


САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
им. академика С. П. КОРОЛЕВА



В. В. КОТЛЯР

АНАЛИТИЧЕСКИЕ
ВЫРАЖЕНИЯ
ДЛЯ ЦИФРОВОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ
ОПТИЧЕСКИХ
СИГНАЛОВ

САМАРА

1995

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

В. В. Котляр

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ
ДЛЯ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Учебное пособие

САМАРА 1995

Аналитические выражения для цифрового моделирования оптических сигналов: Учеб. пособие / В. В. Котляров: Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1995. 58 с. ISBN 5-230-16961-3.

Даны аналитические выражения, упрощающие цифровое моделирование многих базовых задач скалярной теории дифракции. Рассматриваются приближенные формулы расчета световых полей, которые в обмен на точность вычислений позволяют увеличивать скорость. Так, вычисление двумерного интеграла Фурье заменено вычислением криволинейного интеграла по замкнутой кривой. Приведены аналитические формулы для расчета световых полей, сформированных оптическими элементами с квантованной фазой. Рассмотрены быстрые методы вычисления преобразования Ханкеля, а также вычисления функций Бесселя и многочленов Эрмита.

Предназначено для студентов специальности 01.02, специализирующихся по «Компьютерной оптике» и «Обработке изображений». Подготовлено на кафедре технической кибернетики.

Ил. 17. Библиогр.: 13 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королёва

Рецензенты: доц. В. С. Карнеев, С. И. Харитонов

ВВЕДЕНИЕ

Оптическим сигналом называется комплексная функция двух переменных. Оптический сигнал — это световое поле, распространяющееся в свободном пространстве и подчиняющееся дифференциальному уравнению Гельмгольца. Вычисление светового поля на плоскостях, перпендикулярных направлению его распространения, осуществляется с помощью интеграла Кирхгофа.

Прохождение светового поля через плоские диафрагмы и тонкие оптические элементы (линзы) сводится к умножению функции поля на их функции пропускания.

Цифровое моделирование оптических сигналов — это численные эксперименты, в которых рассчитываются распределения амплитуды, интенсивности и фазы световых полей с помощью вычислений соответствующих дифракционных интегралов — интегралов Кирхгофа, Френеля, Фурье и Ханкеля. Прямое вычисление таких двумерных интегралов занимает достаточно много машинного времени, и поэтому возникает интерес к разного рода приближениям, с помощью которых в обмен на точность вычислений можно повысить их скорость.

Один из способов получения явных аналитических выражений — это сведение общей задачи дифракции к сумме частных простых задач. Например, задача дифракции сложной световой волны на отверстии сложной формы в непрозрачном экране сводится к задаче дифракции плоской волны на прямоугольной апертуре, так как любое световое поле можно приближенно рассматривать как суперпозицию конечного числа плоских волн, и апертуру любой формы можно приближенно заполнить без пересечений прямоугольными субапертурами или заменить эту сложную апертуру на отверстие, ограниченное многоугольником, вписанным в нее.

Еще один подход для увеличения скорости вычислений в задачах прикладной оптики — это сведение интегральных преобразований к преобразованию Фурье, для быстрого вычисления которого имеется хорошо отлаженный алгоритм. В данном пособии этот подход использован при вычислении интегрального преобразования Ханкеля, которое необходимо для численного моделирования оптических полей с круговой симметрией. Задача рассеяния плоской волны на рельефной поверхности с конечной проводимостью также представлена в форме, которая позволяет применять алгоритм быстрого преобразования Фурье.

1. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ПЛОСКИХ АПЕРТУРАХ

При анализе свойств скалярной дифракции когерентного света на отверстиях в плоском экране общая задача сводится к решению ряда частных задач. Исходя из того, что любое световое поле может быть эффективно представлено как суперпозиция подходящего числа плоских волн, можно ограничиться рассмотрением дифракций плоской волны на некоторых избранных апертурах. Диафрагму любой формы можно приближенно рассматривать как диафрагму с границей в виде многоугольника или любую диафрагму можно приближенно составить из малых прямоугольных диафрагм. Поэтому общая задача о дифракции произвольной волны на диафрагме с произвольной границей сводится к решению частной задачи о дифракции плоской волны на диафрагме с прямоугольной границей.

В этом разделе получены простые аналитические формулы, связанные с дифракцией плоской волны на избранных апертурах: эллиптической, синусоидальной и полиномиальной в различных приближениях: Френеля и Фраунгофера. Наличие таких формул позволяет проводить цифровое моделирование задач дифракции более эффективно, чем использование общего двумерного интеграла Кирхгофа.

