

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

Г.Е. Круглов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

САМАРА 2001

УДК 531

Аналитическое проектирование механических систем: Учебное пособие /
Круглов Г.Е. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2001. 132 с.

ISBN 5-7883-0176-9

Настоящее пособие посвящено изучению математических методов проектирования сложных механических систем. Основное внимание уделено задаче синтеза в постановке Сиразетдинова Т.К. Задача проектирования рассматривается в виде многокритериальной задачи с ограничениями типа неравенств как на управляющий вектор, так и на величины критериев.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 010500-«Механика», и аспирантов. Подготовлено на кафедре теоретической механики.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Клебанов Я.М.,
д-р техн. наук, проф. Белоконов И.В.

ISBN 5-7883-0176-9

© Г. Е. Круглов, 2001

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	6
1.1. Назначение систем и общие требования к ним	6
1.2. Формулировка задачи аналитического проектирования систем	7
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	14
2.1. Краткий обзор методов оптимизации.....	14
2.2. Задача с векторным критерием и способы ее решения.....	17
3. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ.....	22
3.1. Формулировка основной задачи управления.....	22
3.2. Типы основной задачи управления	24
3.3. Эквивалентные преобразования задачи и условия существования решения	27
3.4. Основная оптимизационная и минимаксная задачи.....	31
3.5. Применение метода градиентного спуска к решению ОЗУ	34
3.6. Стохастическая постановка задачи	37
4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ.....	40
4.1. Мера положения изображающей точки	40
4.2. Общий анализ дискретных методов	42
4.3. Градиентные методы.....	43
4.4. Поиск при наличии «оврагов» у минимизируемой функции.....	46
4.5. Определение градиента функции	49
4.6. Метод случайного поиска	50
5. ПРИЛОЖЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ СИСТЕМ.....	52
5.1. Решение задачи отделения космических аппаратов от последней ступени ракеты-носителя.....	52
5.2. Решение задачи раскрытия панелей солнечных батарей	70
5.3. Решение задачи отделения головного обтекателя.....	84
5.4. Решение задачи раскрытия антенн	91
5.5. Решение задачи о встрече двух космических аппаратов	113
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	130

Введение

Настоящее учебное пособие посвящено рассмотрению математических методов проектирования (синтеза) сложных механических систем и реализации этих методов на ЭВМ. Считается, что структурно – конструктивная схема проектируемой системы и математическая модель ее функционирования известны. Математическая модель функционирования объекта проектирования может включать в себя систему дифференциальных уравнений, описывающих движение самого объекта, или систему дифференциальных уравнений в частных производных, если рассматривается напряженное состояние проектируемого объекта. Характеристики проектируемой системы должны удовлетворять некоторым критериям функционирования, заданным, как правило, в виде неравенств. Каждый из критериев имеет вполне конкретный физический смысл. Процесс функционирования объекта проектирования определяется рядом управляющих функций и управляющих параметров. Задача синтеза формулируется как выбор управляющих функций и параметров, при которых удовлетворяются все критерии функционирования объекта проектирования. В такой постановке задача синтеза называется основной задачей управления по терминологии Сиразетдинова Т.К. Анализ предельных случаев, когда интересующие исследователей критерии достигают экстремума, позволяет методами решения основной задачи управления найти некоторые оптимальные законы и параметры управления. В пособии подробно излагаются методы решения основной задачи управления, необходимые и достаточные условия существования ее решения и способы численной реализации.

В отдельной главе пособия рассматривается также задача оптимального управления, когда необходимо найти экстремум некоторых критериев качества в постановке Л.С. Понтрягина или Р. Беллмана.

Решению прикладных задач применительно к ракетно–космическим системам посвящена последняя глава пособия, в которой рассматриваются решения задач отделения космических аппаратов от последней ступени раке

ты–носителя, раскрытия солнечных батарей и антенн, а также стыковки космических аппаратов на рабочей орбите.

Учебное пособие написано на основе курса лекций с одноименным названием, прочитанного автором студентам, обучающимся по специальности 010500–"Механика" в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Пособие может быть полезно также при выполнении курсовых работ и при дипломном проектировании.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Назначение систем и общие требования к ним

Механические системы ракетно–космической техники предназначены, как правило, для выполнения определенных механических операций на различных этапах полета ракетно–космических аппаратов и обеспечения функциональной работоспособности конструкции.

Таковыми системами, например, являются различные системы отделения (разделения), системы автоматической стыковки, мягкой посадки и системы раскрытия различных подвижных конструкций.

Рассмотрим особенности каждой из указанных систем.

Системы отделения предназначены для отделения элементов конструкции летательного аппарата, которые или исчерпали свой энергетический ресурс (ускорители, отработавшие ступени ракеты–носителя (РН)), или их функционирование в составе летательного аппарата (ЛА) закончено (головные обтекатели, светозащитные устройства, солнечные батареи, спускаемые малогабаритные капсулы и т. д.).

Системы этого класса отличаются большим разнообразием по своему конструктивному построению и работают практически на всех этапах полета ЛА: на активном участке выведения, рабочей орбите, участке спуска и посадки ЛА.

Основными требованиями к этим системам являются высокая надежность срабатывания (это требование является общим для всех классов механических систем), быстрдействие, безударность как на «ближнем» участке расхождения разделяемых блоков, так и на «дальнем» участке (это относится к системе отделения нескольких КА от базового орбитального модуля или от последней ступени РН), минимальность импульсных нагрузок и угловых возмущений на разделяемые блоки [18].

Стыковочные устройства служат для поглощения относительной кинетической энергии космических аппаратов при их механическом соединении в единый функциональный блок и работают на орбитальном участке полета. Здесь помимо высокой надежности срабатывания систем должны обеспечиваться требования по ударным нагрузкам и кинематическим параметрам при фиксации [9].

Системы мягкой посадки работают на участке непосредственного контакта ЛА с посадочной поверхностью и предназначены для гашения кинетической энергии ЛА и обеспечения его устойчивого к опрокидыванию положения при посадке на поверхность. Основными требованиями являются ограничения на тягу и время работы тормозного двигателя, ограничения на продольные и поперечные перегрузки в ряде ответственных точек конструкции, жесткость пружин, геометрические характеристики опорных стоек посадочного устройства [4].

Задачей, решаемой системами раскрытия, является обеспечение конструктивной конфигурации ЛА путем приведения в свое рабочее состояние таких конструкций, как складывающиеся солнечные батареи, аэродинамические стабилизаторы и щитки, раскрываемые антенны и штанги с установленными на них приборами. Одни из конструкций на участке выведения ЛА на орбиту крепятся на несущей части ЛА, а затем в определенные моменты времени автоматически освобождаются и с помощью энергетических приводов приводятся в заданное рабочее положение с последующей фиксацией. Другие конструкции, например аэродинамические стабилизаторы, входящие функционально в систему аварийного спасения экипажа пилотируемого ЛА, могут быть раскрыты на атмосферном участке выведения при возникновении возможной аварийной ситуации [18].

Основными техническими требованиями к системам этого класса являются требования по быстродействию срабатывания, перегрузкам в различных

сечениях раскрывающихся конструкций, угловым скоростям в момент фиксации в рабочем положении, очередности фиксации в шарнирах и др.

Необходимо отметить, что отказ в работе любого элемента механической системы или неправильный выбор их кинематических или динамических параметров ведет либо к нарушению нормального функционирования ЛА в целом, либо к невыполнению задачи.

В связи с этим вопросу проектирования механических систем, исследованию динамики их функционирования уделяется особое внимание в общем цикле проектирования.

1.2. Формулировка задачи аналитического проектирования систем

Проектирование механических систем, как правило, является заключительным этапом проектирования ЛА, когда его конструктивно-структурная схема уже выбрана, рассчитана на все случаи нагружения, кроме случая работы этих систем.

Например, так обстоит дело с раскрывающимися антеннами, панелями солнечных батарей, раскрывающимися стабилизаторами и т. д. Исходя из этого и формируются основные требования к системам их раскрытия – это ограничения на время раскрытия, нагрузки (перегрузки), требование надежности фиксаций, последовательности фиксаций (для панелей солнечных батарей) и т. п.

На практике эти требования задаются в виде ограничений. Некоторые из них определяются несущей способностью раскрывающихся конструкций, полученной в результате проведения серии оценочных расчетов.

Ограничения представляются в виде математических неравенств и указываются в технических условиях (ТУ) проекта системы.

Функционирование механических систем описывается дифференциальными уравнениями. Ими, например, могут быть системы дифференциальных уравнений в обычных производных при описании кинематической картины срабатывания систем или в частных производных при определении нагружения в интересующих сечениях конструкции. Поскольку уравнения включают

в себя управляющие параметры или функции, исследование срабатывания систем с математической точки зрения сводится к решению задач управления.

При исследовании поведения управляемой системы возникают две задачи: анализ и синтез системы. Более простой из них является задача анализа. Обычно она сводится к составлению решения дифференциальных уравнений, которые описывают поведение данной системы при различных управляющих переменных, и анализу приемлемости характеристик системы.

Таких характеристик может быть довольно много, поэтому обычно рассматриваются основные, главные с точки зрения исследователя.

Задача синтеза является обратной по отношению к задаче анализа и формулируется следующим образом: задаются определенные условия и ограничения, стесняющие поведение системы, и требуется построить систему или процесс, удовлетворяющие этим заранее заданным условиям и ограничениям. После построения системы необходимо проанализировать ее поведение.

Одним из наиболее часто применяемых на практике методов исследования механической системы является метод перебора и анализа при различных значениях управляющих переменных и выбор тех из них, при которых поведение системы можно считать удовлетворительным. Недостатками такого метода перебора (при наличии сравнительно большого числа управляющих переменных) являются практическая неосуществимость перебора всех вариантов и возможность упущения наиболее характерных случаев.

Наиболее эффективным методом является метод с использованием аппарата оптимизации.

При проектировании механических систем возникают, по крайней мере, две основные задачи.

Первая заключается в том, что часто бывает необходимо улучшить уже реально существующую конструкцию систем с целью получения систем, обладающих лучшими свойствами, под улучшением понимается ужесточение одного или сразу нескольких показателей систем, например, уменьшение

времени раскрытия стабилизатора на величину Δt . В технических условиях улучшенного проекта эти требования естественно записать в виде неравенства $T \leq T^o - \Delta t$, где T^o - время для существующей системы. Задача будет заключаться в отыскании таких характеристик системы, чтобы наряду с существующими требованиями технических условий выполнялись и эти требования.

Вторая задача заключается в разработке системы для вновь создаваемого ЛА, не имеющей прототипа. Здесь уже необходимо найти такие конструктивные характеристики системы, чтобы в рамках выбранной структуры и принципа действия она обладала заданными свойствами.

В этом случае технические условия также задаются в виде неравенств, ограничивающих значения технических показателей системы.

Часть неравенств или все могут быть как односторонними, так и двухсторонними. Все зависит от конкретного физического смысла этих неравенств. Например, ограничение по перегрузке в момент фиксации панелей солнечных батарей записывается в виде одностороннего неравенства, а по величине угловой скорости в момент фиксации – в виде двухстороннего.

Технические показатели системы – время раскрытия, угловую скорость, перегрузку и т. п. называют критериями J_i , а ограничения на них в общем случае имеют вид

$b_i \leq J_i \leq B_i$, где $b_i, B_i - const$ - заданные в технических условиях предельно-допустимые значения этих критериев.

Величины критериев зависят от геометрических и энергетических характеристик систем, например от начального усилия и жесткости пружин, мест их установки, характера изменения площади дроссельной щели гидравлического демпфирующего устройства и т. п. Эти характеристики называют управляемыми переменными, а вектор, составленный из компонент управляющих переменных, вектором управления.

На практике управляющие переменные выбираются не произвольно, а из некоторого допустимого множества, определяемого конструктивно-технологическими ограничениями. Общая запись ограничений может быть представлена в виде $\bar{u} \in U^r$, где U^r – допустимая область.

Задача проектирования системы имеет простую геометрическую интерпретацию. Введем понятие пространства критериев и управлений: $J \equiv \{J_1(\bar{u}), J_2(\bar{u}), \dots, J_k(\bar{u})\}^T$, $\bar{u} \equiv \{u_1, u_2, \dots, u_r\}^T$, где k, r – размерность соответствующего пространства, т. е. число критериев и компонент управления.

Каждая точка пространства управления отображается в определенную точку пространства критериев, а все множество пространства управления отображается в некоторое множество пространства критериев. Для пространства размерности 2 ($k = r = 2$) геометрическая картина имеет вид, представленный на рис. 1.1.

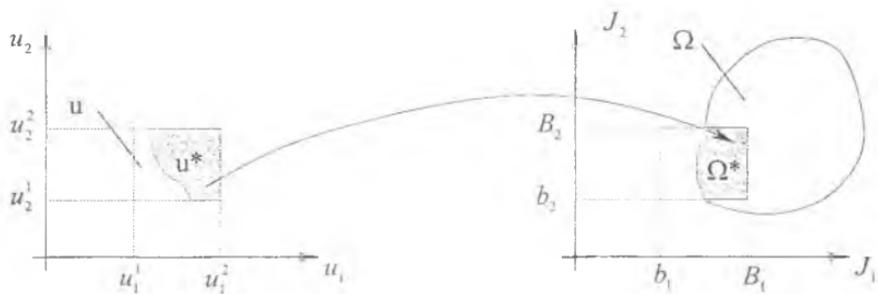


Рис. 1.1. Геометрическая картина задачи

Область Ω^* , получаемая пересечением области критериев с областью, ограниченной гиперпараллелепипедом конструктивных ограничений (в общем случае), и есть область допустимых решений задачи проектирования механической системы. Эта область является отображением некоторого подмножества u^* из допустимого множества U^r . Задача заключается в отыскании любой точки из u^* .

Необходимо отметить, что в такой постановке задача не оптимизационная, так как в ней нет оптимизируемого критерия. Это задача управления, целью которой является достижение любой точки из допустимого множества критериев. Задачу в такой постановке будем называть задачей аналитического проектирования.

Термин «аналитическое» означает, что рассматриваются механические системы, описываемые аналитически равенствами и неравенствами.

Целью проектирования системы является решение конкретной инженерной задачи, модель которой представлена математически. При этом необходимо учесть следующие обстоятельства.

Во-первых, очевидно, что в реальных условиях работы системы могут быть всякого рода случайные отклонения параметров, влияющие на работу системы и не предусмотренные моделью.

Во-вторых, ограничения, заданные в технических условиях, являются ресурсными ограничениями, нарушение которых не допускается даже в незначительной степени во избежание нерасчетных режимов работы как самой системы, так и в целом КА.

В-третьих, система в дальнейшем может заимствоваться на различные модификации КА с незначительными отличиями в условиях эксплуатации.

Эти обстоятельства приводят к совершенно естественному стремлению получить, если имеется принципиальная возможность, такие конструктивные параметры системы, при которых обеспечивается выполнение требований технических условий с возможно большими запасами.

Наличие таких запасов создает определенную гарантию того, что введение некоторых упрощений в математическую модель задачи, технологические отклонения конструктивных параметров системы и возможные отклонения режимов функционирования в реальных условиях не вызовут нарушений заданных ограничений при практическом применении системы с конструктивными характеристиками, полученными по результатам решения математической задачи.

Получение решения с определенными запасами выполнения требований технических условий необходимо также и из следующих соображений. Обычно при проектировании механической системы из-за излишней громоздкости аналитического представления массы системы в функции искомым управлений этот критерий в задачу не вводится. Однако масса системы является одной из важнейших характеристик, и в результате проектирования должен быть найден вариант системы, удовлетворяющий ограничению по массе. Поэтому контроль массы можно осуществлять косвенно. Если в результате решения задачи будет получен вариант с достаточно большими запасами по требованиям технических условий, то некоторую долю запаса можно рассматривать как резерв, который в случае необходимости можно использовать для улучшения массовой характеристики системы и силового воздействия на конструкцию элементов системы и КА.

С учетом сказанного решение задачи проектирования механической системы целесообразно производить поэтапно. На первом этапе определяется принципиальная возможность существования решения задачи, на втором – отыскивается решение с возможно большими запасами.

В своем большинстве проектируемые механические системы относятся к сложным многокритериальным системам, что предполагает при их решении использование математического аппарата теории управления. Универсального общего «рецепта» их решения не существует. Некоторые задачи могут быть сведены к оптимизационным. Каждая задача, как показывает практика, требует своего индивидуального подхода.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Краткий обзор методов оптимизации

Как показывает практика, одним из путей предсказания поведения проектируемых систем является путь создания математических моделей и последующего проведения исследования систем на этих моделях. Построение или проектирование систем, удовлетворяющих заранее заданным свойствам, можно осуществить, когда имеются управляющие переменные, при помощи которых можно влиять на поведение проектируемой системы.

Математическое осмысливание конкретных практических задач проектирования систем или процессов с необходимыми свойствами привело к созданию теории экстремальных задач и методов их решения. Эта теория не является новой для математики. Она изучается и развивается на протяжении вот уже более 200 лет. Ее истоки берут начало со времен Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, когда были получены способы решения классических вариационных задач экстремума функционала при ограничениях типа равенств.

Интенсивное развитие техники, и в частности ракетно-космической, а также появление быстродействующих ЭВМ послужило мощным толчком для развития новых идей и методов оптимизации – математического программирования. Начало было положено советским математиком Л. В. Канторовичем в конце 30-х годов – линейное программирование. В послевоенные годы линейное программирование совершенствуется в США и находит широкое применение для решения широкого круга задач практики [15].

В общем случае задачи математического программирования формулируются следующим образом. Необходимо найти экстремум функции качества

$$G(\bar{a}) \rightarrow \text{extr}, \bar{a} \in A^n,$$

где область $\bar{a} \in A^n$ задается системой из m неравенств произвольного типа:

$$h_i(\bar{a}) \geq 0, i = 1 \dots m.$$

Необходимо отметить, что регулярных методов решения задач математического программирования не имеется. Все методы являются численными методами решения экстремальных задач.

Одновременно с развитием методов математического программирования успешно развивается теория оптимального управления – теория определения экстремумов функционалов. Решающую роль в развитии этой теории сыграли необходимые условия экстремума функционалов в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина и принципа оптимальности динамического программирования Р. Беллмана [6].

Главными достоинствами этой теории являются расширение класса функций, среди которых отыскивается решение оптимизационной задачи (кусочно-непрерывные, ограниченные функции с конечным числом точек разрыва первого рода), и возможность учета различного рода ограничений в виде неравенства на управление и фазовые переменные процесса.

Необходимые условия в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина сводят решение задачи оптимизации функционала к решению теоретически известных проблем – максимизации некоторой специальной функции конечного числа переменных – функции H совместно с решением краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс.

Использование принципа оптимальности динамического проектирования Р. Беллмана связано с отысканием некоторой функции, зависящей от фазовых координат и независимой переменной и удовлетворяющей нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, (уравнение Гамильтона-Беллмана) с одновременной минимизацией по управлению. До настоящего времени не существует общего «рецепта», позволяющего определять эту функцию в явной аналитической форме, что сдерживает применение метода на практике [6].

Несмотря на универсальность необходимых условий экстремума функционалов в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина и принципа Р. Беллмана, эти условия не дают универсальных средств эффективного чис-

ленного решения задач оптимального управления. Поэтому развиваются методы решения задач управления в их исходной постановке, минуя необходимые условия оптимальности. Эти методы получили название прямых методов. Они сводят задачу оптимального управления к задачам математического программирования. Методы основаны на переходе к задачам на экстремум функции нескольких переменных, т. е. к задачам с конечным числом степеней свободы, и на дискретизации задачи. В первом случае независимые переменные, в принципе, остаются непрерывными, но функции отыскиваются в специальном виде, включающем несколько параметров, которые затем подбираются из условия наилучшего приближения решения задачи. Это методы Ритца, Канторовича и др. [12]. Особенность этих методов в том, что они предоставляют обширное поле приложения физической интуиции и аналитического искусства, ибо, если удастся правильно предвидеть форму искомого решения (применив при этом лишь небольшое число параметров) и удачно выбрать критерий качества приближения, то методы могут оказаться чрезвычайно эффективными [12]. Как в случае применения прямых методов решения оптимизационных задач, так и непрямых, окончательное решение отыскивается либо в аналитической (замкнутой) форме, либо в численной.

Аналитические решения могут быть найдены лишь для задач в упрощенной постановке. В задачах, постановка которых приближается к реальной технической ситуации, получение решения в замкнутой форме, как правило, либо невозможно, либо приводит к весьма сложным выражениям, ценность которых невелика [22].

Итерационные методы поиска решения более универсальны. Они представляют собой методы последовательного улучшения решения в смысле некоторой меры. Так, в задачах приближенного построения оптимального управления такой мерой служит минимизируемый функционал. Чем меньше его значение, тем лучше управление и тем ближе оно к оптимальному. К итерационным (численным) методам относятся методы регулярного (детерминированного) и случайного поиска.

Первая группа методов рассматривает поиск как вполне регулярный процесс сбора и переработки информации. Наиболее распространенными методами являются градиентные методы [8].

Для второй группы методов поиск имеет случайный характер. Направление шага, а иногда и величина его определяются случайным образом. Метод является прямым развитием известного метода проб и ошибок, когда решение ищется случайно и при удаче принимается, а при неудаче отвергается с тем, чтобы немедленно обратиться к случайности как источнику возможного. Такое «случайное» поведение разумно опирается на уверенность, что случайность содержит в себе все возможности, в том числе и искомое решение [7].

Бесспорно, что знание предельных возможностей проектируемой системы является очень важным, например, крыло минимального веса, минимальной стоимости, максимальная полезная нагрузка ракеты, максимальная дальность, минимальное время срабатывания системы и т.п. Но это позволяет проектировать только односторонне хорошие системы, оптимальные с точки зрения выбранного критерия.

На практике при проектировании любой технической системы (в том числе и сложных механических систем) обычно добиваются не одной, а нескольких целей. Характеристики системы определяются многими критериями, причем существенными и несравнимыми. Поэтому проектирование системы, определение её структуры, проектных параметров по своей сути является многокритериальной задачей, т. е. задачей, которая решается с учетом всей совокупности критериев системы, характеризующих её с различных сторон. При решении такой задачи неизбежно столкновение с основной трудностью многокритериальных задач – трудностью «векторной оптимизации» [7].

2.2. Задача с векторным критерием и способы ее решения

Векторный критерий вносит в задачу неопределенность специального вида – выбор критерия оптимальности. Существуют различные способы преодоления этой неопределенности, которые и составляют содержание много-

численных методов решения задач векторной оптимизации. Они направлены на изыскание путей отыскания дополнительной информации, позволяющей заменить векторный критерий его скалярным эквивалентом.

На первых порах многокритериальные задачи считались некорректными. Действительно, решая независимо каждую из n экстремальных задач

$$J_i(\vec{u}) \rightarrow \min_{\vec{u} \in U},$$

$$\vec{u}_i^* = \arg \min_{\vec{u} \in U} J_i(\vec{u}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Если окажется, что $\vec{u}_1^* = \vec{u}_2^* = \dots = \vec{u}_n^*$, то все n локальных решений совпадают, а это и есть решение многокритериальной задачи. Но вероятность такого события очень мала. Обычно $\vec{u}_i^* \neq \vec{u}_j^*, i \neq j$ и, следовательно, ни одно из локальных решений не может служить решением поставленной задачи. Это обстоятельство и привело к соображению о некорректности. Однако формально некорректность, вообще говоря, снимается, если искать не одно состояние \vec{u}_i^* , а множество состояний $\{\vec{u}^*\}$.

В пространстве критериев J_i размерностью n (по числу критериев) и образованного n ортогональными осями, вдоль которых откладываются значения критериев, строится область или множество критериев Ω , которые являются отображением множества управлений $\vec{u} \in \vec{U}$, т. е. каждой точке пространства управления соответствует точка этого множества. Для 2-мерного пространства критериев это множество показано на рис. 2.1.

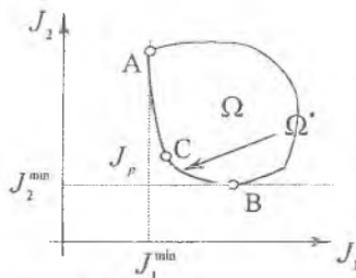


Рис. 2.1. Множество критериев

Множество AB называется областью компромисса, областью неулучшаемых решений или множеством Парето. Оно обладает тем свойством, что

внутри него любой критерий не может быть улучшен без ухудшения хотя бы одного другого. На рисунке множество AB расположено на границе исходного множества Ω . С формальной точки зрения множество Парето Ω^* следует считать решением многокритериальной задачи. Однако это решение не всегда может удовлетворить проектировщика. Прежде всего потому, что оно допускает множество решений, а нужно лишь одно. Казалось бы, что это расширяет возможность выбора. Действительно, можно, например, ввести еще один критерий J_{n+1} , решить задачу его минимизации на множестве Парето $J_{n+1}(\bar{u}) \rightarrow \min_{\bar{u} \in \bar{\Omega}^*}$ и получить \bar{u}^* , удовлетворяющий уже J_{n+1} - критерию. Но это ошибочное заключение, т. к. этот минимум получен ценой значительного отклонения от минимумов исходных критериев (пусть это будет точка C). Да и физический смысл этого J_{n+1} критерия не определен. Можно для отыскания единственной точки на множестве Парето поступить следующим образом. Принять в качестве таковой ближайшую к так называемой «утопической», в смысле некоторой меры, например квадратичной.

Тем не менее ясно, что нужное (нельзя сказать оптимальное, ибо это, наверное, не совсем корректно) решение следует искать на множестве Парето. Для этого необходимо ввести или получить дополнительную информацию.

2.2.1. Метод априорного ранжирования

Дополнительная информация в виде ранжирования дает возможность предпочтения внутри множества Парето. Производится ранжирование критериев по важности, например, методом экспертных оценок — опроса специалистов, обработке их мнения, например, простого осреднения. Очевидно, что оптимизацию следует начинать с критерия 1-го ранга:

$$J_1(\bar{u}) \rightarrow \min_{\bar{u} \in U} .$$

Ясно, что это решение будет принадлежать множеству Парето. Может оказаться, что решение этой задачи образует подмножество управлений, а не одну точку. Ему соответствует множество критериев S'_1 (рис. 2.2). Тогда в этом подмножестве можно оптимизировать второй критерий:

$$J_2(\bar{u}) \rightarrow \min_{\bar{u} \in U_1} .$$

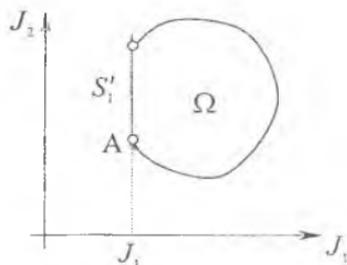


Рис. 2.2. Подмножество S_1'

Если же решение этой задачи также образует некоторое подмножество, то процесс продолжается дальше. Однако, как нетрудно заметить, этот процесс нельзя продолжать долго, т. к. на определенном этапе подмножество будет состоять только из одной точки. К сожалению, такая ситуация складывается довольно быстро и уже для 1-го критерия. Поэтому, в общем-то, этот метод бесперспективен.

Для того чтобы иметь некоторую свободу, т. е. иметь какое-то подмножество управлений, а не одну точку в пространстве управления, необходимо сделать определенную уступку и не требовать минимизации критерия. Это значит, что нужно ограничиться компромиссным решением, которое допустимо отличается от оптимального \bar{u}_1^* . Эта идея положена в основу следующего метода.

2.2.2. Метод последовательных уступок

По каждому из $n-1$ первых критериев (исключая последний) назначаются допустимые уступки $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$, которые определяют величину допустимого (с точки зрения задачи) уклонения каждого критерия от оптимального. Здесь также величина уступок определяется экспертным образом.

Очевидно, что каждая уступка определяет некоторое множество S_1, \dots, S_{n-1} , удовлетворяющих неравенству

$$J_i(\bar{u}) < J_i^* + \delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

На рис. 2.3 показаны множества S_1, S_2 для случая $n \geq 2$.

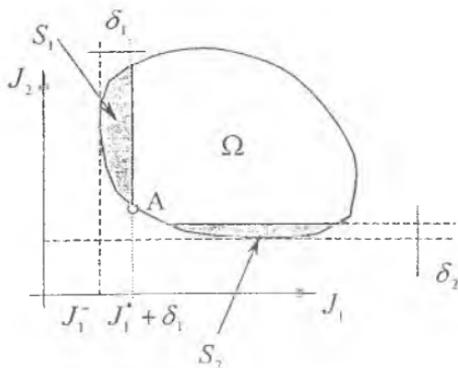


Рис. 2.3. Множества S_1, S_2

Если подмножества управлений U_i найдены для всех $n-1$ первых критериев, то остается найти экстремум n -го критерия в области пересечения подмножеств управления:

$$U_n = \prod_{i=1}^{n-1} U_i, \quad J_n(\bar{u}) \rightarrow \min_{\bar{u} \in U_n}$$

При $n=2$ имеем решение двухкритериальной задачи (точка A на рис. 2.3). При $n>2$ множество U_n может оказаться пустым (этот случай показан на рисунке). В этом случае выбирают новые уступки и повторяют действия. Уступки нужно делать с конца, т. е. для менее важных критериев.

Здесь также могут возникнуть трудности в назначении δ_i и построении областей пересечения множества управлений.

2.2.3. Синтез глобального критерия

Идея этого метода проста: необходимо построить глобальный скалярный критерий качества вида

$$J = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J_i, \quad J = \sum_{i=1}^n C_i J_i, \quad J = \sqrt{\sum_{i=1}^n (C_i J_i)^2}.$$

Здесь $C_i = \text{const}$, некоторые весовые коэффициенты, учитывающие «долю» существенности каждого критерия в глобальном.

Основной трудностью метода является определение весовых коэффициентов. Эта операция формально не определяется и, таким образом, связана с внесением в задачу субъективного и не всегда обоснованного произвола.

2.2.4. Выделение главного критерия

Задача ставится как задача экстремизации по одному главному критерию с учетом ограничения по остальным. Такая постановка более «инженерна», чем предыдущие. Недостатком является то, что не всегда удается отдать предпочтение какому-либо одному критерию и задачи с ограничениями типа неравенств являются трудно подчиняющимися при численном решении. Кроме того, процедура выделения главного критерия из заданной совокупности аналогична процедуре ранжирования.

Далее рассмотрим вопрос решения задач проектирования механических систем, которые во многих случаях практики оказываются более привлекательными, чем рассмотренные.

3. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Формулировка основной задачи управления

При проектировании (синтезе) механической системы, особенно на ранней стадии, перед проектировщиком обычно ставится следующая задача.

Задается ряд характеристик системы или критериев $J_i, i=1 \dots n$, например время переходного процесса, перегрузки в различных сечениях аппарата, перерегулирование, точность и т. д. Все эти критерии имеют вполне конкретный физический смысл, и каждый из них характеризует одну важную сторону системы, а система в целом описывается всей их совокупностью.

В технических условиях проекта указывается допустимая область изменения каждого критерия, т. е. задаются, например, неравенства вида

$$a_i \leq J_i \leq A_i, i = 1 \dots n, \quad (3.1.1)$$

которым должна удовлетворять система. Если они выполняются, то система приемлема, если же нарушается хотя бы одно неравенство, система считается неудовлетворительной. Здесь и рассматривается синтез управления с точки зрения удовлетворения техническим требованиям, задаваемым в виде ограничений типа неравенств на критерии (показатели) системы. Такую задачу, в общем-то, и требуется решить проектировщику.

