МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В. АЛЕКСЕЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 531.01(075)+519.876(075)
ББК 22.21я7
А 471

Рецензенты: канд. техн. наук М. В. Борисов,
канд. техн. наук, доц. Д. Г. Черников

Алексеев, Алексей Владимирович
А471 **Асимптотические методы нелинейной механики** : учебное пособие / *А.В. Алексеев*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022 – 88 с.

ISBN 978-5-7883-1858-5

В данном пособии рассмотрены основные методы получения приближенных аналитических решений дифференциальных уравнений и их систем, содержащих малый параметр. Описаны методы малого параметра и методы разложения движений на быстрые и медленные. Данные методы применяются при исследовании движения механических систем и процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пособие предназначено для обучающихся по направлению «Механика и математическое моделирование» в рамках дисциплины «Асимптотические методы в нелинейной механике» и выполнения выпускной квалификационной работы.

Подготовлено на кафедре теоретической механики.

УДК 531.01(075)+519.876(075)
ББК 22.21я7

ISBN 978-5-7883-1858-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Значение асимптотических методов возросло в последнее время в связи с развитием вычислительных технологий. Часто высказывается мысль, что благодаря развитию вычислительной техники и методов вычислительной математики уменьшается значение аналитических методов. Однако, усложнение задач приводит к усложнению алгоритмов и повышению требуемой точности численных расчетов. Кроме того, численные методы не дают возможности осуществить комплексный анализ влияния параметров исследуемой системы на ее поведение, определяемое решениями дифференциальных уравнений. Вторую проблему и частично первую позволяют решить асимптотические методы. Их применение позволяет найти или определить характер аналитического решения систем квазилинейных дифференциальных уравнений практически с любой точностью.

В данном пособии предлагается две группы методов асимптотического решения дифференциальных уравнений, описывающих в том числе механические процессы: методы теории малого параметра Ляпунова-Пуанкаре и асимптотические методы разделения движений.

1. ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ

1. Формулировка. Теорема Пуанкаре относится к числу основных результатов аналитической теории дифференциальных уравнений. Одновременно она имеет большое значение и для приложений, поскольку выясняет основные свойства уравнений в вариациях. В отдельных случаях она сама может являться источником эффективных вычислительных алгоритмов.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $x -$ вектор размерности $n,$ $t -$ скалярный аргумент $-$ время, а $\varepsilon -$ малый параметр. Предполагается, что функция f является аналитической функцией переменной x и параметра $\varepsilon.$

Для системы (1.1) поставим задачу Коши: определить функцию $x(t, \varepsilon),$ удовлетворяющую системе (1.1) и начальным условиям

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Для того чтобы задача (1.2) для уравнения (1.1) имела смысл, нам нет необходимости требовать аналитичности по переменной $t.$ Будем предполагать, что правая часть уравнения (1.1) удовлетворяет условиям, гарантирующим существование решения локальной задачи Коши. Например, пусть $f(x, t, \varepsilon)$ будет удовлетворять условию Липшица по переменному x. Наряду с уравнением (1.1) будем рассматривать уравнение

$$\dot{z} = f(z, t, 0). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) условимся называть порождающим. Для обоих уравнений будем рассматривать одну и ту же задачу Коши (1.2).

В уравнении (1.1) сделаем замену переменных

$$x = z + y.$$

Вектор y будет удовлетворять уравнению

$$\dot{y} = f(z+y,t,\varepsilon) - f(z,t,0) \tag{1.4}$$

и нулевым начальным условиям

$$y(0) = 0. \tag{1.5}$$

Так как правая часть уравнения (1.4) − аналитическая функция переменных y и ε, то мы можем ее разложить в ряд Тейлора по этим переменным, считая их достаточно малыми по абсолютной величине. Это позволит нам переписать уравнение (1.4) в следующем виде:

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)_0 + B(y,\varepsilon,t). \tag{1.6}$$

Здесь $A = \left(\frac{df}{dx}\right)_0$ – квадратная матрица первых частных производных

$$A = \left\| \left(\frac{df^i}{dx^j}\right)_0 \right\|,$$

f^i и x^i − i-я компонента векторов f и x соответственно, $\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)_0$ – вектор (матрица-столбец) с компонентами $\left(\frac{df^i}{d\varepsilon}\right)_0$, $B(y,\varepsilon,t)$ – совокупность членов более высокого порядка: разложение функции $B(y,\varepsilon,t)$ начинается со вторых степеней ее аргументов, $(F)_0$ обозначает, что значения функции $F(x,\varepsilon)$ вычислены при условии $x = z, \ \ \varepsilon = 0.$

Будем считать, что решение задачи Коши для порождающего уравнения известно. Тогда A и $\dfrac{df}{d\varepsilon}$ будут известными функциями времени.

Будем искать решение уравнения (1.6) в виде ряда

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \varepsilon^i. \tag{1.7}$$

Подставляя ряд (1.7) в уравнение (1.6) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра $\varepsilon,$ получим следующую систему уравнений для определения неизвестных функций y_i:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y}_1 = Ay_1 + D_1, \\ \dot{y}_2 = Ay_2 + D_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_k = Ay_k + D_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

В этих уравнениях $D_1 = \left(\dfrac{df}{d\varepsilon}\right)_0$ – известная функция времени. Функция D_2 содержит квадратичные члены разложения функции $B(y,\varepsilon,t)$ по y и $\varepsilon,$ т.е. в нее входит только функция y_1 и не входят функции y_i для $i > 1.$ В самом деле, функцию $B(y,\varepsilon,t)$ можно представить в виде

$$B(y,\varepsilon,t) = B_{00}y^2 + B_{01}y\varepsilon + B_{11}\varepsilon^2 + \dots$$

Подставляя в это выражение ряд (1.7), приведем его к виду

$$B(y,\varepsilon,t) = \varepsilon^2(B_{00}y_1^{\,2} + B_{01}y_1 + B_{11}) + \varepsilon^3(\dots) + \dots\ .$$

Очевидно, что любая функция D_k зависит только от тех функций y_i, для которых $i < k$.

Таким образом, если решать последовательно уравнения (1.8), то функции D_k следует считать известными функциями времени. Функции y_i удовлетворяют нулевым начальным условиям

$$y_i(t_0) = 0. \tag{1.9}$$

Таким образом, определение коэффициентов разложения решения $y(t)$, т.е. функций $y_i(t)$, сводится к последовательному решению задач Коши для системы (1.8).

Теперь мы можем сформулировать теорему Пуанкаре. Она состоит из двух утверждений:

I. Если общий интеграл порождающей системы (1.3) известен, то решение системы (1.8) может быть найдено при помощи операций дифференцирования и взятия квадратур.

II. Решение уравнения (1.1) – аналитическая функция параметра ε, т.е. ряды (1.7) сходятся при достаточно малых по абсолютной величине значениях ε и, следовательно, представляют собой интегралы уравнения (1.1), разложенные по степеням параметра ε.

Будем называть некоторый ряд формальным решением, если он удовлетворяет системе дифференциальных уравнений. Этот ряд будем называть решением, если он сходится в некоторой области значений параметра. Таким образом, первая часть теоремы формулирует некоторые суждения о структуре алгоритма построения формального решения. Вторая часть теоремы утверждает, что формальное решение (1.7) является решением.

2. Доказательство утверждения I. Докажем только первое из этих утверждений. Доказательство второго утверждения приводить не будем, так как оно достаточно громоздко.

Пусть

$$z = F(t, C), \tag{1.10}$$

где C – произвольная постоянная (вектор размерности n) есть общий интеграл порождающего уравнения (1.3). Это значит, что функция F удовлетворяет уравнению (1.3)

$$\frac{dF}{dt} = f\left[F(t, C), t, 0\right] \tag{1.11}$$

при любом значении постоянной C. Через ξ_i обозначим вектор

$$\xi_i = \frac{\partial F(t, C)}{\partial C^i}, \tag{1.12}$$

где C^i – i-я компонента вектора C. Вычислим

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial C^i} = \frac{\partial}{\partial C^i}\frac{dF}{dt}.$$

Используем тождество (1.11)

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial C^i}\left\{ f(F(t, C), t, 0)\right\} = \frac{\partial f}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial C^i} = \frac{\partial f}{\partial F}\xi_i.$$

Здесь $\partial f / \partial F$ – квадратная матрица, причем очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial F} = A.$$

Таким образом, вектор-функция ξ_i удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\xi_i = A\xi_i.$$

Система уравнений

$$\dot{u} = Au \tag{1.13}$$

называется уравнениями в вариациях для системы (1.1) и представляет собой систему линейных уравнений с переменными коэффициентами. Никаких общих рецептов интегрирования таких уравнений нет. Однако уравнения в вариациях обладают одним замечательным свойством, которое мы только что доказали. Это свойство можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма. *Если общий интеграл порождающего уравнения известен, то частные решения уравнений в вариациях могут быть выписаны в явном виде при помощи одной операции дифференцирования в соответствии с формулами (1.12).*

Итак, формулы (1.12) определяют систему фундаментальных решений уравнений в вариациях. Теперь решение задачи Коши (1.10) для системы уравнений (1.8) можно получить в квадратурах, используя метод вариации произвольных постоянных. Приведем эти вычисления. Система уравнений (1.8) имеет вид

$$\dot{y} = Ay + D, \tag{1.14}$$

где $D -$ известная функция времени. Решение уравнения (1.14) будем искать в виде

$$y = Y\alpha, \tag{1.15}$$

где $\alpha -$ некоторый неизвестный вектор, а $Y -$ матрица фундаментальных решений уравнений в вариациях

$$\dot{A}y_1 + \dot{B}x_2 = F_1,\ Y = \left\{\xi_i^j\right\},$$

где $\xi_i^j -$ компонента вектора ξ_i, номер которой равен j. Таким образом,

$$\frac{dY}{dt} = AY. \tag{1.16}$$

Дифференцируя (1.15) и подставляя в (1.14), получим

$$Y\dot{\alpha} = D,$$

При выводе (1.16) мы использовали (1.15). Итак,

$$\dot{\alpha} = Y^{-1}D,$$

откуда окончательно получим

$$y = Y(t)\left\{\int_0^t Y^{-1}(\tau)D(\tau)d\tau + C^*\right\}.$$

Для того чтобы удовлетворить начальным условиям (1.9), произвольную постоянную C^* следует принять равной нулю. Итак,

$$y = \int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)D(\tau)d\tau. \tag{1.17}$$

Матрица $Y(t)Y^{-1}(\tau)$ называется матрицей Грина. Первая часть теоремы Пуанкаре доказана полностью, поскольку выражение (1.17) получено путем дифференцирования и взятия квадратур.

3. Замечание об аналитичности правых частей. Во всех рассуждениях, которые были приведены, основным предположением было предположение об аналитичности правых частей уравнения (1.1) по параметру ε и функции x.

Последнее предположение очень существенно. Теорема Пуанкаре перестает быть верной для уравнений (1.1), если параметр ε входит в ее правую часть неаналитически. Покажем это обстоятельство на примере. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\dot{x} - \frac{x}{\varepsilon}$$

или

$$\varepsilon\ddot{x} = (\varepsilon+1)\dot{x} - x. \tag{1.18}$$

Порождающее уравнение будет таким:

$$\dot{z} = z,$$

а его общий интеграл имеет вид

$$z = Ce^{t}. \tag{1.19}$$

Общий интеграл уравнения (1.18) легко выписать в явном виде

$$x = C_1 e^{t/\varepsilon} + C_2 e^{t}. \tag{1.20}$$

Мы видим, что функция (1.20) не может быть разложена в ряд по положительным степеням параметра ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Более того, решение (1.20) при $\varepsilon \to 0$ вообще не стремится к решению порождающего уравнения ни для каких t_i отличных от нуля.

2. СИСТЕМА ЛЯПУНОВА – СЛУЧАЙ ОДНОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

1. Консервативные системы.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} + f(z) = 0,$$

где функция $f(z)$ такова, что $f(0) = 0$, а потенциальная энергия

$$\Pi = \int f(z)dz$$

в точке $z = 0$ имеет изолированный минимум. Тогда из интеграла энергии мы находим

$$\dot{z} = \sqrt{2(C - \Pi)},$$

где C – постоянная энергии. Применяя метод фазовой плоскости, сразу убеждаемся, что траектории этой системы в достаточно малой окрестности положения равновесия замкнутые. Таким образом, все решения в окрестности минимума потенциальной энергии периодические. Этот факт был получен при весьма общих предположениях о функции $f(z)$: она должна быть интегрируемой.

2. Система Ляпунова. В этом параграфе будет изучен класс систем, называемых системами Ляпунова. Они обладают многими свойствами консервативных систем, которые являются их весьма частным случаем. Так же, как и консервативные системы, в окрестности положения равновесия при известных условиях они описывают периодические движения.

Для этих систем А.М. Ляпуновым разработан эффективный аналитический метод отыскания периодических движений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + X^*(\xi,\eta),\\ \frac{d\eta}{dt} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + Y^*(\xi,\eta),\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где $X^*(\xi,\eta)$ и $Y^*(\xi,\eta)$ – аналитические функции своих переменных в окрестности точки $\xi=\eta=0$ и такие, что их разложение по степеням ξ и η начинается с членов, порядок которых не ниже второго:

$$\left.\begin{aligned}X^*(\xi,\eta) &= b_{20}\xi^2 + b_{02}\eta^2 + b_{11}\xi\eta + b_{30}\xi^3 + \ldots,\\ Y^*(\xi,\eta) &= d_{20}\xi^2 + d_{02}\eta^2 + d_{11}\xi\eta + d_{30}\xi^3 + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Систему (2.1) будем называть системой Ляпунова, если выполнены следующие два условия:

а) уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\gamma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

имеет чисто мнимые корни $\pm i\lambda$;

б) система (2.1) допускает аналитический первый интеграл

$$H(\xi,\eta)=const, \tag{2.4}$$

разложение которого по степеням переменных ξ и η начинается с членов второго порядка малости, т.е. функция H в окрестности точки $\xi=\eta=0$ является аналитической функцией своих переменных и представима в следующем виде:

$$H=a_0^*+a_{20}^*\xi^2+a_{02}^*\eta^2+a_{11}^*\xi\eta+\ldots\ .$$

Система Ляпунова как частный случай содержит консервативные системы. Например, уравнение

$$\ddot{z}+f(z)=0,$$

где $f(z)=\omega^2 z+a_2 z^2+\ldots$ заменой $\xi=-\omega\eta,\ z=\xi$ приводится к виду (2.1)

$$\begin{aligned}&\xi=-\omega\eta,\\&\dot{\eta}=\omega\xi+\frac{a_2}{\omega}\xi^2+\ldots\end{aligned}$$

Если функция $f(z)$ аналитическая, то интеграл энергии и будет аналитическим интегралом (2.4).

Однако к числу систем Ляпунова относятся также многие встречающиеся в технике и физике неконсервативные системы.

3. Приведение к каноническому виду. Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\xi&=a_{11}\xi+a_{12}\eta,\\\dot{\eta}&=a_{21}\xi+a_{22}\eta.\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Система (2.5) описывает колебание с постоянной амплитудой, поскольку ее характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней.

Исключая из уравнения (2.5) переменную $\eta,$ получим:

$$\xi - \xi(a_{11} + a_{22}) + \xi(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = 0. \qquad (2.6)$$

Для того чтобы удовлетворить условию а), коэффициент при ξ должен быть равен нулю, т.е. должно быть $a_{11} = -a_{22}$ и, кроме того, должно иметь место неравенство

$$\lambda^2 = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} > 0.$$

Сделаем замену

$$\xi = x, \qquad \dot{x} = -\lambda y, \qquad (2.7)$$

где $\lambda -$ арифметическое значение корня $\sqrt{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}.$ При помощи замены (2.7) уравнение (2.6) сводится к эквивалентной системе двух уравнений

$$\dot{x} = -\lambda y, \qquad \dot{y} = \lambda x.$$

Поэтому, если в исходной системе (2.1) сделать замену (2.7), то эта система будет приведена к виду:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + X(x, y), \\ \dot{y} &= \lambda x + Y(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

где X и Y – аналитические функции своих переменных, разложения которых начинаются с членов второго порядка малости. Таким образом, вместо системы (2.1) нам достаточно рассмотреть систему (2.8).