1.1. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

На рис. 1 показана оптическая схема, которую мы анализируем в данном разделе. На непрозрачный плоский экран, расположенный в плоскости (x, y) с отверстием формы Σ , контур которого описывается кривой Γ , падает плоская световая волна с длиной $\lambda = 2\pi / k$, где k — волновое число. Плоскость наблюдения (ξ, η) расположена на расстоянии z от экрана в зоне дифракции Фраунгофера (или в дальней зоне дифракции):

$$z \geq \frac{L^2}{\lambda}, \quad (1)$$

где L — максимальный линейный размер отверстия (апертуры) в экране.

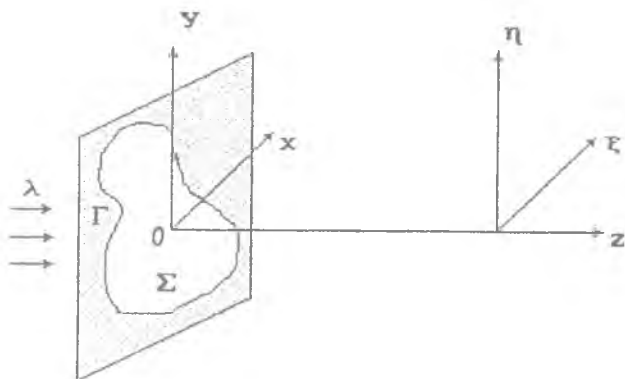


Рис 1 Оптическая схема

Условие дифракции Фраунгофера (1) означает, что средний период модуляции амплитуды светового поля в плоскости наблюдения $T = \lambda z / L$ больше максимального размера апертуры L . Дифракция Фраунгофера наблюдается также в фокальной плоскости сферической линзы.

Особенность этого типа дифракции света в том, что комплексная амплитуда света в плоскости наблюдения $U(\xi, \eta)$ выражается как преобразование Фурье от функции апертуры $P(x, y)$:

$$U(\xi, \eta) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left[ikz + \frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right] S(u, v), \quad (2)$$

$$S(u, v) = \int \int_{\Sigma} P(x, y) \exp[-i(xu + yv)] dx dy, \quad (3)$$

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Sigma, \\ 0, & (x, y) \notin \Sigma, \end{cases} \quad (4)$$

где $u = k\xi / z$, $v = k\eta / z$, Σ — форма апертуры. Цель последующих рассуждений и выкладок заключается в том, чтобы свести двумерное преобразование Фурье (3)

$$S(u, v) = \iint_{\Sigma} \exp[-i(xu + yv)] dx dy \quad (5)$$

к криволинейному интегралу по замкнутому контуру Γ , охватывающему область Σ .

Теорема о дивергенции позволяет свести двумерный интеграл по области от дивергенции некоторого векторного поля к криволинейному интегралу по граничной кривой этой области:

$$\iint_{\Sigma} \bar{\nabla} \bar{f} dx dy = \int_{\Gamma} \bar{f} d\bar{l}, \quad (6)$$

где $\bar{f}(x, y) = f_1(x, y)\bar{p} + f_2(x, y)\bar{q}$,

$$\bar{\nabla} = \bar{p} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{q} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$d\bar{l} = \bar{n} dl, d\bar{r} = (dx, dy) = dx\bar{p} + dy\bar{q},$$

$$d\bar{l} d\bar{r} = 0, d\bar{l} = (dy, -dx),$$

$\bar{f}(x, y)$ — векторное поле, \bar{p} и \bar{q} — единичные векторы, направленные соответственно по осям x и y , $d\bar{l}$ — дифференциальный вектор касательной к кривой Γ , \bar{n} — единичный вектор нормали к кривой Γ , $\bar{\nabla}$ — обозначение градиента.

С учетом обозначений, приведенных выше, вместо выражения (6) можно записать следующее равенство:

$$\iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right\} dx dy = \int_{\Gamma} \{ f_1 dy - f_2 dx \}. \quad (7)$$

Можно показать, что из-за независимости двух скалярных полей $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ равенство (7) эквивалентно двум следующим неравенствам:

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} f_1(x, y) dy, \quad (8)$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial f_2}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma} f_2(x, y) dx.$$