В дальнейшем для конкретизации будем рассматривать систему (процесс), которую назовем динамической, т. е. математическим описанием её функционирования являются, например, обыкновенные дифференциальные уравнения, записанные в нормальной форме Коши:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{a}), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}^0, t \in [0, T]. \quad (3.1.2)$$

Здесь: t – независимая переменная (не обязательно время),

$\bar{x} \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ – вектор функция фазовых координат системы (вектор – функция состояния),

$\bar{f} \equiv \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^T$ – вектор – функция обобщенной силы,

$\bar{u} \equiv \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ – вектор – функция управления,

$\bar{a} \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$ – вектор управляющих параметров.

Будем считать, что управляющие воздействия принадлежат некоторой выпуклой замкнутой области r – мерного евклидова пространства, т. е. $\bar{u} \in U^2$, $\bar{a} \in A^m$ и что $u_i = u_i(t)$ – компоненты вектор – функции, представляющие собой кусочно-непрерывные ограниченные функции с конечным числом точек разрыва 1-го рода. Функции f_i непрерывны и непрерывно дифференцируемы по совокупности своих аргументов. Требуется найти такие управления \bar{u} , \bar{a} , чтобы решение уравнения (3.1.2) удовлетворяло заданным неравенствам (3.1.1), т. е. требуется синтезировать управление, удовлетворяющее равенствам (3.1.2) и неравенствам (3.1.1). Такая постановка задачи синтеза управления во многих практических случаях является наиболее приемлемой, т. к. она представляет собой математическую запись постановки физической задачи проектирования системы в ее исходной трактовке. Поэтому эту задачу и можно назвать основной задачей управления (ОЗУ) [3].

Необходимо отметить, что если эта задача имеет решение, то обычно оно не единственное, а целое множество, удовлетворяющее требованиям ТУ. Обычно неединственность решения задачи считается недостатком метода, его отрицательным признаком. Это, по-видимому, идет еще с того времени, когда всегда старались наряду с доказательством существования решения

получить условие единственности решения дифференциальных уравнений. Но здесь, в нашем случае, проектировщика не интересует единственное решение, которое в принципе и невозможно реализовать, т. к. любая модель только приближенно отражает действительное состояние. Здесь проектировщика как раз интересует целое множество решений и целая область управлений, которые удовлетворяют основным требованиям к системе. Всегда существует область допусков, область нечувствительности значений параметров системы, с точки зрения требований, предъявляемых к ней. Задача в такой постановке дает такую область решений, которая удовлетворяет заданным требованиям. Проектировщик, имея свободу выбора при решении основной задачи управления, может практически распорядиться ею, сообразуясь с дополнительными требованиями. Например, имея свободу выбора параметров, т. е. неединственность решения основной задачи управления, можно построить различные экстремальные управления, их расположение в области решения задачи. Если проектировщика будут интересовать такие предельные или крайние случаи, как достижение экстремума некоторого критерия, то методы решения основной задачи управления позволяют проанализировать эти случаи.

3.2. Типы основной задачи управления

Рассмотрим несколько примеров задач типа основной задачи управления, которые можно сформулировать для динамического процесса (3.1.2).

3.2.1. Задача попадания траектории процесса в заданную область

В этом случае критериями будут значения фазовых координат в конце процесса, т. е. $J_1 = x_1(T)$ (рис. 3.1).

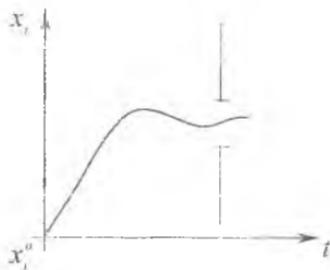


Рис. 3.1. Ограничение на траекторию

Условия попадания траектории в заданную область можно записать в виде $a_i \leq x_i(t) \leq A_i$, $i = 1, \dots, n$.

3.2.2. *Задача нахождения траектории процесса в фиксированный момент времени $t_1, t_k = T_k$ через заданные области*

Критериями процесса в этом случае будут значения фазовых координат в указанные моменты времени, т. е. $J_{ij} = x_i(t_j)$, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots k$ (рис. 3.2.).

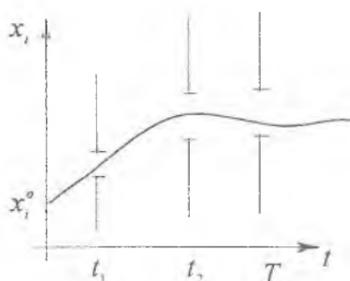


Рис. 3.2. Ограничение на траекторию

Условия прохождения траектории через заданные области («ворота») можно представить в форме $a_{ij} \leq J_{ij} \leq A_{ij}$.

3.2.3. *Задача прохождения траектории процесса через «трубку»*

Условия, которые необходимо выполнить в этой задаче, запишутся в виде $a_i \leq J_{it} \leq A_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ (рис. 3.3).

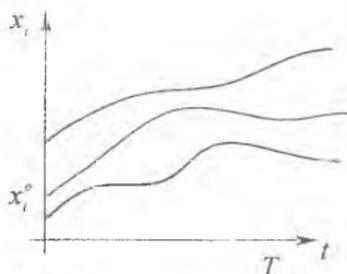


Рис. 3.3. Ограничение на траекторию

Здесь индекс i меняется дискретно, а индекс t (время) непрерывно. Если выполнение последнего условия в каждый момент времени заменить выпол-

нением его в дискретные моменты времени, то получим конечное число критериев (случай 3.2.2). В дальнейшем, для простоты, а вместе с этим не теряя общности подхода, будем рассматривать случай конечного числа критериев и неравенств.

Для геометрической интерпретации задачи допустим, что вектор управляющих переменных u и вектор – функционал J имеют по две компоненты u_1, u_2 и J_1, J_2 . Управление принимает свое значение из выпуклой области U и вектор – функционал J из прямоугольной области A , рис. 3.4. Задавшись возможными $u \in U$ и используя уравнения процесса, на плоскости (J_1, J_2) получим некоторую область B (т. е. область U при отображении переходит в область B). Пересечение областей A и B представляет область выполнения ограничений на критерии J при допустимых условиях $u \in U$. При заданной области управлений U реализуется только область значений критерия $Au = A \cap B$. Отыскивая область U_A , которая согласно управлениям и критериям системы отображается в область $Au = A \cap B$, получим все возможные решения основной задачи управления. Решение основной задачи управления сводится к построению области U_A . Только при управлениях $u \in U_A$ выполняются неравенства и критерии, т. е. система находится в области $Au = A \cap B$.

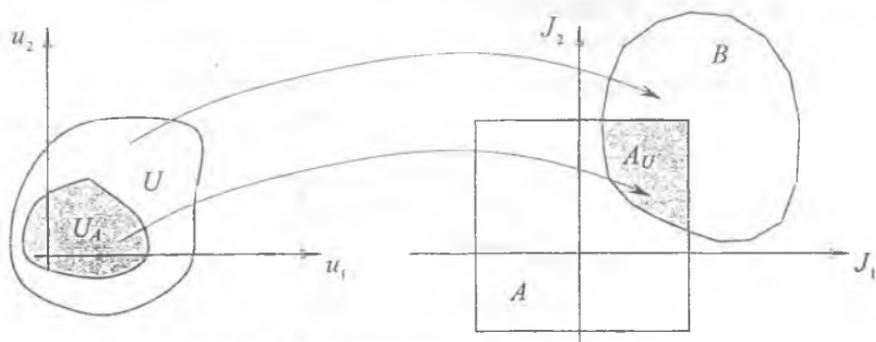


Рис. 3.4. Геометрическая картина задачи

3.3. Эквивалентные преобразования задачи и условия существования решения

Вместо функционалов $J_i[\bar{u}]$ введем безразмерные по формулам

$$\gamma'_i[u] = \frac{A_i - J_i[\bar{u}]}{A_i - a_i}; \quad \gamma''_i[u] = \frac{J_i[u] - a_i}{A_i - a_i}. \quad (3.3.1)$$

Величина γ'_i характеризует относительное удаление J_i от границы A_i , а γ''_i - от границы a_i . Сумма γ'_i и γ''_i равняется единице, т. е.

$$\gamma'_i[u] + \gamma''_i[u] = 1. \quad (3.3.2)$$

Из выражения (3.3.1) следует, что если

$$a_i \leq J_i[u] \leq A_i, \quad (3.3.3)$$

$$\text{то } 0 \leq \gamma'_i[u] \leq 1, \quad 0 \leq \gamma''_i[u] \leq 1. \quad (3.3.4)$$

Используя (3.3.2) и (3.3.3), получим, что если

$$0 \leq \gamma'_i[u], \quad 0 \leq \gamma''_i[u], \quad (3.3.5)$$

$$\text{то } \gamma'_i[u] \leq 1, \quad \gamma''_i[u] \leq 1, \quad (3.3.6)$$

и выполняются неравенства (3.3.3).

Аналогично из (3.3.6) следуют неравенства (3.3.3) и (3.3.5). Таким образом, неравенства (3.3.3), (3.3.5), (3.3.6) эквивалентны. Равенство (3.3.2) можно записать в виде

$$\gamma'_i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \gamma''_i. \quad (3.3.7)$$

Это равенство определяет расположение функционалов на числовой оси, а именно: при одинаковом управлении функционалы расположены на числовой оси симметрично относительно точки 0,5, (рис. 3.5).

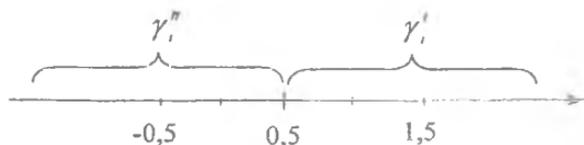


Рис. 3.5. Расположение функционалов по числовой оси

Если, например, при каком-либо управлении окажется, что $\gamma'_i=3$, то должно быть $\gamma''_i=-2$, или если $\gamma'_i=0,7$, то $\gamma''_i=0,3$.

Отсюда видно, что в каждой паре функционалов при одинаковом управлении всегда один больше другого, кроме единственного случая, когда $\gamma'_i=\gamma''_i=0,5$. Ясно, что в этом случае фазовая траектория проходит как раз через середину между верхним и нижним ограничением.

В дальнейшем вместо (3.3.3) будем пользоваться неравенствами (3.3.6). Но предварительно введем обозначения:

$$\begin{aligned}\gamma_s[u] &= \gamma'_s[u], \quad s = 1 \dots n, \\ \gamma_s[u] &= \gamma''_s[u], \quad s = n + 1 \dots 2n.\end{aligned}$$

Тогда неравенства (3.3.6) запишутся в виде

$$\gamma_s[u] \leq 1, \quad s = 1 \dots 2n. \quad (3.3.8)$$

Суть этих преобразований в том, что двухсторонние неравенства (3.3.3) заменены односторонними, функционалы безразмерными и предел изменения одинаков и равен единице.

Основная задача управления запишется теперь в виде

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad t \in [0, T], \\ \gamma_s[u] \leq 1, \quad s = 1 \dots 2n. \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Решение этой задачи, если оно существует, обычно не единственное. Задача может и не иметь решения. При этом ограничения, наложенные на \bar{u} и \bar{y}_s , противоречивы.

Далее рассмотрим условия существования решения ОЗУ.

Для иллюстрации смысла теоремы существования решения ОЗУ и метода ее решения на основе этой теоремы рассмотрим частный случай задачи, когда система характеризуется только двумя критериями $\gamma_1[u]$, $\gamma_2[u]$ и одним скалярным управляющим параметром u , который удовлетворяет неравенству $u_1 \leq u \leq u_2$. Зависимости $\gamma_1[u]$, $\gamma_2[u]$ и область изменения u представлены на рис. 3.6.

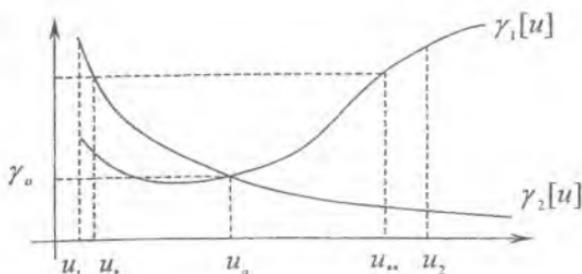


Рис. 3.6. График изменения критериев

Критерии $\gamma_1[u]$, $\gamma_2[u]$ не должны превышать единицы. Область значений, при которых выполняются условия $\gamma_1 \leq 1$, $\gamma_2 \leq 1$, задается неравенствами, рис. 3.6.:

$$u_1 \leq u \leq u_2. \quad (3.3.10)$$

Выражение (3.3.10) определяет решение ОЗУ, причем все множество решений. Характерным является значение γ_0 , которое согласно рис. 3.6 соответствует $\gamma_1[u] = \gamma_2[u] = \gamma_0$, но с другой стороны, величина γ_0 равняется:

$$\gamma_0 = \min_{u_1 \leq u \leq u_2} \max_{s=1,2} \gamma_s[u]. \quad (3.3.11)$$

Сначала фиксируем значение u и находим наибольшее из двух величин γ_1 и γ_2 . Оно равняется $\gamma_2[u]$, если $u \in [u_0; u_2]$, и $\gamma_1[u]$, если $u \in [u_1; u_0]$. Далее минимизируем эту величину по u , и найдем γ_0 при $u = u_0$. Если $\gamma_0 = 1$, то существует решение ОЗУ, причем единственное, равное $u = u_0$. Если $\gamma_0 < 1$, то решение ОЗУ существует и оно не однозначное. При $\gamma_0 > 1$ решения ОЗУ не существует. В этом случае синтез системы невозможен.

Полученное условие существования решения ОЗУ $\gamma_0 < 1$ можно использовать для поиска решения ОЗУ. Например, зададимся каким-либо значением управления $u = u^{(l)}$ из отрезка $[u_1, u_2]$. Вычисляем $\gamma_1^{(l)} = \gamma_1^{(l)}[u^{(l)}]$ и $\gamma_2^{(l)} = \gamma_2^{(l)}[u^{(l)}]$. Если $\gamma_1^{(l)} < 1$ и $\gamma_2^{(l)} < 1$, то найдено одно решение $u = u^{(l)}$. Если же хотя бы одно из них больше единицы, то $u^{(l)}$ не является решением ОЗУ. Для нахождения следующего приближения определим $\Gamma = \max[\gamma_1^{(l)}, \gamma_2^{(l)}]$.

Пусть $\Gamma = \gamma_2^{(1)} = \gamma_2^{(1)}[u^{(1)}]$. Следующее приближение $u^{(2)} = u^{(1)} + \delta u^{(1)}$ определим из условия уменьшения $\gamma_2[u]$, например, используя метод градиентного спуска, т. е.

$$\delta \gamma_2 = \left(\frac{\partial \gamma_2[u]}{\partial u} \right)_{u=u^{(1)}}, \delta u^{(1)} < 0.$$

Задаваясь малым параметром ε , характеризующим шаг приближения, согласно методу градиентного спуска, получим

$$\delta u_2 = -\varepsilon \left(\frac{\partial \gamma_2[u]}{\partial u} \right)_{u=u^{(1)}}, \varepsilon > 0.$$

Теперь вычислим $\gamma_1^{(2)} = \gamma_1[u^{(2)}]$ и $\gamma_2^{(2)} = \gamma_2[u^{(2)}]$ при управлении $u^{(2)} = u^{(1)} + \delta u^{(1)}$ и сравним $\gamma_1^{(2)}$, $\gamma_2^{(2)}$ с единицей. Если оба $\gamma_1^{(2)}$, $\gamma_2^{(2)}$ меньше единицы, то $u^{(2)}$ одно из решений ОЗУ. В противном случае находим $\max[\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}]$ и производим следующий шаг градиентного спуска. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получим $\gamma_s[u] \leq 1$, $s = 1, 2$ или же не найдем $\gamma_o = \min_u \max_s \gamma_s[u]$, или не убедимся, что $\gamma_o > 1$, т. е. решения ОЗУ не существует.

Но если функция имеет несколько максимумов, то метод градиентного спуска, вообще говоря, гарантирует нахождение только относительного минимума. Для утверждения того, что ОЗУ не имеет решения, следует найти абсолютный минимум выражения $\max_s \gamma_s[u]$.

Условие

$$\min_{u \in U} \max_{s=1 \dots 2n} \gamma_s[u] \leq 1 \quad (3.3.12)$$

при выполнении связей (3.3.12) является необходимым и достаточным условием существования решения ОЗУ.

Достаточность. Допустим, что существует решение системы (3.1.2), удовлетворяющее условию (3.3.12). Используя (3.1.2) для каждого управления $u \in U$, вычислим $\gamma_s[u]$ и найдем $\Gamma[u] = \max_{s=1, 2, \dots, 2n} \gamma_s[u]$.

Функционал $\Gamma[u]$ определяется на множестве допустимых управлений $u \in U$ и представляет собой на каждом фиксированном управлении наибольшее значение функционалов $\gamma_s[u], s = 1, 2, \dots, 2n$. Далее, решая задачу минимизации функционала $\Gamma[u]$ по управлению u , находим допустимое управление $u = u_o$, при котором функционал $\Gamma[u]$ принимает наименьшее значение $\Gamma_o = \Gamma[u_o] = \min_{u \in U} \Gamma[u]$, причем $\Gamma_o \leq 1$. Тогда существует, по крайней мере, одно управление u_o , при котором все $\gamma_s[u]$ не превосходят единицы. Следовательно, управление u_o дает решение ОЗУ.

Необходимость. Допустим, что условие (3.3.12) нарушается, т. е. $\Gamma_o > 1$. Но $\max_s \gamma_s[u]$ и $\min_{u \in U} \max_s \gamma_s[u]$ совпадают с одним из значений какого-либо из функционалов $\gamma_s[u]$, например $\min_{u \in U} \max_s \gamma_s[u] = \gamma_\kappa[u_o]$.

Это означает, что, по крайней мере, для одного функционала $\gamma_\kappa[u]$ из заданной совокупности условий $\gamma_s[u] \leq 1$ при управлении $u = u_o$ не выполняется. Тем более оно не выполняется для какого-нибудь функционала при других значениях управления.

Примечание: Если функционалы $\gamma_s[u]$, кроме индекса s , зависят от непрерывного индекса τ , (например, непрерывные моменты времени $t \in [0, T]$, т. е., если $\gamma_{s,\tau}[u], \tau \in [0, T], s = 1, 2, \dots, 2n$, то условие (3.3.12) запишется в виде

$$\min \max_{s,\tau} \gamma_{s,\tau}[u] \leq 1, \text{ где } u \in U, s = 1, 2, \dots, 2n, \tau \in [0, T].$$

3.4. Основная оптимизационная и минимаксная задачи

Наряду с ОЗУ, записанной соотношениями (3.3.9), рассмотрим минимаксную задачу:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t), \bar{x}(0) = \bar{x}_o, u \in U, t \in [0, T], \quad (3.4.1)$$

$$\Gamma_o = \min_u \max_t \gamma_s[u], \quad (3.4.2)$$

где требуется найти такое управление u при заданных связях, которое обеспечивает минимакс выражения $\gamma_s[u]$, т. е. требуется найти Γ_o .

Задачи (3.3.9) и (3.4.1) разные, и их решения не совпадают. Но, тем не менее, существование решения минимаксной задачи (3.4.1), удовлетворяющее условию $\Gamma_0 \leq 1$, гарантирует существование решения ОЗУ, а построение решения ее позволяет найти одно из решений ОЗУ.

Управление $u = u_0$, являющееся решением минимаксной задачи, по сравнению с другими управлениями гарантирует наибольшее удаление даже наихудшего $\gamma_s[u]$ от границы, равной единице.

Только одно из допустимых решений ОЗУ совпадает с решением минимаксной задачи с условием $\Gamma_0 \leq 1$, но если одна задача имеет решение, то имеет решение другая, и наоборот. Эти задачи эквивалентны в смысле существования их решения, хотя сами решения не полностью совпадают. Отметим, что минимаксная задача является более определенной и конкретной математической задачей, для нее легче разработать приближенный целенаправленный поиск решения.

В дальнейшем поиск решения ОЗУ будем связывать с построением решения минимаксной задачи. Но при решении ОЗУ не обязательно находить минимум функционалов $\gamma_s[u]$.

Алгоритмы решения ОЗУ можно использовать для решения оптимизационных задач. Например, требуется максимизировать функционал $J_l[u]$ при условиях

$$a_v \leq J_v[u] \leq A_v, \quad v = 1 \dots n. \quad (3.4.2)$$

Для решения этой задачи возьмем последовательность k основных задач управления, каждая из которых формулируется следующим образом: найти $u \in U$, при котором выполняются условия (3.1.2), (3.4.2) и

$$a_{l(k)} \leq J_l[u] \leq A_l, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.4.3)$$

где A_l – заданная постоянная, если J_l ограничивается сверху, или $A = \infty$, если J_l сверху не ограничивается; $a_{l(k)}$ – заданные постоянные для каждого k .

Величины $a_{l(k)}$ с ростом номера могут дойти до значения, равного A_l . Следовательно, все $a_{l(k)} \leq A_l$. Сначала задаемся достаточно малым значением

$a_{1(k)}$, таким, что при условии (3.4.3) для $k=1$ ОЗУ имела решение. Вообще говоря, постановка оптимизационной задачи имеет смысл только в том случае, если ОЗУ имеет решение.

Пусть найдено какое-то решение ОЗУ, так что за $a_{1(1)}$ естественно принять значение a_1 для этой задачи ОЗУ. Увеличим $a_{1(1)}$ на некоторую величину $\Delta a_{1(1)}$ и обозначим:

$$a_{1(2)} = a_{1(1)} + \Delta a_{1(1)} < A_1.$$

Найдем решение ОЗУ при условии (3.4.3) для $k=2$. Далее найдем решение следующей ОЗУ и т. д. При этом последовательно получаем

$$a_{1(k+1)} = a_{1(k)} + \Delta a_{1(k)} < A_1; \Delta a_{1(k)} > 0.$$

Наибольшее значение $a_{1(k)}$, при котором еще выполняются условия (3.4.1), (3.4.2), и будет искомым максимальным значением a_1 . Если $a_{1(k_0)} = \max a_1$, то при $a_1 < \max a_1$ решение ОЗУ существует, а при $a_1 > \max a_1$ - не существует. Этот признак служит условием определения $\max a_1$. В частности, может быть $\max a_1 = A_1$. Точность и сложность решения оптимизационной задачи зависит от величины шага $\Delta a_{1(k)}$. Можно рекомендовать следующие присмы:

1. Решая ОЗУ при $a_{1(1)}$, вычисляем J_1 при полученном управлении u_1 ; его величину принимаем за $a_{1(2)}$, т. е. $a_{1(2)} = J_1[u_1]$. Далее решаем ОЗУ при $a_{1(2)}$, находим управление u_2 и вычисляем $J_1[u_2]$. Полагаем $a_{1(3)} = J_1[u_2]$ и т. д., пока не получим $a_{1(k)} = A_1$ или не перестанет существовать решение ОЗУ.

2. Интервал (a_1, A_1) разделяем на k равномерных участков и принимаем:

$$a_{1(k)} = a_1 + \frac{A_1 - a_1}{k} (k-1), \quad k = 1, 2, \dots, k+1.$$
 Задача решается последовательно для ряда значений $a_{1(k)}$, $k=1, 2, \dots, k+1$. Первое же значение $a_{1(k)}$, при котором ОЗУ не имеет решения, дает решение оптимизационной задачи. Для уточнения

значения $\max a_j$ вблизи этого значения интервал следует разбивать на более мелкие участки.

3. Задача ОЗУ решается при $a_{1(i)}$ и A_j . Далее эта задача решается последовательно для значений:

$$a_{1(2)} = \frac{a_{1(1)} + A_1}{2}, a_{1(3)} = \frac{a_{1(2)} + A_1}{2}, a_{1(k+1)} = \frac{a_{1(k)} + A_1}{2}, \text{ и т. д.}$$

Отметим, что для каждой конкретной оптимизационной задачи построение последовательности ОЗУ может быть специфичным.

Таким образом, оптимизационная задача сводится к построению решения последовательности ОЗУ.

Аналогично рассмотренной максимизации a_j решается минимизация или максимизация по остальным критериям.

В полное решение ОЗУ следует включить построение всевозможных частных решений, оптимизацию по всем критериям и исследование влияния изменения границ a_s, A_s на решение ОЗУ. При этом любая из оптимизационных задач включается как частный случай или частное решение ОЗУ. Исследование влияния изменения границ можно совместить с оптимизационной задачей.

Таким образом, полное решение ОЗУ позволяет получить всестороннее представление о возможности исследуемой системы. Часто при заранее заданных технических условиях задача не имеет решения. Приходится менять граничные значения a_s, A_s в допустимых разумных пределах, т. е. исследовать задачу на изменение граничных значений.

Ввиду сложности задачи и вычислительной трудности построение полного решения ОЗУ не всегда удается, поэтому часто ограничиваются построением только одного или нескольких решений.

3.5. Применение метода градиентного спуска к решению ОЗУ

Для приближенного решения оптимизационной задачи часто применяют метод градиентного спуска или различные его модификации [7, 8, 15] –

метод случайного поиска и т. д. Эти методы применимы при решении минимаксной задачи и, следовательно, ОЗУ. Минимаксная задача понимается как минимизация по управлению u функционала

$$\Gamma[u] = \max_s \gamma_s[u], s = 1 \dots 2n,$$

который при каждом допустимом управлении $u \in U$ совпадает с одним из функционалов $\gamma_1[u]$ или $\gamma_2[u]$, ..., или $\gamma_{2n}[u]$. Так что при применении метода градиентов спуск осуществляется по градиенту одного из функционалов $\gamma_s[u]$, $s = 1 \dots 2n$ в каждом шаге, например, по $\gamma_k[u]$. Но после выполненного шага при новом управлении максимум $\gamma_s[u]$, $s = 1 \dots 2n$ может достигаться при другом индексе $s \neq k$, т. е. другом функционале, например $\gamma_s[u]$, $s \neq k$.

Таким образом, при применении метода градиентов:

- 1) задаемся управлением $u^{(0)}$ нулевого приближения;
- 2) вычисляем значения всех функционалов $\gamma_1[u^{(0)}], \gamma_2[u^{(0)}], \dots, \gamma_{2n}[u^{(0)}]$ при управлении $u^{(0)}$; если $\gamma_s[u^{(0)}] \leq 1$, то одно из решений ОЗУ найдено, в противном случае продолжаем решение задачи;

3) находим наибольший из этих функционалов

$\max_s \gamma_s[u^{(0)}] = \Gamma[u^{(0)}]$, $s = 1, 2, \dots, n$; пусть это k -й функционал, т. е.

$$\Gamma[u^{(0)}] = \gamma_k[u^{(0)}];$$

4) определяем первую вариацию $\delta\Gamma$ функционала $\Gamma[u] = \gamma_k[u]$ в точке $u = u_0$;

5) задаваясь малым шагом спуска, из условия $\delta\Gamma < 0$ определяем поправку $\delta u^{(0)}$ на управление $u^{(0)}$;

6) находим первое приближение управления $u^{(1)} = u^{(0)} + \delta u^{(0)}$;

7) вычисляем функционалы $\gamma_1[u^{(1)}], \gamma_2[u^{(1)}], \dots, \gamma_{2n}[u^{(1)}]$;

8) проверяем, выполняется ли условие $\gamma_s[u^{(1)}] \leq 1$ для всех $s = 1, 2, \dots, 2n$. если выполняется, то это будет одним из решений ОЗУ.

Дальнейший ход вычислений существенно зависит от поставленной цели и сложности задачи. Если не требуется подробного изучения всех возможностей системы или процесс вычисления слишком сложен, то расчет на этом можно прекратить – одно решение ОЗУ найдено. Если целью является подробное изучение всех решений ОЗУ, то процесс вычислений можно продолжить до нахождения минимакса, что гарантирует наибольшее удаление функционала от границы. Если же условие $\gamma_s[u^{(1)}] \leq 1$ нарушается хотя бы для одного из индексов $s=1, 2, \dots, 2n$, то процесс решения продолжается, начиная с п. 3 до тех пор, пока не выполняется $\gamma_s[u] \leq 1$ для всех $s=1, 2, \dots, 2n$ или не найдем $\Gamma_o = \min_u \max_s \gamma_s[u]$. Если $\Gamma_o > 1$, то решения ОЗУ не существует. В этом случае продолжить поиск решения ОЗУ можно только изменяя те или иные условия исходной задачи. Следует заметить, что градиентный спуск часто осуществляется вблизи множества управлений, удовлетворяющих равенству типа $\gamma_p[u] = \gamma_q[u]$, т. е. вблизи пересечения двух функционалов, вблизи «оврага». Если спуск осуществить по одному функционалу в каждом шаге, то это приведет к перескакиванию с одного «берега» на другой «берег» «оврага», с функционала $\gamma_p[u]$ на $\gamma_s[u]$, и наоборот. Это сильно замедляет ход спуска, иногда почти останавливает. В таких случаях рекомендуется спуск «по дну оврага», т. е. по множеству $\gamma_p[u] = \gamma_s[u]$ или параллельно градиенту этого множества, если удастся его обнаружить. Это значительно ускоряет процесс отыскания решения задачи.

Значение $\Gamma_o = \min_u \max_s \gamma_s[u]$ совпадает со значением одного или нескольких функционалов $\gamma_s[u]$, $s=1 \dots 2n$. Пусть $\Gamma_o = \gamma_k[u_o]$, где индекс k и управление u_o доставляет минимакс функционалу. Тогда, учитывая, что

$$\gamma_k[u_o] = \frac{J_k[u_o] - a_k}{A_k - a_k}, \text{ если } k > n,$$

$$\gamma_k[u_o] = \frac{A_k - J_k[u_o]}{A_k - a_k}, \text{ если } k \leq n,$$

и полагая $\gamma_k[u_0] = 1$ или $\gamma_k[u_0] \leq 1$, получим критерий существования решения ОЗУ, т. е. неравенства

$$\frac{J_k[u_0] - a_k}{A_k - a_k} \leq 1, \text{ при } k > n,$$

$$\frac{A_k - J_k[u_0]}{A_k - a_k} \leq 1, \text{ при } k > n,$$

определяющие область изменения значений a_k и A_k , при которых ОЗУ имеет решение.

Таков путь решения ОЗУ методом поиска минимакса. Следует отметить, что для нахождения решения ОЗУ нет необходимости определения минимакса, достаточно выполнения неравенства $\gamma_s[u] \leq 1$ для всех $s=1, 2 \dots 2n$. Задача минимакса служит только для построения алгоритма решения ОЗУ, т. е. является вспомогательной задачей.

3.6. Стохастическая постановка задачи

Рассмотрим процессы, которые описываются системой

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{b}, t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.6.1)$$

Эта система содержит случайный вектор параметров \bar{b} и случайные начальные условия $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, заданные своими вероятностями и параметрами распределения. Управление $\bar{u} = \bar{u}(t)$ - детерминированные кусочно-непрерывные функции или параметры, принимающие свои значения из выпуклой замкнутой или открытой области U . Для каждой реализации параметров, начальных условий $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ и заданного управления $\bar{u} = \bar{u}(t)$ система (3.6.1) имеет единственное решение. Теперь условия

$$a_s \leq J_s \leq A_s, \quad s = 1 \dots n, \quad (3.6.2)$$

будут выполняться только с некоторой вероятностью

$$P_s[u] = P[a_s \leq J_s \leq A_s], \quad s = 1 \dots n, \quad (3.6.3)$$

где $P[a_s \leq J_s \leq A_s]$ - вероятность попадания значения функционала J_s в отрезок $[a_s, A_s]$. Вероятность $P_s[u]$ зависит от выбора управления \bar{u} .