4. Преобразование интеграла *H*. Остановимся еще на выражении интеграла *H*. Согласно предположению б) его представление имеет вид

$$H \equiv Ax^2 + By^2 + Cxy + \ldots = \mu,$$

где μ – некоторая постоянная. Так как H – первый интеграл, то в силу уравнений (2.8) $\dfrac{dH}{dt} = 0,$ что позволяет вычислить коэффициенты *A, B, C* и т.д. Найдем

$$\frac{dH}{dt} = (2Ax + Cy + \ldots)(-\lambda y + X(x,y)) + (2By + Cx + \ldots)(\lambda x + Y(x,y)).$$

Сравнивая коэффициенты при x^2, y^2 и $xy,$ получим

$$C\lambda = 0, \qquad -2A\lambda + 2B\lambda = 0.$$

Отсюда $A = B, C = 0.$ Не нарушая общности, можно принять

$$A = B = 1.$$

Итак, интеграл H можно представить в виде:

$$H \equiv x^2 + y^2 + W(x,y) = \mu^2, \tag{2.9}$$

где W – аналитическая функция своих переменных, разложение которой начинается с членов не ниже третьего порядка малости; μ^2 – некоторая постоянная, которую всегда мы можем считать положительной для достаточно малых $|x|$ и $|y|$.

5. Периодичность решений системы Ляпунова. Докажем теперь, что решения системы (2.8) для достаточно малых значений μ – периодические функции t. Для этого достаточно доказать, что фазовые траектории в плоскости (x, y) замкнутые и θ сохранят знак.

Введем полярные координаты

$$x = \rho\cos\theta; \qquad y = \rho\sin\theta$$

и заметим, что любая замкнутая траектория $\rho(\theta)$ должна быть периодической функцией аргумента θ. Составим выражение для H:

$$H \equiv \rho^2 (1 + \frac{1}{\rho^2} W(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)) = \mu^2. \qquad (2.10)$$

Здесь $W -$ аналитическая функция ρ, разложение которой имеет вид

$$W(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2 y + \ldots + a_{nm}x^n y^m + \ldots =$$
$$= \rho^3 (a_{30}\cos^3\theta + a_{21}\cos^2\theta\sin\theta + a_{12}\cos\theta\sin^2\theta + a_{03}\sin^3\theta) + \ldots$$
$$\ldots + \rho^{n+m}(a_{n+m,0}\cos^{n+m}\theta + \ldots + a_{0,n+m}\sin^{n+m}\theta) + \ldots$$

Следовательно, в формуле (2.10) функция $\frac{1}{\rho^2}W(\rho, \theta)$ может быть представлена в виде ряда

$$\frac{1}{\rho^2}W(\rho, \theta) = \rho a_1(\theta) + \rho^2 a_2(\theta) + \ldots,$$

причем все коэффициенты $a_i(\theta)$ – полиномы от $\sin\theta$ и $\cos\theta$, т.е. периодические функции θ. Таким образом, выражение (2.10) можно переписать так:

$$\rho(1 + \rho a_1(\theta) + \ldots)^{\frac{1}{2}} = \mu.$$

Это равенство мы можем рассматривать как уравнение для определения $\rho(\theta)$. Используя аналитичность функций, которые в него входят, будем функцию ρ разыскивать в виде ряда

$$\rho = \mu + b_2(\theta)\mu^2 + b_3(\theta)\mu^3 + \ldots \qquad (2.11)$$

Прямым вычислением убеждаемся в том, что коэффициенты в разложении (2.11) являются полиномами от $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Так, например,

$$b_2 = -\frac{1}{2}a_1, \qquad b_3 = a_1^2 - \frac{1}{2}a_2, \quad \dots .$$

Таким образом, коэффициенты b_i – степенные функции коэффициентов a_i, а последние в свою очередь являются полиномами от $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Вследствие такой структуры коэффициентов ряд (2.11) определяет периодическую функцию θ периода 2π, т.е. при изменении θ на 2π величина ρ возвращается к своему исходному значению. Если при этом окажется, что θ сохраняет знак, то это и будет означать, что фазовая траектория замкнутая. Ниже мы в этом убедимся (см. формулу (2.16)).

Таким образом, решения системы (2.8) – функции $x(t)$ и $y(t)$ – будут периодическими функциями времени.

Функции $x(t)$ и $y(t)$ являются аналитическими по параметру μ. В самом деле, в силу аналитичности правых частей системы (2.8) ее решения будут аналитическими функциями начальных значений

$$x(0) = c, \qquad y(0) = b.$$

Постоянная μ также определяется этими значениями:

$$\mu^2 = c^2 + b^2 + W(c,b). \tag{2.12}$$

Так как правые части системы (2.8) не зависят от времени, то без ограничений общности начальные условия можно принять в виде

$$x(0) = c, \qquad y(0) = 0. \tag{2.13}$$

Отсюда видно, что решения системы (2.8) представляют собой аналитические функции *c*, а также и μ, поскольку из (2.12) следует, что $\mu -$ аналитическая функция *c*:

$$\mu = c + \mu_2 c^2 + \dots \tag{2.14}$$

6. Вычисление периода. Для вычисления периода составим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют переменные ρ и θ. Вычислим

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\theta - p\theta\sin\theta, \qquad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\theta + p\theta\cos\theta. \tag{2.15}$$

Заменяя в системе (2.15) производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$ их выражениями из уравнений (2.8) и разрешая полученную систему относительно производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$, найдем искомые уравнения:

$$\frac{d\rho}{dt} = X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta, \tag{2.16}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda + \frac{1}{\rho}\left\{Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta - X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta\right\}.$$

Из второго уравнения определим t:

$$t = \int_0^\theta \frac{\rho d\theta}{\lambda\rho + Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta - X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta} + t_0. \tag{2.17}$$

Для того чтобы удовлетворить условиям (2.13), необходимо константу в (2.17) принять равной нулю. Используем теперь тот факт, что ρ – аналитическая функция μ (см. представление μ в виде ряда (2.11)). Это позволит разложить подынтегральную функцию в выражении (2.17) в ряд по степеням μ:

$$t = \frac{1}{\lambda}\left\{\theta + \int_0^\theta \left[\mu\vartheta_1(\theta) + \mu^2\vartheta_2(\theta) + \ldots\right]d\theta\right\}, \tag{2.17'}$$

где $\vartheta_i(\theta)$ – периодические функции θ периода 2π. Следовательно, подынтегральная функция в (2.17') также периодическая функция θ периода 2π. Следовательно, интеграл

$$I=\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\left[\mu\vartheta_1(\theta)+\mu^2\vartheta_2(\theta)+\ldots\right]d\theta$$

не зависит от θ_0 и его можно записать в виде

$$I=2\pi(\mu h_1+\mu^2h_2+\ldots),$$

где h_i – вполне определенные числа. Таким образом, при изменении θ на 2π время t получает приращение T:

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+\mu h_1+\mu^2h_2+\ldots), \tag{2.18}$$

не зависящее от θ_0. Пусть теперь $\Phi(\theta)$ – некоторая периодическая функция θ периода 2π, тогда

$$\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta). \tag{2.19}$$

Рассматривая ее как функцию t, будем иметь

$$\Phi(t+T)=\Phi(t). \tag{2.20}$$

Равенство (2.19) справедливо для любых θ, следовательно, и равенство (2.20) справедливо для любых t, т.е. $\Phi(t)-$ периодическая функция t. Значит, величина T, определенная формулой (2.18) как функция μ, и есть период решения.

Используя (2.17), мы можем записать его в следующем виде:

$$T(\mu,\theta_0)=\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\frac{\rho d\theta}{\lambda\rho+Y(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta-X(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta},$$

при $\mu\to 0$ период T стремится к периоду линейных колебаний $2\pi/\lambda$ т.е. к периоду колебаний в системе (2.8) при $X\equiv 0$, $Y\equiv 0$.

7. Одно свойство периода. Покажем теперь, что T – четная функция μ. Вернемся снова к интегралу (2.10). Рассматривая его как уравнение относительно ρ, мы получаем в окрестности точки $\rho = 0$ два решения. Одно из них дается рядом (2.11):

$$\rho = \mu + b_2(\theta)\mu^2 + b_3(\theta)\mu^3 + \ldots;$$

к другому решению приходим, если в (2.11) заменить μ на $-\mu$:

$$\rho = -\mu + b_2(\theta)\mu^2 - b_3(\theta)\mu^3 + \ldots \qquad (2.21)$$

Теперь заметим, что левая часть уравнения (2.10) не изменится, если заменим ρ на $-\rho$ и θ на $\theta + \pi$. Следовательно, на основании (2.11) будем иметь

$$-\rho = \mu + b_2(\theta + \pi)\mu^2 + b_3(\theta + \pi)\mu^3 + \ldots \qquad (2.22)$$

Значение ρ, определенное рядом (2.22), будет корнем уравнения (2.10), не совпадающим (2.11) (хотя бы потому, что для малых ρ из (2.11) следует $\rho = \mu + O(\mu^2)$, а из (2.22) $\rho = -\mu + O(\mu^2)$. Следовательно, оно будет определяться рядом (2.21). Сравнивая (2.21) и (2.22), получаем

$$b_2(\theta) = -b_2(\theta + \pi), \qquad b_3(\theta) = b_3(\theta + \pi)$$

и т.д.

Отсюда следует, что если в выражении (2.11) заменить μ на $-\mu$, а θ на $\theta + \pi$, то величина ρ примет свое значение с обратным знаком:

$$\rho(-\mu, \theta + \pi) = -\rho(\mu, \theta).$$

Выпишем теперь выражение для периода T. На основании (2.17) имеем

$$T(\mu,0)=\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\theta}{\lambda\rho+Y(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta-X(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta}. \quad (2.23)$$

Сделаем в (2.23) замену μ на $-\mu$, а θ на $\theta+\pi$. Тогда получим величину

$$T(-\mu,\pi)=\int_{\pi}^{\pi+2\pi}\frac{\rho(-\mu,\theta+\pi)d\theta}{\lambda\rho(-\mu,\theta+\pi)\cos\theta+Y\cos(\theta+\pi)-X\sin(\theta+\pi)}.$$

Согласно доказанному величины $\rho\cos\theta$ и $\rho\sin\theta$ сохраняют свои значения. Следовательно, то же самое можно сказать и о функциях *X* и *Y*. В то же время ρ, $\cos\theta$ и $\sin\theta$ изменят свои знаки. Следовательно, знаменатель изменит знак на обратный, но и числитель изменит знак на обратный. Следовательно,

$$T(\mu,0)=T(-\mu,\pi).$$

Но подынтегральная функция в выражении (2.23) $-$ периодическая функция переменной θ периода 2π, и, следовательно,

$$T(-\mu,\pi)=T(-\mu,0).$$

Итак,

$$T(-\mu,0)=T(\mu,0),$$

т.е. период – четная функция величины μ.

8. Формулировка теоремы Ляпунова. Мы доказали следующую теорему.

Теорема Ляпунова. *Если постоянная* μ *достаточно мала, то все решения системы уравнения (2.8)* $-$ *периодические функции* t, *причем период* $-$ *четная функция величины* μ *и при* $\mu\to 0$ *стремится к* $2\pi/\lambda$. *Решения системы (2.8) являются аналитическими функциями величины c – начального отклонения переменной x.*

Имея в виду формулу (2.14), выражение периода (2.18) можно переписать в следующем виде:

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + c^2 h_2 + c^3 h_3 + \ldots). \tag{2.24}$$

3. МЕТОД ЛЯПУНОВА

1. Пример. В предыдущей части установлен ряд общих результатов, относящихся к системам Ляпунова. Мы установили, в частности, что для достаточно малых значений постоянной c решения системы (2.8) – периодические функции t. Однако пока еще мы ничего не говорили о методах построения этих периодических решений. Ляпунов предложил простой и очень эффективный алгоритм построения этих решений. Алгоритм Ляпунова использует аналитичность искомых решений по параметру c и дает правило построения решений в форме рядов специального вида, расположенных по степеням этого параметра.

Итак, на основании теоремы, доказанной выше, решение системы уравнений (2.8) можно искать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_k(t), \qquad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y_k(t). \tag{3.1}$$

По доказанному для достаточно малых значений $|c|$ ряды (3.1) сходятся и определяют решение системы (2.8). Однако использовать решения в форме (3.1) оказывается неудобным. Поясним это обстоятельство.

Как уже было установлено для достаточно малых значений μ (или, что то же самое, для достаточно малых значений $|c|$), все решения системы (2.8) – периодические периода $T(c)$. Следовательно, функции, определенные рядами (3.1), удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} x(t+T) &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_k(t+T) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_k(t) = x(t), \\ y(t+T) &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k y_k(t+T) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_k(t) = y(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Равенства (3.2) справедливы для любых (но достаточно малых) значений $|c|$. Однако из этого нельзя сделать заключения, что функции $x_i(t)$ и $y_i(t)$ периодические, т.е. что

$$x_i(t+T) = x_i(t), \qquad y_i(t+T) = y_i(t).$$

В самом деле, период *T* в общем случае также является функцией параметра *c*. Следовательно, хотя представление (3.1) и определяет периодическую функцию, члены этих рядов периодическими функциями в общем случае не являются.

Для пояснения рассмотрим пример системы

$$\dot{x} = -y, \qquad \dot{y} = x + x^3. \tag{3.3}$$

Подставляя в эту систему ряды (3.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *c*, получаем следующие системы уравнений для определения функций x_i и y_i:

$$\dot{x}_1 = -y_1, \qquad \dot{y}_1 = x_1; \tag{3.4}$$

$$\dot{x}_2 = -y_2, \qquad \dot{y}_2 = x_2; \tag{3.5}$$

$$\dot{x}_3 = -y_3, \qquad \dot{y}_3 = x_3 + x_1^3 \tag{3.6}$$

и т.д.

Начальными условиями для системы (3.3) будут условия (2.13). На этом основании начальные условия для системы (3.4), (3.5), (3.6) мы можем принять в виде:

$$t=0: \qquad \left.\begin{array}{ll} x_1=1, & y_1=1, \\ x_i=0, & y_i=0(i=2,3,\ldots). \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

Условия (3.7) единственным образом определяют функции x_1, x_2, y_1, и y_2:

$$x_1=\cos t, \qquad y_1=\sin t, \qquad x_2=0, \qquad y_2=0. \tag{3.8}$$

Перепишем теперь систему (3.6) с учетом (3.8):

$$\dot{x}_3=-y_3, \qquad \dot{y}_3=x_3+\cos^3 t. \tag{3.9}$$

Исключая из (3.9) функцию y_3, мы придем к следующему уравнению второго порядка:

$$\ddot{x}_3+x_3=\cos^3 t$$

или, заменяя $\cos^3 t$ его разложением по косинусам кратных дуг,

$$\ddot{x}_3+x_3=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t. \tag{3.10}$$

Общее решение системы (3.10) будет:

$$x_3=A\cos t+B\sin t+\frac{3}{8}t\sin t-\frac{1}{9}\cos 3t. \tag{3.11}$$

Здесь постоянные *A* и *B* должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить условиям (3.7).

Итак, мы видим, что функция x_3 содержит вековое слагаемое $t\sin t$ и, следовательно, не является периодической. Легко убедиться, что и последующие члены рядов (3.1) будут также содержать члены вида $t^n \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} t$.

Таким образом, построение решения в форме рядов (3.1) приводит к тому, что периодические функции $x(t)$ и $y(t)$ представляются в виде рядов по непериодическим функциям. Такое представление неудобно во многих отношениях и не может быть использовано в прикладных целях. В самом деле, на практике мы не имеем возможности оперировать с бесконечными рядами и вынуждены заменять их конечными отрезками. Но эти конечные отрезки не будут периодическими функциями и, следовательно, даже приближенно не будут содержать необходимой информации, такой, например, как зависимость периода T от «амплитуды» c.

2. Обсуждение алгоритма. Мы уже видели, что причина неудачи, которая нас постигла при попытке разыскать периодические решения в форме рядов (3.1), состояла в том, что период решения T зависел от c. Поэтому, естественно, возникает вопрос: нельзя ли видоизменить масштаб времени так, чтобы решения полученной системы имели фиксированный период, не зависящий от c (например, равный 2π).

Обратим внимание на формулу (2.24). Она показывает, что если сделать замену

$$t = \frac{\tau}{\lambda}(1 + c^2 h_2 + c^3 h_3 + \ldots), \tag{3.12}$$

то период колебаний по переменной τ будет равен 2π. Сделав в системе уравнений (2.8) замену (3.12), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \left[-\lambda y + X(x,y)\right]\frac{1 + c^2 h_2 + c^3 h_3 + \ldots}{\lambda}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left[\lambda x + Y(x,y)\right]\frac{1 + c^2 h_2 + c^3 h_3 + \ldots}{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Так как правые части системы (3.13) мы умножили на аналитические функции параметра c, то решения этой системы, так же как и системы (2.8), аналитические по c и для любого достаточно малого $|c|$ периодические по τ. Но период по независимой переменной теперь уже фиксирован, он равен 2π.