Применяя формулы (8) к скалярному полю $S(u, v)$, получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 S(u, v) &= \iint_{\Sigma} \exp[-i(xu + yv)] dx dy = \frac{i}{u} \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x} [e^{-i(xu + yv)}] dx dy = \\
 &= \frac{i}{u} \int_{\Gamma} \exp[-i(xu + yv)] dy = -\frac{i}{v} \int_{\Gamma} \exp[-i(xu + yv)] dx. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Проверим полученные соотношения: следуя из (9) и используя (6), получим (5). Для этого сложим два последних выражения в (9) и добавим к ним еще одно выражение, тождественно равное нулю:

$$\begin{aligned}
 S(u, v) &= \frac{i}{2u} \int_{\Gamma} \exp[-i(xu + yv)] dy + \\
 &+ \frac{-i}{2v} \int_{\Gamma} \exp[-i(xu + yv)] dx + S_0, \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$S_0 = 0 = \frac{i(u^2 - v^2)}{2uv(u^2 + v^2)} \int_{\Gamma} \exp[-i(xu + yv)] d(xu + yv). \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует выражение

$$\begin{aligned}
 S(u, v) &= \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \exp[-i(xu + yv)] \left[\frac{dy}{u} - \frac{dx}{v} + \frac{(u^2 - v^2)udx}{uv(u^2 + v^2)} + \right. \\
 &\left. + \frac{(u^2 - v^2)vdy}{uv(u^2 + v^2)} \right] = \frac{i}{u^2 + v^2} \int_{\Gamma} \exp[-i(xu + yv)] (-vdx + udy). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Выражение (12) можно записать в векторных обозначениях

$$S(u, v) = \frac{i}{|\bar{a}|^2} \int_{\Gamma} e^{-i\bar{a}\bar{r}} \bar{a}d\bar{l}, \quad \bar{a} = u\bar{p} + v\bar{q}, \quad \bar{r} = x\bar{p} + y\bar{q}. \quad (13)$$

С другой стороны рассмотрим векторное поле

$$\bar{f} = \frac{i\bar{a}}{|\bar{a}|^2} \exp[-i\bar{a}\bar{r}],$$

выражения для дивергенции которого имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \bar{\nabla} \bar{f} \, dx dy &= \\ &= \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{i u}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-i(xu + yv)} \right] + \frac{i v}{u^2 + v^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-i(xu + yv)} \right] \right\} dx dy = \\ &= \iint_{\Sigma} e^{-i(xu + yv)} \, dx dy = S(u, v). \end{aligned} \quad (14)$$

Окончательно имеем цепочку равенств, подтверждающих правильность выражений (9):

$$S(u, v) = \iint_{\Sigma} \bar{\nabla} \bar{f} \, dx dy = \int_{\Gamma} \bar{f} \, d\vec{l} = \frac{i}{|\vec{a}|^2} \int_{\Gamma} e^{-i\vec{a}\vec{r}} \vec{a} d\vec{l}. \quad (15)$$

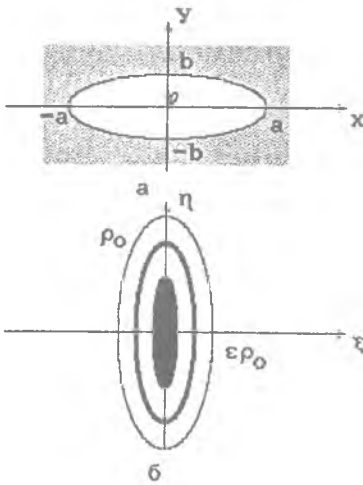


Рис. 2. Эллиптическая апертура (а) и картина дифракции (б)

Итак, полученные выражения (9) сводят двумерное преобразование Фурье от плоской апертуры Σ к криволинейному интегралу по границе апертуры Γ .

Применим формулы (9) для получения аналитических соотношений, описывающих дифракцию Фраунгофера плоской волны на эллиптической, полиномиальной и синусоидальной апертурах.

1. Эллиптическая апертура.

Пусть отверстие в плоском непрозрачном экране имеет форму эллипса (рис.2,а), уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (16)$$

Введем эллиптические координаты

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = \varepsilon a \sin \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \varepsilon \rho \cos \varphi, \\ v = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (17)$$

где $\varepsilon = b/a$ — эксцентриситет эллипса. Тогда, используя соотношения (9), получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 S_1(u, v) &= \frac{-i}{\rho \sin \varphi} \int_0^{2\pi} \exp[-i a \varepsilon \rho \cos(\theta - \varphi)] (-a \sin \theta) d\theta = \\
 &= \frac{ia}{\rho \sin \varphi} \int_0^{2\pi} \exp[-i \alpha \cos(\theta - \varphi)] \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) d\theta = \\
 &= \frac{ia}{\rho \sin \varphi} \left[\frac{e^{i\varphi}}{2i} \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha \cos v} e^{iv} dv - \frac{e^{-i\varphi}}{2i} \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha \cos v} e^{-iv} dv \right] = \\
 &= \frac{2\pi a}{\rho \sin \varphi} J_1(\alpha) \left[\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right] = \frac{2\pi a}{\rho} J_1(\varepsilon a \rho), \quad \alpha = \varepsilon a \rho, \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$J_1(x) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-ix \cos t - it] dt. \quad (19)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка.