Определение управления $\bar{u} \in U$ из условия, что вероятности $P_s[u]$ не меньше заданных допустимых $\max P_{sg}$, т. е.

$$P_s[u] \geq P_{sg} \quad (3.6.4)$$

назовем стохастической ОЗУ, (СОЗУ).

Пронормируем вероятности $P_s[u]$ по формуле

$$\gamma_s = \frac{P_{sg}}{P_s[u]}, \quad (3.6.5)$$

и условие (3.6.4) запишем в виде

$$\gamma_s \leq 1, \quad s = 1 \dots n. \quad (3.6.6)$$

Теорема. Выполнение условия

$$\min_u \max_s \gamma_s[u] \leq 1, \quad \bar{u} \in U, s = 1 \dots n, \quad (3.6.7)$$

является необходимым и достаточным для существования решения СОЗУ.

Доказательство этой теоремы для СОЗУ приводить не будем, поскольку оно является повторением аналогичной теоремы для детерминированной ОЗУ.

Допустим, найдено решение $\bar{u} = \bar{u}_o$ минимаксной задачи $\Gamma_o = \min_{\bar{u}} \max_s \gamma_s[\bar{u}] = \Gamma_o[\bar{u}]$. При $\bar{u} = \bar{u}_o$ наименьшая вероятность достигает наибольшего значения, т. е. $P_o = \min_{\bar{u}} \max_s P_s[\bar{u}]$.

Таким образом, P_o представляет собой наибольшее гарантированное значение вероятности, причем неравенства (3.6.2) при управлении $\bar{u} = \bar{u}_o$ будут выполняться с вероятностью, не меньшей, чем P_o . Но при решении СОЗУ достаточно удовлетворения неравенств (3.6.2) или, что одно и то же, – (3.6.6).

Основная трудность решения СОЗУ заключается в вычислении вероятностей (3.6.3). Это общая трудность всех динамических стохастических задач.

Для вычисления $P_s[u]$ (3.6.3) можно применить метод статистических испытаний. Введем характеристическую функцию

$$\delta_s[\bar{b}, \bar{u}] = \begin{cases} 1, & \text{если } J_s \in [a_s, A_s], \\ 0, & \text{если } J_s \notin [a_s, A_s]. \end{cases} \quad (3.6.8)$$

Проводя большое число испытаний (расчетов) N , получим соответственные числа $\delta_s^{(k)}$, где k – номер испытания. Тогда, приближенно, при достаточно большом N , получим

$$P_s[\bar{u}] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_s^{(k)}. \quad (3.6.9)$$

При этом должны быть известны вероятности распределения параметров \bar{b} и начальных условий \bar{x}_0 , которые реализуются методом Монте-Карло. Решая систему (3.6.1) при каждой реализации \bar{b} и \bar{x}_0 , вычисляем J_s , $s=1 \dots n$, и значение характеристической функции δ_s . После достаточно большого числа испытаний вычисляем (3.6.9).

Для заданного управления \bar{u} таким путем вычислим вероятности $P_s[\bar{u}]$, $s=1 \dots n$. По формуле (3.6.5) находим γ_s , $\max_s \gamma_s[\bar{u}]$, $s=1 \dots n$. Далее, применяя метод градиентного спуска или какую-нибудь его модификацию, улучшаем управление, как это было изложено для детерминированной задачи. Снова вычисляем γ_s при новом управлении, находим $\max_s \gamma_s[\bar{u}]$, $s=1 \dots n$, и улучшаем управление до тех пор, пока не получим $\max_s \gamma_s[\bar{u}] \leq 1$ или не убедимся, что $\Gamma_0 = \min_{\bar{u}} \max_s \gamma_s[\bar{u}] > 1$, т. е. решение СОЗУ не существует.

Для вычисления $P_s[\bar{u}]$ вместо формулы (3.6.9) можно использовать любой другой метод, например интерполяционный, который сокращает время счета.

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Мера положения изображающей точки

Основная задача управления заключается в выборе управляющих переменных u_j в системе (3.1.2) или системе (3.6.1), принадлежащих допустимой области U и обеспечивающих выполнение совокупности требований к управляющему процессу

$$\gamma_s[\bar{u}] \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, 2n. \quad (4.1.1)$$

Эти ограничения выделяют в $2n$ -мерном пространстве некоторую область A . При $n=1$ область A представлена на рис. 4.1.

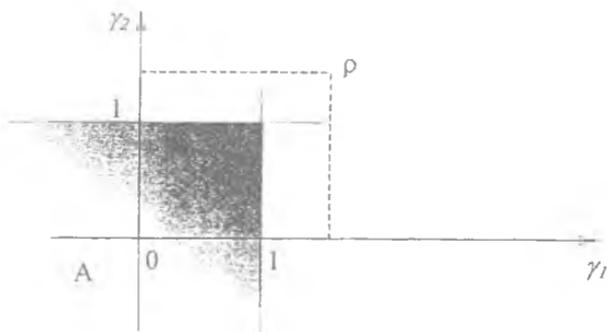


Рис. 4.1. Траектория точки Р

При заданных управляющих переменных u_j принимает некоторое конкретное значение, т. е. управляющему процессу будет соответствовать некоторая изображающая точка ρ . ОЗУ будет решена, если изображающая точка окажется в области A . Дать метод решения ОЗУ – значит дать метод целенаправленного перевода изображающей точки в область A . Численные методы решения любых задач представляют собой методы последовательного улучшения решения в смысле некоторой меры. Так, в задачах приближенного построения оптимального управления такой мерой служит минимизируемый или максимизируемый функционал. Чем меньше (или больше) значение функционала, тем лучше управление и тем ближе оно к оптимальному. Чис-

ленные методы теории оптимального управления могут быть использованы и для решения ОЗУ, если ввести меру, характеризующую удаление изображающей точки от области A . Чем меньше значение этой меры, тем ближе изображающая точка к области возможных решений ОЗУ, тем лучше решение. Используя эту меру, можно построить улучшенную последовательность решений.

Из рис. 4.1 видно, что величина

$$\rho_1 = \sum_{s=1}^{2n} k_s (\gamma_s - 1), \quad (4.1.2)$$

$$\text{где } k_s = \begin{cases} \alpha_s > 0, & \text{если } \gamma_s > 1 \\ 0, & \text{если } \gamma_s \leq 1 \end{cases}, \quad (4.1.3)$$

является мерой положения изображающей точки. В простейшем случае все $\alpha_s = 1$. Если все $\gamma_s \leq 1$, то $\rho_1 = 0$. Таким образом, абсолютный минимум меры ρ_1 равен нулю и он достигается тогда, когда изображающая точка попадает в область A . Если ОЗУ не имеет решения, то абсолютного минимума достичь невозможно. Мера ρ_1 известна в теории оптимального управления как функция «штрафа».

В первой главе было отмечено, что на практике представляет интерес найти такое управление, такие проектные параметры, при которых гарантируется наибольшее удаление изображающей точки от границ области A . Используя меру ρ_1 , нельзя найти такое решение, т. к. $\rho_1 = 0$, как только изображающая точка попадает в область A . Можно было бы, например, выбрать меру

$$\rho_2 = \sum_{s=1}^{2n} k_s (\gamma_s - \alpha), \quad (4.1.4)$$

где $0,5 < \alpha < 1$, а $k_s = 0$ при $\gamma_s \leq \alpha$.

Тогда $\rho_2 = 0$ в области $\gamma_s \leq \alpha$, что позволяет определить некоторую совокупность решений ОЗУ. Однако здесь остается неясным определение α .

Более эффективной мерой является

$$\rho[\vec{u}] = \max_s \gamma_s, \quad s = 1, 2, \dots, 2n. \quad (4.1.5)$$

Если ОЗУ поставлена корректно, то минимизируя меру ρ , можно достичь на каком-то шаге области A и тем самым найти какое-то решение. Так как минимум ρ может быть меньше единицы, то продолжая спуск по ρ , можно найти некоторое множество решений ОЗУ, а нахождение минимакса гарантирует наибольшее удаление от границ области A .

Таким образом, численное решение ОЗУ, построение улучшающей последовательности можно осуществить, минимизируя меру ρ на каждом шаге любым из известных методов минимизации.

Рассмотрим некоторые численные методы решения задачи минимизации функционалов, зависящих от совокупности постоянных (независящих от времени) параметров $u_j, j=1,2,\dots,r$. Если в исходной постановке управление является функцией времени $\bar{u} = \bar{u}(t)$, то используя различные методы аппроксимации, необходимо предварительно задать $\bar{u}(t)$ с точностью до параметров. Так, например, управление $\bar{u}(t)$ можно представить (аппроксимировать) кусочно-линейной функцией на отдельных участках или в виде разложения с неизвестными параметрами. Для этого потребуется дополнительная информация о физической стороне задачи.

Для минимизации ρ используем методы нелинейного программирования.

4.2. Общий анализ дискретных методов

В большинстве случаев процедура поиска минимума функции ρ представляется в следующем виде. В области U выбираем некоторую точку $\bar{u}^0 \equiv \{u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_r^{(0)}\}^T$, называемую нулевым приближением, и вычисляем значение $\rho^{(0)}$. После этого находим одно из таких направлений в пространстве параметров, вдоль которых функция ρ уменьшается по крайней мере в малой окрестности точки $\rho^{(0)}$. В данном направлении берем новую точку $\bar{u}^{(1)}$ и вычисляем $\rho^{(1)}$. Тогда $\rho^{(1)} < \rho^{(0)}$, если $\bar{u}^{(1)}$ находится достаточно близко от $\bar{u}^{(0)}$. В результате получаем последовательность $\bar{u}^{(0)}, \bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(m)}$, при этом в каждой точке выполняется соотношение

$$\rho(\bar{u}^{(m+1)}) < \rho(\bar{u}^{(m)}). \quad (4.2.1)$$

Переход из m -й точки в $(m+1)$ назовем успешным, если выполняется условие (4.2.1), а в противном случае – неуспешным.

Аналитически переход от точки $\bar{u}^{(m)}$ записывается в виде

$$\bar{u}^{(m+1)} = \bar{u}^{(m)} + \lambda_m \bar{S}^{(m)}, \quad (4.2.2)$$

где $\bar{S}^{(m)}$ – вектор, определяющий направление движения из точки $\bar{u}^{(m)}$ к точке $\bar{u}^{(m+1)}$;

λ_m – числовой множитель, величина которого характеризует длину шага в направлении $\bar{S}^{(m)}$.

Процесс спуска задан, если указаны способы построения вектора $\bar{S}^{(m)}$ и способы вычисления величины λ_m на каждой итерации. От способа определения $\bar{S}^{(m)}$, λ_m непосредственно зависят свойства процесса поиска, поведение функции ρ на элементах последовательности $\bar{u}^{(m)}$. В то же время различные способы построения $\bar{S}^{(m)}$ и λ_m требуют различного качества вычислений, накладывают различные ограничения на минимизируемую функцию. Выбирая теми или иными способами направление спуска и множитель λ_m , можно получить различные алгоритмы построения улучшающей (оптимизирующей) последовательности.

4.3. Градиентные методы

В градиентном методе направление $\bar{S}^{(m)}$ совпадает с направлением антиградиента функции ρ , т. е.

$$\bar{S}^{(m)} = - \frac{\nabla \rho^{(m)}}{|\nabla \rho^{(m)}|}, \quad (4.3.1)$$

где $\nabla \rho^{(m)} \equiv \left\{ \frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial u_1}, \frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial u_r} \right\}^T$ – градиент функции ρ в точке $\bar{u}^{(m)}$;

$$|\nabla \rho^{(m)}| = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial u_i} \right)^2, \quad \rho^{(m)} = \rho[\bar{u}^{(m)}].$$

Итерационный процесс

$$\bar{u}^{(m+1)} = \bar{u}^{(m)} - \lambda_m \frac{\nabla \rho^{(m)}}{|\nabla \rho^{(m)}|}, \quad \lambda_m > 0, m = 0, 1, \dots \quad (4.3.2)$$

при таком выборе направления движения называется градиентным методом или методом наискорейшего спуска, т. к. (4.3.1) является направлением наискорейшего убывания функции ρ в точке $\bar{u}^{(m)}$.

В координатной форме процесс (4.3.2) записывается в виде

$$u_i^{(m+1)} = u_i^{(m)} - \lambda_m \frac{\frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial u_i}}{|\nabla \rho^{(m)}|}. \quad (4.3.3)$$

В настоящее время градиентный метод является наиболее изученным. Распространению его в практике способствовала сравнительная простота и возможность применения для минимизации весьма широкого класса функций.

Приведем здесь простейший алгоритм уменьшения λ_m :

$$\lambda_{m+1} = \begin{cases} \lambda_m, & \text{при } \rho[\bar{u}^{(m+1)}] < \rho[\bar{u}^{(m)}] \\ \frac{\lambda_m}{2}, & \text{при } \rho[\bar{u}^{(m+1)}] > \rho[\bar{u}^{(m)}] \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Однако этот алгоритм обладает существенными недостатками. Во-первых, всегда затруднителен выбор величины λ_0 . Во-вторых, если в процессе поиска λ_m станет малой величиной, то в дальнейшем она уже не будет увеличиваться, что может привести к значительному увеличению времени поиска минимума. Поэтому алгоритм поиска длины шага λ_m должен давать возможность увеличения λ_m в зависимости от характера спуска, например, в зависимости от числа успешных и неуспешных ходов в последних нескольких точках спуска. Дадим один из возможных алгоритмов, обладающих ука-

занным свойством. Каждой точке $\bar{u}^{(m)}$ поставим в соответствие число $h^{(m)}$ по следующему закону:

$$h^{(m)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho[\bar{u}^{(m)}] < \rho[\bar{u}^{(m+1)}], \\ 0, & \text{если } \rho[\bar{u}^{(m)}] \geq \rho[\bar{u}^{(m+1)}]. \end{cases}$$

Закон изменения λ_m запишем в виде

$$\lambda_{m+1} = \begin{cases} 2\lambda_m, & \text{если } \mu_1^{(m)} = 1; \\ \lambda_m, & \text{если } \mu_2^{(m)} = 1; \\ \frac{\lambda_m}{2}, & \text{если } \mu_3^{(m)} = 1; \end{cases}$$

где $\mu_i^{(j)}$ связаны с числами $h^{(m)}$ следующим образом:

$h^{(m-2)}$	$h^{(m-1)}$	$h^{(m)}$	$\mu_1^{(m)}$	$\mu_2^{(m)}$	$\mu_3^{(m)}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

Здесь в процессе поиска шаг λ_m , по существу, подстраивается к характеру поиска. Если в начальной точке x , было выбрано слишком малым, то в процессе поиска оно быстро увеличивается. Наоборот, если это значение выбрано слишком большим, то при поиске оно уменьшается. Различные модификации градиентного метода, различающиеся способом выбора параметра λ_m , можно найти, например, в [8].

Замечание 1. Можно добиться некоторого ускорения процесса решения, если после выбора направления \bar{S}^m двигаться по нему до минимума ρ в направлении \bar{S}^n или до тех пор, пока не будет выполнено условие $\rho \leq 1$.

Замечание 2. Если в процессе спуска изображающая точка на каком-нибудь шаге выходит на границу области U , то в качестве направления $\bar{S}^{(n)}$ нужно брать направление, обеспечивающее движение по границе области U и дающее при необходимости возможность схода с границы вовнутрь области U . Для этой цели используют метод штрафа или метод проектирования градиента на плоскость, касательную к области U .

Метод сопряженных градиентов относится к так называемым квадратичным методам оптимизации. Такое название вызвано тем, что они строятся на основе квадратичного приближения исходной функции. Методы достаточно просты при реализации на ЭВМ и в то же время обладают высокой скоростью сходимости. Необходимо только помнить, что они используются в основном для минимизации гладких функционалов.

В этих методах направление $\bar{S}^{(n)}$ определяется следующим образом :

$$\bar{S}^{(0)} = -\nabla \rho^{(0)}; \quad S^{(n)} = -\nabla \rho^{(n)} + \varepsilon_n S^{(n-1)}.$$

Различные варианты этого метода различаются способом выбора параметра ε_n . Если $\varepsilon_n = 0$ для всех n , то рассматриваемый метод совпадает с градиентным методом. Более подробно этот метод изложен в работе [8].

В методе покоординатного спуска на каждом шаге итерации в качестве направления спуска $\bar{S}^{(n)}$ выбирается направление вдоль одной из координатных осей, например той, проекция градиента $\nabla \rho^{(n)}$ на которую максимальна по абсолютной величине, т. е.

$$S^{(n)} = -\frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial u_k},$$

$$\text{где } \left| \frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial u_k} \right| = \max_i \left| \frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial u_i} \right|.$$

(4.3.5)

4.4. Поиск при наличии «оврагов» у минимизируемой функции

Характерной особенностью решения ОЗУ является наличие оврагов у функции ρ , которые совпадают с оврагами функции γ . Дать точное опреде-

ление «оврага» трудно. Можно сказать, что у «овражной» функции имеются области, в которых по какому-нибудь направлению или нескольким направлениям функция ρ меняется очень медленно, и есть направления быстрого изменения ρ . Типичная карта линий уровня овражной функции приведена на рис. 4.2.

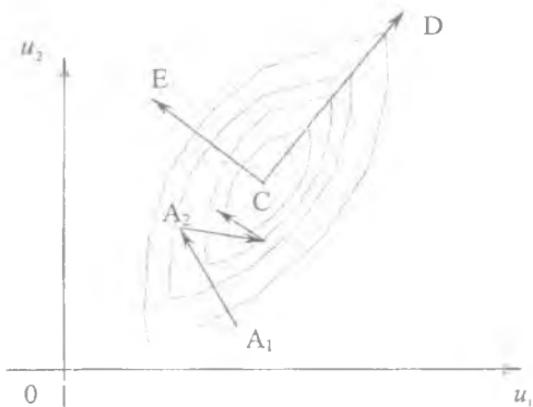


Рис. 4.2. Линии равного уровня

Здесь линии уровня сильно растянуты по направлению CD и сильно сжаты вдоль направления CE . Следовательно, по направлению CE функция меняется быстро, а по направлению CD — медленно.

Рассмотренные выше методы спуска мало приложимы для минимизации функций, имеющих «овраги». В самом деле, пусть спуск приведет в точку A_1 . Двигаясь из точки A_1 в направлении антиградиента функции ρ в точке A_1 , мы можем оказаться на следующем шаге в точке A_2 , расположенной на другом склоне «оврага» и т. д. При этом, если значение ρ в точке A_2 будет больше, чем в точке A_1 , уменьшится шаг поиска. В результате поиск может остановиться далеко от минимума, либо продолжится с очень малой скоростью.

Процесс поиска можно ускорить следующим образом. Пусть изображающая точка в результате применения какого-либо метода спустилась к оврагу и совершила несколько переходов с одного склона на другой, рис. 4.3. Этим самым обнаруживаем направление оврага. Проведем через средние точки B_1

и B_i отрезков $A_i A_i$ и $A_i A_{i+1}$ прямую. Если кривизна оврага невелика, то прямая $B_i B_i$ укажет примерное направление оврага. По этому направлению можно сделать большой шаг в некоторую точку C_i , откуда начинается новый цикл спуска по описанной процедуре.

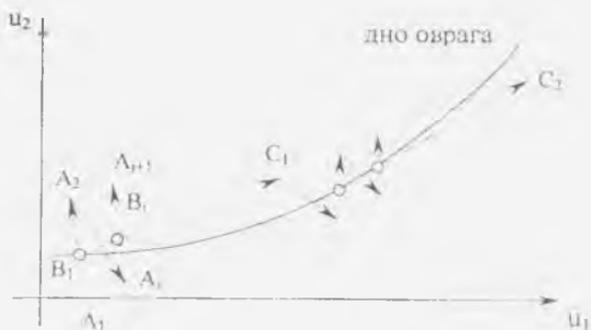


Рис. 4.3. Траектория спуска вдоль оврага

Опишем здесь еще один метод поиска минимума овражных функций. В начале выберем две точки $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, из которых производим спуск на дно оврага (рис. 4.4), в результате чего находим точки $A^{(0)}$ и $A^{(1)}$. Затем проводим прямую $A^{(0)} A^{(1)}$ и вдоль нее делаем большой шаг в сторону убывания ρ в некоторую точку $u^{(2)}$. Из точки $u^{(2)}$ опять произведем спуск в точку $A^{(2)}$ на дно «оврага». Далее по направлению $A^{(1)} A^{(2)}$ делаем шаг в точку $u^{(3)}$ и т. д. В заключение отметим, что минимизация функций, имеющих овраги, почти всегда приводит к увеличению счета.

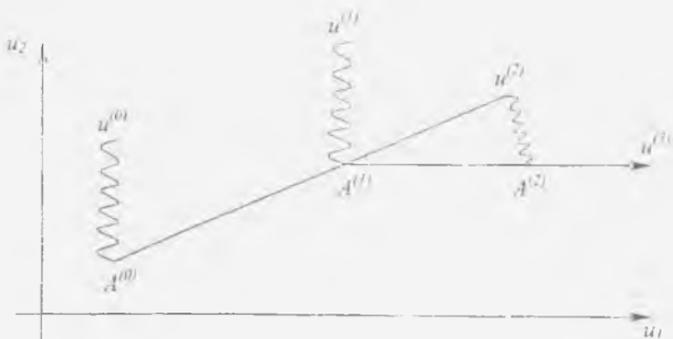


Рис. 4.4. Направление «оврага»

4.5. Определение градиента функции

При выборе того или иного численного решения ОЗУ необходимо оценить его с точки зрения удобства программирования, требуемой памяти и количества операций при реализации указанных методов на ЭВМ. Анализ описанных методов спуска показывает, что наиболее трудоемкой частью расчета является определение производных функций $\rho(u)$. Эти производные вычисляются либо на каждом шаге, либо через несколько шагов.

Для их вычисления могут быть использованы различные методы. Изложим здесь два метода.

4.5.1. Метод конечных разностей

Здесь производные функции $\rho(\bar{u})$ (точнее – оценка производных) определяются следующим образом:

$$\frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial u} = \rho(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_i^{(n)} + \delta u_i, \dots, u_r^{(n)}) - \rho(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_i^{(n)}, \dots, u_r^{(n)}), \quad (4.5.1)$$

где δu_i – малая величина, называемая пробным шагом.

Этот метод чрезвычайно прост для программирования и требует меньшего объема памяти машины. Недостатком его является то, что он может давать большие погрешности.

4.5.2. Метод интегрирования уравнений чувствительности

Пусть, например, управляющий процесс описывается уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x, u), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5.2)$$

Дифференцируя эти уравнения по параметрам u , получим уравнение для определения функций чувствительности

$$\frac{dz_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} z_{kj} + \beta_{ij}, \quad z_{ij}(0) = 0, \quad (4.5.3)$$

где $z_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$, $\alpha_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\beta_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Используя уравнение (4.5.3), можно с высокой точностью определить частные производные $\frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial u_j}$. Пусть, например, $\rho^{(n)} = f[x(t_1)]$. Тогда

$$\frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} z_{ij}(t_1),$$
 при этом $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ находятся аналитически, а $z_{ij}(t_1)$ - из решения уравнения (4.5.3).

4.6. Метод случайного поиска

Опыт использования численных методов показывает, что определение градиента функции $\rho(\bar{u})$ связано со значительными трудностями. Поэтому наряду с детерминированными методами поиска на практике используют методы случайного поиска, которые свободны от указанного недостатка [7]. В методах случайного поиска направление шага, а иногда и величина, определяются случайным образом.

Этот метод является прямым развитием известного метода проб и ошибок, когда решение ищется случайно, и при удаче принимается, а при неудаче отвергается с тем, чтобы немедленно снова обратиться к случайности как к источнику возможного. Такое «случайное» поведение разумно опирается на уверенность, что случайность содержит в себе все возможности, в том числе и искомое решение.

Итерационный алгоритм поиска оптимальных параметров представим в виде $u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta u^{(n+1)}$.

Различные методы случайного поиска отличаются способами определения приращения $\Delta u^{(n+1)}$.

4.6.1. Алгоритм случайного спуска с линейной тактикой

Обозначим $\Delta \rho^{(n)} = \rho(u^{(n)}) - \rho(u^{(n-1)})$. Алгоритм записывается следующим образом:

$$\Delta u^{(n+1)} = \begin{cases} \sigma, & \text{если } \Delta \rho^{(n)} \geq 0, \\ \Delta u^{(n)}, & \text{если } \Delta \rho^{(n)} < 0, \end{cases}$$

где случайные пробы $\sigma \equiv \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_r\}^T$ предполагаются достаточно малыми по модулю, чтобы вероятность получения положительной реакции ($\Delta\rho^{(n)} < 0$) была достаточно большой.

При данном алгоритме случайные шаги в пространстве управляющих переменных делаются до тех пор, пока не будет найден шаг, ведущий к уменьшению ρ . Затем удачный шаг повторяется до тех пор, пока значение ρ не начнет увеличиваться.

Рассмотрим некоторые способы определения S .

1. Чисто случайная оценка направления. Здесь $S = \sigma$, где $\sigma \equiv \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_r\}^T$ - единичный случайный вектор.

2. Оценка направления S по наилучшей из нескольких проб. В этом случае $S = \sigma^*$, где σ^* удовлетворяет условию

$$\rho(u + g\sigma^*) = \min_k (\rho(u + g\sigma_k)),$$

здесь g - величина пробного шага;

m - число случайных шагов, из которых выбирается наилучшее.

3. Оценка направления спуска методом статистического градиента. За направление спуска принимается средневзвешенное из m случайных направлений, каждое из которых берется с весом, соответствующим приращению меры ρ вдоль этого направления:

$$S = -dir \sum_{k=1}^m \sigma_k [\rho(u + g\sigma_k) - \rho(u)],$$

где $dir = \frac{e}{|e|}$ - единичный вектор, определяющий интересующее направление.

Имеются и другие модификации оценки направления спуска.

5. Приложение математических методов решения задач управления к проектированию систем

5.1. Решение задачи отделения космических аппаратов от последней ступени ракеты-носителя

5.1.1. Основные технические требования к процессу отделения

При осуществлении операции отделения одного или нескольких КА от последней ступени ракеты-носителя (РН) блока «И», кроме требований надежного и безотказного срабатывания всех элементов, осуществляющих разделение и отделение, должно быть обеспечено выполнение целого ряда требований кинематического характера.

Отделение должно происходить безударно, т. е. любые соприкосновения конструкции КА и РН после срабатывания системы отделения недопустимы. Приращение угловой скорости КА за счет срабатывания системы отделения должно быть минимальным. Это требование обычно задается в виде неравенств, ограничивающих величину приращения угловой скорости в проекциях на связанные с КА оси координат. Кроме того, относительные скорости расхождения после срабатывания системы отделения должны исключать возможность столкновения КА между собой и с РН при орбитальном полете. Могут также предъявляться требования по обеспечению заданного расстояния между КА и РН через определенный промежуток времени после отделения или по увеличению расстояния между КА на каждом витке траектории на заранее заданную величину.

Эти требования обычно задаются конкретно для каждого класса КА в зависимости от их назначения и особенностей работы на орбите.

5.1.2. Математическое описание процесса отделения и последующего движения

Вначале рассмотрим движение КА и РН на «ближнем» участке расхождения, т. е. непосредственно на участке срабатывания энергетических средств, осуществляющих отделение. На практике в большинстве случаев в качестве

таких средств используются пружинные толкатели. Их корпуса жестко закреплены на переходном отсеке (ПХО) блока «И» так, что продольная ось корпусов совпадает с направлением отделения КА.

Количество толкателей выбирается на стадии формирования структурной схемы системы отделения. Из условий рациональности компоновки и симметрии отделения их может быть 3, 4 или 6 штук. Поскольку относительное расстояние между КА и блоком «И» при срабатывании толкателей мало, будем считать, что движение блока «И» и КА происходит только под действием усилий толкателей в инерциальной системе координат, которая вместе с ц. м. системы КА + РН движется с орбитальной скоростью. Иными словами, кривизной поля тяготения пренебрегаем. КА и блок «И» считаем абсолютно твердыми телами постоянного состава.

Будем считать, что усилие пружинного толкателя является линейной функцией перемещения его штока, т. е. $F(\Delta) = F_0 - c \cdot \Delta$; где F_0 – начальное усилие, c – жесткость пружины толкателя, Δ – перемещение пружины толкателя. Диаграмма усилия толкателя представлена на рис. 5.1.

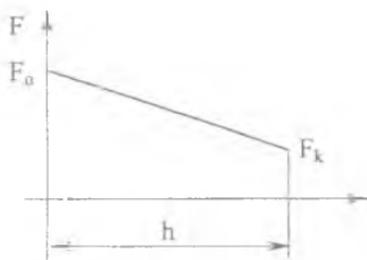


Рис. 5.1. Диаграмма усилия толкателя:

F_k – конечное усилие толкателя, h – полный ход штока, F_0 – начальное усилие толкателя

Перемещение штока толкателя по времени и направление действия силы в пространстве будут определяться кинематическими параметрами относительного движения КА и блока «И».

Расчетная схема процесса отделения на участке работы толкателей приведена на рис. 5.2. Здесь изображен случай отделения одного КА от РН под действием одного толкателя (случай отделения нескольких КА принципиальных изменений не вносит).

На рисунке показаны: $x_0 y_0 z_0$ – инерциальная система координат, $x_u y_u z_u$, $x_{KA} y_{KA} z_{KA}$ – связанные системы координат, начало которых совпадает с ц. м. КА и РН соответственно, \vec{a}_n^0 – единичный вектор нормали плоскости Π в с. к. $x_{KA} y_{KA} z_{KA}$ (плоскость стыковочного шпангоута КА); \vec{r}_n – радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей плоскости Π ; \vec{a}_n^0 – единичный направляющий вектор прямой в $x_u y_u z_u$, совпадающей с продольной осью толкателя; \vec{r}_A – радиус-вектор точки А, совпадающей в начальный момент с концом штока толкателя.

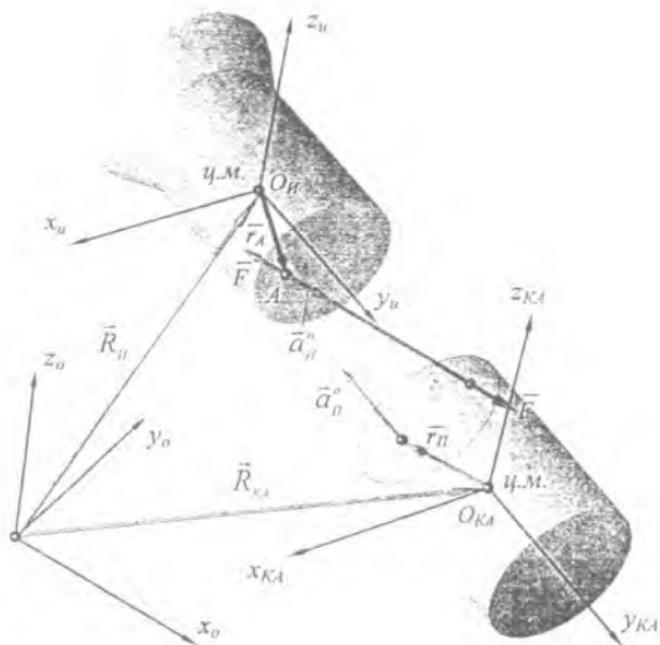


Рис. 5.2. Расчетная схема процесса отделения на участке работы толкателей

Уравнение прямой в $x_u y_u z_u$, совпадающей с продольной осью толкателя имеет следующий вид: $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{a}_H^o \tau$, где τ – параметр. Уравнение этой прямой в инерциальной с. к. $x_o y_o z_o$:

$$\vec{R} = A_H \vec{r}_A + A_H \vec{a}_H^o t + \vec{R}_H, \quad (5.1.1)$$

где A_H – матрица перехода от $x_u y_u z_u$ к $x_o y_o z_o$.