Периодические решения системы (3.13) будем искать в виде рядов

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}(\tau), \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}(\tau). \tag{3.14}$$

Подставим ряды (3.14) в систему уравнений (3.13) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях параметра *c*. Функции $x^{(1)}(\tau)$ и $y^{(1)}(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau} = -y^{(1)}(\tau), \qquad \frac{dy^{(1)}}{d\tau} = x^{(1)}(\tau). \tag{3.15}$$

В самом деле, функции *X* и *Y*, будучи аналитическими функциями своих переменных, таковы, что их разложение начинается с членов второго порядка малости. Следовательно, при подстановке в эти функции рядов (3.14) функции *X* и *Y* не будут содержать членов, линейных относительно *c*. Начальные значения для системы (3.13) определены равенствами:

$$t = 0 : x = c, \quad y = 0.$$

Следовательно, функции $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ будут соответствовать следующим начальным условиям:

$$\tau = 0 : x^{(1)} = 1, \quad y^{(1)} = 1. \tag{3.16}$$

Функции $x^{(2)}$ и $y^{(2)}$ будут удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^{(2)}}{d\tau} &= -y^{(2)} + \frac{1}{\lambda} X^{(2)}, \\ \frac{dy^{(2)}}{d\tau} &= x^{(2)} + \frac{1}{\lambda} Y^{(2)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

где $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ – квадратичные члены разложения функций *X* и *Y* по степеням параметра *c*. Так как *X* и *Y* − аналитические функции переменных x и y, причем их разложение начинается с квадратичных членов, то $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ являются квадратичными формами переменных $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$.

Точно так же каждая пара функций $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$, входящая в разложение (3.14), определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^{(k)}}{d\tau} &= -y^{(k)} + \frac{1}{\lambda} X^{(k)} - h_{k-1} y^{(1)}, \\ \frac{dy^{(k)}}{d\tau} &= x^{(k)} + \frac{1}{\lambda} Y^{(k)} - h_{k-1} x^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

причем функции $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ будут содержать величины $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$ только тех номеров j, которые меньше чем k.

Кроме того, функции $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ будут содержать величины h_j, причем $j = 2, 3, \ldots, k-2$. Заметим, что величины h входят в правые части (3.18) только уравнений относительно $x^{(s)}$ и $y^{(s)}$, для которых $s \geq 3$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^{(3)}}{d\tau} &= -y^{(3)} + \frac{1}{\lambda} X^{(3)} - h_2 y^{(1)}, \\ \frac{dy^{(3)}}{d\tau} &= x^{(3)} + \frac{1}{\lambda} Y^{(3)} + h_2 x^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

и т.д

Из условий (2.13) следует, что функции $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ при $k > 1$ удовлетворяют начальным условиям

$$x^{(k)}(0) = 0, \; y^{(k)}(0) = 0. \tag{3.20}$$

Вернемся снова к уравнениям (3.13). Хотя числа h_i нам неизвестны заранее, но они на основании теоремы Ляпунова определяются однозначно для данной системы и не зависят ни от параметра c, ни от начальных условий.

Далее члены рядов (3.14) также определяются однозначно, причем $x^{(k)}(\tau)$ и $y^{(k)}(\tau)$ – периодические функции переменного τ периода 2π. В самом деле, $x(\tau)$ и $y(\tau)$ – периодические функции, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\sum c^k x^{(k)}(\tau+2\pi)\equiv x(\tau+2\pi)\equiv x(\tau)\equiv\sum c^k x^{(k)}(\tau),\\ \sum c^k y^{(k)}(\tau+2\pi)\equiv y(\tau+2\pi)\equiv y(\tau)\equiv\sum c^k y^{(k)}(\tau).\end{aligned}\right\}\tag{3.21}$$

Так как функции $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ не зависят от параметра c, а равенства (3.21) справедливы для любого малого c, то

$$x^{(k)}(\tau+2\pi)=x^{(k)}(\tau),\qquad y^{(k)}(\tau+2\pi)=y^{(k)}(\tau).$$

Таким образом, мы можем утверждать заранее, что функции $x^{(k)}(\tau)$ и $y^{(k)}(\tau)$, которые определяются как решение задачи Коши (3.20) для системы уравнений (3.18), будут периодическими функциями времени периода 2π. С другой стороны, уравнения (3.18) относятся к виду квазилинейных уравнений:

$$\dot{x}=-y+F_1(t),\qquad \dot{y}=x+F_2(t),$$

где

$$F_1=\frac{1}{\lambda}X^{(k)}-h_{k-1}y^{(1)},\qquad F_2=\frac{1}{\lambda}Y^{(k)}+h_{k-1}x^{(1)}$$

являются периодическими функциями времени, поскольку они определяются периодическими функциями $x^{(1)},\ldots,x^{(k-1)}$, $y^{(1)},\ldots,y^{(k-1)}$. Мы установили, что система квазилинейных уравнений имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда функции F_i удовлетворяют условиям тривиального решения. На этом основании можно сформулировать следующее вспомогательное утверждение: функции $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$ и числа h_{k-1} всегда удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} F_1\cos t dt+\int_0^{2\pi} F_2\sin t dt \equiv \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi}\left\{\begin{matrix}(X^{(k)}-\lambda h_{k-1}y^{(1)})\cos t+\\ +(Y^{(k)}-\lambda h_{k-1}x^{(1)})\sin t\end{matrix}\right\}dt=0,\\&\int_0^{2\pi} F_2\cos t dt+\int_0^{2\pi} F_1\sin t dt \equiv \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi}\left\{\begin{matrix}(Y^{(k)}-\lambda h_{k-1}x^{(1)})\cos t-\\ -(X^{(k)}-\lambda h_{k-1}y^{(1)})\sin t\end{matrix}\right\}dt=0.\end{aligned}\right\} \quad (3.22)$$

3. Расчет приближенного решения. Рассмотрим теперь подробнее процедуру расчета коэффициентов разложения рядов (3.14). Условия (3.16) выделяют единственное решение уравнений (3.15):

$$x^{(1)}=\cos\tau, \qquad y^{(1)}=\sin\tau. \quad (3.23)$$

Далее рассмотрим систему уравнений (3.17). Функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ будут квадратичными формами от $\sin\tau$ и $\cos\tau$. На основании предыдущего эта система имеет периодическое решение, которое может быть построено одним из известных способов или, например, методом вариации произвольных постоянных или представлением решения в виде отрезка ряда Фурье:

$$\left.\begin{aligned}x^{(2)}&=A\cos\tau+B\sin\tau+\varphi_1,\\ y^{(2)}&=A\sin\tau-B\cos\tau+\varphi_2,\end{aligned}\right\} \quad (3.24)$$

где функции φ_1 и φ_2 имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=a_{10}+a_{11}\cos 2\tau+a_{12}\sin 2\tau,\\ \varphi_2&=a_{20}+a_{21}\cos 2\tau+a_{22}\sin 2\tau.\end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

В самом деле, так как функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ содержат только вторые степени функций $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, то разложение $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ в ряд Фурье не будет содержать первых гармоник. Коэффициенты a_{ij} в разложении (3.25) однозначно определяются коэффициентами разложения функций $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$. Числа A и B в выражениях

(3.24) определяются начальными условиями (3.20). Аналогично вычисляются и остальные члены разложения (3.14).

Рассмотрим теперь более подробно условия (3.22). Принимая во внимание выражения (3.23) для $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, можно эти условия переписать так:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\left\{X^{(k)}(t)\cos t+Y^{(k)}(t)\sin t\right\}dt=0,\\ &h_{k-1}=\frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi}\left\{X^{(k)}(t)\sin t-Y^{(k)}(t)\cos t\right\}dt. \end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

Второе из этих равенств позволяет вычислить поправку на частоту h_{k-1}. Изложенная процедура расчета показывает, что для определения первой поправки на частоту необходимо провести вычисления первых трех приближений.

Примечание. В предыдущем пункте было установлено, что функции $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ таковы, что они всегда удовлетворяют условиям существования периодических решений. Этот факт легко проверить, непосредственно пользуясь структурой этих функций. Так, например, функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ имеют представления типа (3.25). Подставляя подобное выражение в (3.26), убеждаемся в том, что оно удовлетворяется тождественно по a_{ij}.

Мы показали, что ряды (3.14) являются формальным решением системы уравнений (3.13), но, согласно теореме Ляпунова, решение этой системы является аналитической функцией параметра *c* в окрестности точки *c=0.* Это значит, что для достаточно малых значений $|c|$ ряды (3.14) сходятся и дают решение.

Итак, метод Ляпунова позволяет построить решение в виде рядов (3.14). Возвращаясь к переменному t, получим

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cos\left(\frac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}\right)+c^2x^{(2)}\left(\frac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}\right)+c^3(\ldots)+\ldots,\\ y &= c\sin\left(\frac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}\right)+c^2y^{(2)}\left(\frac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}\right)+c^3(\ldots)+\ldots, \end{aligned}\right\} \quad (3.27)$$

где $x^{(i)}$ и $y^{(i)}$ – периодические функции своего аргумента $\dfrac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}$ периода 2π.

Любой отрезок, состоящий из конечного числа членов рядов (3.27), мы можем использовать для приближенного описания колебательного процесса. Заметим одновременно, что, поскольку частоту мы всегда определяем с некоторой погрешностью, то с увеличением времени t ошибка в вычислении фазы будет все время накапливаться. Метод Ляпунова не дает, таким образом, возможности получить равномерное приближение по фазе на всем бесконечном интервале времени.

Выражение (3.27) дает общий интеграл системы Ляпунова, поскольку правые части (3.27) содержат две произвольные постоянные: амплитуду c и аддитивную постоянную t_0. Следовательно, метод Ляпунова позволяет исследовать эти системы в окрестности положения равновесия с исчерпывающей полнотой.

В заключение рассмотрим два примера.

4. Уравнение Дюффинга. В безразмерных координатах уравнение Дюффинга имеет вид:

$$\ddot{x}+x-x^3=0. \quad (3.28)$$

Метод Ляпунова позволяет легко найти его приближенное решение в тригонометрических функциях.

Начальные условия зададим в виде

$$t = 0 : x = c,\ y = 0. \qquad (3.28')$$

Уравнение Дюффинга описывает колебание некоторой консервативной системы, а поскольку последняя является частным случаем системы Ляпунова, то для ее исследования можно использовать метод Ляпунова.

При решении задач, сводящихся к одному уравнению второго порядка, нет необходимости переходить к системе уравнений первого порядка.

В уравнении (3.28) сделаем замену (3.12), после чего оно примет вид:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = (x^3 - x)(1 + 2h_2 c^2 + \cdots).$$

Положим $x = cx^{(1)} + c^2 x^{(2)} + \ldots$

Функции $x^{(i)}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 x^{(1)}}{d\tau^2} = -x^{(1)}, \frac{d^2 x^{(2)}}{d\tau^2} = -x^{(2)} \\ &\frac{d^2 x^{(3)}}{d\tau^2} = -x^{(3)} - 2h_2 x^{(1)} + x^{(1)^3} \end{aligned}\right\} \text{ и т.д.} \qquad (3.29)$$

Начальные условия для этих систем определяются так:

$$t = 0 : x^{(1)} = 1, \dot{x}^{(1)} = x^{(2)} = \dot{x}^{(2)} = \ldots = 0. \qquad (3.30)$$

Первое и второе уравнения системы (3.21) с учетом начальных условий (3.30) дадут нам $x^{(1)} = \cos\tau$, $x^{(2)} \equiv 0$. Тогда третье уравнение системы (3.29) примет вид:

$$\frac{d^2 x^{(3)}}{d\tau^2} = -x^{(3)} - 2h_2 \cos\tau + \cos^3\tau.$$

Так как

$$\cos^3\tau = \frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau,$$

то

$$\frac{d^2x^{(3)}}{d\tau^2} = -x^{(3)} - \cos\tau\left(2h_2 - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}\cos 3\tau. \qquad (3.31)$$

Для того чтобы уравнение (3.31) имело периодическое решение периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы в правой части этого уравнения не было слагаемых, содержащих $\cos\tau$ или $\sin\tau$. Отсюда

$$h_2 = \frac{3}{8}.$$

Итак,

$$\frac{d^2x^{(3)}}{d\tau^2} = -x^{(3)} - \frac{1}{4}\cos 3\tau. \qquad (3.32)$$

Периодическим решением уравнения (3.32), удовлетворяющим начальным условиям (3.30), будет функция

$$x^{(3)} = \frac{1}{32}\cos\tau - \frac{1}{32}\cos 3\tau.$$

Собирая полученные результаты, общее решение уравнения Дюффинга мы можем записать в форме

$$x = c\cos\left(\frac{t+t_0}{1+\frac{3}{8}c^2+\ldots}\right) + c^3\left\{\frac{1}{32}\cos\left(\frac{t+t_0}{1+\frac{3}{8}c^2+\ldots}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{32}\cos\left(\frac{3(t+t_0)}{1+\frac{3}{8}c^2+\ldots}\right)\right\} + c^5\{\ldots\} + \ldots \qquad (3.33)$$

4. СИСТЕМА ЛЯПУНОВА. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Выше рассматривались некоторые свойства обобщенных консервативных систем, или, как мы их назвали, систем Ляпунова. При этом мы ограничились изучением только систем второго порядка. Однако изложенные методы позволяют изучить некоторые свойства систем произвольного порядка. В частности, метод Ляпунова может быть распространен и на общий случай систем Ляпунова. Однако его возможности при этом становятся более ограниченными. В случае систем второго порядка метод Ляпунова позволяет получить исчерпывающую информацию о поведении системы. Как мы это увидим ниже, в случае систем произвольного порядка этот метод позволяет отыскивать только определенный класс периодических решений. Несмотря на ограниченный характер, метод Ляпунова в ряде случаев является едва ли не единственным способом, который имеется в руках исследователя для эффективного построения периодических решений нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы.

1. Определение. Систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}}_i = F_i(\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

будем называть системой Ляпунова, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) функции F_i – аналитические функции своих аргументов в окрестности точки $\tilde{x}_i = 0$:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_i + F_i^*(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n), \tag{4.2}$$

здесь a_{ij} – постоянные числа, F_i^* – аналитические функции, разложение которых начинается с членов второго порядка:

$$F_i^* = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n=2}^{\infty} a_i^{(s_1,s_2,\ldots,s_n)} \tilde{x}_1^{s_1} \tilde{x}_2^{s_2}, \ldots, \tilde{x}_n^{s_n};$$

б) уравнение

$$D(\lambda) \equiv \left| a_{ij} - \lambda^* \delta_i^j \right| = 0 \tag{4.3}$$

имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda$, величина $\delta_i^j -$ символ Кронекера; $\delta_i^j = 1$, если $i = j$ и $\delta_i^j = 0$, если $i \neq y$;

в) корни $\pm i\lambda$ простые и, кроме того, среди корней уравнения (4.3) нет корней вида $\pm ip\lambda$, где p – произвольное целое число;

г) система (4.1) имеет аналитический первый интеграл:

$$H(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \ldots, \tilde{x}_n) = const. \tag{4.4}$$

2. Приведение к каноническому виду. Впредь вместо системы (4.1) мы будем рассматривать систему следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda y + X(x, y, z_1, \ldots, z_m), \\ &\dot{y} = \lambda x + Y(x, y, z_1, \ldots, z_m), \\ &\dot{z}_s = \sum_{j=1}^{m} b_{sj} z_j + Z_s(x, y, z_1, \ldots, z_m), \\ &(s = 1, 2, \ldots, m; m = n-2). \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Рассмотрение системы (4.5) вместо (4.1) не нарушает общности, так как система (4.1) может быть всегда приведена к виду (4.5) линейным преобразованием переменных. Для того чтобы это показать, рассмотрим систему уравнений

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \tag{4.6}$$

и введем новую переменную

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i; \tag{4.7}$$

здесь A_i – некоторые числа, выбранные таким образом, чтобы для любых ξ_i имело место равенство

$$\sum_i A_i \xi_i = \frac{1}{\mu} \sum_{ij} A_i a_{ij} \xi_j, \tag{4.8}$$

где μ – некоторое, специальным образом подобранное число. Следовательно, величины A_i удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i (\mu \delta_i^j - a_{ij}) = 0 \qquad \left(j = 1, 2, \ldots, n \right), \tag{4.9}$$

где δ_i^j – символ Кронекера. Для того чтобы система (4.9) допускала нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы μ было корнем уравнения (4.3).