Окончательно вместо (18) получим выражение для комплексной амплитуды света при дифракции Фраунгофера плоской волны на эллиптическом отверстии в экране:

$$\begin{aligned}
 S_1(u, v) &= \pi a b [2J_1(b\rho) / (b\rho)] = \\
 &= \pi a b \left[\frac{2J_1\left(\sqrt{(au)^2 + (bv)^2}\right)}{\sqrt{(au)^2 + (bv)^2}} \right], \quad (20)
 \end{aligned}$$

где $\pi a b$ — площадь эллипса. На рис. 2, б показан вид минимального дифракционного пятна: эллипс в плоскости наблюдения вытянут перпендикулярно вытянутости эллипса в плоскости экрана.

2. Полиномиальная апертура. Уравнение прямой линии между двумя соседними точками полиномиальной апертуры (рис. 3) записывается в виде

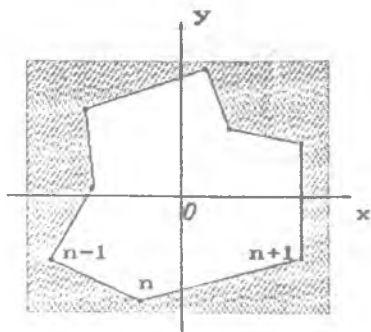


Рис. 3. Полиномиальная диафрагма

$$\frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \quad (21)$$

из которого следует уравнение прямой в канонической форме

$$y = p_n x + q_n, \quad (22)$$

где

$$p_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}},$$

$$q_n = \frac{y_{n-1} x_n - y_n x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Тогда с помощью выражения (9) комплексная амплитуда в плоскости наблюдения при дифракции плоской волны на полиномиальной апертуре (рис. 3) может быть получена в виде

$$\begin{aligned} S_2(u, v) &= \frac{-i}{v} \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} \exp[-i(u x + v p_n x + v q_n)] dx = \\ &= \frac{-i}{v} \sum_{n=1}^N e^{-i v q_n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \exp[-i(u + v p_n) x] dx = \\ &= \frac{i}{v} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-i v q_n}}{u + v p_n} \left[e^{i(u + v p_n) x_n} - e^{i(u + v p_n) x_{n-1}} \right] = \\ &= \sum_{n=1}^N A_n(u, v) e^{i(u x_n + v y_n)}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{откуда } A_n = \frac{p_{n-1} - p_n}{(u + v p_{n-1})(u + v p_n)}, \quad (24)$$

где N — число сторон многоугольника, ограничивающего полиномиальное отверстие в экране.

Выражение (23) показывает, что комплексная амплитуда света в дальней зоне дифракции плоской волны на полиномиальной

апертуре является суперпозицией вкладов от вершин многоугольника, ограничивающего апертуру, с соответствующими весами A_n .

3. Синусоидальная апертура. На рис. 4,а показана синусоидальная диафрагма в плоском экране, уравнение верхней кривой которой имеет вид $y_1 = a_1 \cos x + b_1$, а уравнение нижней кривой имеет вид $y_2 = a_2 \cos x - b_2$. Тогда амплитуда света в дальней зоне при дифракции плоской волны на такой апертуре будет равна:

$$\begin{aligned}
 S_3(u, v) &= \frac{-i}{v} \int_{-c}^c \exp[-i(u x + v a_1 \cos x + b_1 v)] dx - \\
 &- \int_{-c}^c \exp[-i(u x + v a_2 \cos x - b_2 v)] dx = \\
 &= \frac{i}{v} e^{-i b_1 v} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(a_1 v) (-i)^n \int_{-c}^c e^{-i(u-n)x} dx - \\
 &- \frac{i}{v} e^{i b_2 v} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(a_2 v) i^n \int_{-c}^c e^{-i(u-n)x} dx = \\
 &= \frac{2i}{v} \left\{ e^{-i b_1 v} \sum_n J_n(a_1 v) (-i)^n \frac{\sin(u+n)c}{(u+n)} - \right. \\
 &\left. - e^{i b_2 v} \sum_n J_n(a_2 v) i^n \frac{\sin(u+n)c}{(u+n)} \right\}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

При получении выражения (25) мы воспользовались известным разложением:

$$\exp[i x \sin t] = \sum_n J_n(x) e^{i n t}. \quad (26)$$

Соотношение (25) показывает, что по оси u в плоскости наблюдения имеют место порядки дифракции, которые нумеруются номером n и амплитуды которых пропорциональны значениям функций Бесселя соответствующего порядка (рис. 4,б).