Аналогично можно записать уравнение плоскости Π в с. к. $x_{KA} y_{KA} z_{KA}$ и $x_o y_o z_o$, используя матрицу перехода от с. к. КА к с. к. инерциальной:

$$\begin{aligned} \vec{a}_\Pi^o (\vec{r} - \vec{r}_\Pi) &= 0 \text{ в } x_{KA} y_{KA} z_{KA}, \\ A_{KA} \vec{a}_\Pi^o (\vec{R} - \vec{R}_{KA} - A_{KA} \vec{r}_\Pi) &= 0 \text{ в } x_o y_o z_o. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Система уравнений (5.1.1), (5.1.2) определяет в любой момент времени точку пересечения прямой и плоскости и значение параметра τ , величина которого равна расстоянию от т. А вдоль прямой до плоскости Π , т. е. перемещению штока толкателя, $\Delta(t) = \tau(t)$.

Подставив \vec{R} из (5.1.1) в (5.1.2) получим выражение для τ :

$$\begin{aligned} A_{KA} \vec{a}_\Pi^o (A_H \vec{r}_A + A_H \vec{a}_H^o \tau + \vec{R}_H - \vec{R}_{KA} - A_{KA} \vec{r}_\Pi) &= 0, \\ A_{KA} \vec{a}_\Pi^o A_H \vec{r}_A + A_{KA} \vec{a}_\Pi^o A_H \vec{a}_H^o \tau + A_{KA} \vec{a}_\Pi^o \vec{R}_H - A_{KA} \vec{a}_\Pi^o \vec{R}_{KA} - A_{KA} \vec{a}_\Pi^o A_{KA} \vec{r}_\Pi &= 0, \\ \tau = \frac{A_{KA} \vec{a}_\Pi^o A_H \vec{r}_A + A_{KA} \vec{a}_\Pi^o \vec{R}_H - A_{KA} \vec{a}_\Pi^o \vec{R}_{KA} - A_{KA} \vec{a}_\Pi^o A_{KA} \vec{r}_\Pi}{A_{KA} \vec{a}_\Pi^o A_H \vec{a}_H^o}. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Схема работы толкателя приведена на рис. 5.3.

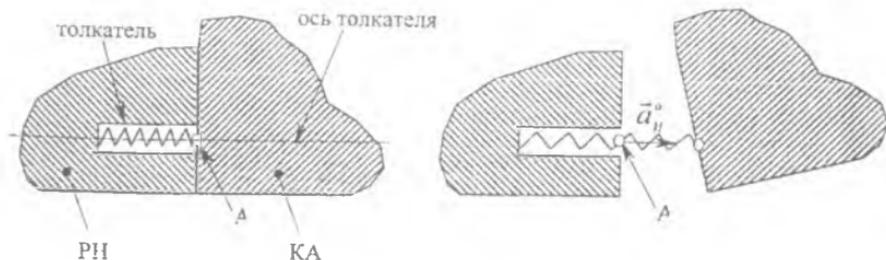


Рисунок 5.3. Схема работы толкателя

Теперь, когда зависимость хода штока толкателя от времени движения найдена, определим выражения для силы толкателя, действующей на РН и КА и запишем уравнения их движения.

Выражения для силы толкателя, действующей на РН, будет иметь следующий вид:

$$\text{а) в с. к. } x_u y_u z_u \quad \bar{F}_H = -\bar{a}_H^0 F(\Delta);$$

$$\text{б) в с. к. } x_o y_o z_o \quad \bar{F}_H = -A_H \bar{a}_H^0 F(\Delta),$$

а на КА:

$$\text{а) в с. к. } x_{KA} y_{KA} z_{KA} \quad \bar{F}_{KA} = A_{KA}^{-1} A_H \bar{a}_H^0 F(\Delta);$$

$$\text{б) в с. к. } x_o y_o z_o \quad \bar{F}_{KA} = A_H \bar{a}_H^0 F(\Delta).$$

Уравнения движения РН и КА записываются в стандартной форме и имеют вид:

$$\begin{cases} m_H \ddot{\bar{R}}_H = \bar{F}_H, \\ \frac{d\bar{K}_H}{dt} + (\bar{\omega}_H \times \bar{K}_H) = \bar{r}_A \times \bar{F}_H, \\ m_{KA} \ddot{\bar{R}}_{KA} = \bar{F}_{KA}, \\ \frac{d\bar{K}_{KA}}{dt} + (\bar{\omega}_{KA} \times \bar{K}_{KA}) = \bar{r}_{KA} \times \bar{F}_{KA}. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Здесь $\bar{K}_H = J_H \bar{\omega}_H$, $\bar{K}_{KA} = J_{KA} \bar{\omega}_{KA}$ - кинетические моменты РН и КА, а J_H , J_{KA} - соответствующие тензоры инерции; $\bar{r}_{KA} = A_{KA}^T (\bar{R} - \bar{R}_{KA})$, \bar{R} - определяется из (5.1.1) при найденном τ из (5.1.3).

Если к системе (5.1.4) присоединить кинематические уравнения Эйлера, то эта расширенная система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть проинтегрирована любым численным методом и, следовательно, может быть определена кинематическая картина процесса отделения КА от последней ступени РН.

Таким образом, решение задачи отделения одного или нескольких КА от последней ступени на «ближнем» участке сводится к решению обычной задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс отделения.

Если в результате решения задачи окажется, что угловые возмущения КА превышают допустимые, то необходимо провести исследование возможности ужесточения требований по точности установки толкателей, разбросу положения ц. м. КА и РН, разбросу жесткости пружин, возможности снижения энергии толкателей. Такие задачи решаются в каждом конкретном случае отдельно.

Теперь перейдем к описанию относительного движения КА и последней ступени РН на участке орбитального полета после срабатывания системы отделения.

Как будет видно из приведенного здесь аналитического описания относительного движения КА и РН, на орбитальном участке существенным моментом является выбор как величины вектора скорости отделения КА, так и его направления в пространстве.

При малых, по сравнению с орбитальной, скоростях отделения КА ($V_{отд} \approx 0.5 - 2 \text{ м/с}$), в случае его отделения по направлению нормали или бинормали к траектории полета РН, через один виток (полвитка для второго случая) после отделения расстояние между РН и КА сократится до нуля, т.е. произойдет столкновение. И только при ненулевой составляющей вектора скорости отделения каждого КА на направление вектора орбитальной скорости можно обеспечить гарантированное расхождение КА как между собой, так и с РН.

Для обоснования сказанного рассмотрим расчетную схему относительно-го движения одного КА и РН после срабатывания средств отделения.

Начало подвижной системы координат, относительно которой рассматривается движение КА и для которой будут записаны дифференциальные уравнения, находится в центре масс РН, рис. 5.4. Ось x направлена по касатель-

ной к орбите РН, ось y направлена к центру Земли, ось z перпендикулярна плоскости орбиты и достраивает систему координат до правой. Угловая скорость $\vec{\omega}$ подвижной системы координат равна угловой скорости обращения РН вокруг Земли $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega\}$.

В качестве допущений примем следующее. КА и РН рассматриваются как материальные точки, поле тяготения Земли – центральное сферическое, орбита РН - круговая. Значение высоты полета не существенно, т.к. аэродинамическими силами можно пренебречь из-за их малого влияния (по крайней мере в течение двух - трех витков). Силы воздействия на КА и РН управляющих органов не учитываются, т.е. рассматривается свободное относительное движение.

Дифференциальное уравнение относительного движения КА запишется в виде [24]

$$m_1 \ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_e + \vec{F}_k, \quad (5.1.5)$$

где $\vec{F}_1 = -\frac{\gamma M m_1}{r_1^3} \vec{r}_1$ - сила притяжения со стороны Земли, \vec{r}_1 - расстояние

от центра Земли до КА, m_1 - масса КА, $\vec{F}_e = -m_1 \vec{a}_e$ - переносная сила инерции, $\vec{F}_k = -m_1 \vec{a}_k$ - сила инерции Кориолиса,

$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$, $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}})$, M - масса Земли, m_1 - масса КА.

Поскольку $\vec{\omega} = \text{const}$, следовательно $\vec{\varepsilon} = 0$, $\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{r}_0 - \omega^2 \vec{h}$ и

$$m_1 \ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}_1 + m_1 \omega^2 (\vec{r}_0 + \vec{h}) - 2 m_1 (\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}). \quad (5.1.6)$$

Учитывая, что блок «И» движется по круговой орбите радиуса $r_0 = \text{const}$, сила притяжения Земли - F_1 , действующая на него, будет равна

$$F_1 = \gamma \frac{m_0 M}{r_0^2} = m_0 \omega^2 r_0, \text{ где } m_0 - \text{масса блока «И»}.$$

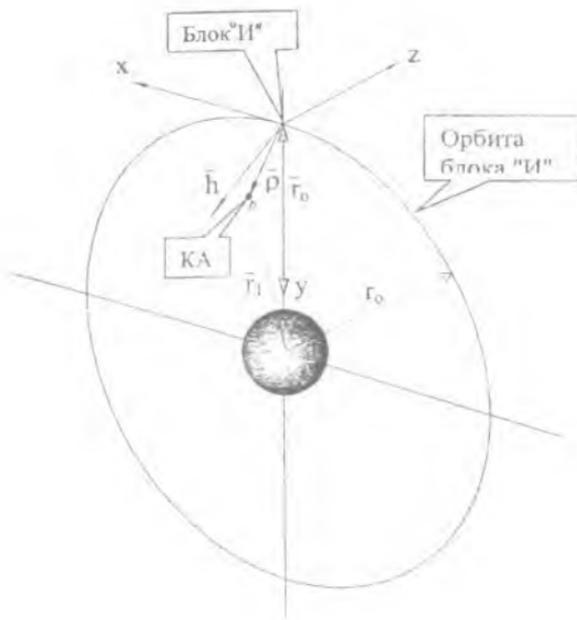


Рис. 5.4. Расчетная схема

Отсюда имеем $\gamma M = \omega^2 r_0^3$. Тогда уравнение движения принимает следующий вид:

$$\ddot{\vec{\rho}} = \omega^2 (\vec{r}_0 + \vec{h}) - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}) - \frac{\omega^2 r_0^3}{r_1^3} (\vec{r}_0 + \vec{\rho}). \quad (5.1.7)$$

Для получения аналитического решения данного нелинейного дифференциального уравнения произведем ряд преобразований и упрощений. Учитывая малую относительную скорость отделения КА по сравнению с орбитальной скоростью РН, траектории движения КА и РН будут близки и, следовательно, без заметных погрешностей исходное уравнение можно упростить.

Примем в уравнении (5.1.7), что $\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3$ при «малом» $\vec{\rho}$ равен единице. При

«большом» \vec{r}_0 , ($r_0 \gg \rho$) разложим в ряд и удержим только линейную часть.

Таким образом,

$$\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-3} = \left[\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \left[\frac{(\vec{r}_0 + \vec{\rho})^2}{r_0^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \left[1 - 2\frac{y}{r_0} + \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + 3\frac{y}{r_0}.$$

С учетом этого, после приведения подобных членов, уравнение движения будет иметь вид

$$\ddot{\vec{\rho}} = \omega^2(\vec{h} - \vec{\rho}) - 3\frac{y}{r_0}\vec{r}_0\omega^2 - 2(\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \quad (5.1.8)$$

Или в матричной форме, поскольку

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\rho}} &\equiv \{x, y, z\}^T, \vec{h} \equiv \{x, y, 0\}^T, \vec{r}_0 \equiv \{0, -r_0, 0\}^T: \\ \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -z \end{bmatrix} \omega^2 - 3\frac{y}{r_0} \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega^2 - 2 \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

В результате получим однородную линейную систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в скалярной форме:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = 3\omega^2 y - 2\omega\dot{x}, \\ \ddot{z} = -\omega^2 z. \end{cases} \quad (5.1.10)$$

Эта система легко интегрируется и при произвольных начальных условиях вида $x(0) = y(0) = z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0$ имеет следующее решение:

$$\begin{cases} x = \frac{2\dot{y}_0}{\omega}(1 - \cos \omega t) + 4\frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t - 3\dot{x}_0 t, \\ y = \frac{2\dot{x}_0}{\omega}(\cos \omega t - 1) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t, \\ z = \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t. \end{cases} \quad (5.1.11)$$

Из этого решения видно, что законы движения вдоль оси Oz и на плоскости (x, y) независимы друг от друга. При «малых» относительных перемещениях - $\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1$, когда можно пренебречь кривизной поля тяготения, из полученного решения следует известный закон относительного дви-

жения в плоскопараллельном поле тяготения: $x = \dot{x}_0 t$, $y = \dot{y}_0 t$, $z = \dot{z}_0 t$. Этот закон используется при расчете траекторий «опасных» точек при разделении, т.е. при «малых» относительных перемещениях.

Если в уравнениях (5.1.11) положить $\dot{z}_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$, т.е. отделение КА производится по бинормали к траектории движения блока «И», период обращения которого равен T , то из третьего уравнения системы следует, что

$z(\frac{T}{2}) = \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin(2\pi \frac{T}{2}) = 0$, т.е. через полпериода расстояние между РН и КА

будет равно нулю - произойдет столкновение. Если производить отделение по нормали к траектории $\dot{z}_0 = \dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 \neq 0$, то из первых двух уравнений (5.1.11) следует, что траекторией относительного движения будет эллипс, рис. 5.5:

$$\left[\frac{x - \frac{2\dot{y}_0}{\omega}}{\frac{2\dot{y}_0}{\omega}} \right]^2 + \left[\frac{y}{\frac{\dot{y}_0}{\omega}} \right]^2 = 1 \quad (5.1.12)$$

Следовательно, в этом случае столкновение блока «И» с КА произойдет через период.

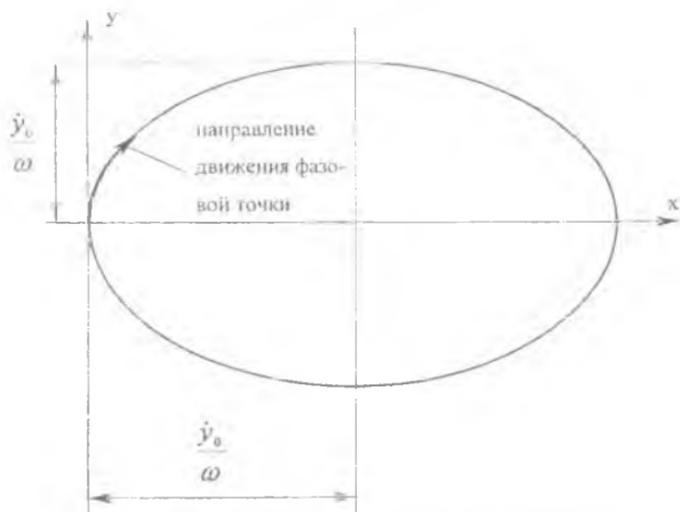


Рис. 5.5. Траектория относительного движения

Если в уравнениях (5.1.11) положить $\dot{z}_0 = 0, \dot{y}_0 \neq 0, \dot{x}_0 \neq 0$, т.е. отделение КА также производится в плоскости орбиты, но в отличие от предыдущего случая проекция вектора скорости КА на направление орбитальной скорости блока «И» ненулевая, то траектория относительного движения КА также будет эллипс (рис. 5.6):

$$\left[\frac{(x - 2A) + 3\dot{x}_0 t}{2R} \right]^2 + \left[\frac{y + B}{R} \right]^2 = 1, \quad (5.1.13)$$

$$A = \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \quad B = \frac{2\dot{x}_0}{\omega}, \quad R = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Центр этого эллипса (O_1) будет перемещаться, как это видно из (5.1.13), вдоль оси x со скоростью $3\dot{x}_0$ влево. Следовательно, в этом случае траектория относительного движения КА - незамкнутая кривая, и при соответствующем выборе начальной скорости \dot{x}_0 столкновение КА и РН не произойдет.

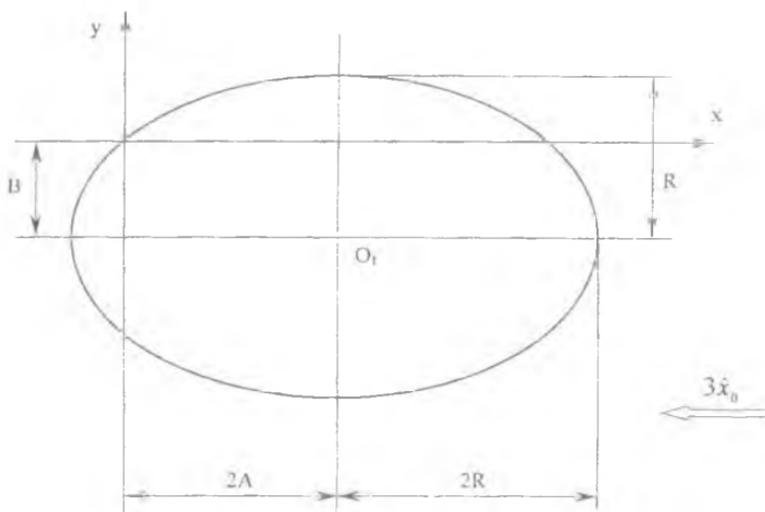


Рис. 5.6. Траектория относительного движения

Таким образом, получено аналитическое обоснование утверждения, сделанного в начале раздела о выборе направления отделения КА, - при одновременном отделении от РН нескольких КА вектор скорости каждого должен иметь ненулевую проекцию на направление вектора орбитальной скорости.

сти РН в момент отделения. Одним из вариантов выполнения этого условия при одновременном отделении нескольких КА в плоскости, перпендикулярной продольной оси РН, является его разворот по рысканию либо тангажу на 90° с последующей стабилизацией в этом положении на момент отделения КА.

5.1.3. Определение направления отделения космических аппаратов в пространстве

Если отделяются два КА, то они должны быть установлены по плоскостям стабилизации II-IV, рис. 5.7. При этом скорости отделения КА полностью проектируются на направление вектора орбитальной скорости РН, и их расхождение между собой и с блоком «И» после отделения самое благоприятное. При отделении одного КА направление скорости отделения также должно совпадать с направлением вектора орбитальной скорости РН. В этом случае направление отделения КА совпадает с продольной осью РН, плоскость I-III РН совпадает с плоскостью угла тангажа, продольная ось РН совпадает с вектором орбитальной скорости.

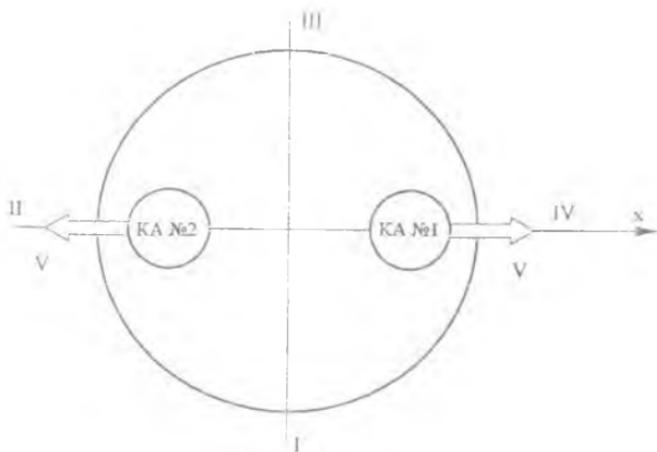


Рис. 5.7. Направление отделения двух КА

При одновременном отделении трех КА от РН положим, что КА расположены симметрично, как показано на рис. 5.8, т.е. углы между КА равны 120° .

При одинаковом модуле вектора скорости отделения всех КА ($V_1 = V_2 = V_3 = V$) допустим в первом приближении, что наиболее благоприятным случаем с точки зрения расхождения КА между собой и РН после срабатывания средств отделения будет случай, когда $2V_{1x} = V_{1x}$, т.е. картина расхождения КА №1 и КА №2 будет почти такой же, как и картина расхождения КА №1 и РН. При этом расхождение КА №3 и РН будет не хуже, т.к. $V_{3x} > V_{1x}$.

При единичном модуле вектора скорости КА эти условия запишутся в виде

$$2\sin\alpha = \sin\beta, \sin\gamma > \sin\beta, \text{ или}$$

$$2\sin\alpha = \sin(60 - \alpha), \sin(60 + \alpha) > \sin(60 - \alpha).$$

Как видно, второе условие тривиально. Решая первое уравнение, получим: $\alpha \cong 19^\circ, \beta \cong 41^\circ, \gamma \cong 79^\circ$.

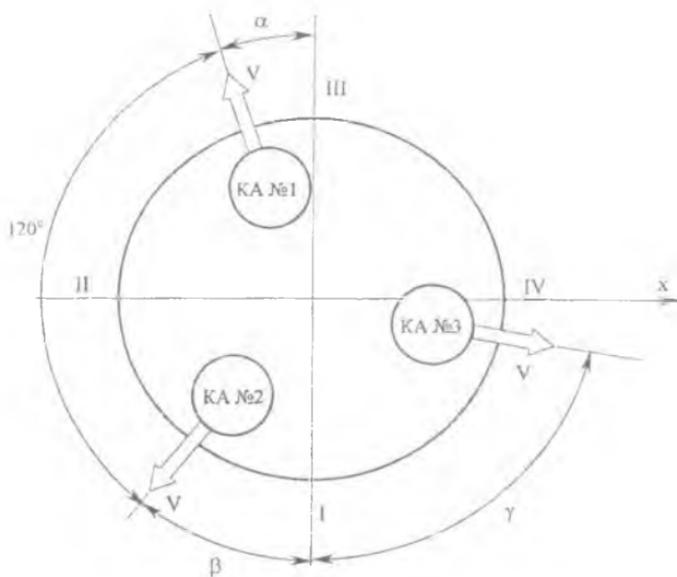


Рис. 5.8. Отделение трех КА

Уточнение величины углового направления отделения КА от РИ в пространстве, обеспечивающего максимальное относительное расстояние КА между собой и блоком «И» после отделения, на участке свободного движения можно произвести по критерию:

$$\alpha^* = \arg \max_{\alpha \in (0, 60^\circ)} [\min_{i=1} \min_{i \geq 0} L_i(t, \alpha)], \quad i = 1 \dots 6,$$

где α^* - оптимальное значение угла отделения КА,

L_i - относительное расстояние (L_1 между КА№1 и блоком «И», L_2 между КА№2 и РИ, L_3 между КА№3 и блоком «И», L_4 между КА№1 и КА№2, L_5 между КА№1 и КА№3, L_6 между КА№2 и КА№3).

Результаты решения минимаксной задачи представлены графически на рис. 5.10, оптимальное значение угла отделения КА№1 от блока «И» составляет $\alpha \approx 17.5^\circ$.

При одновременном отделении шести КА от РИ так же, как и в предыдущем случае, КА устанавливаются симметрично, но через 60° , рис. 5.9. Как видно из рисунка, наиболее благоприятным вариантом установки КА относительно плоскостей стабилизации будет:

$$\cos \beta = 2 \cos \gamma \quad \text{и} \quad \cos \alpha = 3 \cos \gamma,$$

$$\alpha \cong 11^\circ, \quad \beta \cong 49^\circ, \quad \gamma \cong 71^\circ.$$

Картины расхождения КА №1 и №2, КА №1 и №3, КА №3 и РИ будут близки, а для КА №2 и №3 не хуже. Аналогичная картина для КА №4, №5, №6. После уточнения углов отделения КА получены следующие результаты: $\alpha \cong 12.4^\circ$, $\beta \cong 47.6^\circ$, $\gamma \cong 72.4^\circ$. Для этого была использована изложенная выше (для трех КА) методика, при этом рассматривались КА №1, №2, №3, рис. 5. 11.

Структурный состав средств отделения всех КА для всех вариантов идентичен. Каждый КА крепится к РИ при помощи четырех пирозамков с двумя пирепатронами ПДО в каждом. Могут быть использованы существующие пирозамки отделения серийных КА от РИ. Отделение каждого КА может быть осуществлено при помощи четырех пружинных толкателей. Для КА

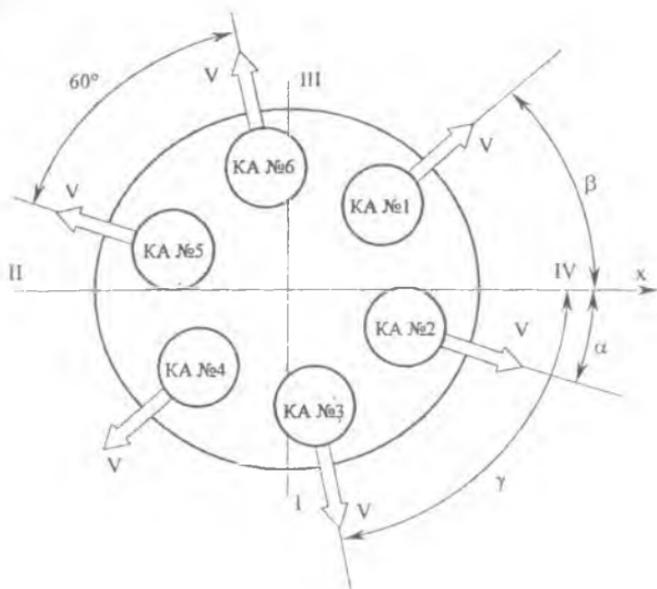


Рис.5.9. Направление отделения шести КА

массой $m_{КА} = 2500\text{кг}$ в варианте трех могут быть использованы пружинные толкатели отделения серийных КА со следующими характеристиками: $P_H = 3000\text{Н}$, $P_K = 600\text{Н}$, $h = 0.25\text{м}$. При этом скорость отделения КА составит около $1,2\text{м/с}$. Для отделения КА массой $m_{КА} = 300\text{ кг}$ в варианте 6 КА могут быть использованы пружинные толкатели отделения серийных КА со следующими характеристиками: $P_H = 1000\text{Н}$, $P_K = 230\text{Н}$, $h = 0.05\text{м}$. Скорость отделения КА составит около 1м/с .

При выбранных скоростях и направлениях отделения КА в пространстве для круговой орбиты с $H_{кр} \approx 200\text{км}$ и периодом $T \approx 84\text{мин}$ при всех вариантах отделения КА построены графики относительных расстояний между КА и РН после отделения (рис. 5.12-5.15), из которых видно, что при принятых допущениях исключается возможность опасного сближения КА между собой и с РН после отделения.

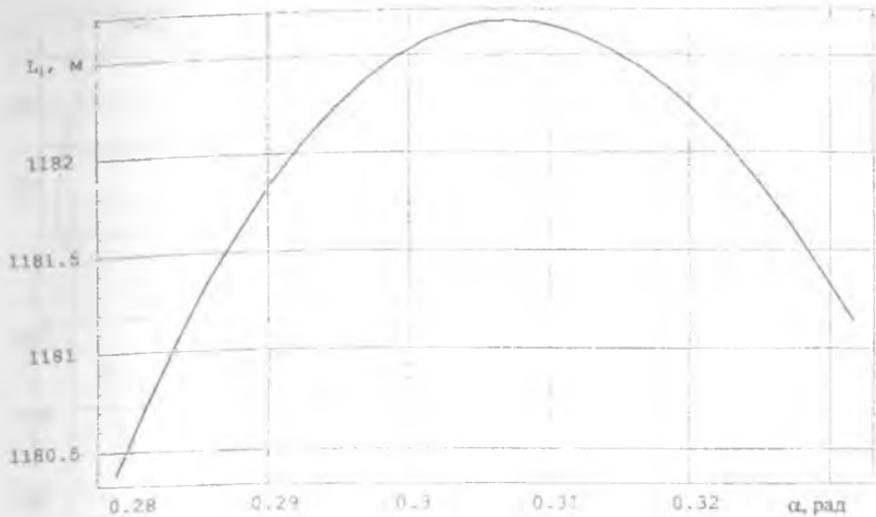


Рис. 5.10. $\min [\min_{t>0} L_i(t, \alpha)], i = 1...6$ (отделение трех КА)



Рис. 5.11. $\min [\min_{t>0} L_j(t, \alpha)], i = 1...6$ (отделение шести КА)

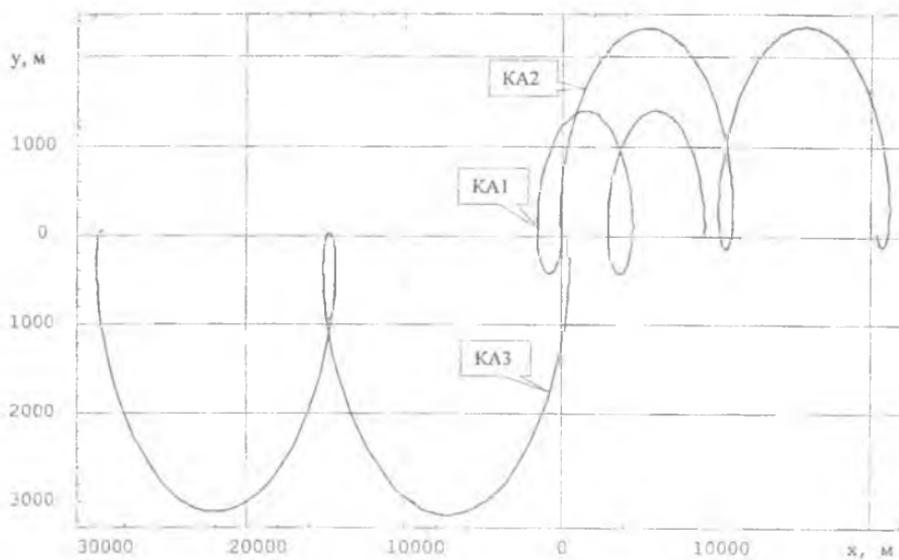


Рис. 5.12. Траектории движения КА относительно блока "И"

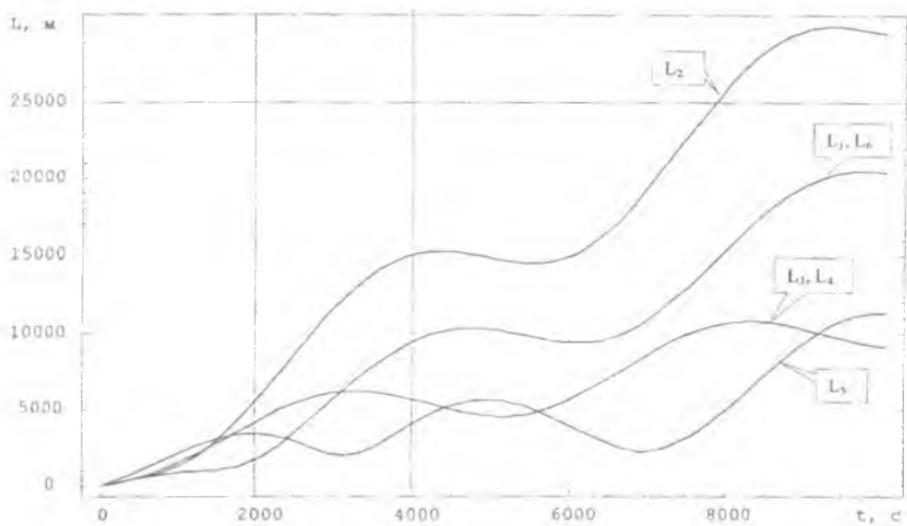


Рис. 5.13. Зависимость расстояния между КА и блоком "И" от времени

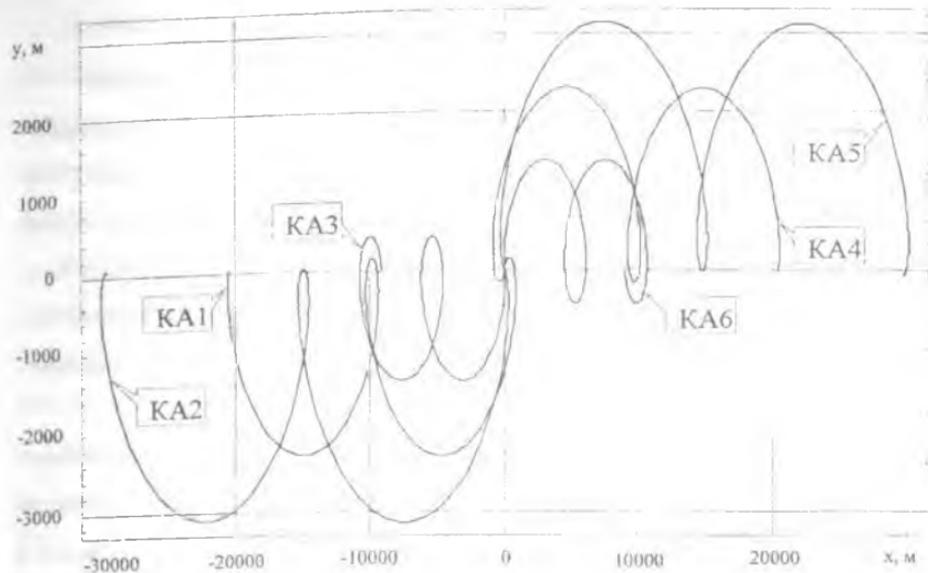


Рис. 5.14. Траектории движения КА относительно блока "И"

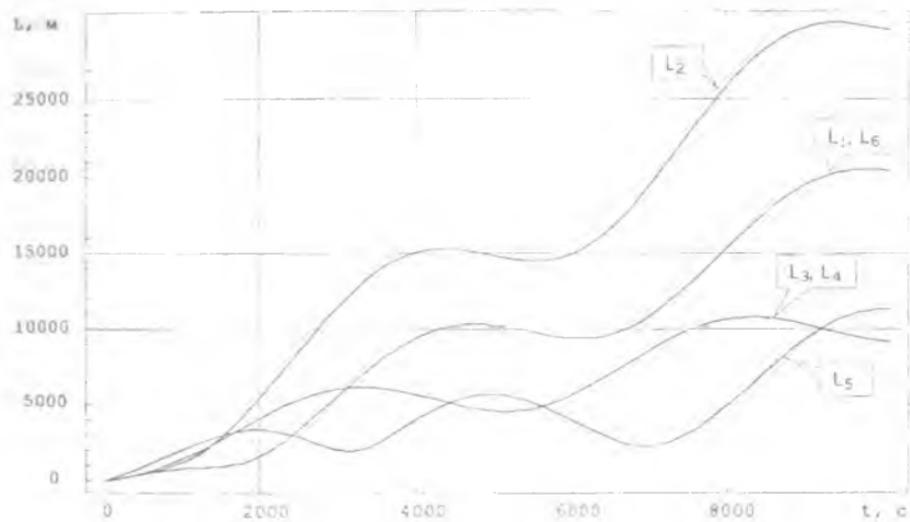


Рис.5.15. Зависимость расстояния между КА и блоком "И" от времени

5.2. Решение задачи раскрытия панелей солнечных батарей

5.2.1. Основные технические требования к процессу раскрытия панелей

Как правило, на КА исходя из симметрии его конструктивно-компоновочной схемы устанавливают две панели солнечных батарей (СБ). Каждая панель при раскрытии с точки зрения механики представляет собой связанную механическую систему постоянного состава с нестационарными связями, имеющую столько степеней свободы, сколько створок в каждой панели. Это позволяет каждой створке двигаться в какой-то степени «независимо» от остальных.

