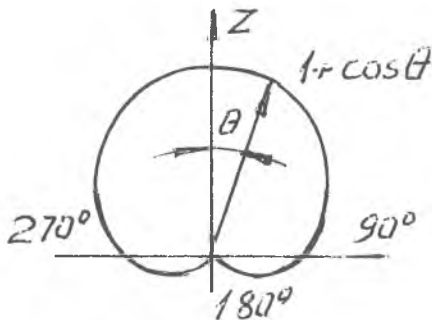


Рис.16. Характеристика направленности источника Гюйгенса

Характеристика направленности источника Гюйгенса по мощности определяется выражением

$$\Phi(\theta, \phi) = \frac{z_0}{8\lambda^2} j_0^2 (dS)^2 (1 + \cos \theta)^2 .$$

Из (36) следует, что система поверхностных токов, определенных равенствами

$$\vec{j}_S = \begin{cases} \vec{i}_x \dot{j}_0 & \text{на } S \\ 0 & \text{вне } S \end{cases} \quad \text{и} \quad \vec{j}_{mS} = \begin{cases} \vec{i}_y \dot{j}_{m0} & \text{на } S \\ 0 & \text{вне } S \end{cases} \quad (47)$$

в плоскости $z = 0$, эквивалентна распределению векторов электромагнитного поля вида

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{i}_y H_y = -\vec{i}_y \dot{j}_0 & \text{на } S \\ 0 & \text{вне } S \end{cases} \quad \text{и} \quad \vec{E} = \begin{cases} \vec{i}_x E_x = -\vec{i}_x \dot{j}_{m0} & \text{на } S \\ 0 & \text{вне } S \end{cases}$$

(см. рис.14), причем в пределах S

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\dot{j}_{m0}}{\dot{j}_0} = z_0.$$

Последние соотношения справедливы для плоской волны. Следовательно, задачу по расчету поля плоского элемента S с токами (47) можно было бы сформулировать как задачу об излучении соответствующего участка фронта плоской волны.

Литература

1. Коротков Н.С. Излучение электромагнитных волн. Радиофизический практикум. Самара: Издательство "Самарский университет", 1996, 27с.
2. Семенов А.А. Теория электромагнитных волн. М.: Изд.МГУ, 1968, 316с.
3. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов.радио, 1971, 662с.
4. Пименов Ю.В. и др. Техническая электродинамика. М.: Связь, 2000.

Оглавление

Излучатели электромагнитных волн	3
Диполь Герца	3
Рамочная антенна	13
Поле прямолинейного тока	19
Принцип эквивалентных токов	20
Излучение элемента плоскости с поверхностными электрическими и магнитными токами	24