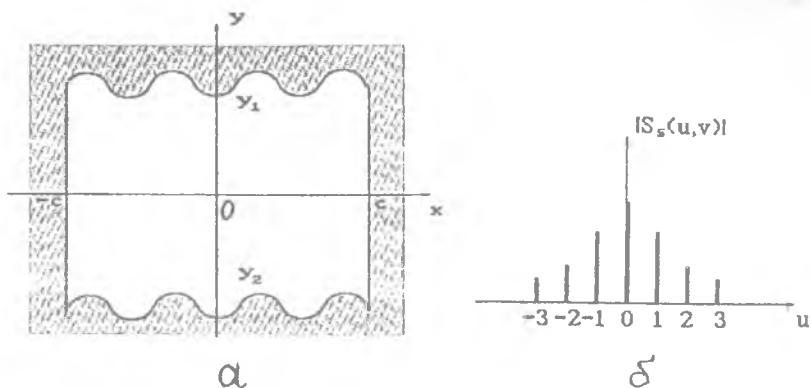


Рис. 4. Синусоидальная апертура (а) и дифракционные порядки (б)

1.2. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

При анализе дифракции Френеля плоской волны на диафрагме в плоском непрозрачном экране следует использовать интегральные соотношения, получающиеся при решении уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 U(x, y, z) + k^2 U(x, y, z) = 0, \quad (27)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — лапласиан.

Можно показать, что комплексная амплитуда света $U(x, y, z)$ в плоскости z наблюдения связана с комплексной амплитудой света $U_0(x, y)$ в плоскости $z = 0$ экрана интегральным преобразованием вида

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\alpha, \beta) \exp \left[ikz \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} - ik(\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta, \quad (28)$$

где

$$A_0(\alpha, \beta) = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) e^{ik(\alpha x + \beta y)} dx dy. \quad (29)$$

Если апертуру Σ разбить на прямоугольники размером $[-a, a] \cdot [-b, b]$, то общая задача сводится к частной задаче о дифракции Френеля плоской волны на прямоугольной апертуре. При этом задача факторизуется:

$$U(x, y, z) = D(x, z) B(y, z). \quad (30)$$

В данном случае в приближении Френеля вместо уравнений (28) и (29) можно записать следующие соотношения для одной из переменных:

$$A_0(\alpha) = k \int_{-a}^a e^{ik\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} \sin(\alpha k a), \quad (31)$$

$$A(\alpha, z) = A_0(\alpha) \exp[-ikz\alpha^2 / 2] = \frac{2}{\alpha} \sin(\alpha k a) \exp[-ikz\alpha^2 / 2], \quad (32)$$

$$D(x, z) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha k a)}{\alpha} \exp[-i k z \alpha^2 / 2 - i k \alpha x] d\alpha. \quad (33)$$

После удобного переобозначения:

$$u = k \alpha a, \quad s = x / a, \quad M = 2\pi a^2 (\lambda z)^{-1},$$

где M — число Френеля, вместо уравнения (33) получим выражение

$$D(s) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} \exp\left[-i \frac{u^2}{2M} - i u s\right] du. \quad (34)$$

Чтобы получить аналитическое выражение, удобное для анализа свойств френелевской дифракции света, продифференцируем обе части уравнения (34) по переменной s . Тогда получим выражение

$$\frac{dD(s)}{ds} = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \sin u \exp\left[-i \frac{u^2}{2M} - i u s\right] du. \quad (35)$$

Интеграл (35) является гауссовым интегралом и вычисляется в явном виде

$$\frac{dD(s)}{ds} = 2\sqrt{2i\pi M} e^{iM/2} \sin(Ms) e^{iMs^2/2}. \quad (36)$$

При получении выражения (36) мы воспользовались известным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[\frac{b^2}{4a}\right]. \quad (37)$$

Итак, чтобы рассчитать комплексную амплитуду света при дифракции Френеля плоской волны на прямоугольной апертуре, эффективнее воспользоваться формулой (36) и следующим соотношением:

$$D(s) = D(0) + \int_0^s \frac{dD(s')}{ds'} ds'. \quad (38)$$

Чтобы найти поле $D(s)$ в N точках s_k , $k = \overline{1, N}$ по формуле (34), следует N раз вычислить интеграл, например, по методу Симпсона, а по формуле (38) с учетом (36) следует вычислить всего один интеграл.