Наличие связей и, как следствие, действие инерционных сил, возникающих из-за влияния переносного движения створок, существенным образом оказывает влияние на кинематические характеристики процесса раскрытия и фиксацию панелей в своем рабочем положении (время раскрытия, последовательность фиксации створок, зона движения и т.д.).

Это влияние при выбранной структурной схеме инерционно-массовых и геометрических характеристик определяется выбором энергетических характеристик пружин, устанавливаемых в шарнирных соединениях створок между собой.

Поскольку нас интересует не любое динамическое состояние процесса из совокупности возможных, а лишь вполне определенное, заранее заданное, и организовать его можно, имея свободу выбора параметров, определяющих процесс, задача раскрытия панелей относится к задаче управления динамическими системами.

С точки зрения концепций теории управления рассматриваемая система относится к сложным системам, т.е. к управляемым динамическим системам с векторными критериями качества, состояние которой будет определяться выбором энергетических характеристик пружин (линейных, кручения или торсионов). Они по принятой терминологии в теории управления называются управляющими параметрами. Их необходимо выбрать таким образом, чтобы обеспечивались заранее заданные требования к процессу раскрытия.

Необходимо разработать математическую модель процесса раскрытия и фиксации створок панели в рабочее положение. Эта модель представляется в детерминированной постановке. С использованием ее должны быть определены управляющие параметры (проектные, конструктивные характеристики пружин) и выбраны требования к их конструктивной реализации.

Физическая постановка задачи заключается в следующем:

1. Обеспечение времени раскрытия панелей СБ.
2. Обеспечение гарантированной фиксации в шарнирных соединениях створок между собой.
3. Обеспечение заданной зоны раскрытия.
4. Обеспечение заданной последовательности фиксации створок между собой.
5. Обеспечение допустимых угловых скоростей в момент фиксации (аналог нагрузок на панели).

Первые три требования являются кинематическими и вырабатываются, как правило, на этапе выбора конструктивной схемы БС.

4-е и 5-е требования являются эквивалентном весового ограничения и сохранности выбранных конструктивно-компоновочной и силовой схем БС и вырабатываются в результате серии оценочных расчетов нагрузок и прочности, направленных на обеспечение несущей способности панелей при их фиксации и раскрытии. Кроме того, 4-е требование является вполне естественным стремлением иметь, с одной стороны, единообразную (организованную картину раскрытия) БС из всей возможной совокупности, а с другой, – уменьшить и иметь вполне определенное число расчетных случаев при анализе нагрузок и прочности в процессе раскрытия СБ. Все вышеуказанные требования должны быть представлены в адекватной математической записи.

5.2.2. Математическое описание процесса раскрытия створок БС

Построение математической модели процесса раскрытия БС является первым и важным шагом при решении задачи управления процессом. Мо-

дель должна быть в разумной степени адекватна физическому процессу, но и не слишком громоздкой.

Поэтому в первую очередь сформулируем исходные допущения:

1. Расфиксация створок панели СБ происходит мгновенно и одновременно.
2. Корпус КА совершает инерциальное движение.
3. Раскрытие панелей не оказывает влияния на движение КА, и наоборот.
4. Створки панелей — абсолютно твердые тела.
5. Процесс фиксации есть наложение идеальных неупругих геометрических связей.
6. Отклонения входных параметров процесса от своих номиналов носят случайный характер и являются некоррелированными величинами.

В связи с принятыми допущениями необходимо отметить следующее.

1. Допущение абсолютной твердости створок при раскрытии является абстракцией и, вообще говоря, в какой-то степени не соответствует физической картине раскрытия. Однако учет упругости достаточно сложен и, кроме того, может привести к потере цели основной задачи управления. Поэтому учет упругости есть отдельная задача.

2. 5-е допущение также, хотя и не совсем, соответствует действительности (из-за тех же вопросов упругости), но близко к действительности, т. к. при срабатывании защелок фиксации относительное движение створок практически исчезает.

3. Отсутствие корреляции входных параметров на стадии проектирования вполне оправдано, т. к. действительно, коэффициенты корреляции, например, для инерционно-массовых и центровочных характеристик на стадии проекта

(да и в дальнейшем, при разработке рабочей документации) не определяются достаточно надежно.

Далее, поскольку каждая створка после расфиксации связана с другими при помощи "плоских" шарниров (осей вращения), позволяющих поворачиваться им только в плоскости, перпендикулярной осям, положение панели при раскрытии будет определяться числом обобщенных координат в плоскости системы координат, равных количеству створок. Пусть для определенности число створок равно пяти.

Казалось бы, что уравнения движения следует записать в форме уравнений Лагранжа второго рода, получив систему с минимальным числом дифференциальных уравнений. Однако громоздкость выражения кинетической энергии системы и возникающие в связи с этим трудности при построении уравнений и учете потери энергии при фиксации приводят к тому, что проще всего (особенно для численной реализации алгоритма расчета на ЭВМ) записать уравнения Даламбера-Лагранжа. При этом для пяти панелей число уравнений увеличится до пятнадцати, которые еще следует дополнить 10 уравнениями связи, – итого 25 неизвестных.

С учетом сказанного уравнения движения створок при раскрытии (в системе координат OXY) имеют следующий вид (рис. 5.16):

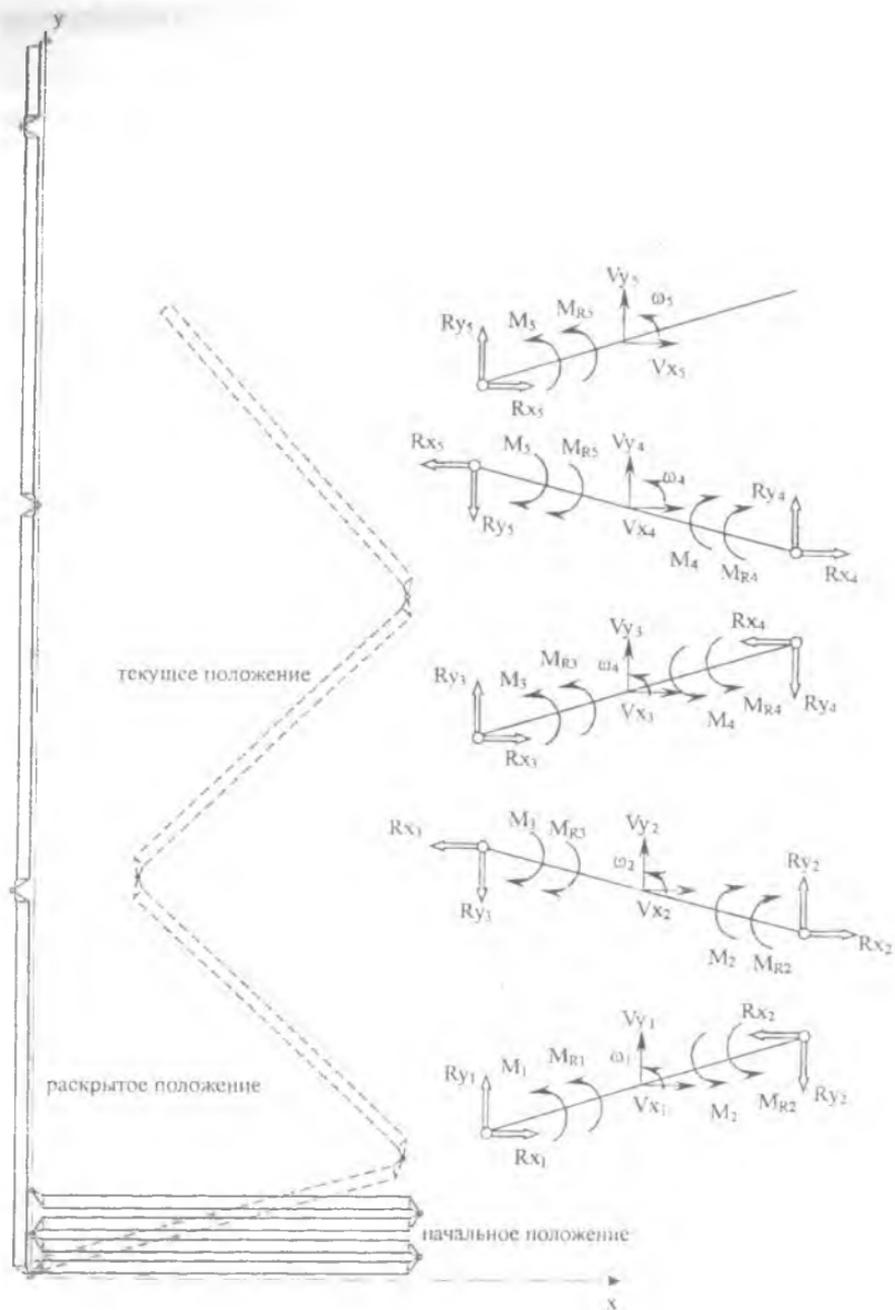


Рис. 5.16. Расчетная схема раскрытия панелей БС

$$\begin{cases}
 m_i \ddot{x}_i = Rx_i - Rx_{i+1} \\
 m_i \ddot{y}_i = Ry_i - Ry_{i+1} \\
 m_5 \ddot{x}_5 = Rx_5 \\
 m_5 \ddot{y}_5 = Ry_5 \\
 J_i \ddot{\varphi}_i = (Rx_i + Rx_{i+1}) \frac{l_i}{2} \sin \varphi_i - (Ry_i + Ry_{i+1}) \frac{l_i}{2} \cos \varphi_i + \\
 + (-1)^{i+1} [(M_i + M_{i+1}) + (M_{Ri} \delta_i + M_{Ri+1} \delta_{i+1})] \\
 J_5 \ddot{\varphi}_5 = Rx_5 \frac{l_5}{2} \sin \varphi_5 - Ry_5 \frac{l_5}{2} \cos \varphi_5 + M_5 + M_{R5} \delta_5 \\
 i = 1, 2, \dots, 5.
 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Уравнения связей, отражающие тот физический факт, что общие точки двух любых смежных панелей имеют одинаковые координаты, скорости, ускорения, имеют вид

$$\begin{cases}
 \ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 = 0 \\
 \ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 = 0 \\
 \ddot{x}_i - \ddot{\varphi}_i \frac{l_i}{2} \sin \varphi_i - \dot{\varphi}_i^2 \frac{l_i}{2} \cos \varphi_i - \ddot{x}_{i+1} - \ddot{\varphi}_{i+1} \frac{l_{i+1}}{2} \sin \varphi_{i+1} - \dot{\varphi}_{i+1}^2 \frac{l_{i+1}}{2} \cos \varphi_{i+1} = 0 \\
 \ddot{y}_i + \ddot{\varphi}_i \frac{l_i}{2} \cos \varphi_i - \dot{\varphi}_i^2 \frac{l_i}{2} \sin \varphi_i - \ddot{y}_{i+1} + \ddot{\varphi}_{i+1} \frac{l_{i+1}}{2} \cos \varphi_{i+1} - \dot{\varphi}_{i+1}^2 \frac{l_{i+1}}{2} \sin \varphi_{i+1} = 0 \\
 i = 1, 2, \dots, 4.
 \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Таким образом, получена система 25 дифференциальных уравнений, линейных относительно неизвестных вторых производных и реакций связей. Данная система при известных внешних воздействиях и начальных условиях может быть проинтегрирована любым численным методом.

Фиксация первой панели и любых двух смежных панелей между собой и их последующее совместное движение как одного твердого тела учитывается дополнительными связями:

$$\begin{cases}
 \ddot{\varphi}_1 \delta_1 = 0, \\
 (\ddot{\varphi}_i - \ddot{\varphi}_{i+1}) \delta_{i+1} = 0, \quad i = 1 \dots 4.
 \end{cases}$$

Процесс фиксации любых смежных створок характеризуется потерей их относительной скорости движения, возникновением ударных реакций во всех шарнирных соединениях и скачкообразным изменением угловых и линейных скоростей всех створок. Этот процесс наложения мгновенных связей описывается в соответствии с теорией удара следующими соотношениями, характеризующими изменение количества движения и момента количества движения системы (5.17):

$$\left\{ \begin{aligned}
 m_i(\dot{x}_{ki} - \dot{x}_{0i}) &= S_{x_i} - S_{x_{i+1}}, \\
 m_i(\dot{y}_{ki} - \dot{y}_{0i}) &= S_{y_i} - S_{y_{i+1}}, i = 1, 2 \dots 4, \\
 m_5(\dot{x}_{k5} - \dot{x}_{05}) &= S_{x_5}, \\
 m_i(\dot{y}_{k5} - \dot{y}_{05}) &= S_{y_5}, \\
 J_i(\dot{\phi}_{ki} - \dot{\phi}_{0i}) &= (S_{x_i} + S_{x_{i+1}}) \frac{l_i}{2} \sin \varphi_i - (S_{y_i} + S_{y_{i+1}}) \frac{l_i}{2} \cos \varphi_i + \\
 &+ (-1)^{i+1} (M_{S_i} \delta_i + M_{S_{i+1}} \delta_{i+1}), i = 1 \dots 4, \\
 J_5(\dot{\phi}_{5i} - \dot{\phi}_{05}) &= S_{x_5} \frac{l_5}{2} \sin \varphi_5 - S_{y_5} \frac{l_5}{2} \cos \varphi_5 + M_{S_5} \delta_5.
 \end{aligned} \right. \quad (5.2.3)$$

Для замыкания системы (5.2.3), т. е. получения дополнительных условий для определения импульсных реакций, линейных и угловых скоростей панелей после наложения мгновенных связей, воспользуемся уравнениями связей, аналогичными (5.2.2), но для скоростей общих точек:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{x}_{k1} + \dot{\phi}_{k1} \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 &= 0, \\
 \dot{y}_{k1} - \dot{\phi}_{k1} \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 &= 0, \\
 \dot{x}_{ki} - \dot{\phi}_{ki} \frac{l_i}{2} \sin \varphi_i - \dot{x}_{k_{i+1}} - \dot{\phi}_{k_{i+1}} \frac{l_{i+1}}{2} \sin \varphi_{i+1} &= 0, \\
 \dot{y}_{ki} + \dot{\phi}_{ki} \frac{l_i}{2} \cos \varphi_i - \dot{y}_{k_{i+1}} + \dot{\phi}_{k_{i+1}} \frac{l_{i+1}}{2} \cos \varphi_{i+1} &= 0, \\
 i &= 1, 2 \dots 4.
 \end{aligned} \right. \quad (5.2.4)$$

Уравнения связей, показывающие, что угловые скорости зафиксированных между собой створок равны (отсутствует вращение i -й створки относительно $i+1$ -й), имеют вид

$$\dot{\varphi}_i \delta_i = 0,$$

$$(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i+1}) \delta_{i+1} = 0, i = 1 \dots 4$$

В уравнениях (5.2.1) – (5.2.4) использованы следующие обозначения:

m_i, J_i – масса и момент инерции i -й створки,

l_i – расстояние между шарнирами i -й створки,

R_{x_i}, R_{y_i} – реакции в шарнирах в процессе раскрытия,

M_i – внешний момент в i -й створке,

M_{R_i} – удерживающий момент в i -м шарнире,

δ_i – функция переключения $\delta_i = \delta_i(\varphi)$.

$\dot{x}_{0i}, \dot{y}_{0i}, \dot{\varphi}_{0i}, \dot{x}_{ki}, \dot{y}_{ki}, \dot{\varphi}_{ki}$ – скорости створок до и после фиксации,

S_{x_i}, S_{y_i} – импульсные реакции в i -м шарнире при фиксации,

M_{s_i} – ударные импульсные моменты, возникающие в зафиксированном

либо фиксирующемся i -м шарнире при фиксации одной из створок.

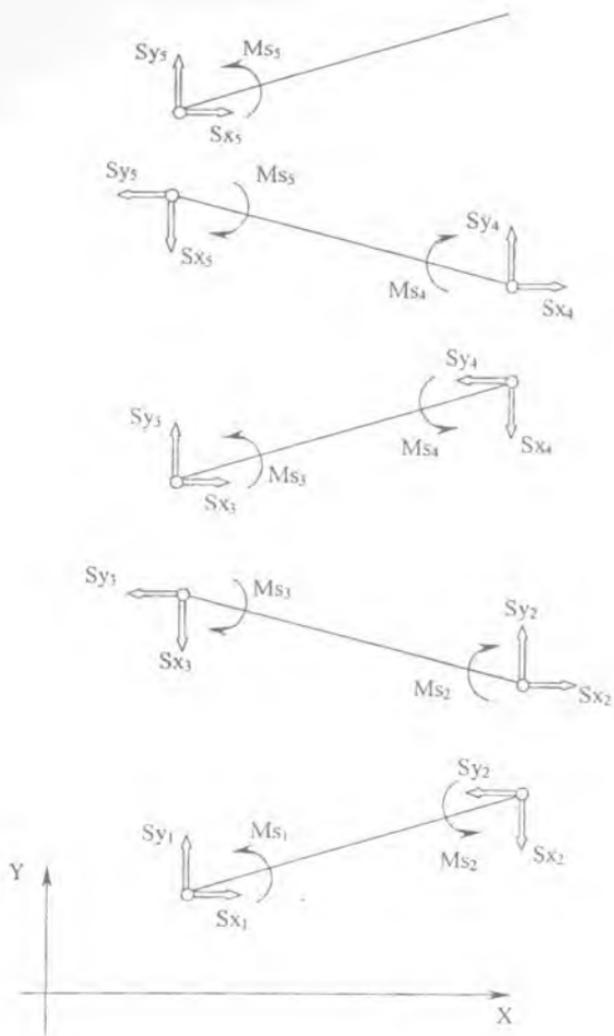


Рис. 5.17. Расчетная схема фиксации створок

5.2.3. Внешние факторы процесса раскрытия панелей БС

Внешними факторами, действующими на створки при раскрытии панелей БС, являются моменты пружинных приводов, силы сопротивления, обусловленные изгибом кабельных жгутов и трением в шарнирах, моменты от обжатия датчиков телеметрического контроля и сопротивления защелок фиксации створок в рабочем положении.

Суммарный момент, действующий на в i -м шарнире, определяется следующим образом:

$$M_1 = M_{H1} - c_1\varphi_1 - M_{C1} - M_o - M_\varphi ,$$

$$M_i = M_{Hi} - c_i(Ii - (\varphi_i - \varphi_{i-1})) - M_{Ci} - M_{\varphi i} - M_{\varphi i}, i = 2 \dots 5 ,$$

M_{Hi} – начальный момент пружины в i -м шарнире,

C_i – угловая жесткость пружины в i -м шарнире,

M_{Ci} – момент сил сопротивления в i -м шарнире,

$M_{\varphi i}$ – момент от обжатия датчиков в i -м шарнире,

$M_{\varphi i}$ – момент защелок, препятствующий раскрытию в i -м шарнире.

5.2.4. Управляющие переменные

Энергетические характеристики пружин обжатия (кручения) характеризуются тремя независимыми параметрами: начальным усилием (моментом), жесткостью и конечным усилием (моментом). Любой из этих параметров в силу линейности характеристик можно заменить ходом (углом поворота, работой), но число независимых переменных останется неизменным, т. е. равным трем.

Что касается пружины кручения в корневом шарнире, то проблемы с выбором начального момента и жесткости не возникает (в пределах конструктивных, весовых ограничений), т. к. существует возможность в достаточно широком диапазоне выбирать диаметр проволоки и диаметр витков. Для торсиона такая возможность ограничена рядом диаметров проволоки и материалом, регламентируемым ГОСТ 14963-79, из которых и изготавливаются торсионы.

В соответствии с теорией сопротивления материалов жесткость и предельно допустимый момент кручения торсиона из условий прочности и надежности соответственно равны:

$$c = \frac{GJ_p}{l}, J_p = \frac{\pi d^4}{32}, c = \frac{\pi d^4 G}{32l},$$

$$[\tau] \leq \frac{Md}{2J_p}, M = \frac{[\tau]\pi d^3}{16k}$$

Здесь:

d – диаметр проволоки торсиона,

G – модуль упругости при сдвиге,

l – длина проволоки торсиона,

$[\tau]$ – касательное напряжение,

$k=1.25$ – коэффициент безопасности, обусловленный тяжелыми условиями работы торсиона.

Поскольку угол поворота корневой створки задан конструктивно, энергетические характеристики пружины кручения будут определяться двумя независимыми параметрами: начальным моментом M_n и жесткостью c_1 . Для торсиона, длина которого ограничена расстоянием между узлами вращения створок, а набор марок материала ограничен нормативным документом (ГОСТом), в качестве независимых параметров его энергетических характеристик можно принять диаметр торсиона d и начальный M_n (в соответствии с формулами, по сути дела параметрами являются диаметр и марка материала).

Таким образом, количество независимых управляющих переменных процессом раскрытия БС будет равно 10.

Для удобства записи в дальнейшем обозначим их компонентами управляющего вектора $\bar{a} = \{M_{H1} \dots M_{H5}, c_1, d_2 \dots d_5\}^T$.

5.2.5. Математическая формулировка задачи раскрытия створок БС

Выразим математическую сущность технических требований, предъявляемых к системе (процессу) раскрытия БС. Для этого введем следующие критерии, характеризующие состояние системы:

1. Критерий, определяющий время раскрытия БС: $J_1 = t[\bar{a}]$.
2. Критерий, определяющий угловую скорость створок в момент фиксации: $J_j = \omega_j[\bar{a}], i = 1 \dots 5, j = i + 1$.
3. Вспомогательные критерии, определяющие время раскрытия каждой створки, используемые в дальнейшем для формирования требований по обеспечению последовательности фиксации створок от концевой к корневой (наиболее благоприятной с точки зрения нагрузок при фиксации): $J_j = t[\bar{a}], i = 1 \dots 5, j = i + 6$.

С их использованием требования по последовательности фиксации створок запишутся в виде следующих неравенств:

$$\gamma_i = \frac{t_{i+1}[\bar{a}]}{t_i[\bar{a}]} \leq 1, \quad i=1 \dots 5.$$

Критерии $J_1 \dots J_5$ по условию задачи ограничены следующими неравенствами:

$$t[\bar{a}] \leq T_{\text{доп}},$$

$$\omega_{i \text{ min}} \leq \omega_i[\bar{a}] \leq \omega_{i \text{ max}}, \quad i = 1 \dots 5.$$

Здесь:

t_i – время раскрытия i -й створки,

$T_{\text{доп}}$ – допустимое время раскрытия панели БС,

ω_i – относительная скорость между двумя смежными створками в момент фиксации (скорость между двумя створками в i -м шарнире),

$\omega_{i \text{ max}}, \omega_{i \text{ min}}$ – максимально и минимально допустимые относительные угловые скорости створок в i -м шарнире.

Величина $\omega_{i \min}$, $i=1..5$, определяется заранее из условия того, что створки должны гарантированно фиксироваться (кинетической энергии должно быть достаточно для преодоления сопротивления защелок, датчиков, кабелей, трения на входе фиксации) в каждом шарнире.

Эти угловые скорости можно определить следующим образом:

$$\omega_{i \min} = \sqrt{\frac{2(A_a + A_p + A_c)}{J_i}}, i = 1..5,$$

где J_i – приведенные значения момента инерции относительно i -го шарнира.

Очевидно, что требование по надежности фиксации створок можно выполнить тривиальным образом – установкой торсионов с моментом, превышающим в конце раскрытия суммарный момент сопротивления всех сил при работе защелок. Однако, как показывают предварительные расчеты, при этом могут значительно возрасти угловые скорости при фиксации отдельных створок, что приводит к невыполнению ограничений по максимальной скорости фиксации.

Итак, мы получили совокупность неравенств, которые и составляют математическую запись требований к системе раскрытия БС. Приведем их к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{t[\bar{a}]}{T_{\text{дон}}}, \\ \gamma_2 &= \frac{t_2[\bar{a}]}{t_1[\bar{a}]} \leq 1, \\ &\dots \\ \gamma_3 &= \frac{t_3[\bar{a}]}{t_1[\bar{a}]} \leq 1, \\ \gamma_6 &= \frac{\omega_1[\bar{a}]}{\omega_{1 \max}} \leq 1, \\ \gamma_7 &= \frac{\omega_{1 \min}}{\omega_1[\bar{a}]} \leq 1, \\ &\dots \\ \gamma_{15} &= \frac{\omega_{5 \min}}{\omega_5[\bar{a}]} \leq 1. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Таким образом, приходим к решению минимаксной задачи

$$\min_{\vec{a}} \max_{S=1..15} \gamma_S[\vec{a}] = \Gamma \leq 1, \text{ решение которой гарантирует решение постав-$$

ленной задачи-проектирования процесса раскрытия.

5.2.6. Алгоритм решения задачи

Отыскание энергетических характеристик пружинных приводов для раскрытия створок БС целесообразно проводить в два этапа:

- I. Определение номинальных характеристик пружинных приводов при номинальных значениях инерционно-массовых, центровочных характеристик створок и номинальных значениях внешних факторов.
- II. Коррекция (в случае необходимости) найденных характеристик пружинных приводов при решении задачи Коши в стохастической постановке.

Решение задачи первого этапа производится методом градиентов (или его модификацией) по следующему алгоритму:

1. Задается начальное приближение управляющих параметров из области допустимых значений.
2. Решается и интегрируется исходная система дифференциальных уравнений, описывающих процесс раскрытия БС.
3. Определяются величины критериев из заданной совокупности и находится наибольший.
4. В соответствии с методом градиентов выбирается новое значение управляющих параметров, уменьшающих величину наибольшего критерия.
5. Процедура расчетов по пп. 2,3,4 повторяется до тех пор, пока не будет решена минимаксная задача.

Поскольку параметры, характеризующие процесс раскрытия БС (массовые, центровочные, инерционные характеристики, моменты пружин и сопротивления), имеют отклонения от номинальных значений, то и кинематика процесса раскрытия будет изменяться, что может привести к невыполнению заданных ограничений. Поэтому на втором этапе расчетов должна быть вы-

явлена такая ситуация. В этом случае необходимо, используя алгоритм решения задачи первого этапа, попытаться найти "новые" управляющие переменные, удовлетворяющие заданным ограничениям. Иными словами, необходимо решить задачу управления в стохастической постановке.

5.3. Решение задачи отделения головного обтекателя

5.3.1. Основные требования к процессу отделения

Головной обтекатель предназначен для защиты КА от теплового и силового воздействия набегающего потока при прохождении РН плотных слоев атмосферы. Когда скоростной напор становится практически равным нулю, ГО становится пассивным элементом конструкции и должен быть отделен от РН. Отделение ГО осуществляется при помощи специальной системы. Система состоит из механических рычажных замков крепления ГО к переходному отсеку РН, замков крепления створок ГО по продольному стыку, узлов вращения створок с механизмами их освобождения, толкателей разворота створок и элементов электроавтоматики.

Процесс отделения ГО происходит следующим образом. По команде от системы управления РН срабатывают пиротолкатели раскрытия замков поперечного и продольных стыков ГО. После этого под действием усилий толкателей разворота створок и инерционных сил створки разворачиваются относительно узлов вращения. При достижении заданного угла кинематическая связь створок с переходным отсеком РН в узлах вращения нарушается, и далее створки под действием инерционных сил отделяются от РН.