Вычислим теперь производную $\dot{\eta}$ в силу уравнений (4.6):

$$\dot{\eta} = \sum_{i,j=1}^{n} A_i a_{ij} \xi_j.$$

Используя (4.8), находим

$$\dot{\eta} = \mu \sum_i A_i \xi_i = \mu \eta .$$

Таким образом, каждому из чисто мнимых корней уравнения (4.3) можно поставить в соответствие функции η_1 и η_2, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\eta}_1 = i\lambda \eta_1, \qquad \dot{\eta}_2 = -i\lambda \eta_2,$$

причем величины η_1 и η_2 определяются равенствами

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(1)} \xi_i, \qquad \eta_2 = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(2)} \xi_i,$$

где числа $A_i^{(1)}$ и $A_i^{(2)}$ определены из уравнений (4.9) при $\mu = i\lambda$ и $\mu = -i\lambda$ соответственно. Вместо переменных η_1 и η_2, которые удовлетворяют уравнениям с мнимыми коэффициентами, удобно ввести другие переменные:

$$x = \eta_1 + \eta_2, \qquad y = i\left(\eta_2 - \eta_1\right).$$

Эти величины удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{x} = -\lambda y, \qquad \dot{y} = \lambda x.$$

Если теперь в системе уравнений (4.1) сделать замену переменных

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left(A_i^{(1)} + A_i^{(2)} \right) \tilde{x}_i,$$

$$y = i \sum_{i=1}^{n} \left(A_i^{(2)} - A_i^{(1)} \right) \tilde{x}_i,$$

$$z_j = \tilde{x}_i; (j = 1, 2, \ldots, n-2),$$

то она будет приведена к виду (4.5).

Форму уравнений (4.5) мы будем называть канонической формой систем Ляпунова.

Первый интеграл (4.4) в этих переменных может быть приведен к виду

$$x^2 + y^2 + W(z_1, \ldots, z_n) + S(x, y, z_1, \ldots, z_n) = \mu^2, \qquad (4.10)$$

где $W -$ квадратичная форма своих переменных, а $S -$ аналитическая функция, разложение которой начинается с членов третьего порядка малости.

3. Теорема Ляпунова. Пусть точка $x = y = z_1 = \ldots = z_m = 0$ является положением равновесия. Повторяя дословно рассуждения, приведенные в предыдущем пункте, приходим к следующей теореме.

Система (4.5) допускает в окрестности начала координат $x = y = z_1 = \ldots = z_m = 0$ *периодическое решение, аналитически зависящее от одного параметра. В качестве такого параметра может быть принято начальное значение величины* $x : x(0) = c$. *Начальное значение величины* y *может считаться при этом равным нулю. Начальные значения величин* z_j *определяются однозначно и являются также аналитическими функциями параметра с. Период решения T – тоже аналитическая функция этой величины, причем функция T имеет вид*

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}\left(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots\right) \tag{4.11}$$

и, следовательно,

$$\lim_{c \to \infty} T = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Само периодическое решение является аналитической функцией параметра с и обращается в тривиальное при $c = 0$.

Таким образом, система Ляпунова произвольного числа степеней свободы также обладает периодическими решениями в окрестности начала координат. Однако в случае системы с одной степенью свободы они исчерпывают все возможные движения, которые описывает система Ляпунова. В случае произвольного числа степеней свободы они выделяют только однопараметрическое семейство таких решений. Полный набор решений должен зависеть от $n-1$ параметра (поскольку одна из постоянных аддитивна), но свойства остальных решений зависят уже от других точек спектра матрицы $\| a_{ij} \|$.

Примечание. Пусть мы определили однопараметрическое семейство периодических решений

$$x(t,c),\quad y(t,c),\quad z_1(t,c),\ldots,z_m(t,c).$$

Очевидно, что решением будет также и такая система функций

$$x(t+h,c),\quad y(t+h,c),\quad z_1(t+h,c),\ldots,z_m(t+h,c)$$

для любого h. Таким образом, метод Ляпунова позволяет выделить двупараметрическое семейство периодических решений.

4. Метод Ляпунова. Метод, использованный для построения периодических решений системы (2.8), может быть использован и для решения более сложной задачи – отыскания периодических решений системы (4.1). Сделаем сначала стандартную замену независимой переменной (3.12):

$$t=\frac{\tau}{\lambda}\left(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots\right),$$

где h_i – числа, подлежащие определению.

Система (4.1) тогда заменится следующей:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{d\tau}=\left[-\lambda y+X\left(x,y,z_1,\ldots,z_m\right)\right]\frac{1+h_2c^2+\ldots}{\lambda},\\&\frac{dy}{d\tau}=\left[\lambda x+Y\left(x,y,z_1,\ldots,z_m\right)\right]\frac{1+h_2c^2+\ldots}{\lambda},\\&\frac{dz_s}{d\tau}=\left[\sum_{j=1}^{m}b_{sj}z_j+Z_s\left(x,y,z_1,\ldots,z_m\right)\right]\frac{1+h_2c^2+\ldots}{\lambda},\\&(s=1,2,\ldots,m).\end{aligned}\right\}\qquad(4.12)$$

Периодические решения системы (4.12) будем искать в виде рядов

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}c^k x^{(k)}(\tau),\ y=\sum_{k=1}^{\infty}c^k y^{(k)}(\tau),\ z_s=\sum_{k=1}^{\infty}c^k z_s^{(k)}(\tau)\ \ (s=1,2,\ldots,m).\quad(4.13)$$

Подставим ряды (4.13) в систему (4.12) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях параметра *c*. Функции $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ и $z_s^{(1)}$ будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx^{(1)}}{d\tau}=-y^{(1)},\frac{dy^{(1)}}{d\tau}=x^{(1)},\\&\frac{dz_s^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m}b_{sj}z_j^{(1)},(s=1,2,\ldots,m).\end{aligned}\right\}\qquad(4.14)$$

Для функции $x^{(2)}$, $y^{(2)}$ и $z_s^{(2)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx^{(2)}}{d\tau}=-y^{(2)}+\frac{1}{\lambda}X^{(1)}(x^{(1)},y^{(1)},z_s^{(1)}),\\&\frac{dy^{(2)}}{d\tau}=x^{(2)}+\frac{1}{\lambda}Y^{(1)}(x^{(1)},y^{(1)},z_s^{(1)}),\\&\frac{dz_s^{(2)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m}b_{sj}z_j^{(2)}+\frac{1}{\lambda}Z_s^{(1)}(x^{(1)},y^{(1)},z_s^{(1)}),\\&(s=1,2,\ldots,m).\end{aligned}\right\}\qquad(4.15)$$

Выпишем еще систему уравнений третьего приближения:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx^{(3)}}{d\tau}=-y^{(3)}+\frac{1}{\lambda}X^{(3)}(x^{(1)},x^{(2)},y^{(1)},y^{(2)},z_s^{(1)},z_s^{(2)})-h_2y^{(1)},\\&\frac{dy^{(3)}}{d\tau}=x^{(3)}+\frac{1}{\lambda}Y^{(3)}(x^{(1)},x^{(2)},y^{(1)},y^{(2)},z_s^{(1)},z_s^{(2)})+h_2x^{(1)},\\&\frac{dz_s^{(3)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m}b_{sj}z_j^{(3)}+\frac{1}{\lambda}Z_s^{(2)}(x^{(1)},x^{(2)},y^{(1)},y^{(2)},z_s^{(1)},z_s^{(2)})+\\&+\frac{h_2}{\lambda}\sum_{j=1}^{m}b_{sj}z_s^{(1)}(s=1,2,\ldots,m).\end{aligned}\right\}\qquad(4.16)$$

В качестве начальных значений для определения функций $x^{(i)}$ и $y^{(i)}$ примем

$$x^{(1)} = 1, \quad y^{(1)} = x^{(k)} = y^{(k)} = 0 \qquad (k \neq 1). \tag{4.17}$$

Первые два уравнения системы (4.14) и начальные условия (4.17) единственным образом определяют функции $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$:

$$x^{(1)} = \cos\tau \quad y^{(1)} = \sin\tau\,. \tag{4.18}$$

Начальные условия для $z_s^{(1)}$ не заданы. Мы должны их подобрать так, чтобы функции $z_s^{(1)}$ были периодическими функциями τ периода 2π. Так как, по предположению, среди собственных чисел матрицы $\left\| b_{ij} \right\|$ нет кратных λ, то среди нетривиальных решений системы

$$\frac{dz_s^{(1)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_{sj} z_j^{(1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.19}$$

нет периодических искомого периода. В самом деле, периодические решения системы (4.19) периода 2π должны иметь вид:

$$x_s^{(1)} = e^{it} r_s$$

и, следовательно, (4.19) сводится к следующей алгебраической системе:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{sj} r_j = i\lambda r_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.20}$$

Но равенство (4.20) возможно тогда и только тогда, когда $i\lambda$ – собственное число матрицы $\left\| b_{ij} \right\|$.

Таким образом,

$$z_j^{(1)} = 0.$$

Следовательно, разложения функций z_s по степеням параметра c начинается с членов второго порядка малости.

Перейдем теперь к системе (4.15). Ее правые части, если в них подставить решения (4.18) и положить $z_s^{(1)} \equiv 0$, будут некоторыми известными периодическими функциями τ.

Рассмотрим первые два уравнения этой системы. Они имеют форму уравнений (3.17) и, следовательно, для существования периодических решений $x^{(2)}(\tau)$ и $y^{(2)}(\tau)$ необходимо и достаточно выполнения условий (3.22). Однако в силу теоремы о существовании периодических решений эти условия должны выполняться автоматически. Поэтому искомое периодическое решение имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x^{(2)} &= A\cos\tau + B\sin\tau + \varphi_1(\tau), \\ y^{(2)} &= A\sin\tau - B\cos\tau + \varphi_2(\tau), \end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

где φ_1 и φ_2 – частные решения системы (4.15), которые строятся известным способом, а числа A и B выбираются так, чтобы функции $x^{(2)}$ и $y^{(2)}$ удовлетворяли нулевым начальным условиям.

Рассмотрим ту часть системы (4.15), которая описывает изменение функции $z_s^{(2)}$:

$$\frac{dz_s^{(2)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_{sj} x_j^{(2)} + \frac{1}{\lambda} Z_s^{(1)}(\tau) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m), \quad (4.22)$$

где $Z_s^{(1)}$ – известные периодические функции τ периода 2π. Так как среди собственных чисел матрицы $\left\| b_{ij} \right\|$ нет кратных λ, то у системы (4.22) существует единственное периодическое решение периода 2π. Это решение строится известными методами (например, методом неопределенных коэффициентов), причем для начальных значений $z_s^{(2)}$ получаются вполне определенные значения.

После того как мы построили решение $x^{(2)}$, $y^{(2)}$ и $z_s^{(2)}$, в первых двух уравнениях системы (4.16) функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ будут известными периодическими функциями периода 2π. Условия (3.22) существования периодических решений запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} X^{(2)}\cos\tau d\tau + \int_0^{2\pi} Y^{(2)}\sin\tau d\tau = 0, \\ &-h_2 + \frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} X^{(2)}\sin\tau d\tau - \frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} Y^{(2)}\cos\tau d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.23)$$

Первое из этих условий должно выполняться автоматически. Второе из условий (4.23) позволяет вычислить число h_2. Если число h_2 выбрано надлежащим образом, первые два уравнения системы (4.16) допускают периодические решения типа (4.21). Что касается функций $z_s^{(3)}$, то они удовлетворяют системе уравнений типа (4.22), которая в свою очередь допускает единственное периодическое решение $z_s^{(3)}(\tau)$, причем начальные значения этих функций получаются вполне определенными. Легко видеть, что процесс может быть неограниченно продолжен и любые члены рядов (4.13) могут быть вычислены. Заметим, что на каждом шаге нам приходится определять число h_k. Так как уравнение для определения h_k линейное, то h_k определятся и притом однозначно.

Итак, изложенный метод позволяет построить периодические решения системы Ляпунова произвольного порядка. В случае систем второго порядка этот метод дает возможность построить общий интеграл системы, т.е. для достаточно малых значений c позволяет проводить исчерпывающее исследование задачи.

В случае систем n-го порядка метод Ляпунова дает возможность построить только семейство частных решений, зависящих от двух произвольных постоянных: параметра c и аддитивной постоянной h. Несмотря на то, что метод Ляпунова позволяет в случае систем произвольного порядка получить на первый взгляд результат очень ограниченный, тем не менее его значение для теории колебаний весьма велико. Для пояснения сказанного рассмотрим консервативные системы.

5. Консервативные системы произвольного числа степеней свободы. Рассмотрим колебания консервативной системы около положения равновесия. Предположим, что положением равновесия является начало координат. В этом случае кинетическая и потенциальная энергия могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{aligned} T &= \sum_{i,j} a_{ij}\dot{\tilde{x}}_i\dot{\tilde{x}}_j, \\ \Pi &= \sum_{i,j} b_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j + \Psi(\tilde{x}_i,\ldots,\tilde{x}_n), \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

где $a_{ij} = a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}$ и разложение функции Ψ начинается с величин третьего порядка малости. (Мы рассматриваем задачи только с аналитическими функциями.) Уравнения движения этой системы могут быть записаны в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{x}}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\tilde{x}}_i} = 0 \tag{4.25}$$

или в раскрытом виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{\tilde{x}}_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\tilde{x}_j + \psi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.26}$$

где $\psi_i -$ компоненты вектора $\nabla\Psi$

$$\psi_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}_i}$$

являются нелинейными функциями своих аргументов, разложение которых начинается с членов второго порядка малости.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ корни уравнения:

$$\left| -\lambda a_{ij} + b_{ij} \right| = 0. \qquad (4.27)$$

Уравнение (4.27) называется *вековым*. Так как квадратичная форма $\sum\limits_{i,j} a_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$ положительно определенная, то, согласно известной теореме, корни векового уравнения действительны. Числа λ_i могут быть как положительными, так и отрицательными. Повторим теперь рассуждения, которые нас привели к системе (4.5).

Введем новые переменные

$$x_k = \sum_{i,j} A_i^{(k)} a_{ij} \tilde{x}_j, \qquad (4.28)$$

где числа $A_i^{(k)}$ определяются так, чтобы равенство

$$\sum_{i,j} A_i^{(k)} a_{ij} \tilde{x}_j = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i,j} b_{ij} A_i^{(k)} \tilde{x}_j$$

имело место для любых $\tilde{x}_j$, т.е. чтобы $A_i^{(k)}$ удовлетворяли системе однородных уравнений:

$$\lambda_k \sum_i A_i^{(k)} a_{ij} = \sum_i A_i^{(k)} b_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4.29)$$

Система уравнений (4.29) разрешима, так как λ_k – корень уравнения (4.27).

Итак, для каждого корня λ_k мы определяем систему чисел $A_i^{(k)}$ и новую переменную x_k. Рассматривая равенства (4.28) как систему уравнений относительно $\tilde{x}_j$, получим

$$\tilde{x}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.30}$$

Можно показать, что системы (4.28–4.30) невырожденные. Составим теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют новые переменные:

$$\ddot{x}_k = \sum_{i,j} A_i^{(k)} a_{ij} \ddot{\tilde{x}}_j = -\sum_{i,j} A_i^{(k)} b_{ij} \tilde{x}_j + \bar{\phi}_k(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n),$$

где $\bar{\phi}_k = -\sum_i A_i^{(k)} \psi_i$.

Используя определения чисел $A_i^{(k)}$ и делая замену (4.30), получим

$$\ddot{x}_k + \lambda_k x_k = \phi_k \qquad (x_1, \ldots, x_n), \tag{4.31}$$

где

$$\phi_k(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{\phi}_k(\tilde{x}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{x}_n(x_1, \ldots, x_n))$$

представляют собой аналитические функции своих переменных, разложение которых начинается с членов второго порядка малости.

Функции $x_k(t)$ называются главными координатами системы (4.26), а числа $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ (для λ_k >0) − собственными (или главными) частотами. Если ограничиться линейными членами, то система (4.31) примет вид

$$\ddot{x}_k + \lambda_k x_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.32}$$

Форма системы (4.32) показывает, что линейные колебания консервативных систем можно представить как суперпозицию колебаний математических маятников (4.32).

Кинетическая и потенциальная энергия системы (4.32) имеет вид

$$T = \sum_k \dot{x}_k^2. \tag{4.33}$$

Таким образом, при помощи преобразования (4.30) формы

$$T=\sum_{i,j} a_{ij}\dot{\tilde{x}}_i\dot{\tilde{x}}_j \quad \text{и} \quad \Pi=\sum_{i,j} b_{ij}\dot{\tilde{x}}_i\dot{\tilde{x}}_j$$

приведены одновременно к диагональному виду.