Аналогично в радиальном случае, если исходное световое поле можно аппроксимировать кусочно-постоянной функцией, зависящей только от радиальной переменной r , то общая задача анализа френелевской дифракции сводится к частной задаче о дифракции Френеля плоской световой волны на круглой апертуре радиуса R . В этом случае вместо формул (31) — (33) используются следующие выражения:

$$A_0(\rho) = \int_0^R J_0(k\rho r) r dr = \rho^{-1} J_1(k\rho R), \quad (39)$$

$$A(\rho, z) = A_0(\rho) \exp\left[-ikz\rho^2/2\right], \quad (40)$$

$$U(r, z) = \int_0^{\infty} u^{-1} J_1(u) J_0(us) \exp\left[-i\frac{u^2}{2M}\right] u du, \quad (41)$$

где

$$k(\alpha x + \beta y) = k\rho r \cos(\varphi - \theta), \quad s = r/a, \quad u = k\rho R, \quad M = kR^2/z.$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \rho \cos \varphi, \\ \beta &= \rho \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta, \\ y &= r \cos \theta. \end{aligned} \right.$$

Используя формулу для производной функции Бесселя

$$\frac{d J_0(a x)}{d x} = -a J_1(a x), \quad (42)$$

получим явную формулу для производной комплексной амплитуды (41)

$$\begin{aligned} \frac{d U(s)}{d s} &= - \int_0^1 J_1(u) J_1(u s) \exp \left[-i \frac{u^2}{2 M} \right] u d u = \\ &= M J_1(M s) \exp \left[i \frac{M}{2} + i \frac{M s^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

При использовании явной формулы для производной светового поля (43) сама комплексная амплитуда света в зоне Френеля находится простым однократным интегрированием

$$U(s) = U(0) + \int_0^s \frac{d U(s')}{d s'} d s'. \quad (44)$$

Выводы. В данном разделе получены аналитические явные формулы, позволяющие эффективно организовать цифровое моделирование оптических сигналов для изучения свойств дифракции света на плоских апертурах. При этом общая задача дифракции Френеля и Фраунгофера произвольного светового поля сводится к частным задачам дифракции плоской волны на апертурах:

- эллиптической (формула (20));
- полиномиальной (формулы (23), (24));
- синусоидальной (формула (25));
- прямоугольной (формулы (36), (38));
- крутовой (формулы (43), (44)).

Для дальнейшего примем модель квантования светового поля, показанную на рис.5. Пусть на вход схемы квантования (рис.5) подается сигнал $\cos\varphi(x)$. В k -м канале сначала происходит фазовая задержка на величину $2k\pi/N$. Поэтому на выходе из блока фазовой задержки в k -м канале будет иметь место сигнал

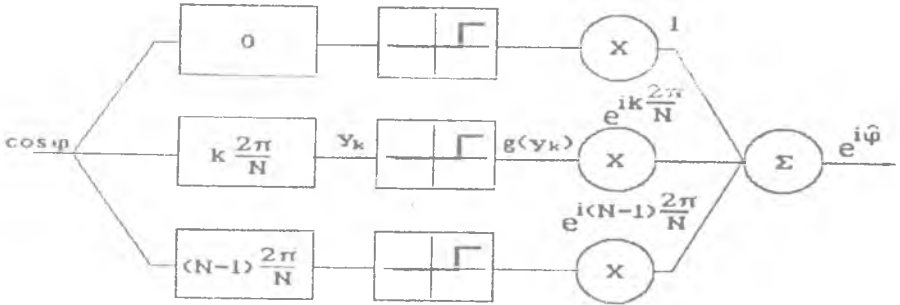
$$y_k = \cos[\varphi(x) - 2k\pi/N]. \quad (46)$$


Рис. 5. Блок-схема модели квантования

Этот сигнал далее попадает на блок ограничителя наклонов (рис. 5), функция пропускания которого задается выражением:

$$g(y_k) = \begin{cases} 1, & y_k > \cos(\pi/N) \\ 0, & y_k \leq \cos(\pi/N) \end{cases} \quad (47)$$