При проектировании системы отделения ГО решаются следующие основные задачи. Выбор энергетических характеристик пиротолкателей для гарантированного раскрытия замков. Динамический расчет тяг замков и определение их несущей способности. Выбор энергетических характеристик толкателей разворота створок и определение угла поворота створок, при котором нарушается связь. Расчет кинематических параметров отделения ГО, проверка безударности отделения, т.е. обеспечение движения створок в заданной зоне, ограниченной конструкцией РН.

Движение створок ГО при отделении условно разбивается на три участка:

- участок движения створок под действием усилий толкателей их разворота и инерционных сил;
- участок вращения створок относительно осей вращения под действием инерционных сил;
- участок свободного движения створок под действием инерционных сил.

При расчете процесса отделения створок принимают следующие допущения:

- движение створок плоское;
- створки ГО - абсолютно твердые тела;
- аэродинамические силы отсутствуют (в случае отделения ГО в потоке аэродинамические силы учитываются);
- осевые перегрузки РН на участке отделения створок постоянные;
- параметры возмущенного движения РН на участке отделения нулевые.

5.3.2. Уравнение движения и выбор угла отделения створок

Расчетная схема движения створки на первом участке приведена на рис. 5.18.

В соответствии с расчетной схемой уравнение движения створки имеет следующий вид:

$$J\ddot{\varphi} = -2P_T(l)h - m n_x g R \cos(\varphi) , \quad (5.3.1)$$

где J – момент инерции створки относительно оси вращения;

$P_T(l)$ – усилие толкателя в зависимости от хода;

R – радиус-вектор центра масс створки;

m – масса створки.

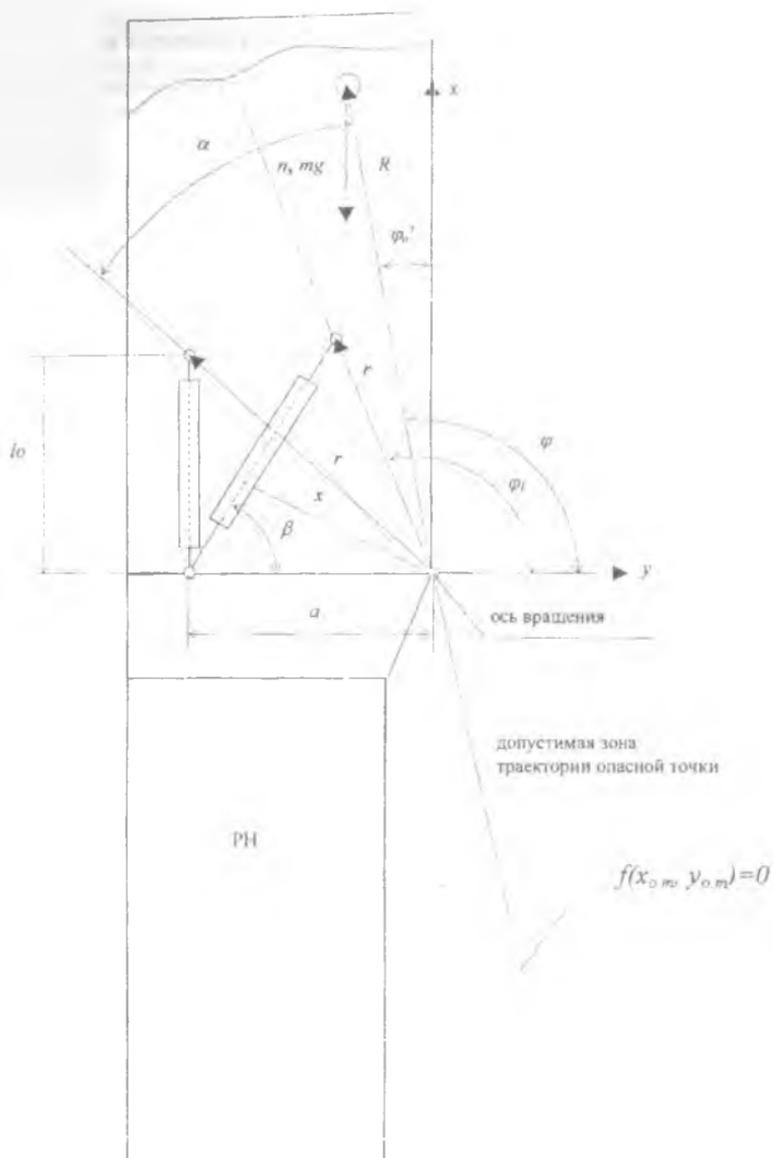


Рис. 5.18. Расчетная схема движения створки на первом участке

Из векторного равенства согласно рис. 5.18:

$$\vec{l} = \vec{a} + \vec{r}, \text{ имеем}$$

$$l = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos(\varphi_1)}, \varphi_1 = \varphi + \alpha.$$

Диаграмма усилия толкателя является линейной функцией, рис. 5.19:

$$\Delta = l - l_0, \Delta \in [0, L_T];$$

$$P_T = P_0 - \frac{P_0 - P_k}{h_T} \Delta.$$

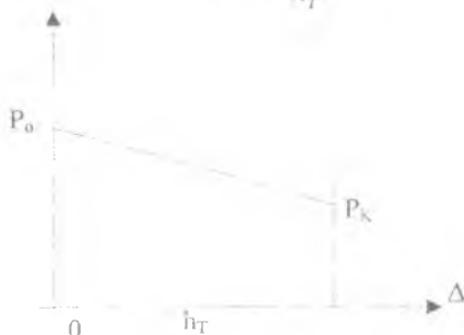


Рис. 5.19. Диаграмма изменения усилия толкателя

Из рис. 5.18 также следует, что можно найти h в функции угла поворота створки:

$$h(\varphi) = a \sin(\beta), \sin(\beta) = \frac{r \sin(\pi - \varphi_1)}{l}.$$

Обычно задача заключается в подборе количества толкателей из имеющейся номенклатуры (либо разработки нового толкателя), чтобы обеспечивался необходимый момент для преодоления момента инерционных сил (участок поворота створки $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \varphi'_0]$) и обеспечения допустимой зоны траектории опасной точки. Это требование безударности отделения. Но зона выхода также зависит и от угла поворота створки, при котором теряется связь. Найдем этот угол.

Уравнение движения створки (5.3.1) запишем в другом виде:

$$J \frac{d\omega}{dt} = -n_x mgR \cos(\varphi) - M_T(\varphi), \text{ или}$$

$$J \frac{\omega^2}{2} \Big|_{\omega_0}^{\omega} = -n_x mgR \sin(\varphi) \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} - \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_T(\varphi) d\varphi, \text{ т.е.}$$

$$J \frac{\omega^2}{2} = n_x mgR (\sin(\varphi_0) - \sin(\varphi)) + A_T, \quad (5.3.2)$$

где A_T – суммарная работа толкателей разворота створки.

Поскольку ω отрицательная, из (5.3.2) следует, что

$$\omega = \sqrt{\frac{2B(\sin \varphi_0 - \sin \varphi + \frac{A_T}{B})}{J}}; \quad B = n_x m g R.$$

Поскольку $\omega = \omega(\varphi)$, используя формулу Эйлера $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ или $V_y = -(\vec{\omega} \times \vec{R})_y = -\omega R \sin \varphi$, найдем выражение для скорости ЦМ створки вдоль оси OY и определим ее максимальное значение. Именно в этот момент и не ранее необходимо нарушить кинематическую связь в узле вращения. Имеем

$$V_y = R \sin \varphi \sqrt{\frac{2B(\sin \varphi_0 - \sin \varphi + \frac{A_T}{B})}{J}}. \quad (5.3.3)$$

Отсюда, используя необходимые условия экстремума, найдем

$V_y \rightarrow \max V_y(\varphi)$, т.е.

$$\frac{\partial V_y}{\partial \varphi} = 0. \quad \cos(\varphi) \sqrt{\frac{2B(\sin \varphi_0 - \sin \varphi + \frac{A_T}{B})}{J}} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{B}{J \sqrt{\frac{2B(\sin \varphi_0 - \sin \varphi + \frac{A_T}{B})}{J}}} = 0$$

Отсюда получаем условия экстремума:

1. $\cos(\varphi)=0, \varphi=\pi/2$.

$$2. 2B(\sin \varphi_0 - \sin \varphi + A_T/B) - B \sin(\varphi) = 0, \text{ или} \\ \sin \varphi = 2(\sin \varphi_0 + A_T/B)/3. \quad (5.3.4)$$

Первое условие дает локальный минимум, а второе – максимум.

Для одного из имеющихся ГО с характеристиками $m_{ст}=576\text{кг}$, $J_0=3900\text{кгм}^2$, $R=3.3\text{м}$ ($X_{ш}=3.2\text{м}$, $Y_{ш}=0.73\text{м}$, $\varphi'_0=13^\circ$), четырех толкателей на створку с характеристиками $P_0=6000\text{Н}$, $P_k=1000\text{Н}$, $h_l=0.495\text{м}$ и осевой пере-

грузке $nx=1.3g$ будем иметь

$$A_T=4 \cdot 0.5 \cdot (6000+1000) \cdot 0.495=6900\text{Нм},$$

$$J=J_0+mR^2=3900+576 \cdot 3.3^2=10170\text{кгм}^2, B=1.3 \cdot 576 \cdot 9.81 \cdot 3.3=24241,$$

$$A_T/B=0.28 \text{ и } \varphi = \arcsin\left(\frac{2}{3}(\sin 103^\circ + 0.28)\right) = 56^\circ, \text{ т.е. створка ГО при по-}$$

вороте на 47° от ее исходного положения должна быть освобождена от связи в узле вращения, чтобы скорость ЦМ ее вдоль оси OY была максимальной. Поскольку освобождение от связи должно происходить только при условии, что к этому моменту реакция (R_y) в оси вращения отрицательная (избежание скольжения опоры по переходному отсеку), это условие необходимо проверить.

Согласно принципу Даламбера из рис. 5.20 следует:

$$R_x + m\omega^2 R \cos(\varphi) + mR\ddot{\varphi} \sin(\varphi) = 0. \quad (5.3.5)$$

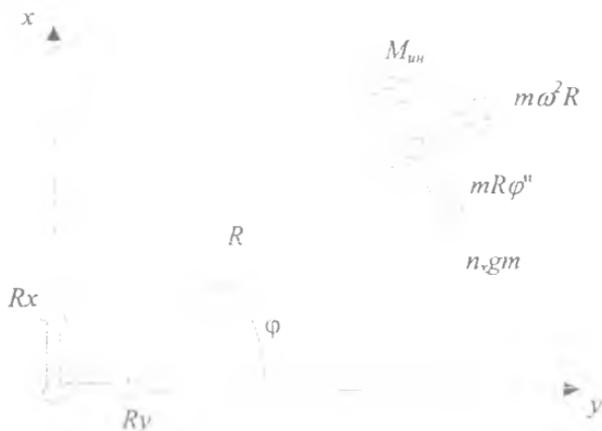


Рис. 5.20. К определению реакций в опоре

Подставляя в (5.3.5) значения $\ddot{\varphi}$ и ω^2 соответствующие $V_y^{\max}(\varphi = \varphi^*)$,

получим

$$R_y + m R \cos(\varphi^*) \frac{2B}{J} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi^* + \frac{A_T}{B}) - m R \sin \varphi^* \frac{m n_1 g}{J} R \cos(\varphi^*) = 0,$$

$$R_y + m R \cos(\varphi^*) \left[\frac{2B}{J} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi^* + \frac{A_T}{B}) - \frac{B}{J} \sin(\varphi^*) \right] = 0.$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю, а при $\varphi < \varphi^*$ $R_y < 0$, т.е. нарушение связи в оси вращения створки должно происходить не ранее достижения угла поворота $\varphi = \varphi^*$.

После потери кинематической связи створка будет совершать свободное движение под действием силы инерции. В "падающей" с ускорением $n_x g$ системе координат (OX_1Y_1) траектория опасной точки будет описывать циклоиду, рис. 5.21.



Рис. 5.21. Траектория опасной точки

5.4. Решение задачи раскрытия антенны

5.4.1. Основные требования к процессу раскрытия антенны

После выведения КА на рабочую орбиту осуществляется раскрытие антенн, т.е. приведение их в рабочее положение. Это осуществляется специальными системами. Конструктивно антенна устанавливается на конце штанги (стержня) определенной длины, другой конец которой закреплен шарнирно на отсеке КА. Здесь же находится и энергопривод, осуществляющий поворот этой штанги относительно шарнира на заданный угол и механизм фиксации штанги в рабочем положении. Схематично это показано на рис. 5.22.

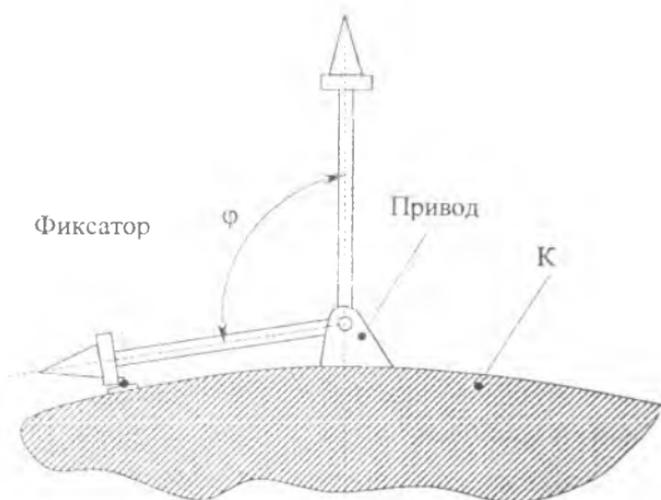


Рис. 5.22.Схема установки антенны

Освобождение штанги, поворот и фиксация ее в рабочем положении осуществляются специальной системой, состоящей из электропривода, элементов фиксации штанги в первоначальном и рабочем положении.

Процесс раскрытия антенны с точки зрения механики твердого тела имеет одну степень свободы, и подобрать энергию привода, достаточную для поворота штанги на заданный угол, преодолев при этом усилие сопротивления кабелей, трения и сопротивление фиксирующего механизма, не представляет

труда. Можно также обеспечить заданное ограничение на время поворота, которое обычно не является жестким.

Однако учитывая, что антенна после приведения ее в рабочее положение должна выполнять свою задачу – быть работоспособной, то она не должна быть подвержена большим ударным нагрузкам, действующим на неё при фиксации штанги в рабочем положении. Чтобы оценить эти нагрузки, недостаточно использовать только уравнения механики твердого тела, необходимо использовать аппарат механики сплошных сред.

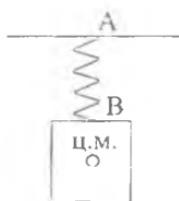
Задача проектирования системы раскрытия и фиксации антенны в рабочем положении будет заключаться в подборе электропривода и, возможно, жесткостных характеристик стержня и узла фиксации, обеспечивающих две главные задачи – гарантированную фиксацию стержня в рабочем положении и неперевышение при этом допустимых ударных нагрузок на конструкцию антенны.

Во многих случаях область допустимых угловых скоростей, при которых происходит фиксация, бывает достаточно узкой, когда обеспечиваются эти требования.

Используют обычно электромеханические, гидромеханические или просто пружинные энергоприводы. Далее предполагаем, что для раскрытия антенны используется пружинный привод как наиболее надежный, дешевый и простой.

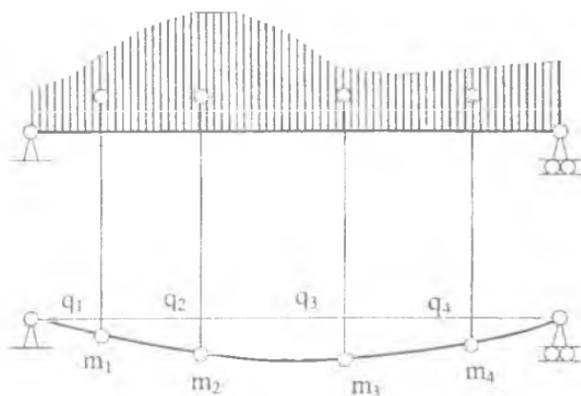
Очевидно, что на этапе формирования структурной схемы системы раскрытия необходимо иметь сравнительно простой аппарат анализа работоспособности предлагаемых схем. Причем, как обычно бывает, анализ надо проводить за сравнительно короткий срок.

Поэтому на этой стадии проектирования задачу поведения упругой системы с бесконечным числом степеней свободы заменяют на задачу поведения так называемых эквивалентно-приведенных схем с конечным числом степеней свободы.



Например, груз, подвешенный к неподвижной точке А на пружине АВ, если учитывать распределенную массу пружины, представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Но когда масса груза значительно превышает массу пружины, при нахождении наименьшей (основной) частоты колебаний без большой погрешности можно пренебречь массой пружины, сохраняя ее свойства упругости. Если, кроме того, предположить, что груз совершает прямолинейные колебания, то рассматриваемая система обращается в приведенную систему с одной степенью свободы. Для определения движения такой системы достаточно найти только одну величину как функцию времени – отклонение ц.м. груза от положения равновесия.

Рассмотрим более сложный пример. При определении основных частот поперечных колебаний горизонтальной балки, шарнирно закрепленной на двух опорах, массу, распределенную по тому или иному закону вдоль длины балки, заменяют несколькими сосредоточенными массами, величина и положение которых определяются особым способом.



Рассматривая малые колебания балки, пренебрегают незначительными горизонтальными смещениями масс. При таких условиях для определения поперечных перемещений приведенной системы достаточно найти в функ-

ции времени только четыре величины q_1, q_2, q_3, q_4 . Или будут определяться прогибы отдельных масс при колебаниях (скорости, ускорения и, как следствие, перегрузки), а вместе с тем и форма упругой линии балки в наибольшем ее отклонении. Здесь мы имеем случай замены упругой системы эквивалентной системой с четырьмя степенями свободы.

Математическим аппаратом решения таких эквивалентных систем являются теория малых колебаний систем с конечным числом степеней свободы и, так называемые, уравнения Лагранжа второго рода в обратной форме. Применяя их, как это будет показано далее, даже не требует применения определения потенциальной энергии системы, что обычно может быть связано с громоздкими выражениями и вычислениями. Получим эти уравнения в общем виде для дальнейшего использования в нашем конкретном случае.

5.4.2. Уравнения Лагранжа второго рода в обратной форме

Известно, что в основе теории малых колебаний систем с конечным числом степеней свободы лежит понятие кинетической и потенциальной энергии, которые являются определенно – положительными квадратичными формами от обобщенных скоростей и координат соответственно. Эти энергии в общем виде имеют вид

$$\dot{\bar{q}}^T A \dot{\bar{q}} = 2T(\dot{\bar{q}}), \quad \bar{q}^T C \bar{q} = 2T(\bar{q}),$$

где A, C – квадратичные, симметрические матрицы с постоянными коэффициентами инерции (a_{ik}) и жесткости (c_{ik}) соответственно.

Поскольку считается, что система малых колебаний консервативна, то $E=T+\Pi=\text{const}$. и отсюда получают уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0, \text{ или в скалярной форме}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots n,$$

где $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ – обобщенная сила.

Обобщенную силу, трактуя как n -мерный вектор, можно записать и так -

$$\bar{Q} = -C\bar{q}.$$

Обозначим \bar{P} - вектор обобщенной силы, который нужно приложить к системе, чтобы удержать ее в равновесом положении, когда обобщенные координаты не равны нулю, т.е. $\bar{q} \neq 0$, следовательно $\bar{P}_{q \neq 0} \neq 0$.

Для этого должны выполняться условия равновесия:

$$\bar{Q} + \bar{P} = 0, \text{ откуда следует, что } \bar{P} = -\bar{Q}, \text{ или}$$

$$\bar{P} = C\bar{q}. \quad (5.4.1)$$

Поскольку определитель матрицы C не равен нулю, то систему (5.4.1) можно разрешить относительно \bar{q} :

$$\bar{q} = \alpha\bar{P}, \alpha = C^{-1}. \quad (5.4.2)$$

Это уравнение представляет собой обобщенный закон Гука для системы с n степенями свободы. Его также можно рассматривать как условие равновесия между силой \bar{P} и восстанавливающей силой \bar{Q} в так называемой обратной форме. α - это матрица коэффициентов a_{ik} , которые называются статическими коэффициентами влияния. Эта матрица так же, как и матрица C , - симметрическая, $a_{ik} = a_{ki}$, что отражает принцип взаимности перемещений. Если в уравнении (5.4.2) положить все силы кроме P_k равными нулю, а $P_k = 1$, то получим:

$$q_i = \alpha_{ik}, i = 1 \dots n,$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{21} & \cdot & \alpha_{21} & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \cdot & \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n,2} & \cdot & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix}$$

Это значит, что коэффициенты a_{ik} определяют конфигурацию равновесного положения системы, когда к ней будет приложена только одна единичная сила P_k . Иначе говоря, a_{ik} - это изменение координаты q_i от единичной силы,

соответствующей координате q_k . Поскольку уравнение (5.4.2) выражает условие равновесия между внешними силами \vec{P} и восстанавливающими силами \vec{Q} , возникающими при отклонении системы из положения устойчивого равновесия, в качестве этих сил можно взять обобщенные силы инерции, т. е.

$$P_i = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right), i = 1 \dots n, \text{ или } \vec{P} = -A\ddot{\vec{q}}. \quad (5.4.3)$$

Если учесть условие равновесия $\vec{Q} + \vec{P} = 0$ и подставить сюда \vec{P} через силы инерции $\vec{P} = -A\ddot{\vec{q}}$, получим принцип Даламбера:

$$-A\ddot{\vec{q}} + \vec{Q} = 0, \text{ отсюда следует уравнение Лагранжа второго рода.}$$

Подставив (5.4.3) в систему (5.4.2) получим уравнение движения в обратной форме по отношению к уравнению Лагранжа второго рода.

$$\ddot{\vec{q}} = -\alpha A\ddot{\vec{q}}, D = \alpha A, \vec{q} = -D\ddot{\vec{q}}. \quad (5.4.4)$$

Необходимо отметить, что даже если кинетическая энергия выражается в канонической форме, матрица D уже не будет симметрической.

Чтобы решить систему (5.4.4), необходимо найти собственные формы, частоты и коэффициенты влияния. Как видно, потенциальная энергия системы нам здесь не понадобится и её не надо определять.

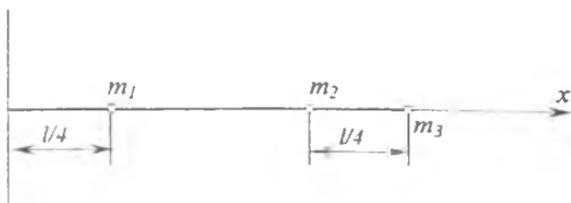
Конкретный вид решения получим применительно к нашей задаче – консольной балке с сосредоточенной массой на свободном конце.

Пусть штанга представляет собой стержень с равномерно распределенной массой и изгибной жесткостью по длине ($EJ = \text{const}$, $\mu(l) = \mu_0 = \text{const}$) и сосредоточенной массой m_3 на конце.



Для простоты массу штанги представим двумя сосредоточенными масса-

$$\text{ми } m_1 = \frac{\mu_0 l}{1}, m_2 = \frac{\mu_0 l}{1}.$$



Тогда эта механическая система будет иметь три степени свободы

$\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$. Кинетическую энергию запишем в канонической форме

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2, \text{ а матрица } B, B=D, \text{ будет иметь вид}$$

$$B = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix}, i, j = 1, 2, 3.$$

Поскольку система консервативна, решение уравнения (5.4.4) ищется в гармонической форме:

$$\vec{q} = \vec{\lambda} \sin(\omega t + \alpha). \quad (5.4.5)$$

Подставив (5.4.5) в (5.4.4), получим $\omega' B \vec{\lambda} = \vec{\lambda}$, или, вводя единичную матрицу E и обозначив $p^2 = \frac{1}{\omega^2}$, получим

$$(B - p^2 E) \vec{\lambda} = 0, \text{ или } B \vec{\lambda} = p^2 \vec{\lambda}. \quad (5.4.6)$$

Это задача о собственных векторах $\vec{\lambda}$ и числах p^2 матрицы B.

Чтобы собственный вектор был ненулевым, $\vec{\lambda} \neq 0$, должен быть равен нулю определитель

$$\Delta = |B - p^2 E| . \quad (5.4.7)$$

Раскрывая его, получим кубическое уравнение относительно p^2 . На практике для подобного рода задач корни различные и положительные. Их можно отыскать любым приближенным способом. В результате получим три собственные частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

Подставив в (5.4.6) найдем 3 собственных вектора $\bar{\lambda}^{(1)}, \bar{\lambda}^{(2)}, \bar{\lambda}^{(3)}$.

Поскольку определитель системы (5.4.7) равен нулю, а ранг матрицы двум (корни векторного уравнения различны), собственные векторы будут определены с точностью до произвольной постоянной.

В скалярной форме уравнение (5.4.6) имеет вид

$$\begin{cases} (b_{11} - p^2)\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + b_{13}\lambda_3 = 0 \\ b_{21}\lambda_1 + (b_{22} - p^2)\lambda_2 + b_{23}\lambda_3 = 0 \\ b_{31}\lambda_1 + b_{32}\lambda_2 + (b_{33} - p^2)\lambda_3 = 0 . \end{cases} \quad (5.4.8)$$

Отбросим последнее уравнение, из оставшихся первых двух определим λ_1, λ_2 через λ_3 , значение которого произвольно.

Обозначив миноры определителя J_{31}, J_{32}, J_{33} , получим

$$\lambda_1 = \frac{J_{31}}{J_{33}} \lambda_3, \quad \lambda_2 = \frac{J_{32}}{J_{33}} \lambda_3, \quad \lambda_3 = 1 .$$

Итак, для каждого значения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ получим три вектора $\bar{\lambda}^{(1)}, \bar{\lambda}^{(2)}, \bar{\lambda}^{(3)}$.

Ими будут определяться собственные формы колебаний, каждая из которых соответствует собственной частоте.

Обычно формы приводят к безразмерному виду, т.е. нормируют.

Нормирующий множитель (в нашем случае) $N = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$.

Безразмерные формы соответственно равны:

$$u_1 = \frac{\lambda_1}{N}, u_2 = \frac{\lambda_2}{N}, u_3 = \frac{\lambda_3}{N}, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 .$$

Теперь можно записать общий интеграл уравнения (5.4.4)

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^3 A_i \bar{u}^{(i)} \sin(\omega_i t + \alpha_i), \quad A_i, \alpha_i = \text{const.} \quad (5.4.9)$$

Поскольку $\bar{q}(0) = 0$, все $\alpha_i = 0$. Постоянные A_i найдутся из (5.4.9) с учетом начальных условий по скоростям:

$$\dot{\bar{q}}_1(0) = \dot{\bar{\varphi}}_1 \frac{l}{4}, \quad \dot{\bar{q}}_2(0) = \dot{\bar{\varphi}}_2 \frac{3l}{4}, \quad \dot{\bar{q}}_3(0) = \dot{\bar{\varphi}}_3 l, \quad (5.4.10)$$

$\dot{\bar{\varphi}}_i$ - угловая скорость штанги в момент фиксации. A_i можно определить из линейного уравнения

$$\dot{\bar{q}}(0) = u \begin{vmatrix} A_1 \omega_1 & u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ A_2 \omega_2 & u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \\ A_3 \omega_3 & u_3^1 & u_3^2 & u_3^3 \end{vmatrix}, \quad u = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \\ u_3^1 & u_3^2 & u_3^3 \end{vmatrix}. \quad (5.4.11)$$

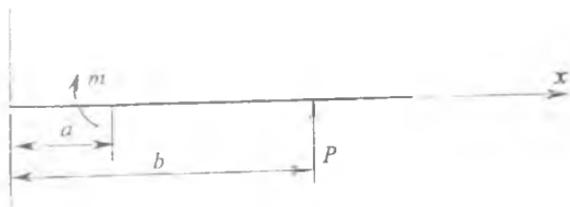
После определения A_i , $i=1,2,3$, можно будет найти перегрузку в ц.т. антенны и сравнить её с допустимой:

$$n = \frac{l}{g} \max_t \sum_{i=1}^3 A_i u_i^{(i)} \omega_i^2 \sin(\omega_i t) \leq n_{\text{доп}}. \quad (5.4.12)$$

5.4.2. Определение коэффициентов влияния

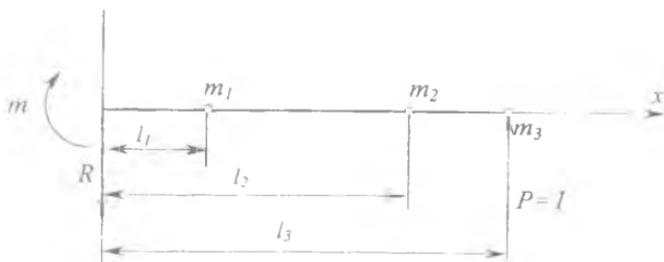
Определение α_{ik} основывается на понятии упругой линии балки, находящейся под действием заданных сил и моментов в статическом равновесии. Из курса сопротивления материалов известно, что если балка под действием сосредоточенных сил и моментов находится в равновесии, то уравнение её упругой линии выглядит следующим образом:

$$EJy(x) = EJ\alpha_0 x + EJf_0 + \sum m \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \frac{q(x-c)^4}{4!}.$$



При заземленном левом конце прогиб f_0 и угол α , равны нулю.

Для нашего примера для определения α_{ik} приложим поочередно единичную силу в точках сосредоточенных масс m_1, m_2, m_3 и в соответствии с уравнением упругой линии вычислим прогибы в точках m_i, m_j , если сила приложена в точке $m_k, k \neq i, j$. Заметим также, что матрица коэффициентов влияния симметричная, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.



Опорная реакция в заделке и момент приложении единичной силы в точке $m_i, i=1,2,3$, будут равны $R_i = -P, m_i = Pl_i$.

Перемещения в точке m_i (т.е. a_{11}, a_{22}, a_{33}) будут равны:

$$\alpha_{ii} = \frac{Pl_i l_i^2}{2EJ} - \frac{Pl_i^3}{6EJ} = \frac{Pl_i^3}{6EJ}; \alpha_{ii} = \frac{l_i^3}{3EJ}.$$

Приложим силу P сначала в точке m_3 и вычислим прогибы в точках m_1, m_2 , т.е. α_{13} и α_{23} . Затем приложим силу P в точке m_2 и вычислим прогиб в точке m_1 , т.е. α_{12} . Получим

$$\alpha_{13} = \frac{l_1^2(3l_3 - l_1)}{6EJ},$$

$$\alpha_{23} = \frac{l_2^2(3l_3 - l_2)}{6EJ},$$

$$\alpha_{12} = \frac{l_1^2(3l_2 - l_1)}{6EJ}.$$

Запишем коэффициенты влияния в виде матрицы D :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Проверку полученных результатов (возможных ошибок при вычислениях) произведем по условиям ортогональности собственных форм. Из теории линейных преобразований (линейных пространств) известно, что если матрица линейного преобразования A симметричная, а векторы \bar{x}, \bar{y} - собственные и соответствуют собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$, то имеет место условие ортогональности этих векторов, т.е. $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

Это условие получается следующим образом:

$$A\bar{x} = \lambda_1 \bar{x}, \quad A\bar{y} = \lambda_2 \bar{y}.$$

Умножим скалярно первое равенство на \bar{y} , а второе равенство на \bar{x} и вычтем первое из второго. Получим

$$\bar{y}^T A\bar{x} - \bar{x}^T A\bar{y} = (\lambda_1 - \lambda_2) \bar{x}^T \bar{y}.$$

Поскольку матрица A симметрическая, т.е. $A=A^T$, слева имеем нуль. Следовательно, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, имеем условие ортогональности собственных векторов.