Выражение для энергий (4.33) показывает, что энергия каждого из маятников (4.32) остается все время постоянной. Никакого обмена энергии между главными колебаниями линейных систем не существует. В нелинейных системах (4.31) ситуация значительно более сложная.

6. Метод Ляпунова в нелинейных консервативных системах. Этот метод позволяет определить колебания системы, близкие к главным колебаниям. Повторим рассуждения предыдущего пункта для случая консервативных систем.

Фиксируем некоторое число k, для которого $\lambda_k>0$, и сделаем замену независимой переменной (3.12)

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{\lambda_k}}(1+c^2h_2+c^3h_3+\ldots),$$

где $c-$это значение $x_k(0)$.

Система (4.31) примет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x_k}{d\tau^2}+x_k(1+c^2h_2+\ldots)^2=\phi_k(x_1,\ldots,x_n)\frac{(1+c^2h_2+\ldots)^2}{\lambda_k},\\&\frac{d^2x_s}{d\tau^2}+\frac{\lambda_s}{\lambda_k}x_s(1+c^2h_2+\ldots)^2=\phi_s(x_1,\ldots,x_n)\frac{(1+c^2h_2+\ldots)^2}{\lambda_k}\\&(s\neq k).\end{aligned}\right\}\tag{4.34}$$

Решение ищем в виде рядов

$$x_i=\sum_{r=1}^{\infty}c^r x_i^{(r)}(\tau)\qquad (i=1,2,\ldots,n).\tag{4.35}$$

Подставляя ряды (4.35) в уравнения (4.34), получаем уравнения для $x_i^{(r)}$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_i^{(1)}}{d\tau^2}+x_i^{(1)}=0, \qquad \text{если} \quad i=k,\\ &\frac{d^2x_i^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}x_i^{(1)}=0, \quad \text{если} \quad i\neq k;\end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_i^{(2)}}{d\tau^2}+x_i^{(2)}=\frac{1}{\lambda_k}\phi_i^{(1)}(x_i^{(1)}), \qquad \text{если} \quad i=k,\\ &\frac{d^2x_i^{(2)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}x_i^{(2)}=\frac{1}{\lambda_k}\phi_i^{(1)}(x_i^{(1)}), \quad \text{если} \quad i\neq k;\end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_i^{(3)}}{d\tau^2}+x_i^{(3)}=\frac{1}{\lambda_k}\phi_i^{(2)}(x_i^{(1)},x_i^{(2)})-2h_2x_i^{(1)}, \qquad \text{если} \quad i=k,\\ &\frac{d^2x_i^{(3)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}x_i^{(3)}=\frac{1}{\lambda_k}\phi_i^{(2)}(x_i^{(1)},x_i^{(2)})-2h_2x_i^{(1)}, \quad \text{если} \quad i\neq k\end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

и т.д. Здесь $\phi_i^{(m)}-$ коэффициенты разложения функции ϕ_i в ряды. Начальные условия для $x_k^{(s)}$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &x_k^{(1)}(0)=1, \quad \dot{x}_k^{(1)}(0)=0,\\ &x_k^{(r)}(0)=\dot{x}_k^{(r)}(0)=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

если $r>1$.

Начальные условия для $x_i^s(i\neq k)$ должны быть надлежащим образом подобраны.

Условимся рассматривать случай отсутствия кратных корней, т.е. будем предполагать, что $\lambda_s\neq\lambda_k$, если $k\neq s$. Тогда единственным периодическим решением периода 2π системы (4.36), удовлетворяющей условиям (4.39), будет

$$\left.\begin{aligned} x_k^{(1)} &= \cos\tau, \\ x_s^{(1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (s \neq k). \tag{4.40}$$

Подставляя формулы (4.40) в правые части системы (4.37) и разлагая функции $\phi_i^{(1)}$ в ряд Фурье, получаем при $(s \neq k)$

$$\frac{d^2 x_k^{(2)}}{d\tau^2} + x_k^{(2)} = \alpha_{k0} + \alpha_{k2}\cos 2\tau,$$

$$\frac{d^2 x_s^{(2)}}{d\tau^2} + \frac{\lambda_s}{\lambda_k} x_s^{(2)} = \alpha_{s0} + \alpha_{s2}\cos 2\tau.$$

Периодические решения этой системы, удовлетворяющие условиям (4.39), определяются однозначно. Они имеют при $(s \neq k)$ вид:

$$x_k^{(2)} = \alpha_{k0} - \left(\alpha_{k0} - \frac{\alpha_{k2}}{3}\right)\cos\tau - \frac{\alpha_{k2}}{3}\cos 2\tau,$$

$$x_s^{(2)} = \frac{\alpha_{s0}\lambda_k}{\lambda_s} - \frac{\lambda_k}{4\lambda_k - \lambda_s}\cos 2\tau.$$

Первое из уравнений системы (4.38) может быть представлено в форме

$$\frac{d^2 x_k^{(3)}}{d\tau^2} + x_k^{(3)} = \beta_{k0} + \beta_{k1}\cos\tau + \beta_{k2}\cos 2\tau + \beta_{k3}\cos 3\tau - 2h_2\cos\tau.$$

Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы постоянная h_2 определялась равенством

$$h_2 = \frac{1}{2}\beta_{k1} = \frac{1}{4\lambda_k\pi}\int_0^{2\pi}\phi_k^{(3)}(t)\cos(t)dt. \tag{4.41}$$

Продолжая аналогичные выкладки, мы сможем вычислить любой член в разложениях (4.35).

Таким образом, метод Ляпунова дает возможность разыскивать периодические решения, близкие к главным колебаниям линейной системы. Эти колебания нелинейных систем естественно по аналогии с линейными колебаниями также называть главными колебаниями.

5. МЕТОД Г.В. КАМЕНКОВА

В предыдущих пунктах были изложены методы отыскания периодических решений, использующие разложение в ряды специального вида, расположенные по степеням малого параметра. Эти методы были разработаны Ляпуновым и Пуанкаре и послужили источником многочисленных исследований. Иной подход к решению этих же задач был предложен Г.В. Каменковым. Этот метод обладает высокой эффективностью. Его возможности, по-видимому, не исчерпываются теми задачами, для которых он был создан. Для иллюстрации метода Г.В. Каменкова рассмотрим две простейшие задачи отыскания периодических решений, ограничиваясь при этом изложением только формальной стороны вопроса.

1. Квазилинейная теория. Теорема Г.В. Каменкова. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + \mu X_1(x,y) + \mu^2 X_2(x,y) + \ldots, \\ \dot{y} &= \lambda x + \mu Y_1(x,y) + \mu^2 Y_2(x,y) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

где μ − малый параметр; X_i и Y_i – однородные полиномы относительно переменных x и y.

Пусть $x=0$ и $y=0$ − единственная особая точка системы (5.1) для достаточно малых значений параметра μ .

Введем полярные координаты

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{5.2}$$

и составим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют новые независимые переменные r и θ.

Дифференцируя (5.2) и используя (5.1), получим

$$\dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta = -\lambda r\sin\theta + \mu X_1(r\cos\theta, r\sin\theta) +$$
$$+\mu^2 X_2(r\cos\theta, r\sin\theta) + \ldots,$$
$$\dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta = \lambda r\cos\theta + \mu Y_1(r\cos\theta, r\sin\theta) +$$
$$+\mu^2 Y_2(r\cos\theta, r\sin\theta) + \ldots.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot r$ и $\dot\theta$, мы придем к системе уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot r &= \mu R_1(r,\theta) + \mu^2 R_2(r,\theta) + \ldots, \\ \dot\theta &= \lambda + \mu F_1(r,\theta) + \mu^2 F_2(r,\theta) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

где

$$R_k = X_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Y_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta,$$
$$F_k = \frac{1}{r}\left[Y_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - X_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right],$$

функции R_k и F_k – полиномы от r некоторой степени m_k:

$$\left.\begin{aligned} R_k &= rR_k^{(1)}(\theta) + r^2 R_k^{(2)}(\theta) + \ldots + r^{m_k} R_k^{(m_k)}(\theta), \\ F_k &= F_k^{(1)}(\theta) + rF_k^{(1)}(\theta) + \ldots + r^{m_{k-1}} R_k^{(m_{k-1})}(\theta). \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Здесь функции $R_k^{(i)}$ и $F_k^{(i)}$ – некоторые полиномы относительно $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

Определим функцию $V(r,\theta)$ при помощи равенства:

$$r = V + \mu(VU_1^{(1)} + V^2U_1^{(2)} + \ldots + V^{m_1}U_1^{(m_1)}) +$$
$$+\mu^2(VU_2^{(1)} + V^2U_2^{(2)} + \ldots + V^{m_2}U_2^{(m_2)}) + \ldots, \tag{5.5}$$

где $U_i^{(j)}$ – некоторые полиномы относительно $\sin\theta$ и $\cos\theta$, которыми мы будем распоряжаться в процессе решения задачи.

Заметим, что для достаточно малых μ функция *V*, определенная при помощи равенства (5.5), будет определенна положительной функцией r, каково бы ни было θ.

Разрешив уравнение (5.5) относительно *V*, получим

$$V = r + \mu V_1(r,\theta) + \mu^2 V_2(r,\theta) + \ldots \qquad (5.5')$$

Так как U_i – полиномы от $\sin\theta$ и $\cos\theta$, то и функции V_i – также полиномы от тех же величин. В этом легко убедиться непосредственной проверкой, рассматривая (5.5) как уравнение относительно *V* и разыскивая его решения в форме ряда (5.5’). Таким образом, функция $V(r,\theta)$ в общем случае будет периодической функцией θ периода 2π.

Вернемся теперь к выражению (5.5) и положим в нем *V=c*, где c – заданная постоянная, тогда мы получим

$$r = \Phi(c,\mu,\theta) = c + \mu(cU_1^{(1)} + \ldots + c^{m_1}U_1^{(m_1)}) + \mu^2(\ \ ) + \ldots, \qquad (5.6)$$

где Φ – периодическая функция θ периода 2π. Уравнение (5.6) определяет в этом случае в фазовой плоскости некоторую замкнутую кривую – цикл. Таким образом, для данной конкретной системы функций $U_i^{(j)}$ каждому значению *c* формула (5.6) ставит в соответствие в фазовой плоскости некоторую замкнутую траекторию. На основании замечания, которое мы сделали при выводе (5.5’), мы можем утверждать, что для достаточно малых μ, двум различным значениям постоянной *c* отвечают два непересекающихся цикла, причем цикл, который отвечает меньшему значению постоянной, лежит внутри другого цикла.

Идея, лежащая в основе метода Г.В. Каменкова, состоит в следующем. Предположим, что нам удалось подобрать периодические функции $U_i^{(j)}(\theta)$ таким образом, что производная dV/dt, вычисленная в силу уравнений (5.3), будет равна 0, т.е. V будет интегралом движения. Тогда кривая, заданная уравнением (5.5), будет искомым периодическим решением.

Продифференцируем (5.5) в силу уравнений (5.3):

$$\begin{gathered}\mu\left[rR_1^{(1)}(\theta)+\ldots+r^{m_1}R_1^{(m_1)}(\theta)\right]+\mu^2\left[rR_2^{(1)}(\theta)+\ldots+r^{m_2}R_2^{(m_2)}(\theta)\right]+\\ +\ldots=\frac{dV}{dt}H+\mu\left[V\lambda\frac{dU_1^{(1)}}{d\theta}+V^2\lambda\frac{dU_1^{(2)}}{d\theta}+\ldots+V^{m_1}\lambda\frac{dU^{(m_1)}}{d\theta}\right]+\\ +\mu^2\left[V\frac{dU_1^{(1)}}{d\theta}F_1+\ldots+V^{m_1}\frac{dU^{(m_1)}}{d\theta}F_1+\right.\\ \left.+V\lambda\frac{dU_2^{(1)}}{d\theta}+\ldots+V^{m_2}\lambda\frac{dU_2^{(m_2)}}{d\theta}\right]+\mu^3\left[\ldots\right]+\ldots,\end{gathered}\tag{5.7}$$

где

$$\begin{gathered}H=1+\mu\left(U_1^{(1)}+2VU_1^{(2)}+\ldots+m_1V^{m_1-1}U_1^{(m_1)}\right)+\\ +\mu^2\left(U_2^{(1)}+\ldots+m_2V^{m_2-1}U_2^{(m_2)}\right)+\mu^3(\ldots)+\ldots\end{gathered}\tag{5.8}$$

Заметим, что для достаточно малых μ величина H строго больше нуля. Заменим в равенстве (5.7) величину r при помощи (5.5); тогда (5.7) можно привести к следующему виду:

$$\begin{gathered}H\frac{dV}{dt}=\mu\left\{V\left[R_1^{(1)}(\theta)-\lambda\frac{dU_1^{(1)}}{d\theta}\right]+V^2\left[R_1^{(2)}(\theta)-\lambda\frac{dU_1^{(2)}}{d\theta}\right]+\ldots\right.\\ \left.\ldots+V^m\left[R_1^{(m_1)}(\theta)-\lambda\frac{dU_1^{(m_1)}}{d\theta}\right]\right\}+\mu^2\left\{V\left[R_2^{(1)}(\theta)-\lambda\frac{dU_2^{(1)}}{d\theta}\right]+\ldots\right.\\ \left.\ldots+V^{m_2}\left[R_2^{(m_2)}(\theta)-\lambda\frac{dU_2^{(m_2)}}{d\theta}\right]\right\}+\ldots\end{gathered}\tag{5.9}$$

Используем теперь произвол функций $U_i^{(j)}$ и распорядимся ими так, чтобы выражения, стоящие в квадратных скобках, были некоторыми постоянными числами. Это значит, что функции $U_1^{(j)}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\lambda \frac{U_1^{(j)}}{d\theta} = R_1^{(j)}(\theta) - g_1^{(j)}, \tag{5.10}$$

где $g_1^{(j)}$ – некоторые постоянные, которые должны быть нами определены так, чтобы функции $U_1^{(j)}$ были периодическими. Для функций $V_k^{(j)}(k > 1)$ мы имеем уравнения, аналогичные (5.10), где вместо периодической функции $R_1^{(j)}$ стоит некоторая сумма функции $R_k^{(j)}(\theta)$ и некоторой другой периодической функции, которая может быть вычислена.

Функции $U_1^{(j)}$ должны удовлетворять уравнениям (5.10). Но с другой стороны, они должны быть периодическими, а для этого необходимо и достаточно, чтобы среднее значение правой части за период 2π было равно нулю. Это условие единственным образом определяет постоянную $g_1^{(j)}$ в виде

$$g_1^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_1^{(j)}\left(\theta\right) d\theta. \tag{5.11}$$

Из аналогичных соображений вычисляются и другие постоянные $g_1^{(j)}\left(k = 2, 3, \ldots\right)$. Функции $U_1^{(j)}$ определяются теперь квадратурой

$$U_1^{(j)} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\theta} \left[R_1^{(j)}\left(\theta\right) - g_1^{(j)} \right] d\theta + c_1^{(j)}, \tag{5.12}$$

где постоянные $c_1^{(j)}$ произвольны. Не ограничивая общности, мы можем положить их равными нулю. Это будет означать, что все $U_1^{(j)}(0)=0.$ Итак, для производной функции dV/dt мы получаем следующее выражение:

$$H\frac{dV}{dt}=\mu L_1(V)+\mu^2 L_2(V)+\ldots, \tag{5.13}$$

где

$$L_1(V)=Vg_1^{(1)}+V^2 g_1^{(2)}+\ldots+V^{m_1}g_1^{(m_1)},$$
$$L_2(V)=Vg_2^{(1)}+\ldots+V^{m_2}g_2^{(m_2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Рассмотрим уравнение

$$L_1(V)=0. \tag{5.14}$$

Г.В. Каменковым доказана следующая теорема.

Если система уравнений (5.1) такова, что уравнение (5.14) имеет k положительных корней нечетной кратности, то каждому из этих корней будет соответствовать по крайней мере одно периодическое решение системы (5.1).

Итак, существование периодических решений в случае корней нечетной кратности уравнения (5.14) определяется исключительно свойствами полинома $L_1(V)$ и не зависит от структуры полиномов $L_i(i>1)$. Если же корни уравнения (5.14) имеют четную кратность, то, как показал Г.В. Каменков, для решения вопроса о существовании циклов необходима более полная информация о природе правой части уравнения (5.13).

2. Квазилинейная теория. Расчет периодических решений. Метод Г.В. Каменкова позволяет не только исследовать вопрос о существовании периодических решений, но и дает способ эффективного построения периодических решений. Покажем, как это можно сделать в простейшем случае простых корней уравнения (5.14).