В аналитическом виде функция (47) представима через знаковую функцию

$$g(y_k) = \frac{1}{2} [sgn\{y_k - \cos(\pi/N)\} + 1]. \quad (48)$$

Из (48) имеем

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (49)$$

Используя известное соотношение для преобразования Фурье от знаковой функции

$$\mathcal{F}[sgn(x)] = \frac{1}{\pi x}, \quad (50)$$

функцию $g(y_k) = g_k$ можно представить через преобразование Фурье в следующем виде:

$$g_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\xi} \exp[-i\xi \cos(\pi/n) + i\xi \cos * \{ \varphi(x) - 2\pi k/N \}] d\xi + 1/2. \quad (51)$$

Соотношение (51) получено с учетом равенства

$$\mathcal{F}[g_k] = \frac{e^{-i\xi \cos(\pi/n)}}{2\pi\xi} + \frac{\delta(\xi)}{2}. \quad (52)$$

Исключая из рассмотрения общую константу $1/2$ в уравнении (51) и используя разложение вида

$$\exp(i\xi \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\xi) \exp(in\theta), \quad (53)$$

получим вместо выражения (51) следующее равенство.

$$\begin{aligned} g_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\{\varphi(x) - 2\pi k/N\}} \left[i^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi \cos(\pi/N)}}{2\pi\xi} J_n(\xi) d\xi \right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp[in\{\varphi(x) - 2\pi k/N\}] \end{aligned} \quad (54)$$

Чтобы найти коэффициенты C_n суммы (54), рассмотрим частный случай линейной фазы: $\varphi(x) = 2\pi\alpha x$. В этом случае выражения (46) и (54) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} y_k &= \cos[2\pi(\alpha x - k/N)], \\ g_k(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp[i2\pi n(\alpha x - k/N)]. \end{aligned} \quad (55)$$

Вид функций (55) показан на рис. 6. Из рисунка видно, что функция (55) представляет собой эквидистантно расположенные прямоугольные импульсы шириной $(\alpha N)^{-1}$ и следующие с периодом α^{-1} .

Чтобы найти коэффициенты в этом случае, надо вычислить преобразование Фурье от функции $g_k(x)$ в рамках одного периода:

$$C_n = \alpha \exp[-i2\pi k/N] \int_c^d e^{i2\pi \alpha n x} dx =$$

$$= \frac{\sin(\pi n/N)}{\pi n} = \frac{1}{N} \operatorname{sinc}(\pi n/N), \quad (56)$$

где $c = k/(\alpha N) - (2\alpha N)^{-1}$, $d = k/(\alpha N) + (2\alpha N)^{-1}$.

Из (54) и (56) следует окончательное выражение для сигнала на выходе k -го канала схемы квантования (рис. 5):

$$g_k(x) = N^{-1} \sum_n \operatorname{sinc}(\pi n/N) e^{in[\varphi(x) - 2\pi k/N]}. \quad (57)$$

Тогда сумма сигналов на выходе всех каналов схемы квантования будет иметь следующий вид:

$$e^{i\hat{\varphi}(x)} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{i2\pi k/N} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_n \frac{1}{N} \operatorname{sinc}(\pi n/N) e^{in\varphi(x)} e^{i2\pi(n-1)k/N} = \quad (58)$$

$$= \sum_n \operatorname{sinc}(\pi n/N) e^{in\varphi(x)} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi(n-1)k/N} \right].$$

Выражение в квадратных скобках в уравнении (58) равно единице при $n-1=0, \pm N, \pm 2N, \dots$ и равно нулю при других значениях номера n . Поэтому введя пересобозначение

$$\frac{n-1}{N} = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

вместо равенства (58) получим искомое соотношение

$$e^{i\hat{\varphi}(x)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}[\pi(m+1/N)] e^{i(Nm+1)\varphi(x)}. \quad (59)$$

Формула (59) связывает световое поле с квантовой фазой $\exp[i\hat{\varphi}(x)]$ с полем непрерывной фазы $\exp[i\varphi(x)]$.

Если от обеих частей равенства (59) вычислить преобразование Фурье, то получим связь между комплексными амплитудами пространственного спектра квантового и непрерывного полей.