В нашем случае, как уже указывалось, матрица линейного преобразования B несимметрическая. Для такой матрицы также выполняются условия ортогональности для собственных векторов, но в несколько ином виде, в так называемом условии ортогональности с весом, т.е.:

$$\bar{y}^{(i)T} A \bar{y}^{(j)} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad A - \text{матрица инерции}.$$

Последовательность решения задачи раскрытия антенны:

1. При заданных инерционно-массовых, геометрических и жесткостных характеристиках штанги с антенной, заданных моментах сопротивления кабелей и сопротивления защелок подбираем энергию пружины и определяем угловую скорость в момент фиксации.

2. Решаем упругую систему (число степеней свободы определяется для каждого конкретно примера) и находим собственные частоты и формы, статические коэффициенты влияния, определяем максимальное значение перегрузки в ц.м. антенны.
3. Если условие $n \leq n_{дон}$ выполняется с запасом, часть его можно взять на запас по фиксации, т. е. увеличить угловую скорость штанги в момент фиксации.
4. Увеличив число степеней свободы, расчеты следует повторить для анализа точности эквивалентной схемы.

5.4.3. Пример другой возможной эквивалентной схемы антенного устройства в момент фиксации

На практике бывает, что антенное устройство является конструкцией сравнительно небольших размеров, тогда в этом случае в качестве эквивалентной схемы механической системы в момент фиксации антенного устройства в рабочее положение можно принять такую, где конструкция устройства – абсолютно твердое тело, а эквивалентная жесткость системы приведена к точке С, $c \equiv \{c_x, c_y, c_z, c_{\varphi_1}, c_{\varphi_2}\}^T$, рис. 5.23.

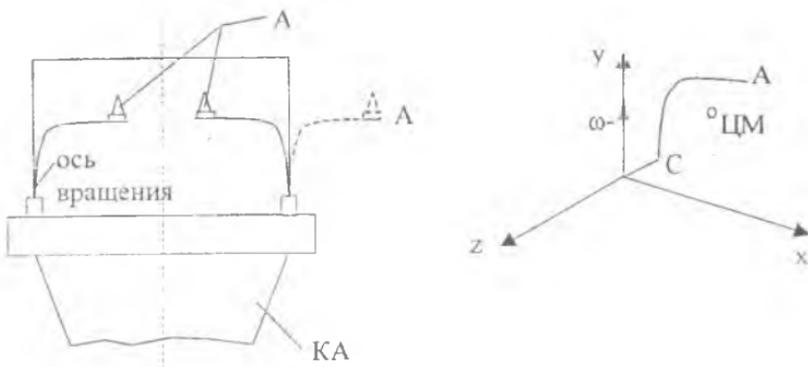


Рис. 5.23. Схема установки антенны

Тогда в момент фиксации устройства в рабочее положение, его в пределах малых движений можно рассматривать как систему с тремя степенями свободы:

1. Движение центра масс вдоль оси OZ .
2. Вращение относительно оси OY .
3. Вращение относительно оси OX .

Обобщенными координатами будут $\vec{q} = \{z, \varphi_x, \varphi_y\}^T$. Кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \frac{1}{2}(m\dot{z}^2 + J_x\dot{\varphi}_x^2 + J_y\dot{\varphi}_y^2),$$

а потенциальная

$$П = \frac{1}{2}(c_z z_c^2 + c_{\varphi_x} \varphi_x^2 + c_{\varphi_y} \varphi_y^2),$$

где $z_c = z + y_c \varphi_x - x_c \varphi_y$.

Найдем матрицу жесткостей. Поскольку $c_{\vec{q}} = \frac{\partial П}{\partial \vec{q}}$, получим

$$\begin{aligned} c\vec{q} &= \begin{vmatrix} c_z(z + y_c \varphi_x - x_c \varphi_y) \\ c_z y_c (z + y_c \varphi_x - x_c \varphi_y) + c_{\varphi_x} \varphi_x \\ -c_z x_c (z + y_c \varphi_x - x_c \varphi_y) + c_{\varphi_y} \varphi_y \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} c_z & y_c c_z & -x_c c_z & z \\ c_z y_c & (c_{\varphi_x} + c_z y_c^2) & -c_z y_c x_c & \varphi_x \\ -c_z x_c & (-c_z x_c y_c) & c_{\varphi_y} + c_z x_c^2 & \varphi_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Теперь имеем уравнение Лагранжа в стандартной форме:

$$A\ddot{\vec{q}} + c\vec{q} = 0.$$

Используя подстановку Эйлера $\vec{q} = \vec{\gamma} \sin(\omega t + \varphi)$, получим

$|\omega^2 A - C| = 0$, или

$$\begin{vmatrix} (m\omega^2 - c_{11}) & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{21} & (J_x \omega^2 - c_{22}) & -c_{23} \\ -c_{31} & -c_{32} & (J_y \omega^2 - c_{33}) \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение относительно ω , найдем три значения $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, а затем соответствующие собственные векторы $\bar{y}^i, i = 1, 2, 3$, из уравнений

$$\begin{cases} b_{11}\gamma_1 + b_{12}\gamma_2 + b_{13}\gamma_3 = 0 \\ b_{21}\gamma_1 + b_{22}\gamma_2 + b_{23}\gamma_3 = 0 \\ b_{31}\gamma_1 + b_{32}\gamma_2 + b_{33}\gamma_3 = 0 \end{cases},$$

где матрица $B = \omega_i^2 A - C, i = 1, 2, 3$.

Поскольку ранг матрицы В равен двум (все ω , различные), отбросим последнее уравнение в приведенной выше системе и из оставшихся двух определим γ_1, γ_2 через γ_3 , значение которой произвольно. Обозначив миноры последней строки матрицы В через J_{31}, J_{32}, J_{33} , получим:

$$\gamma_1 = \frac{J_{31}}{J_{33}} \gamma_3, \gamma_2 = \frac{J_{32}}{J_{33}} \gamma_3, \gamma_3 = 1.$$

Повторяя эту операцию три раза (для каждого $\omega, i=1 \dots 3$) найдем все три собственных вектора $\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3$. Ими определяются собственные формы колебаний системы. Пронормируем собственные векторы с использованием нормирующего множителя $N^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 1$, получим

$$u_1 = \frac{\gamma_1}{N}, u_2 = \frac{\gamma_2}{N}, u_3 = \frac{\gamma_3}{N}.$$

Теперь можно записать общий интеграл исходного

дифференциального уравнения

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{u}^{(i)} \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

где $c_i = \text{const}, \varphi_i = \text{const}$ – произвольные постоянные, определенные из начальных условий, а $\bar{u}^{(i)}$ – нормированные столбцы собственных векторов линейного преобразования.

Поскольку в начальный момент времени все обобщенные координаты равны нулю, $q_i(0) = 0$, все φ_i должны быть также нулевыми. Постоянные c_i найдутся из условий

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ 0 \\ \omega_{i,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^2 & u_3^3 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^3 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \omega_1 \\ c_2 \omega_2 \\ c_2 \omega_2 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \bar{q}(0) = u \bar{x}.$$

Если умножить это равенство слева на u^{-1} , получим $u^{-1} \bar{q}(0) = \bar{x}$. Определив таким образом координатный столбец \bar{x} , определим и все c_i . Будем иметь $c_i = x_i / \omega_i$, $i=1,2,3$.

Далее для проверки правильности и точности вычислений необходимо убедиться в ортогональности собственных векторов $\bar{y}^i, i=1,2,3$ (или нормированных векторов $\bar{u}^{(i)}$). Пусть \bar{y}_i, \bar{y}_j - собственные векторы-столбцы, соответствующие собственным частотам $\omega_i, \omega_j, \omega_i \neq \omega_j$. Тогда $\omega_i^2 A \bar{y}_i = c \bar{y}_i$ и $\omega_j^2 A \bar{y}_j = c \bar{y}_j$. Умножим слева на столбец \bar{y}_i первое и на \bar{y}_j - второе равенство. Получим $\omega_i^2 \bar{y}_i^T A \bar{y}_j = \bar{y}_i^T c \bar{y}_j$ и $\omega_j^2 \bar{y}_j^T A \bar{y}_i = \bar{y}_j^T c \bar{y}_i$.

Поскольку A, C - симметричные матрицы, транспонируя второе равенство, получим $\omega_j^2 \bar{y}_j^T A \bar{y}_i = \bar{y}_j^T c \bar{y}_i$. Вычитая из первого равенства транспонированное второе, получим

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \bar{y}_i^T A \bar{y}_j = 0.$$

Поскольку $\omega_i \neq \omega_j$, получаем условие ортогональности собственных векторов с «весом»:

$$\bar{y}_i^T A \bar{y}_j^T = 0.$$

Теперь можно приступить к определению перегрузок в центре масс антенны.

Если обозначить \bar{r}_A - радиус вектор центра масс относительно ц.м. антенного устройства, то будем иметь следующее векторное равенство

$\bar{a}_A = \bar{a} + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_A)$, где \bar{a} - ускорение ц.м. антенного устройства, а $\bar{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения устройства. Учитывая, что $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_A) = \bar{\omega}(\bar{\omega} \cdot \bar{r}_A) - \bar{r}_A \bar{\omega}^2$, запишем равенство для \bar{a}_A :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} & \omega_x \\ 0 & \bar{\omega}_x & \bar{\omega}_y & 0 & \omega_y \\ \dot{z} & x_A & y_A & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_y (\omega_x x_A + \omega_y y_A) - y_A (\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2).$$

Тогда, вычисляя перегрузки в ц.м. антенны, будем иметь:

$$n_x = \frac{1}{g} \max_t (\ddot{x}_A(t)) \leq n_x^{don},$$

$$n_y = \frac{1}{g} \max_t (\ddot{y}_A(t)) \leq n_y^{don},$$

$$n_z = \frac{1}{g} \max_t (\ddot{z}_A(t)) \leq n_z^{don}.$$

Если эти неравенства не удовлетворяются, необходимо рассмотреть возможность уменьшения жесткошей системы и энергетики раскрытия антенного устройства.

5.4.4. Возможные особенности задачи

Приведа уравнение Лагранжа из стандартной формы $A\ddot{\bar{q}} + c\dot{\bar{q}} = 0$ к обратной $\alpha A\ddot{\bar{q}} + \bar{q} = 0$ (уравнение в перемещениях) и используя способ Эйлера отыскания частного решения в виде

$$\bar{q} = \bar{\gamma} \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.4.13)$$

мы пришли к задаче о собственных числах и векторах линейного преобразования:

$$\alpha A\bar{\gamma} = \lambda\bar{\gamma}, \quad \lambda = 1/\omega^2. \quad (5.4.14)$$

Далее, решая характеристическое уравнение

$$\alpha A - E\lambda = 0 \quad (5.4.15)$$

и ссылаясь на опыт практики, приняли, что все собственные числа $\lambda_i, i = 1 \dots n$, полученные из решения уравнения (5.4.14), будут вещественны, положительны и различны, и следовательно, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\gamma}^{(i)} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (5.4.16)$$

$$\vec{q} = \sum_{i=1}^n B_i \vec{y}^{(i)} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (5.4.16)$$

где \vec{y}_i - столбцы собственных векторов уравнения (5.4.1), а $\varphi_i, \beta_i = \text{const}$.

В теории линейных преобразований строго доказывается, что если вещественная матрица линейного преобразования $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ симметрична, то собственные числа вещественны (не обязательно различны), а собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой. Если же еще эта матрица удовлетворяет критерию Сильвестра (все главные миноры положительные), то собственные значения - положительны.

Далее доказывается, что для симметричных преобразований возможны случаи, когда собственные числа не все различные. Например, преобразование подобия $E\vec{x} = \bar{\lambda}\vec{x}$. Здесь все собственные числа равны между собой и любой вектор пространства собственный. Иными словами, для симметричного линейного преобразования собственные векторы могут быть определены не единственным образом.

После всего этого, возвращаясь к нашей матрице αA , мы видим, что она несимметрична, хотя каждая из матриц α, A симметрична. Это должно вызвать сомнение в том, что решение (5.4.16) справедливо всегда. Исследуем этот вопрос.

Заменим преобразование (5.4.14) ему эквивалентным. Для этого матрицу A (в нашем случае она диагональная) запишем в виде $A = u^T u$, где u - диагональная матрица,

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m_3} \end{pmatrix}.$$

Тогда будем иметь: $\alpha u^T u \vec{y} = \lambda \vec{y}$. (5.4.17)

Теперь умножим равенство (5.4.17) на u слева: $u\alpha u^T u\bar{y} = \lambda u\bar{y}$, $u\bar{y} = \bar{y}'$, и

$$u\alpha u^T \bar{y}' = \lambda \bar{y}'. \quad (5.4.18)$$

Преобразование (5.4.18) симметричное, и, следовательно, собственные значения λ_i будут вещественны, а если учесть, что α - положительна и преобразование $u\alpha u^T$ - преобразование подобия, следовательно матрица $u\alpha u^T$ также положительна и собственные значения вещественны и положительны.

Таким образом, почти доказано, что решение (5.4.16) справедливо, далее рассмотрим случай кратных корней.

Из (5.4.18) следует, что если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $\bar{y}'_i, \bar{y}'_j = 0$. Следовательно, первоначальные собственные векторы будут ортогональны с «весом», т.е. $\bar{y}_i A \bar{y}_j = 0$.

В общем случае, решая характеристическое уравнение (5.4.15), среди его корней могут оказаться и кратные. Пусть например $\lambda_k = \lambda_{k+1}$. Тогда в этом случае будут равны и частоты $\omega_k = \omega_{k+1}$ соответствующих колебаний.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение, соответствующее корню второй кратности, будет иметь вид

$$(\bar{y}^k + \bar{y}^k t) \sin(\omega_k t + \varphi_k).$$

На этом основании Лагранж, когда исследовал малые движения и писал свою знаменитую «Аналитическую механику», полагал, что в этом случае движение будет неустойчивым, т.к. при $t \rightarrow \infty$, член $\bar{y}^k t$ также неограниченно возрастает.

Эта ошибка держалась долгое время (более 50 лет) и именно благодаря авторитету этого выдающегося ученого. И только уже после его смерти Вейерштрасс обнаружил, что это не так. В середине 19-го века он доказал, что в этом случае имеет место тождественность двух уравнений системы (5.4.14) и, следовательно, корень характеристического уравнения (5.4.15) фактически остается первой кратности, и тогда отпадает решение, соответствующее

кратному корню, а вместе с тем и заключение Лагранжа. Он пришел к этому выводу на основании теории квадратичных форм, которыми являются кинетическая и потенциальная энергии системы. Если повторить рассуждения Вейерштрасса, то оно выглядит следующим образом. Две квадратичные формы $T = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T A \dot{\bar{q}}$, $\Pi = \frac{1}{2} \bar{q}^T C \bar{q}$, из которых хотя бы одна определенно-положительна (в данном случае это кинетическая энергия), одним линейным преобразованием могут быть приведены к каноническому виду. Если говорить о геометрической аналогии, то эта задача равносильна задаче об отыскании главных осей поверхности второго порядка или, например, главных направлений тензора инерции.

Известно, что одну форму – определенно-положительную – можно привести к каноническому виду многими способами. Один из них связан с заменой исходного базиса \bar{e}^0 . Т. е., если найти собственные векторы линейного преобразования $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ и из них построить новый базис \bar{e}^1 , то в этом новом базисе матрица A станет диагональной, диагональные элементы которой равны соответственно числам λ_i , $i = 1 \dots n$, а форма примет вид

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 & & & \\ \dot{\xi}_2 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{\xi}_n & & & \end{pmatrix}.$$

Другие способы не связаны с решением алгебраических уравнений. Это, например, преобразование координат Якоби, который предложил следующую подстановку: $\dot{\bar{q}} = K \dot{\xi}$, где K – верхнедиагональная матрица вида

$$K = \begin{pmatrix} 1 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & k_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{в этом случае } T = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T K^T A K \dot{\xi}, \quad A' = K^T A K, \quad A' = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_n \end{vmatrix}.$$

Поскольку A' так же, как и A , симметрична и $\det K = \det K^T = 1$, все главные миноры матриц A' и A равны. Следовательно,

$$p_1 = \Delta_1, \Delta_1 = a_{10}, p_1 p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_2, p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, p_1 p_2 p_3 = \Delta_3, p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \quad \text{и}$$

т.д.

Чтобы матрица A' была диагональной, остается последовательно подбирать коэффициенты K_{ij} .

Следующий способ заключается в замене матрицы A на произведение двух треугольных матриц (если A вещественна и положительна — это возможно, т.е. $A = u^T u$, u — верхнедиагональная матрица).

Пусть Вейерштрасс так же, как и мы сейчас, воспользовался этим способом.

$$\text{Тогда } T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T u^T u \dot{q}. \quad \text{Если ввести новые переменные}$$

$$\bar{\xi} = u \dot{q}, \bar{\xi} = u \dot{q}, \bar{q} = u^{-1} \bar{\xi}, \bar{q}^T = \bar{\xi}^T (u^{-1})^T, \text{ получим}$$

$$T = \frac{1}{2} \bar{\xi}^T E \bar{\xi}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \bar{q}^T C \bar{q} = \frac{1}{2} \bar{\xi}^T (u^{-1})^T C u^{-1} \bar{\xi}, \quad C^* = (u^{-1})^T C u^{-1}.$$

Матрица C^* является так же, как и C , симметричной матрицей, т.к. она получена преобразованием подобия. А раз так, то для нее можно найти собственные векторы и значения, и из собственных векторов сформировать новый ортогональный базис. В этом базисе T и Π будут представлены в каноническом виде. Матрица E так и остается прежней, а матрица C^* преобразуется в диагональную с коэффициентами, равными собственным значениям преобразования $C^* \bar{x} = \lambda \bar{x}$. Действительно, пусть исходный базис — \bar{e}^0 . Запишем вектора базиса в виде матрицы — строки: $[\bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0, \dots, \bar{e}_n^0]$, где её элементы

– векторы. Тогда в этом «старом» базисе «новый» базис \bar{e}' из нормированных собственных векторов можно представить так: $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n = \bar{e}^0_1, \bar{e}^0_2, \dots, \bar{e}^0_n \Gamma$, или проще: $\bar{e}' = \bar{e}^0 \Gamma$, где Γ – матрица, столбцами которой являются координатные столбцы «новых» векторов в «старом» базисе – направляющие косинусы.

Любой вектор \bar{x} в этих базисах будет иметь свой столбец. Пусть в базисе \bar{e}^0 это $\bar{\xi} \equiv \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}^T$, а в базисе \bar{e}' $\bar{\xi}' \equiv \{\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n\}^T$. Поскольку \bar{x}

это $\begin{pmatrix} e^0_1 \\ e^0_2 \\ \dots \\ e^0_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \bar{e}^0 \bar{\xi}$ и вместе с этим $\bar{x} = \bar{e}' \bar{\xi}'$, то учитывая, что

$\bar{e}' = \bar{R}^0 \Gamma$, будем иметь связь между столбцами $\bar{e}^0 \bar{\xi} = \bar{e}' \bar{\xi}'$, или $\bar{e}^0 \bar{\xi} = \bar{e}^0 \Gamma \bar{\xi}'$, т.е. $\bar{\xi} = \Gamma \bar{\xi}'$.

Теперь имеем

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\xi}}^T E \dot{\bar{\xi}} = \frac{1}{2} \bar{\xi}^T \Gamma^T E \Gamma \dot{\bar{\xi}}', \text{ и}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \bar{\xi}^{*T} \Gamma^T C \Gamma \bar{\xi}' = \frac{1}{2} \bar{\xi}'^T C^{**} \bar{\xi}',$$

Преобразование Γ – это преобразование поворота, т.е. преобразование ортогональное. Итак, в новом базисе (базисе из собственных векторов) имеем

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\xi}}'^T E \dot{\bar{\xi}}', \text{ т.к. } \Gamma^T E \Gamma = E, \Pi = \frac{1}{2} \bar{\xi}'^T C^{**} \bar{\xi}', \text{ где } C^{**} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} -$$

диагональная матрица. Т.е. квадратичные формы записаны в канонической форме. Поскольку матрица C положительная, матрица C^{**} также положительная, т.к. она получена рядом тождественных преобразований матрицы C . Значит все λ_i – положительные числа.

Теперь уравнения колебаний в этих новых координатах (их называют *нормальными*) будут иметь простейший вид:

$$E\ddot{\xi}^1 + C^* \dot{\xi}^1 = 0. \quad (5.4.19)$$

Эти колебания называются *главными*. Как видно из (5.4.19), эти уравнения определяют независимые друг от друга движения в скалярной форме:

$$\ddot{\xi}_k^1 + \lambda_k \dot{\xi}_k^1 = 0, \quad k = 1 \dots n.$$

Их решение имеет вид: $\xi_k^1 = \gamma_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$, $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$. Таким образом, мы получим, что в базисе из собственных векторов матрицы C^* система будет колебаться вдоль каждой координаты с собственной частотой, т.е. совершать независимые гармонические колебания.

Отсюда с особенной ясностью следует заключение Вейерштрасса – если несколько корней характеристического уравнения между собой равны (например два), то соответствующие им нормальные координаты имеют одинаковые частоты. При этом имеет место только явление унисона и не происходит возрастание координат. Ясно также, что в системе уравнений (5.4.19) два уравнения будут тождественны и, следовательно, в системе уравнений (5.4.14) тоже.

С аналогичной ситуацией приходится сталкиваться, преобразовывая тензор инерции к каноническому виду, т.е. когда моменты инерции твердого тела ищутся относительно главных осей. Бывают тела, у которых два момента инерции относительно двух любых осей, лежащих в одной плоскости, между собой равны, т.е. расположение этих осей (собственных векторов линейного преобразования) в этой плоскости произвольно. В этом случае эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, а два собственных значения линейного преобразования (два момента инерции) равны между собой.

В заключение убедимся, что частоты главных колебаний, найденные из (5.4.19), это именно те частоты, которые мы бы определили из исходного уравнения (5.4.14).

Имеем $C^* \ddot{\gamma} = \omega^2 \ddot{\gamma}$, или $\Gamma(u^{-1})^T C u^{-1} \Gamma \ddot{\gamma} = \omega^2 \ddot{\gamma}$. Умножив равенство на $u^{-1} \Gamma$ слева, получим $u^{-1} \Gamma \Gamma^T (u^{-1})^T C u^{-1} \Gamma \ddot{\gamma} = \omega^2 u^{-1} \Gamma \ddot{\gamma}$, или, т.к. $\bar{\gamma}^1 = u^{-1} \Gamma \ddot{\gamma}$,

$A^{-1}C\bar{\gamma}' = \omega^2\bar{\gamma}'$. Еще, умножив последнее равенство на A , получим $C\bar{\gamma}' = \omega^2 A\bar{\gamma}'$ или $\bar{\gamma}' = \alpha A\bar{\gamma}' \omega^2$. Это равенство с точностью до обозначения собственного вектора совпадает с (5.4.14). Значит, общее решение уравнений малых движений в исходной постановке является линейной комбинацией простых гармонических движений с частотами главных колебаний. Ясно также, что малые движения в исходных координатах не являются периодическими. Убедимся также в том, что при переходе к базису \bar{e}' из собственных векторов матрица преобразования C^* в исходном базисе \bar{e}^0 преобразовывается в диагональную матрицу C^{**} , т.е. $C^{**} = \Gamma^T C^* \Gamma$, $C^{**} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, Γ – ортогональная матрица, столбцами которой являются столбцы нормированных собственных векторов матрицы C^* . Действительно, умножим C^* на Γ :

$$\begin{pmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & \dots & C_{1n}^* \\ C_{21}^* & C_{22}^* & \dots & C_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}^* & C_{n2}^* & \dots & C_{nn}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1n} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \dots & \Gamma_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \Gamma_{11} \\ \Gamma_{21} \\ \dots \\ \Gamma_{n1} \end{pmatrix} \lambda_2 \begin{pmatrix} \Gamma_{12} \\ \Gamma_{22} \\ \dots \\ \Gamma_{n2} \end{pmatrix} \dots \lambda_n \begin{pmatrix} \Gamma_{1n} \\ \Gamma_{2n} \\ \dots \\ \Gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

Теперь умножим эту матрицу слева на Γ^T , и, учитывая ортогональность собственных векторов, получим

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1n} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \dots & \Gamma_{nn} \end{pmatrix} \cdot \lambda_1 \begin{pmatrix} \Gamma_{11} \\ \Gamma_{21} \\ \dots \\ \Gamma_{n1} \end{pmatrix} \lambda_2 \begin{pmatrix} \Gamma_{12} \\ \Gamma_{22} \\ \dots \\ \Gamma_{n2} \end{pmatrix} \dots \lambda_n \begin{pmatrix} \Gamma_{1n} \\ \Gamma_{2n} \\ \dots \\ \Gamma_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

что и требовалось показать.

5.5. Решение задачи о встрече двух космических аппаратов

Эта задача – обратная задаче отделения и расхождения КА и, как всякая обратная задача, сложнее прямой. Она сводится к вариационной проблеме. Прежде чем перейти к ее решению, рассмотрим некоторые аналоги решения задач на экстремум при конечных и дифференциальных связях.

Если в задаче на экстремум системы с конечным числом степеней свободы переменные независимы, то имеем задачу на безусловный экстремум. Например, при отыскании максимума функции двух переменных

$$z = f(x, y) \quad (5.5.1)$$

необходимые условия имеют вид

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad (5.5.2)$$

Если переменные зависимы между собой, например следующего вида:

$$F(x, y) = h, \quad h = \text{const}, \quad (5.5.3)$$

то имеем задачу на условный экстремум.

Эти задачи разные. Здесь уже значения f должны рассматриваться и сравниваться между собой только для тех точек плоскости аргументов, которые лежат на линии с уравнением (5.5.3).

Геометрическая картина задачи представлена на рис. 5.24.

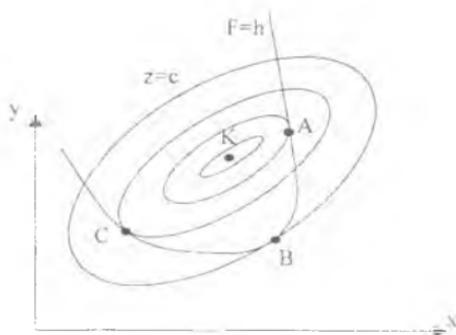


Рис. 5.24. Геометрическая картина задачи

В т. К имеем абсолютный безусловный максимум, в т. А – условный максимум, а в т. В – условный минимум. В т. С имеем еще один локальный максимум.

Итак, безусловный максимум – это как бы вершина горы, а условный максимум – это самая высшая точка заданной горной тропы (проекция этой тропы на плоскость (x, y) имеет уравнение (5.5.3)).

Если из уравнения связи (5.5.3) можно выразить y через x , то этот результат можно подставить в выражение (5.5.1) и получить таким образом Z как функцию только одного независимого переменного. Так как условий больше нет, то задача на экстремум становится безусловной задачей одного переменного. Однако такое решение не всегда возможно и целесообразно.

Тогда можно рассуждать следующим образом. Уравнение связи (5.5.3) определяет принципиально некоторую зависимость $y=y(x)$, хотя нам явно и неизвестную. Таким образом Z является сложной функцией независимого переменного x ,

$$Z = f[x, y(x)], \quad (5.5.4)$$

и необходимые условия экстремума надо искать в форме производной сложной функции

$$\frac{dZ}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5.5.5)$$

Здесь $\frac{dy}{dx}$ определяет производную неявной функции $y=y(x)$, определяемой из (5.5.3), т.е.

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (5.5.6)$$

Подставляя (5.5.6) в (5.5.5) получим

$$\frac{f_x}{F_x} = \frac{f_y}{F_y} = -\psi, \quad \psi = \text{const}. \quad (5.5.7)$$

Здесь ψ – множитель Лагранжа (знак "-" взят для удобства). Из (5.5.7) имеем

$$\begin{cases} f_x + \psi F_x = 0 \\ f_y + \psi F_y = 0 \end{cases} \quad (5.5.8)$$

или, вводя обозначение

$$f^* = f + \psi F, \quad (5.5.9)$$

получаем условие экстремума в такой же форме, как и для безусловного экстремума (5.5.2), но только для новой функции f^* . Дополняя (5.5.8) уравне-

нием связи (5.5.3), получим систему трех уравнений с тремя неизвестными – точками экстремума x^0, y^0 и ψ .

Точно такой же подход используется и при решении задач на экстремум при наличии дифференциальных связей.

Только здесь множитель Лагранжа превращается в вектор–функцию Лагранжа $\psi = \psi(t)$. Размерность этого вектора равна числу дифференциальных связей.

Если, например, отыскивается экстремум интегрального функционала $J = \int_0^T f_0(z, t) dt$, где $z \equiv \{z_1, z_2, \dots, z_n\}^T$ – вектор–функция фазовых координат процесса (системы) при дифференциальных связях

$$\dot{z} - f(z, u, t) = 0, \quad (5.5.10)$$

где $u = \bar{u}(t)$ – управляющий вектор–функция, тогда имеем задачу на условный экстремум функционала J^* ,

$$J^* = \int_0^T \{ f_0(z, t) + \bar{\psi}^T [\dot{z} - f(t, z, u)] \} dt. \quad (5.5.11)$$

Это запись задачи на экстремум в форме Лагранжа.

Если интеграл для J берется или функционал определен скалярной функцией $J = G(z)$, то задача на экстремум записывается в форме Майера:

$$J^* = G(z) + \int_0^T [\bar{\psi} \cdot \dot{z} - H(t, z, \bar{u}, \bar{\psi})] dt. \quad (5.5.12)$$

Здесь $H = \bar{\psi} \cdot f(t, z, u)$ – гамильтониан задачи оптимизации, $\bar{\psi} = \bar{\psi}(t)$ – вектор–функция сопряженных координат, определяемая из уравнения $\dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial z}$, i, f – символическая запись граничных условий.

Необходимые условия минимума функционала в форме Майера имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0, & \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} < 0 \\ u^0 = \arg \max H(t, \bar{z}, \bar{\psi}, \bar{u}) \end{cases} \quad \bar{u} \in U^r, \quad (5.5.13)$$

т.е. оптимальное управление $u^0(t)$ доставляет максимум функции H . Первое условие "слабого" минимума, соответствующего неограниченной области управления.

Условия (5.5.13) дополняются условиями трансверсальности

$$[SG - HSt + \bar{\psi} \cdot Sz]_f^i = 0, \quad (5.5.14)$$

ограничивающими вариации кривых сравнения на концах оптимальной траектории системы.

Геометрическая картина задачи Майера имеет следующий вид, рис. 5.25.