Обозначим через V^* корень уравнения (5.14) и корень уравнения

$$L_1\left(V\right)+\mu L_2\left(V\right)+\ldots=0 \tag{5.15}$$

будем искать в виде ряда

$$V=V^*+\mu V_1+\mu^2 V_2+\ldots$$

Тогда V_1 будет удовлетворять линейному алгебраическому уравнению

$$V_1\frac{dL_1}{dV}=L_2\left(V^*\right). \tag{5.16}$$

Производная в уравнении (5.16) вычислена для значения $V=V^*$. Так как V^*, по предположению, простой корень уравнения (5.14), то $dL_1/dV\neq 0$ и уравнение (5.16) однозначно разрешимо.

Легко убедиться в том, что и остальные слагаемые V_i удовлетворяют уравнению типа (5.16)

$$V_i\frac{dL_1}{dV}=\tilde{L}_i,$$

где $\tilde{L}_i-$ некоторое известное число, зависящее от величин $V^*,V_1,\ldots,V_{i-1}$.

Итак, пусть с некоторой точностью мы определили корень уравнения (5.15). Обозначим его через V^{**}:

$$V^{**}=V^*+\sum_{i=1}^{n}V_i\mu^i. \tag{5.17}$$

Подставляя теперь выражение (5.17) в уравнения (5.5), мы получим с определенной точностью искомое периодическое решение

$$r = V^* + \mu\left(V_1 + V^* U_1^{(1)} + V^{*2} U_1^{(2)} + \ldots\right) + \mu^2\left(\ldots\right) + \ldots,$$

где коэффициенты $U_i^{(j)}\left(\theta\right)$ определяются формулами (5.12).

В заключение заметим, что уравнению (5.14) можно придать несколько иной вид. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{\theta} \left[X_1(V\cos\theta, V\sin\theta)\cos\theta + Y_1(V\cos\theta, V\sin\theta)\sin\theta \right] dt.$$

Согласно обозначениям, введенным в уравнениях (5.3), этот интеграл мы можем переписать в виде:

$$I = \int_0^{2\pi} R_1(V,\theta)d\theta \; = \int_0^{2\pi} \left\{ VR_1^{(1)}(\theta) + V^2 R_1^{(2)}(\theta) + \ldots + V^{m_1} R_1^{(m_1)}(\theta) \right\} d\theta$$

или, принимая во внимание равенство (5.11),

$$I = 2\pi\left(V_1 g_1^{(1)} + V_2 g_1^{(2)} + \ldots + V^{m_1} g_1^{(m_1)}\right) = 2\pi L_1\left(V\right).$$

Таким образом, уравнение (5.14) эквивалентно следующему:

$$\int_0^{2\pi} [X_1(V\cos\theta, V\sin\theta)\cos\theta + Y_1(V\cos\theta, V\sin\theta)\sin\theta] d\theta = 0. \quad (5.18)$$

Итак, процедура расчета периодических решений в методе Каменкова состоит в решении трансцендентного уравнения (5.18), которое позволяет определить значение V^*, и вычислении квадратур (5.11) и (5.12).

6. НЕАВТОНОМНЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД ПУАНКАРЕ

Изучение неавтономных систем мы начнем с рассмотрения квазилинейных систем. Они имеют некоторые особенности, кроме того, задача изучения квазилинейных систем гораздо проще общей задачи и поэтому может быть изучена со значительно большей полнотой.

Замечание о линейных системах. Рассмотрим линейный осциллятор, подтвержденный действию внешних периодических сил:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)\,. \tag{6.1}$$

Период функции *F(t)*, не ограничивая общности, мы можем принять равным 2π. Функция *F(t)* разлагается в ряд Фурье

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k coskt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sinkt \tag{6.2}$$

Условимся, что число ω не есть целое. Решение уравнения (6.1) можно представить в виде:

$$x = \tilde{x} + x^*,$$

где $\tilde{x}$ – общее решение однородного уравнения,

$$\tilde{x} = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{6.3}$$

а x^* – частное решение уравнения (6.1). Эта функция имеет период внешней силы *F(t)*:

$$x^* = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k coskt + \sum_{k=1}^{\infty} d_k sinkt \tag{6.4}$$

Подставляя выражение (6.4) в уравнение (6.1) и используя (6.2), легко находим коэффициенты c_k и d_k :

$$c_0 = \frac{a_0}{\omega^2}; \quad c_k = \frac{a_k}{\omega^2 - k^2}; \quad d_k = \frac{b_k}{d^2 - k^2}; \ (k = 1, 2, \ldots). \qquad (6.5)$$

Так же просто рассматривается и общий случай линейных систем произвольного числа степеней свободы:

$$\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = F_i \left(i = 1, 2, \ldots, n \right), \qquad (6.6)$$

где $F_i(t)$ представимы в виде рядов Фурье

$$F_i(t) = a_0^{(i)} + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} coskt + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} b_k^{(i)} sinkt.$$

Для отыскания частного решения системы (6.6), период которого равен 2π, полагаем

$$x_i^* = c_0^{(i)} + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} coskt + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} d_k^{(i)} sinkt \qquad (6.7)$$

Для определения коэффициентов разложений (6.7) получаем следующие системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_0^{(j)} a_{ij} = a_0^{(i)}; \\ &\sum_{j=1}^{n} c_k^{(j)} (a_{ij} - \delta_i^j k^2) = a_k^{(i)}; \\ &\sum_{j=1}^{n} d_k^{(j)} (a_{ij} - \delta_i^j k^2) = b_k^{(i)} (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (6.8)$$

где δ_i^j символ Кронекера. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие системы вида (6.6), которые при $F_i \equiv 0$ превращаются в консервативные системы. Но в этом случае в системе существуют главные координаты и вместо изучения системы вида (6.6) достаточно рассмотреть систему

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = F_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (6.9)$$

где $F_i(t)$ – обобщенная внешняя сила, отнесенная к главной координате x_i. Решение этих систем имеет вид (6.4), причем коэффициенты разложений определяются формулами (6.5). Решение линейной системы представимо в виде суммы двух функций. Первая из этих функций имеет период внешней силы, а другая является суперпозицией главных колебаний. Наибольший практический интерес представляет изучение первой функции. В самом деле, хотя мы рассматриваем консервативную систему, но при этом понимаем, что речь идет о некоторой модели реальной системы, т.е. системы, которая находится всегда под действием некоторых (пусть очень малых) сил, рассеивающих энергию. Следовательно, свободные колебания системы неизбежно затухнут с течением времени. Что касается вынужденных колебаний, то они все время будут поддерживаться действием внешних сил и, следовательно, через некоторый промежуток времени наблюдатель будет отмечать в системе только те колебания, которые генерированы внешним воздействием. Поэтому основное внимание в дальнейшем мы посвятим изучению частных решений систем вида (6.6) или (6.9), имеющих период внешних воздействий (который, по предположению, равен 2π). Формулы (6.5) и (6.8) имеют смысл лишь тогда, когда среди собственных частот отсутствуют частоты равные целым натуральным числам. В противном случае в системе (6.6) не могут быть индуцированы периодические колебания: частные решения системы будут содержать вековые слагаемые. Это значит, что амплитуда колебаний, которые возбуждаются, неограниченно возрастает. В этом случае говорят о явлении резонанса в линейных случаях. Переходя к изучению квазилинейных систем, естественно поставить следующие вопросы.

1. Пусть среди собственных частот нет частот, равных целым числам. Этот случай называется нерезонансным. Какой в этих условиях будет форма колебаний, генерируемых внешними воздействиями?

2. Предположим, что имеет место резонанс, т.е. среди собственных колебаний есть колебания, период которых равен (или кратен) 2π. Может ли существование малой нелинейности привести к возможности генерирования в системе колебаний периода 2π?

3. Какие другие формы периодических движений могут возникать в квазилинейной системе под действием внешних периодических сил?

2. Колебания вдали от резонанса. Начнем изучение квазилинейных систем с наиболее простого вопроса 1. Для этого рассмотрим систему с одной степенью свободы

$$\ddot{x}+\omega^2 x=F(t)+\varepsilon\varphi(x,\dot{x}) \tag{6.9’}$$

Функцию *F(t)* условимся брать в виде $F(t)=\alpha\cos t$. Не представляет никакого труда рассмотреть и общий случай. Излагаемый метод позволяет функцию φ также считать периодической функцией времени *t* периода 2π: $\varphi=\varphi(x,\dot{x},t)$.

Будем рассматривать решения уравнения (6.9'), которые при $\varepsilon\to 0$ переходят в решения порождающего уравнения

$$\ddot{x}=-\omega^2 x+\alpha\cos t \tag{6.10}$$

периода 2π.

Положим

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon x_2+\dots\ . \tag{6.11}$$

Подставляя ряд (6.11) в уравнение (6.9'), раскладывая функцию φ в ряд Тейлора по степеням параметра ε,

$$\varepsilon\varphi\left(x,\dot{x}\right)=\varepsilon\varphi\left(x_0,\dot{x}_0\right)+\varepsilon^2\left[\varphi_x x_1+\varphi_{\dot{x}}\dot{x}_1\right]+\ldots=\varepsilon\varphi_0+\varepsilon^{2\varphi_1}+\ldots$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, мы получаем следующие уравнения для определения неизвестных функций $x_i(i=1,2,\ldots)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 + acost,\\
&\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \varphi_0,\\
&\dots\\
&\ddot{x}_k + \omega^2 x_k = \varphi_{k-1},\\
&\dots
\end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Легко убедиться в том, что величина, стоящая в правой части уравнения номера k, зависит от функций $x_i(t)$, причем $i = 1, 2, \dots, k-1$. Следовательно, решая последовательно уравнения (6.12), мы можем определить любой член разложения (6.11).

Так как по условию $\omega \neq 1$, то единственное периодическое решение периода 2π , которое допускает первое из уравнений системы (6.12), имеет вид:

$$x_0 = \frac{\alpha}{\omega^2 - 1}\cos t. \tag{6.13}$$

Подставляя функцию (6.13) в выражение для φ_0, убеждаемся, что функция φ_0 будет периодической периода 2π и, следовательно, представима в виде ряда Фурье:

$$\varphi_0 = \varphi_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0k} \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0k}^{*} \sin kt .$$

Следовательно, второе уравнение системы (6.12) также допускает решение периода 2π:

$$x_1 = \frac{\varphi_{00}}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{0k}}{\omega^2 - k^2} \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{0k}^{*}}{\omega^2 - k^2} \sin kt \tag{6.14}$$

поскольку $\omega^2 \neq k (k = 1, 2, \dots)$. Решения остальных уравнений системы (6.12) могут быть получены по этой же схеме.

Итак, решение уравнения (6.9') может быть представлено в следующем виде:

$$x=\frac{a}{\omega^2-1}\cos t+\varepsilon\left\{\frac{\varphi_{00}}{\omega^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{0k}}{\omega^2-k^2}\cos kt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overset{*}{\varphi}_{0k}}{\omega^2-k^2}\sin kt\right\}+\varepsilon^2\{\ldots\}+\ldots \quad (6.15)$$

Это решение удобно переписать в форме

$$\left.\begin{aligned}
A_0&=\frac{1}{\omega^2}\left\{\varepsilon\varphi_{00}+\varepsilon^2\varphi_{10}+\ldots\right\},\\
A_1&=\frac{1}{\omega^2-1}\left\{a+\varepsilon\varphi_{01}+\varepsilon^2(\ldots)+\ldots\right\},\\
A_k&=\frac{1}{\omega^2-k^2}\left\{\varepsilon\sqrt{\varphi_{0k}^2+\varphi_{0k}^{*2}}+\varepsilon^2(\ldots)+\ldots\right\},\\
\theta_1&=arctg\left\{\varepsilon\frac{\overset{*}{\varphi}_{01}}{a}+\varepsilon^2(\ldots)+\ldots\right\},\\
\theta_k&=arctg\left\{\frac{\overset{*}{\varphi}_{ok}}{\varphi_{0k}}+\varepsilon(\ldots)+\ldots\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (6.15')$$

Формулы (6.15') показывают, что в нерезонансном случае все отличия вынужденных колебаний квазилинейной системы от колебаний линейной системы, вызванных той же силой, сводится к следующему:

1. Величина амплитуды A_1 основной гармоники изменяется на величины порядка $O(\varepsilon)$.

2. Возникает разность фаз ϑ_1 вынужденных колебаний по сравнению с фазой внешней силы. Этот сдвиг также имеет порядок $O(\varepsilon)$.

3. Имеет место систематическое смещение A_0, т.е. колебания происходят около положения, смещенного относительно положения равновесия. Это смещение также имеет первый порядок малости.

4. Появляются высшие гармоники, амплитуда которых имеет порядок $O(\varepsilon)$.

Итак, мы видим, что в нерезонансном случае малая неделимость вносит в характер колебаний системы лишь малые количественные изменения. Поэтому в рассматриваемом случае линейная трактовка задачи приводит только к небольшим количественным ошибкам: качественный характер квазилинейных колебаний будет таким же, как и в линейном случае. На первый вопрос, поставленный в предыдущем пункте, мы ответили полностью.

Мы рассмотрели колебания в системе с одной степенью свободы. Однако легко убедиться в том, что изложенная схема может быть использована для исследования колебаний систем произвольного числа степеней свободы, если только среди корней характеристического уравнения нет целых чисел.

7. МЕТОД ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Рассмотрим далее асимптотические методы, использующие осреднение правых частей дифференциальных уравнений по некоторым из переменных. Эти методы часто называют методами осреднения или методами разделения движений. Они играют большую роль при изучении уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= Y_0(x, y) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где x и y – некоторые векторы, а ε – малый параметр. Подобные уравнения часто встречаются в различных задачах физики и механики.

1. Предварительные замечания. Истоки метода усреднения находятся в работах Ван-дер-Поля. Поэтому изложение целесообразно начать с рассмотрения последних, тем более, что метод Ван-дер-Поля сам по себе имеет широкую область применения.

В этом параграфе мы будем исследовать колебательные движения, описываемые одним уравнением второго порядка

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \varepsilon\varphi(z, \dot{z}). \tag{7.1}$$

Здесь ω – некоторая действительная постоянная, а ε – малый параметр. Уравнение (7.1) условимся называть квазилинейным, а колебания, которые оно описывает, – квазилинейными колебаниями.

Уравнение

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \tag{7.2}$$

которое описывает гармонические колебания, будем, как и раньше, называть порождающим. Функция φ может быть весьма общего вида и, в частности, даже разрывной. Естественно потребовать, чтобы она была ограниченной.

2. Переменные Ван-дер-Поля. Общее решение порождающего уравнения имеет вид:

$$z = x\cos y, \tag{7.3}$$

где $y = \omega(t + t_0)$, x и t_0 – произвольные постоянные. Оно описывает некоторый колебательный процесс, обладающий частотой ω. Число x называется амплитудой, а функция $y(t)$ – фазой.

Естественно предположить, что в случае малых значений ε решение уравнения (7.1) будет описывать также некоторый колебательный процесс вида (7.3). Однако следует ожидать, что амплитуда этого процесса x уже не будет (в общем случае) постоянным числом, а будет изменяться, причем тем медленнее, чем меньше число ε. Скорость изменения фазы также будет изменяться со временем. Таким образом, если в каждый момент времени исследуемый процесс носит колебательный характер, то его полностью определяют мгновенные значения амплитуды x и фазы y. Поэтому в качестве переменных, описывающих процесс, можно принять амплитуду колебаний и фазу. Тогда одно из переменных – амплитуда – будет меняться медленно.

Итак, в задаче (7.1) будем в качестве новых переменных рассматривать функции $x(t)$ и $y(t)$. Для того чтобы определить эти переменные, к соотношению (7.3) надо добавить еще одно.

Используя идею вариации произвольных постоянных, потребуем, чтобы x и y были связаны, кроме (7.3), еще следующим соотношением:

$$\dot{z} = -\omega x \sin y\,, \tag{7.4}$$

которое всегда имеет место для постоянной амплитуды.