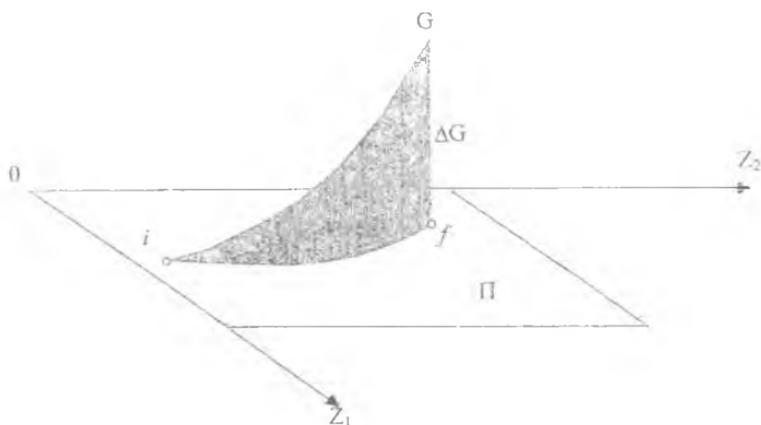


Рис. 5.25. Геометрическая картина задачи Майера

Теперь можно перейти непосредственно к задаче о встрече (т.е. задаче стыковки двух КА на "дальнем" участке их относительного движения). Если первый КА совершает орбитальный полет с заданным наклоном орбиты, то второй КА запускается на такую же орбиту с тем же наклоном. Для этого время запуска точно рассчитывается. Ошибка в наклонениях обычно составляет $\Delta\gamma \approx 2-3$ угловых минуты, ошибка по скорости и высоте соответственно $\Delta V \approx 2-10$ м/с, $\Delta H \approx 10$ км. Т.е. орбиты почти совпадают. Следовательно, для описания относительного движения можно использовать те же уравнения, что и при отделении КА.

Будем считать, что первый КА застabilизирован в пространстве, а второй оснащен необходимыми вычислительными и измерительными приборами, безинерционными рулями, тормозной двигательной установкой с регулируемой тягой. Ось двигателя совпадает с продольной осью симметрии КА. Массовый расход топлива двигателя ограничен неравенством $0 \leq \beta(t) \leq \beta$, а тяга двигателя $T = C\beta$, $C = \text{const}$.

Поскольку плоскости орбит КА практически совпадают ($\Delta\gamma \approx 2-3'$), управление отклонением вектора тяги в плоскости (x,y) можно производить независимо от движения вдоль оси OZ , рис. 5.26.

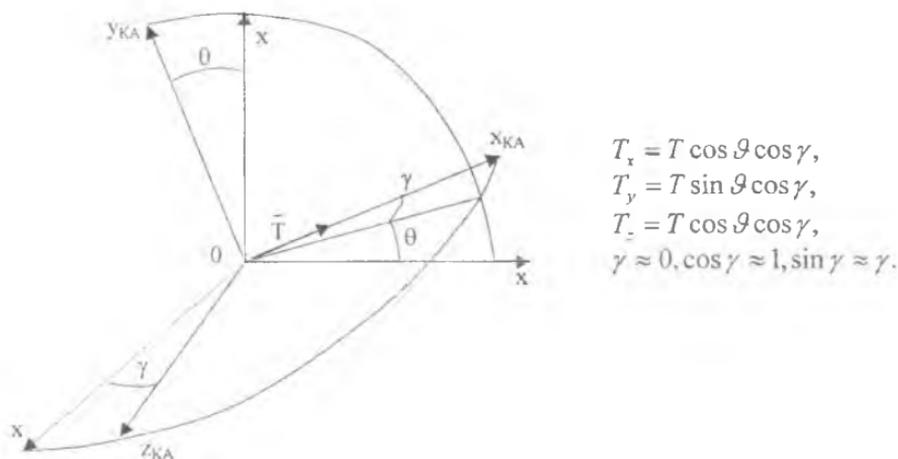


Рис. 5.26. Система координат

$OXYZ$ – подвижная с.к., связанная с КА №1, ось OX совпадает с вектором орбитальной скорости.

Обозначим управляющие переменные процесса стандартными символами $u_1 = \vartheta(t)$, $u_2 = \beta(t)$, $u_3 = \gamma(t)$.

Тогда уравнения движения КА в с.к. $OXYZ$ будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = V_x, \\ \dot{V}_x = 2\omega V_y + \frac{cu_2 \cos u_1}{m}, \\ \dot{Y} = V_y, \\ \dot{V}_y = 3\omega^2 y - 2\omega V_x + \frac{cu_2 \sin u_1}{m}, \\ \dot{m} = -u_2, \quad 0 \leq u_2 \leq \bar{u}_2, \\ \ddot{Z} + \omega^2 Z = -\frac{cu_2}{m} u_3. \end{array} \right. \quad (5.5.15)$$

Последнее уравнение пока рассматривать не будем, и будем полагать, что после выбранного управления u_1, u_2 управление u_3 можно найти потом как уравнение, удерживающее КА в плоскости (x, y) .

Пусть задано начальное и конечное состояние системы (5.5.15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} i &= \{t_0 = 0, x_0, V_{x_0}, Y_0, V_{y_0}, m_0\}, \\ f &= \{T, x(T) = 0, V_x(T) = 0, y(T), V_y(T) = 0, m_T\}. \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Здесь T — не фиксировано, m_T — не фиксировано.

Для симметрии обозначим фазовый вектор $Z \equiv \{x, V_x, y, V_y, m\}^T$, и сформулируем оптимизационную задачу: перевести систему (5.5.15) из начального состояния " i " в конечное " f " при минимальном расходе топлива.

Или найти минимум функционала $J = \int_0^T u_2(t) dt$ при связях (5.5.15), (5.5.16).

Поскольку из последнего уравнения системы (5.5.15) следует

$$m_T - m_0 = -\int_0^T u_2(t) dt, \quad \text{имеем функционал в форме Майера}$$

$$\left(\int_0^T u_2(t) dt = G(t) = m(t) \right),$$

$$J = \Delta G = m_0 - m_T \quad (5.5.17)$$

или

$$S = \Delta G + \int_0^T [\dot{\bar{z}} \cdot \bar{\psi} - H(\bar{z}, \bar{u}, t)] dt. \quad (5.5.18)$$

Составим функцию H и найдем дифференциал уравнения для сопряженного вектора

$$\begin{aligned}
 H &= \psi_1 V_x + \psi_2 (2\omega V_y + \frac{cu_2 \cos u_1}{m}) + \psi_3 V_y + \\
 &+ \psi_4 (3\omega^2 y - 2\omega V_x + \frac{cu_2 \sin u_1}{m}) - \psi_5 u_2 = \\
 &= V_x (\psi_1 - 2\omega \psi_4) + V_y (2\omega \psi_2 + \psi_3) + \psi_4 3\omega^2 y + \\
 &+ \left[\frac{c}{m} (\underbrace{\psi_2 \cos u_1 + \psi_4 \sin u_1}_{K_{(u_1)}}) - \psi_5 \right] u_2; \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{K_{(u_2)}}
 \end{aligned}$$

$$H = V_x (\psi_1 - 2\omega \psi_4) + V_y (2\omega \psi_2 + \psi_3) + y 3\omega^2 \psi_4 + K_{(u_2)} u_2, \quad (5.5.19)$$

$$\begin{cases}
 \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \psi_1 = c_1 \\
 \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial V_x} = 2\omega \psi_4 - \psi_1 \\
 \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial V_y} = -3\omega^2 \psi_4 \\
 \dot{\psi}_4 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -(\psi_3 + 2\omega \psi_2) \\
 \dot{\psi}_5 = -\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{c K_{(u_1)}}{m^2} u_2.
 \end{cases} \quad (5.5.20)$$

Условие "слабого" минимума функционала ΔG (область управления $u_1 = u_1(t)$ открытая) будет иметь вид

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} < 0, \quad \text{или} \quad (5.5.21)$$

$$\frac{cu_2}{m} (\psi_4 \cos u_1 - \psi_2 \sin u_1) = 0.$$

Поскольку $c, u_2, m \neq 0$, имеем $\operatorname{tg} u_1 = \frac{\psi_4}{\psi_2}$.

$$\text{Отсюда } \cos u_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u_1}} = \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2}}; \quad \sin u_1 = \frac{\psi_4}{\sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2}}.$$

Второе уравнение дает

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = -\frac{cu_2}{m} (\psi_2 \cos u_1 + \psi_4 \sin u_1) = -\frac{cu_2}{m} K_{(u_1)}.$$

Неравенство будет выполняться при условии

$$K_{(u_1)} = \sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2}, \quad \text{так как } c, u_2, m > 0. \quad (5.5.22)$$

В связи с тем, что $\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \neq 0$, задача регулярная и особых решений не имеет.

Итак, имеем оптимальное управление u_1 , выраженное через сопряженные переменные:

$$\sin u_1 = \frac{\psi_4}{K_{(u_1)}}, \quad \cos u_1 = \frac{\psi_2}{K_{(u_1)}}. \quad (5.5.23)$$

Оптимальное управление расходом топлива определяется уравнениями

$$\begin{aligned} u_2 &= \bar{\beta}, \quad \text{при } K_{u_2} > 0, \\ u_2 &= 0, \quad \text{при } K_{u_2} < 0, \end{aligned} \quad (5.5.24)$$

т.е. знаком функции переключения.

Третий режим: u_2 любое в интервале $0 \leq u_2 \leq \bar{\beta}$ соответствует особому решению, т.к. в этом случае функция H не зависит от u_2 .

Вначале выясним, существует ли особое решение. Если бы оно существовало, то ему бы соответствовал интервал времени $t_* \in [t_1, t_2]$, на котором имели бы место согласно (5.5.19) и условиям трансверсальности ($H=0$) два первых интеграла

$$\begin{cases} H = V_x(\psi_1 - 2\omega\psi_4) - V_y(2\omega\psi_2 + \psi_3) + 3\omega^2 y\psi_4 = 0, \\ P = \frac{c}{m} \sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2} - \psi_5 = 0. \end{cases} \quad (5.5.25)$$

Покажем, что таких интегралов в действительности нет. Для этого используем теорему Пуассона и получим еще три первых интеграла. В общем случае для линейных стационарных систем из теоремы Пуассона следует, что если $P(\bar{\psi}, \bar{z}) = 0$ и $H(\bar{\psi}, \bar{z}) = 0$ являются первыми интегралами, то сущест-

вует третий первый интеграл, определяемый тождеством Пуассона $(P, H) \equiv 0$,

или

$$\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial H}{\partial \psi} - \frac{\partial P}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial H}{\partial z} = \sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \psi_i} - \frac{\partial P}{\partial \psi_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial z_i} \right) \equiv 0.$$

Для нашего случая ($i=1, 2, \dots, 5, z_1=x, z_2=V_x, z_3=y, z_4=V_y, z_5=m$) будем иметь

$$(P, H) = -\frac{c}{m} \cdot \frac{\psi_2}{\psi_2^2 + \psi_4^2} (\psi_1 - 2\omega\psi_4) - \frac{c}{m} \cdot \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2}} (2\omega\psi_2 - \psi_3) = 0, \text{ или по-}$$

скольку $c, m, \sqrt{\text{idem}} \neq 0$,

$$Q(\bar{\psi}, z) = \psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_4 = 0. \quad (5.5.26)$$

Еще два первых интеграла получим аналогично:

$$R(\bar{\psi}, z) = (Q, H) \equiv 0, \text{ или}$$

$$R(\bar{\psi}, z) = \psi_1^2 + \psi_3^2 + 3\omega^2\psi_4^2 + 2\omega(\psi_2\psi_3 - \psi_1\psi_4) = 0, \quad (5.5.27)$$

или

$$N(\bar{\psi}, z) = (R, H) \equiv 0, \text{ или}$$

$$N(\bar{\psi}, z) = 2\psi_3\psi_4 + 3\omega\psi_2\psi_4 = 0. \quad (5.5.28)$$

Из (5.5.26 – 5.5.28) выразим все сопряженные переменные ψ_2, ψ_3, ψ_4 через ψ_1 и подставим в первое уравнение из (5.5.25). Получим, что $[H(\omega, V_x, V_y, y)] \psi_1 = 0$. Поскольку в общем случае $H(\omega, V_x, V_y, y) \neq 0$, то $\psi_2 = 0$, а это значит, что и $\psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = 0$. Откуда следует, что на интервале t_* не существует ненулевого непрерывного вектора $\bar{\psi}$, который удовлетворял бы необходимым условиям экстремума функционала. Следовательно, задача не имеет особого решения.

Теперь покажем, что закон переключения допускает не более трех точек переключения. С этой целью исследуем поведение функции переключения

$$K_{u_2} = \frac{c}{m} (\psi_2 \cos u_1 + \psi_1 \sin u_1) - \psi_5.$$

Продифференцируем по времени K_{u_2} .

Будем иметь

$$K_{u_2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{c}{m} \underbrace{\sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2}}_{K_{u_1}} - \psi_5 \right] = -\frac{c\dot{m}}{m^2} K_{u_1} + \frac{c}{m} \frac{\psi_2\dot{\psi}_2 + \psi_4\dot{\psi}_4}{\sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2}} - \dot{\psi}_5.$$

Поскольку $m = -u_2$, а $\dot{\psi}_5 = \frac{c\dot{K}_{u_1}}{m^2} u_2$, будем иметь

$$\dot{K}_{u_1} = \frac{c}{m} \frac{\psi_2\dot{\psi}_2 + \psi_4\dot{\psi}_4}{\sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2}}. \quad (5.5.29)$$

Вид функции \dot{K}_{u_2} определяется выражениями ψ_2 и ψ_4 . Найдем выражения для сопряженных переменных. Для этого необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2 = 2\omega\psi_4 - \psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = -3\omega^2\psi_4 \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_3 - 2\omega\psi_2 \\ \psi_1 = 0, \text{ или} \end{cases} \begin{cases} \dot{\psi}_2 = a\psi_4 - c \\ \dot{\psi}_3 = -b\psi_4 \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_3 - a\psi_2, \end{cases} \text{ где } a = 2\omega, b = 3\omega^2, c = \psi_1.$$

Проще всего систему решить, сведя ее к одному уравнению 3-го порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_3 &= -b\dot{\psi}_4, \text{ или } \ddot{\psi}_3 = b\psi_3 + ab\psi_4, \\ \ddot{\psi}_3 &= b\dot{\psi}_3 + ab\dot{\psi}_2, \text{ или } \ddot{\psi}_3 = b\dot{\psi}_3 + a^2b\psi_4 - abc. \end{aligned}$$

Поскольку $\psi_4 = \frac{\dot{\psi}_3}{b}$, будем иметь

$$\ddot{\psi}_3 = b\dot{\psi}_3 + a^2\psi_3 - abc. \text{ Отсюда}$$

$$\ddot{\psi}_3 + \omega^2\dot{\psi}_3 = -6\omega^3c. \quad (5.5.30)$$

Частное решение этой системы $\psi_3^2 = At$, где $A = -6\omega c$. Общее решение

$$\psi_3 = c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t - 6\omega ct. \quad (5.5.31)$$

Чтобы не вводить лишние постоянные, остальные неизвестные найдем, используя только операцию дифференцирования:

$$\psi_4 = -\frac{1}{b} \dot{\psi}_3 = -\frac{1}{3\omega^2} (-c_2\omega \sin \omega t + c_3\omega \cos \omega t - 6\omega c),$$

$$\psi_4 = \frac{1}{3\omega} (c_2\omega \sin \omega t - c_3\omega \cos \omega t) + \frac{2c}{\omega},$$

$$\psi_2 = \frac{\ddot{\psi}_3 - b\dot{\psi}_4}{ab} = \frac{\ddot{\psi}_3}{ab} - \frac{\dot{\psi}_4}{a},$$

$$\psi_2 = \left(-\frac{c_2}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{c_3}{\omega^2} \sin \omega t \right) \frac{1}{6\omega^3} - \frac{c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t - 6\omega c}{2\omega} =$$

$$= -\frac{1}{6\omega} (c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t) + \frac{1}{2\omega} (c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t - 6\omega c),$$

$$\psi_4 \cdot \dot{\psi}_4 = \left[\frac{1}{3\omega} (c_2 \sin \omega t - c_3 \cos \omega t) + \frac{2c}{\omega} \right] \cdot \left[\frac{1}{3} (c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t) \right] =$$

$$= -\frac{1}{3\omega} \left[\frac{1}{3} (c_2 \sin \omega t - c_3 \cos \omega t) + 2c \right] \cdot [c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t] =$$

$$= -\frac{1}{3\omega} \left[\frac{1}{3} (c_2^2 \sin \omega t \cos \omega t - c_3 c_2 \cos^2 \omega t + c_2 c_3 \sin^2 \omega t - c_3^2 \sin \omega t \cos \omega t) + \right. \\ \left. + 2cc_2 \cos \omega t + 2cc_3 \sin \omega t \right] =$$

$$= -\frac{1}{3\omega} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{c_2^2 - c_3^2}{2} \sin 2\omega t - c_3 c_2 \cos 2\omega t \right) + 2c(c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t) \right].$$

В выражении для ψ_2 приведем подобные члены. Будем иметь

$$\psi_2 = \left[\frac{2c}{3\omega} \cos \omega t + \frac{2c_3}{3\omega} \sin \omega t + \frac{c_1}{2\omega} - 3ct \right].$$

Найдем произведение функций $\psi_2 \cdot \dot{\psi}_2$.

Будем иметь

$$\psi_2 \cdot \dot{\psi}_2 = \left(\frac{2C_2}{3\omega} \cos \omega t + \frac{2C_3}{3\omega} \sin \omega t + \frac{C_1}{2\omega} - 3Ct \right) \times \\ \times \left(-\frac{2C_2}{3\omega} \sin \omega t + \frac{2C_3}{3} \cos \omega t - 3C \right) = \frac{2}{9\omega} (C_3^2 - C_2^2) \sin 2\omega t + \\ + \frac{4}{9\omega} C_2 C_3 \cos 2\omega t + \frac{C_1 C_3 - 6CC_2}{3\omega} \cos \omega t - \frac{C_1 C_2 - 6CC_3}{3\omega} \sin \omega t + \\ + 2CC_2 t \sin \omega t - 2CC_3 t \cos \omega t + 9C^2 t.$$

Удерживая в выражении $\psi_2 \dot{\psi}_2 + \psi_4 \dot{\psi}_4$ только линейные члены и учитывая, что $c, m, \sqrt{\psi_2^2 + \psi_4^2} > 0$, из выражения (5.5.27) следует, что

$\dot{K}_{u_2} = \dot{K}_{u_2}(t)$ может пересечь ось времени не более чем в двух точках, т. е.

$\psi(t) = \psi_2\dot{\psi}_2 + \psi_4\dot{\psi}_4$ – кривая второго порядка. Возможное поведение функции переключения показано на рис.5.27.

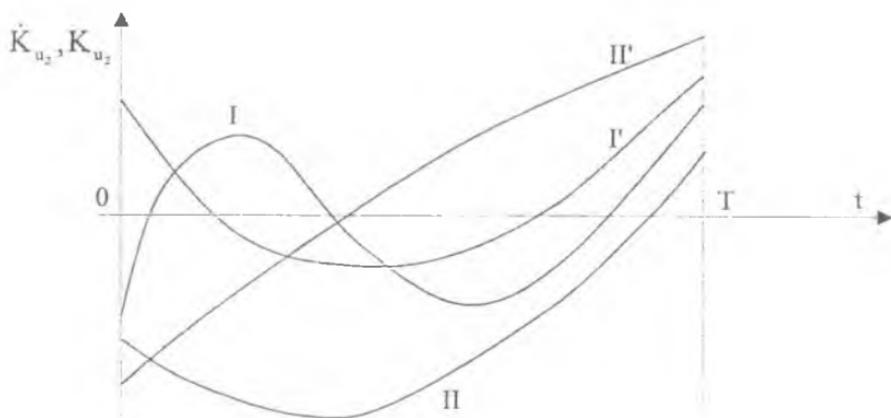


Рис. 5.27. Функции переключения

Первый режим поведения функции переключения состоит из четырех участков: участок "ожидания" момента времени, когда начнется сближение КА, двигатель выключен. Второй участок – включение двигателя с целью совмещения вектора относительной скорости КА с линией, соединяющей их ц.м. Третий участок – участок пассивного сближения до достижения расстояния, удовлетворяющего уравнению "параболы торможения". Четвертый участок – участок включения двигателя и его непрерывной работы до достижения конечного состояния – относительные скорости и расстояния равны нулю.

Второй режим поведения функции переключения характерен для весьма частного случая и предполагает одно включение двигателя. Существует множество других частных случаев, которые здесь не рассматриваются.

Теперь, когда закон управления тягой ясен (он определяется функцией переключения K_{u_2}) задача стыковки становится вполне определенной. Она сводится к интегрированию системы десяти дифференциальных уравнений, в результате чего появится десять констант. Одиннадцатой будет время T . Они

могут быть определены из заданных девяти граничных условий и двух условий трансверсальности $\psi_S(t) = -1$ и $H(\bar{z}_T, \bar{\psi}_T, \bar{u}(T)) = 0$.

Рассмотрим пример стыковки КА с базовым КА в плоском случае, когда кривизной поля тяготения можно пренебречь. На борту КА находится управляющий реактивный двигатель, включением которого аппарат выводится на нужную траекторию стыковки и тормозится. Рассматриваются два варианта. Первый – выведение КА на нужную траекторию при включении двигателя по оптимальному относительно времени работ направлению тяги, и второй – тяга полностью направлена на погашение большей начальной скорости. На втором этапе решается задача приведения КА в точку нахождения базового КА с определенными параметрами (необходимы небольшие конечные скорости для срабатывания стыковочных механизмов и расстояния для осуществления точной ориентации и стабилизации КА). При этом рассчитывается время включения, продолжительность работы двигателя, направление тяги и параметры движения на всех участках траектории сближения.

Расположение базового (S_1) и стыковочного КА (S) в относительной системе координат приведено на рис. 5.28.

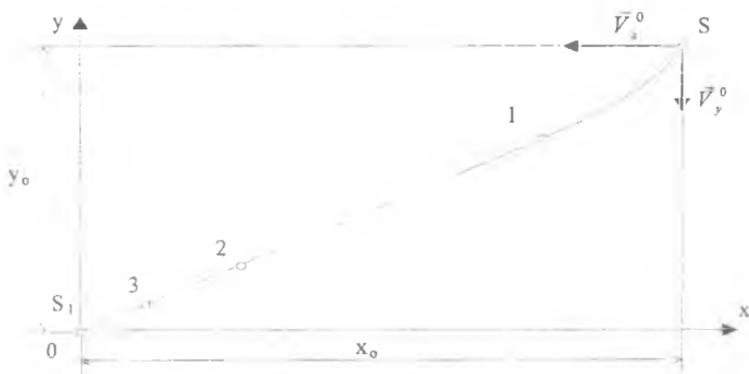


Рис. 5.28. Траектория сближения КА

- Здесь
- т.1 – время выключения двигателя,
 - т.2 – время второго включения двигателя,
 - т.3 – время выключения двигателя,
 - т.3-0 – участок движения с малой относительной скоростью.

Исходные данные и начальные условия задачи следующие:

начальная масса КА $m=2500\text{кг}$,

скорость расхода массы $C=3000\text{м/с}$,

массовый расход $\beta=1\text{кг/с}$,

$X(0)=8000\text{м}$, $Y(0)=5000\text{м}$, $V_x(0)=-8\text{м/с}$, $V_y(0)=-3\text{м/с}$. Конечное значение скорости $|V_k|\leq 0.6\text{м/с}$. Конечное значение расстояния между S и S_1 $L \leq 50\text{м}$.

Условие, необходимое для направления полной скорости КА на базовый КА:

$$\frac{V_x(t) - x(t)}{V_y(t) - y(t)} \quad (5.5.32)$$

Уравнения движения КА при первом включении двигателя имеют вид

$$V_x = V_x^0 + c\beta \frac{\cos(u)t}{m},$$

$$x = V_x^0 t + c\beta \frac{\cos(u)t^2}{2m} + x^0,$$

$$V_y = V_y^0 + c\beta \frac{\sin(u)t}{m},$$

$$y = V_y^0 t + c\beta \frac{\sin(u)t^2}{2m} + y^0.$$

Здесь положено, что $m, u = \text{const}$. Тогда для выполнения условия (5.5.32) необходимо решить уравнение

$$A(u)t^2 + B(u)t + D(u) = 0,$$

где

$$A(u) = (V_x^0 \sin u - V_y^0 \cos u) \frac{c\beta}{2m},$$

$$B(u) = (x^0 \sin u - y^0 \cos u) \frac{c\beta}{m},$$

$$D(u) = x^0 V_y^0 - y^0 V_x^0.$$

Имеем

$$t_1(u) = -\frac{B(u)}{2A(u)} + \frac{\sqrt{B(u)^2 - 4A(u)D(u)}}{2A(u)},$$

$$t_2(u) = -\frac{B(u)}{2A(u)} - \frac{\sqrt{B(u)^2 - 4A(u)D(u)}}{2A(u)}$$

Определение u , доставляющего минимум t_2 , произведем графически, рис. 5.29.

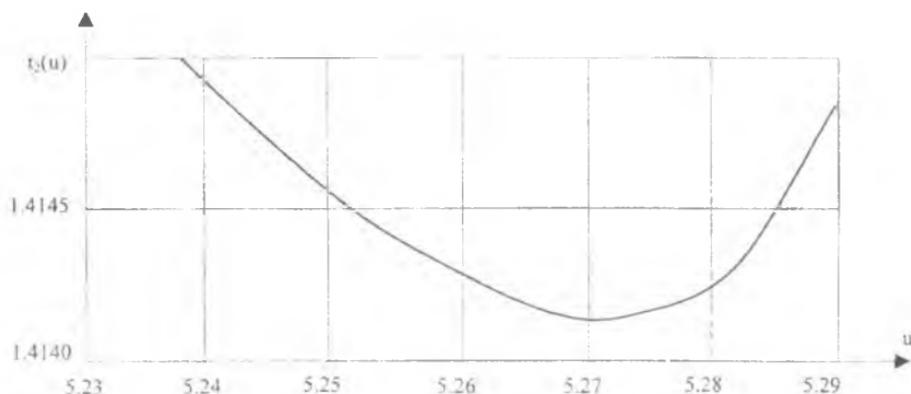


Рис. 5.29 Зависимость времени работы двигателя от управляющего параметра

Из графика находим оптимальное значение u , $u=5.27$ рад. Продолжительность включения тяги $t_2(u)=1.414$ с.

Проверка выполнения условия (5.5.32):

$$V_x(t) = V_x^0 + c\beta \frac{\cos(u)t}{m},$$

$$x(t) = V_x^0 t + c\beta \frac{\cos(u)t^2}{2m} + x^0,$$

$$V_y(t) = V_y^0 + c\beta \frac{\sin(u)t}{m},$$

$$y(t) = V_y^0 t + c\beta \frac{\sin(u)t^2}{2m} + y^0.$$

$$V_x(t_2) = -7.102 \text{ м/с}, V_y(t_2) = -4.44 \text{ м/с},$$

$$x(t_2) = 7.980 \times 10^3 \text{ м}, y(t_2) = 4.995 \times 10^3 \text{ м},$$

$$V_x(1.414) = 1.6, \quad x(1.414) = 1.6.$$

$$V_y(1.414) = 1.6, \quad y(1.414) = 1.6.$$

Условие (5.5.32) выполняется.

Определим направление вторичного включения тяги (ее направление определяется как противоположное вектору скорости)

$$u = \arctg \left(\frac{V_y(t_2)}{V_x(t_2)} \right),$$

$$u=32.03^\circ.$$

Движение на участке полета с выключенной тягой описывается уравне-

ниями

$$V_x(t) = V_x(t_2), \quad x(t) = x(t_2) + V_x(t_2)t,$$

$$V_y(t) = V_y(t_2), \quad y(t) = y(t_2) + V_y(t_2)t.$$

Движение на участке вторичного включения тяги описывается уравнениями

$$\frac{dV}{dt} = \frac{c\beta}{m},$$

$$\frac{dL}{dt} = V, \text{ или}$$

$$\begin{cases} V_k - V_o = \frac{c\beta}{m} t_p, \\ V_k^2 - V_o^2 = 2 \frac{c\beta}{m} (L_k - L_o), \end{cases} \quad (5.5.33)$$

где $V = \sqrt{V_x^2 - V_y^2}$, $L = \sqrt{x^2 + y^2}$, $V_o = -\sqrt{V_x^2(t_2) - V_y^2(t_2)}$.

При заданных ограничениях на V_k , L_k из (5.5.31) определяются время работы двигателя на втором участке включения t_p и время его включения, т.е. когда $L(t)=L_o$.

При $V_o = -8.37$ м/с, $V_k = -0.47$ м/с, $L_k = 50$ м будем иметь $t_p = 6.574$ с, $L_o = 80$ м.

Время движения на последнем участке $t_3 = 50/0.47 = 106$ с.

Полное время работы двигателя $T\partial = t_2 + t_p = 6,574 + 1,414 = 7,988$ с.

Рассматривая второй случай, когда вся тяга направлена на погашение большей скорости (V_1), при этом $u=0$ будем иметь:

Продолжительность включения тяги на первом участке $t_2 = 2,669$ с.

Направление вторичного включения (против направления полной скорости) $u = 32.03^\circ$.

Время вторичного включения тяги $t_p = 4.314$ с.

Полное время работы двигателя $T_o = 4.314 + 2.669 = 6.983$ с.

Таким образом, оптимальным (по расходу топлива) является второй случай, т. е. когда при первом включении двигателя его тяга направлена на погашение большей скорости.

Библиографический список

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний, М.: Наука, 1968.
3. Сиразетдинов Т.К., Богомоллов А.И. Решение основной задачи управления методом градиентного спуска // Авиационная техника. 1974. №1.
4. Сиразетдинов Т.К., Круглов Г.Е. и др. К аналитическому проектированию посадочного устройства // Авиационная техника. 1974. №4.
5. Сиразетдинов Т.К., Богомоллов А.И. Аналитическое проектирование сложных систем // Авиационная техника, 1978. №3.
6. Понтрягин А.С. Математическая теория оптимальных процессов М.: Наука, 1968.
7. Растрингин Л.А. Система экстремального управления. М.: Наука, 1974.
8. Моисеев Н.П. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.
9. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.
10. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. М.: Наука, 1972.
11. Тимошенко С.П. Теория колебаний в инженерном деле. М.: ОНТИ, 1934.
12. Зельдович Я.Б., Мышкис А.А. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1965.
13. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории управления. М.: Мир, 1974.
14. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
15. Зуховицкий С.И., Авдеев Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.
16. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1966.
17. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1971.
18. Колесников К.С. и др. Динамика разделения ступеней летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1977.

19. Асланов В. С., Круглов Г. Е., Козлов М. Д. Аналитическая оценка погрешностей стабилизации спускаемой капсулы на участке схода с орбиты // Вестник Академии космонавтики. Самара, 1998. С. 96.
20. Асланов В. С., Круглов Г. Е., Прошлецов А. И. Оценка остаточной угловой скорости собственного вращения летательного аппарата при работе тросовой системы типа «ИО-ИО» // Вестник Академии космонавтики. Самара, 1998. С. 100.
21. Асланов В. С., Круглов Г. Е., Юдинцев В. В. Параметрический синтез процесса отделения боковых блоков ракеты-носителя «Союз» // Вестник Академии космонавтики. Самара, 1999. С. 31.

Учебное издание
Круглов Генрих Евгеньевич
**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебное пособие
Редактор Л. Я. Чегодаева
Корректор Л. Я. Чегодаева
Компьютерная верстка О. А. Ананьев

Лицензия ЛР 020301 от 30.12.96 г.

Подписано в печать 15.11.2001 г. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 7,67. Усл. кр.-отг. 7,79. Уч. изд. л. 8,25.

Тираж 100 экз. Заказ 132. Арт.С – 4/2001.

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного университета.
443001, Самара, Молодогвардейская, 151.