Составим теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $x(t)$ и $y(t)$. Дифференцируя (7.3) и приравнивая к (7.4), получим

$$\dot{x}\cos y - x\dot{y}\sin y + \omega x \sin y = 0\,. \tag{7.5}$$

Условие (7.5) – это условие совместимости формул (7.3) и (7.4). Дифференцируя далее (7.4) и подставив в (7.1), получим еще одно уравнение:

$$-\dot{x}\omega\sin y - \omega x\dot{y}\cos y + x\omega^2\cos y = \varepsilon\varphi(x\cos y, -\omega x\sin y). \tag{7.6}$$

Система (7.5–7.6) – это система двух уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций x и y. Разрешая ее относительно производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$, имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\varphi(x\cos y, -x\omega\sin y)\sin y \equiv \frac{\varepsilon}{\omega}\varphi_1(x, y),\\ \dot{y} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi(x\cos y, -x\omega\sin y)\cos y \equiv \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi_2(x, y).\end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Система двух уравнений (7.7) полностью эквивалентна уравнению (7.1). Система (7.7) является частным случаем системы (*). Роль медленного переменного играет амплитуда x, а роль быстрого переменного – фаза y. Заметим, что правые части системы (7.7) являются периодическими функциями фазы y, какова бы ни была функция $\varphi(x, y)$.

3. Схема В.М. Волосова. Итак, введя переменные Ван-дер-Поля, амплитуду x и фазу y, мы свели задачу исследования одного уравнения второго порядка к изучению системы двух уравнений первого порядка (7.7). Осуществляя эту редукцию, мы следовали классической схеме метода вариации произвольных постоянных.

В.М. Волосов предложил другой способ этой редукции, аналогичный выводу уравнений для оскулирующих элементов в небесной механике. Переменные Ван-дер-Поля связаны с величиной z равенствами (7.3) и (7.4), которые можно переписать в следующем виде:

$$x = \sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}, \qquad y = -arctg\,\frac{\dot{z}}{\omega z}. \tag{7.3’}$$

Благодаря выбранной вариации произвольных постоянных эти соотношения справедливы в равной степени как для порождающего уравнения, так и для уравнения (7.1). В первом случае величина z меняется в силу уравнений (7.2) и при этом величина x остается постоянной, а $\dot{y} = \omega$. Найдем теперь закон изменения этих величин в интересующем нас случае. Продифференцируем равенство (7.3') в силу уравнения (7.1) и рассмотрим сначала первое из этих равенств:

$$\dot{x} = \frac{z\dot{z}}{\sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}} + \frac{\ddot{z}\dot{z}}{\omega^2\sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}} = \frac{z\dot{z}}{x} + \frac{\dot{z}(-\omega^2 z + \varepsilon\varphi)}{\omega^2 x} = \frac{\varepsilon\varphi}{\omega^2 x}\dot{z} = \frac{\varepsilon}{\omega}\varphi \sin y,$$

т.е.

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon}{\omega}\varphi_1(x, y).$$

Таким образом, мы получили первое из уравнений системы (7.7). Дифференцируя подобным образом второе из равенств (7.3'), мы получим второе из уравнений этой системы.

Рассуждения В.М. Волосова имеют то преимущество перед стандартными, что они исключают необходимость разрешать систему уравнений (7.5), (7.6) относительно производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

4. Укороченные уравнения. Первое из уравнений системы (7.7) показывает, что переменное x меняется медленно, так как ее производная имеет порядок ε . Следовательно, за одно колебание (за время, в течение которого фаза y изменится на величину, равную 2π) амплитуда и характер колебаний изменятся мало. Поэтому можно ожидать, что мы не сделаем большой ошибки, если заменим правые части системы (7.7) их средними значениями за период, т.е. вместо системы (7.7) станем рассматривать систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\bar{\varphi}_1(x), \\ \dot{y} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x}\bar{\varphi}_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y, -x\omega\sin y)\sin y dy, \\ \bar{\varphi}_2(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y, -x\omega\sin y)\cos y dy. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Уравнения (7.8) будем называть укороченными уравнениями или уравнениями Ван-дер-Поля. Они значительно проще исходной системы (7.7), поскольку первое уравнение может быть проинтегрировано независимо от второго. В системе (7.8) медленные и быстрые движения разделены. Интегрируя первое из уравнений этой системы, находим закон изменения амплитуды. Очень часто в прикладных задачах бывает достаточно найти только зависимость амплитуды от времени. В рассматриваемой теории для этого достаточно найти решение уравнения первого порядка (в общем случае нелинейного).

Определение фазы сводится к квадратурам. Наибольший интерес обычно представляет не сама фаза, а скорость ее изменения в зависимости от амплитуды. Ответ на этот вопрос дает непосредственно второе уравнение системы (7.8).

Итак, по методу Ван-дер-Поля решения уравнения (7.1) состоит в переходе от переменной z к переменным x и y (которые мы будем называть переменными Ван-дер-Поля) и к замене точных уравнений (7.7) укороченной системой (7.8).

8. МЕТОД ВАН-ДЕР-ПОЛЯ В СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ

1. Замена переменных. Ван-дер-Поль и его последователи разработали эффективные методы исследования квазилинейных задач теории колебаний. В этом случае порождающим является линейное уравнение. Однако не представляет существенного труда распространить метод Ван-дер-Поля на более общие задачи теории нелинейных колебаний. В этом параграфе мы будем изучать колебания в системах, близких к произвольным консервативным, когда порождающим является уже некоторое нелинейное уравнение. Мы убедимся, что в том случае, когда его общее решение известно, решение исходного уравнения может быть получено при помощи стандартных рассуждений предыдущего параграфа.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} + f(z) = \varepsilon\varphi(z_{\dot{z}}), \tag{8.1}$$

где ε – малый параметр. Порождающим уравнением является

$$\ddot{z} + f(z) = 0. \qquad (8.2)$$

Относительно уравнения (8.2) будем предполагать, что его общий интеграл нам известен и может быть выписан в виде:

$$z = Q^*(x, t + t_0), \qquad (8.3)$$

где x и t_0 – произвольные постоянные. Кроме того, мы будем считать, что $f(0) = 0$ и рассматривать ту область фазовых переменных, в которой все уравнения (8.2) – периодические функции времени.

Итак, функция Q^* будет периодической функцией t периода T. Период будет зависеть (в общем случае) от постоянной x, которую мы условимся называть амплитудой. Для того чтобы иметь дело с функцией одного периода, введем новую переменную

$$y = \omega(x)(t + t_0)$$

Здесь множитель $\omega(x)$ выбран таким образом, чтобы функция

$$Q(x, y) = Q^*(x, t + t_0).$$

была периодической по y периода 2π. Этим условием величина $\omega(x)$ определяется однозначно. Она является нормирующим множителем. По аналогии с линейными системами условимся называть ее частотой, а y фазой.

Заметим, что функция $Q(x, y)$ тождественно, т.е. при любых значениях x и t_0, удовлетворяет порождающему уравнению (8.2). Таким образом,

$$\ddot{z} + f(z) \equiv \omega^2 Q_{yy} + f(Q) \equiv 0. \qquad (8.4)$$

Первый шаг при реализации метода Ван-дер-Поля состоит в замене одного уравнения второго порядка системой двух уравнений первого порядка. Для этого используется классический метод вариации произвольных постоянных.

В качестве новых переменных в предыдущем параграфе мы использовали амплитуду и фазу. Точно так же мы можем поступить и в данном случае. Итак, мы имеем

$$z = Q(x, y)\,. \tag{8.5}$$

Положим, кроме того,

$$\dot{z} = \omega Q_y(x, y)\,. \tag{8.6}$$

Равенства (8.5) и (8.6) определяют замену переменных. Составим теперь уравнения, которым удовлетворяют новые переменные. Дифференцируя (8.5) и приравнивая полученное выражение выражению (8.6), составим первое из соотношений между производными новых переменных:

$$Q_x\dot{x} + Q_y y - \omega Q_y = 0\,. \tag{8.7}$$

Это уравнение представляет собой условие совместности определений (8.5) и (8.6). Второе уравнение получим, подставляя выражение (8.6) в уравнение (8.1):

$$(Q_y\omega' + \omega Q_{xy})\dot{x} + \omega\dot{y}Q_{yy} + f(Q) = \varepsilon\varphi(Q, \omega Q_y)\,, \tag{8.8}$$

где ω' означает производную $\dfrac{d\omega(x)}{dx}$.

Система (8.7), (8.8) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений относительно функций x и y. Для дальнейшего нам надо разрешить эти уравнения относительно производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$. После очевидных преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned}
&x\{[Q_xQ_{yy} - Q_yQ_{xy}]\omega - \omega' Q_y^2\} - \{\dot{\omega}^2Q_{yy} + f(Q)\}Q_y = \\
&= -\varepsilon\varphi(Q, \omega Q_y)Q_y, \\
&\dot{y}\{Q_y^2\omega' - \omega[Q_xQ_{yy} - Q_yQ_{xy}]\} - \{\omega Q_y(\omega' Q_y + \omega Q_{xy}) + f(Q)Q_x\} = \\
&= -\varepsilon\varphi(Q, \omega Q_y)Q_x.
\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Введем обозначение

$$\Delta = [Q_x Q_{yy} - Q_y Q_{xy}]\omega - \omega' Q_y^2.$$

Далее замечаем, что в силу тождества (8.4) вторая фигурная скобка в первом из уравнений (8.9) равна нулю. Точно так же может быть упрощено второе слагаемое во втором из уравнений (8.9). Для этого мы заменим функцию $f(Q)$ ее выражением из (8.4)

$$f(Q) = -\omega^2 Q_{yy};$$

тогда получим

$$\omega Q_y(\omega' Q_y + \omega Q_{xy}) + f(Q)Q_x = \omega[\omega' Q_y^2 + \omega(Q_{xy}Q_y - Q_x Q_{yy})] =$$
$$= -\omega\Delta.$$

Итак, система (8.9) может быть переписана в виде:

$$\dot{x} = -\frac{\varepsilon}{\Delta}\varphi Q_y, \qquad \dot{y} = \omega(x) + \frac{\varepsilon}{\Delta}\varphi Q_x. \tag{8.10}$$

Система двух уравнений первого порядка (8.10) эквивалентна исходному уравнению второго порядка (8.1) (Мы предполагали, что функция Q является периодической. Для вывода уравнений (8.10) это предположение не требуется. Замена (8.5), (8.6) нас приведет к уравнениям (8.10), каковы бы ни были функции Q и ω).

2. Укороченные уравнения. Система (8.10) совершенно аналогична системе (7.7). Подобно ей она также представляет собой систему с вращающейся фазой. Ее правые части являются периодическими функциями y периода 2π, поскольку таковыми, по предположению, является функция Q и ее частные производные. Следовательно, для исследования этой системы мы можем применить рассуждения Ван-дер-Поля и заменить систему (8.10) укороченными уравнениями, которые в рассматриваемом случае будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_y dy,\\ \dot{y} &= \omega(x)+\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_x dy.\end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

При выписывании системы (8.11) мы вынесли функцию Δ из-под знака интеграла. Мы не сделали при этом ошибки, поскольку, как мы сейчас покажем, функция Δ не зависит от переменной y .

Лемма. *Функция Δ зависит только от одной независимой переменной – от амплитуды x .*

Для доказательства выпишем выражение полной энергии порождающей системы:

$$E = \frac{\dot{z}^2}{2} + \int_0^z f(z)dz.$$

Или, используя общий интеграл порождающего уравнения – функцию $Q(x, y)$, получим

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 Q_y^2 + \int\limits_0^Q f(Q)dQ.$$

Но функция Q удовлетворяет уравнению (8.4)

$$\omega^2 Q_{yy} + f(Q) = 0$$

для любых x . Поэтому, вычисляя E_y , будем иметь

$$E_y = \omega^2 Q_y Q_{yy} + \frac{d}{dQ}\int_0^Q f(Q)dQ\frac{dQ}{dy} = Q_y(\omega^2 Q_{yy} + f(Q)) = 0.$$

Следовательно, функция F не зависит от фазы y, она зависит только от амплитуды x; $E = E(x)$. Отсюда следует, что и Δ также не зависит от фазы y. В самом деле, последняя величина связана с величиной E очень простым соотношением. Вычислим

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\omega^2 Q_y^2 + \int_0^Q f(Q)dQ\right) = \omega' \omega Q_y^2 + \omega^2 Q_y Q_{yx} + Q_x f(Q).$$

Заменяя $f(Q)$ его выражением из (8.4), получим

$$E_x = -\omega\{[Q_x Q_{yy} - Q_y Q_{xy}]\omega - \omega' \omega Q_y^2\} = -\omega(x)\Delta,$$

откуда сразу следует, что величина Δ является функцией одной только амплитуды x.

Итак, мы показали, что для нелинейного уравнения второго порядка также могут быть составлены укороченные уравнения Ван-дер-Поля, если только в нашем распоряжении есть интеграл порождающего уравнения (точный или приближенный).

3. Пример. Рассмотрим в качестве примера задачу о линейном демпфировании нелинейных колебаний. Пусть движение описывается уравнением

$$\ddot{z} + f(z) = -\varepsilon c \dot{z},$$

где c – некоторая положительная постоянная. Это уравнение является частным случаем рассмотренного выше уравнения (8.1), когда функция $\varphi(z, \dot{z}) = -c\omega Q_y$. Напишем для этой задачи первое из укороченных уравнений:

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon c \omega}{2\pi\Delta} \int_0^{2\pi} Q_y^2 dy. \tag{8.12}$$

В явном виде мы не можем проинтегрировать в общем случае это уравнение, но можем сделать некоторые заключения. Интеграл в уравнении (8.12) – всегда положительное число:

$$\int_0^{2\pi} Q_y^2 dy = \Phi(x) > 0.$$

Далее, $\omega(x) > 0$ по смыслу своего определения. Теперь отметим, что x – это некоторое новое переменное, которое при $\varepsilon = 0$ превращается в постоянную интегрирования порождающего уравнения. Мы назвали ее условно амплитудой по аналогии с теорией линейных колебаний. В этом есть определенный смысл. В самом деле, мы только что установили, что полная энергия порождающего уравнения зависит только от этой постоянной. Значит точно так же, как амплитуда в линейных колебаниях, именно эта постоянная или любая ее однозначная функция определяют энергию системы. Следовательно, она играет ту же роль, что и амплитуда.

Предположим теперь, что в начальный момент времени энергия E в системе была равна некоторому значению E_0, и пусть в течение некоторого времени она находилась под действием диссипативной силы $\varphi = -\varepsilon c\dot{z}$. Вычислим производную в силу укороченных уравнений (8.12), принимая во внимание найденное выше выражение $E_x = -\omega(x)\Delta$:

$$\frac{dE}{dt} = E_x\dot{x} = -\omega\Delta\dot{x} = -\frac{\varepsilon c\omega^2}{2\pi}\Phi < 0. \tag{8.13}$$

Следовательно, под действием силы $\varphi = -\varepsilon c\dot{z}$ энергия системы непрерывно убывает.

Формула (8.13) позволяет для каждого фиксированного значения «амплитуды» x определить скорость убывания энергии. Что касается величины «амплитуды» x, то она в этом случае может и не убывать. Характер изменения этой величины, как это следует из уравнения (8.12), определяется только знаком $\Delta(x)$. Это обстоятельство подчеркивает тот факт, что физический смысл «амплитуды» может не иметь никакого отношения к максимальному отклонению от положения равновесия, которое всегда убывает под действием диссипативной силы.

9. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОЙ БЫСТРОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Преобразование переменных. Рассмотрим частный случай системы (*), которую мы условились называть системой с вращающейся фазой:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

где x – вектор размерности n, а y – скаляр. Функции X и Y будем предполагать периодическими функциями переменной y периода T. Не ограничивая общности, можно принять $T = 2\pi$.

Поставим задачу отыскания такой замены переменных, которая позволила бы отделить быстрые движения от медленных. Для этого вместо x и y введем новые переменные $\overline{x}$ и $\overline{y}$ при помощи формул

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{x} + \varepsilon u_1(\overline{x}, \overline{y}) + \varepsilon^2 u_2(\overline{x}, \overline{y}) + \ldots, \\ y &= \overline{y} + \varepsilon v_1(\overline{x}, \overline{y}) + \varepsilon^2 v_2(\overline{x}, \overline{y}) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Функции $u_i(\overline{x}, \overline{y})$ и $v_i(\overline{x}, \overline{y})$ пока еще неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи.

Потребуем, чтобы в результате замены переменных, определяемой формулами (9.2), вектор-функция $\overline{x}(t)$ удовлетворяла системе уравнений, не содержащей «быстрой» переменной $\overline{y}(t)$. Точно так же потребуем, чтобы и скалярная функция $\overline{y}(t)$ удовлетворяла уравнению, правая часть которого не содержит $\overline{y}(t)$; другими словами, потребуем, чтобы все новые переменные $\overline{x}$ и $\overline{y}$ удовлетворяли системе уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \varepsilon A(\bar{x},\varepsilon) = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots,\\ \dot{\bar{y}} &= \omega^*(\bar{x},\varepsilon) = \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots\end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

Функции A и ω , входящие в эти уравнения, а следовательно, и коэффициенты их разложений по степеням ε также заранее неизвестны.

Если нам удастся найти интересующую нас замену переменных, то мы придем к системе уравнений (9.3), которая значительно проще исходной. В самом деле, в системе (9.3) медленное движение, скорость которого имеет порядок $O(\varepsilon)$, полностью отделено от быстрого, скорость которого имеет порядок 1. Поэтому система уравнений, определяющая вектор $\bar{x}$, интегрируется независимо от уравнения, определяющего скаляр $\bar{y}$. Поскольку производная $\dot{\bar{x}}$ мала, а правые части этого векторного уравнения не зависят от $\bar{y}$, то оно может интегрироваться с большим шагом по времени. Определив $\bar{x}(t)$, мы найдем переменную $\bar{y}(t)$, вычислив квадратуру.

Для того чтобы сделать задачу определенной, подчиним функции u_i и v_i дополнительному ограничению: будем их считать ограниченными функциями $\bar{y}$ при $\bar{y} \to \infty$. Такое ограничение на класс допустимых функций естественно, поскольку оно позволяет для любых $\bar{y}$ считать величины $\varepsilon^k u_k$ и $\varepsilon^k v_k$ малыми порядка $O(\varepsilon^k)$.

Итак, задача отыскания преобразования (9.2) состоит в определении функций $u_i(\bar{x},\bar{y})$, $v_i(\bar{x},\bar{y})$, $A_i(\bar{x})$ и $B_i(\bar{x})$. Функции $A_i(\bar{x})$ и $u_i(\bar{x},\ \bar{y})$ – это вектор функции своих переменных, а $B_i(\bar{x})$ и $v_i(\bar{x},\ \bar{y})$ – скаляры.

2. Определение членов разложений. Будем считать X, Y и ω дифференцируемыми функциями своих переменных столько раз, сколько членов рядов (9.2) мы собираемся вычислить.

Для определения функций, входящих в правые части равенств (9.2) и уравнений (9.3), подставим ряды (9.2) в систему уравнений (9.1) и заменим производные $\dot{\bar{x}}$ и $\dot{\bar{y}}$ их выражениями (9.3). Кроме того, заметим, что

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_1}{d\bar{x}}\dot{\bar{x}} + \frac{du_1}{d\bar{y}}\dot{\bar{y}} = \frac{du_1}{d\bar{x}}(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots) +$$
$$+ \frac{du_1}{d\bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots).$$

Перепишем теперь уравнения (9.1) с учетом сделанных замечаний

$$\varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \ldots + \varepsilon \frac{du_1}{d\bar{x}}(\varepsilon A_1(x) + \ldots) +$$
$$+ \varepsilon \frac{du_1}{d\bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \ldots) +$$
$$\varepsilon^2 \frac{du_2}{d\bar{x}}(\varepsilon A_1(\bar{x}) + \ldots) + \varepsilon^2 \frac{du_2}{d\bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \ldots) =$$
$$= \varepsilon X(\bar{x} + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \bar{y} + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \varepsilon),$$
$$\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \ldots + \varepsilon \frac{dv_1}{d\bar{x}}\varepsilon A_1 + \ldots) +$$
$$+ \varepsilon^2 \frac{dv_2}{d\bar{x}}(\varepsilon A_1(\bar{x}) + \ldots) + \varepsilon^2 \frac{dv_2}{d\bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \ldots) =$$
$$= \omega(\bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots) +$$
$$+ \varepsilon Y(\bar{x} + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \bar{y} + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \varepsilon).$$

Правые части этих уравнений разложим по степеням параметра ε и сравним коэффициенты при одинаковых степенях этого параметра. В результате мы приедем к следующей системе уравнений, определяющей искомые функции:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) = X(\bar{x},\bar{y},0) - A_1(\bar{x}) \equiv g_1(\bar{x},\bar{y}) - A_1(\bar{x}),\\
&\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) = Y(\bar{x},\bar{y},0) + D_1(u_1) - B_1(\bar{x}) \equiv h_1(\bar{x},\bar{y}) - B_1(\bar{x}),\\
&\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) = \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}u_1 + \frac{\partial X}{\partial \bar{y}}v_1 + \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}A_1 -\\
&-\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}B_1 - A_2(\bar{x}) \equiv g_2(\bar{x},\bar{y}) - A_2(\bar{x}),\\
&\frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) = \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}}u_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}}v_1 + \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}}B_1 +\\
&+D_1(u_2) + D_2(u_1) - B(\bar{x}) \equiv h_2(\bar{x},\bar{y}) - B_2(\bar{x})
\end{aligned}\right\} \quad (9.4)$$

и т.д.

Общий вид систем уравнений для определения u_k, v_k, A_k и B_k будет такой:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega(\bar{x})\frac{\partial u_k}{\partial \bar{y}} = g_k(\bar{x},\bar{y}) - A_k(\bar{x}),\\
&\omega(\bar{x})\frac{\partial v_k}{\partial \bar{y}} = h_k(\bar{x},\bar{y}) - B_k(\bar{x}).
\end{aligned}\right\} \quad (9.5)$$

Так как функции g_k и h_k определяются предыдущими приближениями, то они должны считаться заданными функциями своих переменных. Напомним, что величины $\bar{x}$, u_k и A_k -векторы с компонентами $\bar{x}^{(j)}$, $u_k^{(j)}$ и $A_k^{(j)}$ соответственно, $\bar{y}$, v_k и B_k – скаляры. Точно так же X – это вектор-функция своих аргументов, а Y и ω – скалярные функции. Следовательно $\partial u_i/\partial y$, $\partial X/\partial \bar{y}$, $\partial Y/\partial \bar{x}$ – это векторы с компонентами $\partial u_i^{(j)}/\partial \bar{y}$, $\partial X^{(j)}/\partial \bar{y}$ и $\partial Y/\partial \bar{x}^{(j)}$соответственно, $\partial X/\partial \bar{x}$ – это квадратная матрица с элементами $\partial X^{(i)}/\partial \bar{x}^{(j)}$и т.д. Кроме того, в уравнениях фигурируют операторы $D_1(u)$ и $D_2(u)$. Они имеют следующий смысл:

$$D_1(u)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial \overline{x^{(j)}}}u^{(j)}, \qquad D_2(u)=\frac{1}{2}\sum_{k,s}\frac{\partial^2\omega}{\partial \overline{x^{(k)}\partial x^{(j)}}}.$$

Присутствие этих членов связано с разложением функции $\omega(\overline{x})$ в ряд Тейлора. Все производные в уравнениях (9.4) вычислены при $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим первое из уравнений (9.4). Это уравнение в частных производных первого порядка, разрешенное относительно производной неизвестной функции $\partial u_1/d\overline{y}$, причем это уравнение содержит еще одну неизвестную функцию $A_1(\overline{x})$. Интегрируя это уравнение, получим

$$u_1(\overline{x},\overline{y})=\frac{1}{\omega(x)}\int_{y_0}^{\overline{y}}\{g_1(\overline{x},\overline{y})-A_1(\overline{x})\}d\overline{y}+\varphi(\overline{x}), \tag{9.6}$$

где $\varphi(\overline{x})$ – произвольная функция $\overline{x}$.

Мы условились разыскивать решение в классе функций, удовлетворяющих условию ограниченности

$$\lim_{\overline{y}\to\infty}\left|u_i(\overline{x},\overline{y})\right|<\infty.$$

Под знаком интеграла в выражении для $u_1(\overline{x},\overline{y})$ стоит некоторая периодическая функция $\overline{y}$, поскольку $g_1(\overline{x},\overline{y})$ – периодическая функция $\overline{y}$ и величина A не зависит от $\overline{y}$. Период этой функции по $\overline{y}$ равен 2π. Предположим, что ее среднее значение за период

$$\overline{g_1-A}=\frac{1}{2\pi}\int_{y_0}^{y_0+2\pi}(g_1(\overline{x},\overline{y})-A_1(\overline{x}))dy=c(\overline{x})\neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}u_1(\overline{x},\overline{y_0}+2\pi k)=\frac{1}{\omega(\overline{x})}\lim\,2\pi c(\overline{x})k=\pm\infty.$$

Выбор знала плюс или минус зависит от знака $c(\overline{x})$. Таким образом, для ограниченности u_1 необходимо и достаточно, чтобы

$$c(\bar{x}) = 0 \tag{9.7}$$

для любого $\bar{x}$.

Интеграл в равенстве (9.6) содержит неизвестную функцию $A_1(\bar{x})$. Условия (9.7) достаточно для ее однозначного определения. В самом деле, из равенства (9.7) сразу следует, что среднее значение функции g

$$\bar{g}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\bar{x},\bar{y})dy$$

должно равняться $A_1(\bar{x})$. Итак,

$$A_1(\bar{x}) = \bar{g}_1(x) = \bar{X}(x).$$

Интегрируя теперь первое из уравнений (9.4), мы получим выражение для $u_1(\bar{x},\bar{y})$ в виде квадратур от неизвестных функций

$$u_1(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{\omega(x)}\left[\int_{\bar{y}_0}^{\bar{y}} X(\bar{x},\bar{y})dy - \bar{X}\bar{y}\right] + \varphi_1(\bar{x}). \tag{9.8}$$

В выражение (9.8) входит функция $\varphi_1(\bar{x})$, являющаяся «постоянной» интегрирования и выбираемая произвольным образом.

Существуют различные способы рационального задания этой функции. Например, если мы решаем задачу Коши, т.е. отыскиваем решение системы (9.1) по условиям

$$\text{при } t = t_0: \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \end{cases}$$

то часто бывает удобно потребовать, чтобы функции $\bar{x}$ и $\bar{y}$ удовлетворяли тем же условиям, что и функции x и y, т.е. чтобы

$$x(t_0) = \bar{x}(t_0), \quad y(t_0) = \bar{y}(t_0).$$

Отсюда сразу следует, что $u_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$, т.е. $\varphi_1(\bar{x}_0) = 0$. Если, кроме того потребовать, чтобы при $y = \bar{y}_0$ имело место равенство $x = \bar{x}_0$, то функцию $\varphi_1(x)$ следует принять равной нулю.

Существуют и другие способы выбора произвольных функций. Например, при исследовании систем Гамильтона бывает целесообразно потребовать, чтобы система (9.3) была также системой Гамильтона. Это требование даст другой способ задания функции $\varphi_1(x)$. В дальнейшем будет показано, что точность построения приближенного решения не зависит от выбора этих функций. Таким образом, преобразование (9.2) может быть реализовано не единственным образом.

Перейдем теперь к исследованию остальных уравнений системы (9.4). Рассуждая совершенно аналогично тому, как мы это делали при исследовании первого из уравнений (9.4), найдем, что

$$B_1(\bar{x}) = \bar{h}_1 = \bar{Y} + D_1\bar{u}_1,$$

$$v_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(\bar{x})}\left\{\int_{y_0}^{\bar{y}} h_1(\bar{x}, \xi)d\xi - h_1(\bar{x})\bar{y}\right\} + \psi_1(\bar{x}),$$

где $\psi_1(x)$- также произвольная функция своего аргумента. В общем случае

$$\left.\begin{aligned}
&A_i = \bar{g}_i, B_i = \bar{h}_i,\\
&u_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(\bar{x})}\left\{\int_{y_0}^{\bar{y}} g_i(\bar{x}, \xi)d\xi - \overline{g_i}\,\bar{y}\right\} + \varphi_1(\bar{x}),\\
&v_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(\bar{x})}\left\{\int_{y_0}^{\bar{y}} h_i(\bar{x}, \xi)d\xi - \overline{h_i}\,\bar{y}\right\} + \psi_1(\bar{x}).
\end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Выражения (9.9) исчерпывают задачу, сформулированную в начале раздела: они дают возможность вычислить все функции, входящие в преобразование (9.2), и определить правые части уравнений (9.3).

3. Построение приближенного решения. Итак, предположим, что мы определили искомые функции u_i, v_i, A_i и B_i. Теперь для построения приближенного решения мы должны поступить следующим образом: возьмем первые n членов в первом из уравнений системы (9.3) и обозначим через $\overline{x}_n$ функцию, которая будет определена нелинейным уравнением

$$\dot{\overline{x}}_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i A_i(\dot{\overline{x}}_n). \tag{9.10}$$

Если мы хотим получить приближенное решение задачи Коши, то следует проинтегрировать это уравнение (например, численно). После этого функцию $\overline{y}_n(t)$ мы определяем квадратурой:

$$\dot{\overline{y}}_n(t) = y_0 + \int_0^t \{\omega(\overline{x}_n) + \varepsilon B_1(\overline{x}_n) + \ldots\}dt. \tag{9.10'}$$

Определив функции $\overline{x}_n$ и $\overline{y}_n$, подставим их затем в ряды (9.2), в которых удержим также конечное число членов. Выражения

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \overline{x}_n(t) + \sum_{m=1}^{N_1} \varepsilon^m u_m(\overline{x}_n, \overline{y}_n), \\ y(t) &= \overline{y}_n(t) + \sum_{m=1}^{N_2} \varepsilon^m u_m(\overline{x}_n, \overline{y}_n) \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

мы примем в качестве приближенного решения исходной системы. Числа N_1 и N_2 должны быть также выбраны по определенным правилам, о которых речь будет идти ниже.

Формулы (9.11) при определенных условиях являются асимптотическими, т.е. функции, которые они определяют, стремятся при $\varepsilon \to 0$ к точным решениям.

Примечание. Уравнение (9.10) обычно оказывается сложным нелинейным уравнением и только в исключительных случаях может быть проинтегрировано в явном виде. В общем случае его приходится интегрировать численно. Заметим, что численное интегрирование системы (9.10) ($\overline{x}_n$- это вектор-функция) значительно проще интегрирования исходной системы (9.1). Дело даже не в том, что порядок системы (9.10) на единицу меньше порядка системы (9.1). Система уравнений (9.10) определяет медленно изменяющиеся переменные. Следовательно, ее интегрирование может быть проведено с большим шагом по аргументу и, следовательно, с малой затратой машинного времени. Заметим также, что во многих прикладных задачах оказывается достаточным вычислить величины $x_n(t)$; величины y_n часто не представляют практического интереса.

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда x – скаляр, а ω – величина постоянная. Ограничимся при этом рассмотрением только первого члена ряда (9.3); тогда

$$x = \overline{x}_1, \qquad y = \overline{y}_1,$$

причем

$$\dot{\overline{x}}_1 = \dot{x} = \varepsilon\overline{X}, \qquad \dot{\overline{y}}_1 = \dot{y} = \omega + \varepsilon\overline{Y}. \tag{9.12}$$

Уравнения (9.12) с точностью до обозначений совпадают с укороченными уравнениями Ван-дер-Поля (7.8). Итак, метод Ван-дер-Поля для того частного случая систем (9.1), когда x – скаляр дает возможность вычислить первые члены разложений (9.3). Ряды, построенные в этом параграфе, являются при определенных условиях асимптотическими: в общем случае они расходятся, но их конечный отрезок любой длины дает приближенное решение, т.е. функция, которая им определяется, стремится к точному решению при $\varepsilon \to 0$. Поэтому установленный результат весьма важен. Он показывает, что метод Ван-дер-Поля, введенный чисто эвристическим образом, является «правильным»: в тех случаях, когда алгоритм, изложенный в этом параграфе, дает приближенное решение, метод Ван-дер-Поля также дает приближенное решение.

Таким образом, метод Ван-дер-Поля позволяет построить приближенное решение, однако он не дает никаких указаний на то, каким образом можно уточнить это решение. Изложенный алгоритм позволяет, как мы увидим в следующем пункте, с любой степенью точности проводить расчет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии описано несколько асимптотических методов, позволяющих находить приближенные аналитические решения дифференциальных уравнений и их систем, содержащих малый параметр. Все представленные методы можно разделить на две группы: методы малого параметра Ляпунова-Пуанкаре и асимптотические методы разделения движений.

Пособие состоит из 9 пунктов, каждый из которых представляет либо отдельный асимптотический метод, либо его развитие, либо носит вспомогательный характер.

Описанные методы позволяют существенно упростить аналитическое исследование движения механических систем. Особенно успешно они применяются в случае периодических или близких к периодическим движений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – Москва : Наука, 1969.

2. Олвер, Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер. – Москва : Наука, 1978.

3. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – Ижевск: РХД, 2000.

4. Вазов, В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – Москва : Мир, 1968.

Учебное издание

Алексеев Алексей Владимирович

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 26.12.2022. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 5,5.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ № . Арт. – 47(Р2УП)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.