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i \hat{\varphi}(x) + i 2 \pi x y] d x = \\
 &= \sum_{-N}^{\infty} \operatorname{sinc} [\pi(m+1 / N)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(N m+1) \varphi(x) + i 2 \pi x y] d x = \\
 &= \sum_{-N}^{\infty} \operatorname{sinc} [\pi(m+1 / N)] g_m(y), \quad (60)
 \end{aligned}$$

где

$$g_m(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(N m+1) \varphi(x) + i 2 \pi x y] d x .$$

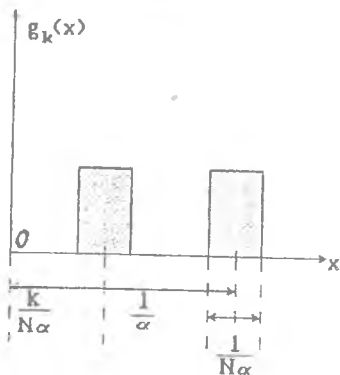


Рис. 6. Квантование плоской волны

Из соотношения (60) видно, что квантование фазы исходного непрерывного поля приводит к появлению в Фурье-плоскости (в плоскости пространственного спектра) кроме основного изображения $g_0(y)$ многих дополнительных изображений $g_m(y)$, $m \neq 0$.

Проанализируем, к чему приводят формулы (59) и (60) в частном случае. Пусть исходное световое поле является сдвинутым прямоугольным импульсом (рис. 7, а) и описывается формулой

$$g(y) = \operatorname{rect}(y - y_0) .$$

Тогда поле в плоскости Фурье следует вычислять по формуле

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \operatorname{sinc}(\pi x y_0) e^{i 2 \pi x y_0} = \\
 &= \left| \operatorname{sinc}(\pi x y_0) \right| \exp [i \varphi_1(x) - i 2 \pi x y_0], \quad (61)
 \end{aligned}$$

где $\varphi_1(x)$ — бинарная фаза (рис. 7, б, сплошная линия) функции sinc (рис. 7, б, пунктирная линия).

Рассмотрим, к чему приведет бинаризация фазы светового поля $G(x)$. Пусть $N=2$, тогда с учетом, что фаза $\varphi_1(x)$ — бинарная, поэтому имеет место равенство

$$e^{i(2m-1)\varphi_1(x)} = e^{i\varphi_1(x)}$$

получим выражение для амплитуды дополнительных изображений, которые появляются из-за квантования фазы в плоскости исходного поля:

$$\begin{aligned} g_m(y) &= \int \left| \sin c(\pi x y_0) \right| \exp \\ &\cdot \left[i(2m+1)\varphi_1(x) - i2\pi(2m+1)xy_0 + i2\pi xy \right] dx = \\ &= \int \sin c(\pi x y_0) \exp \left[i2\pi x \{y - (2m+1)y_0\} \right] dx = \\ &= \text{rect} \left[y - (2m+1)y_0 \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

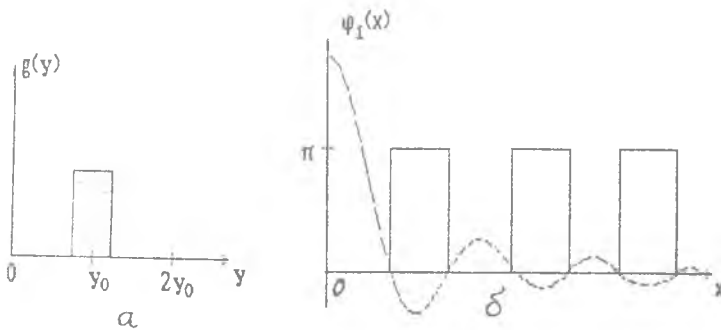


Рис. 7. Квантование поля, формирующего смещенный *rect*-импульс

Из уравнения (62) следует, что если проквантовать фазу Фурье-образа прямоугольного поля $g(x)$ (рис.7,а) по уровню $N=2$, то в объектной плоскости появится множество дополнительных объектов $g_m(x)$, которые по форме тождественны исходному, но отличаются от него амплитудой, и общее световое поле в объектной плоскости при этом будет иметь вид

$$\tilde{g}(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin c \left[\pi(m+1/2) \right] \text{rect} \left[y - (2m+1)y_0 \right]. \quad (63)$$

Можно показать, что при квантовании по уровню 2 дополнительные изображения не накладываются на основное, если оно смещено от центра на расстояние, большее половины своей ширины (см. рис.7.а).

Заметим также, что из уравнения (60) следует, что при стремлении числа уровней квантования N к бесконечности интенсивность дополнительных изображений убывает согласно асимптотической формуле

$$I_m = (mN)^{-2}, \quad (64)$$

где m — номер дифракционного порядка или дополнительного изображения.

2.2. РАДИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

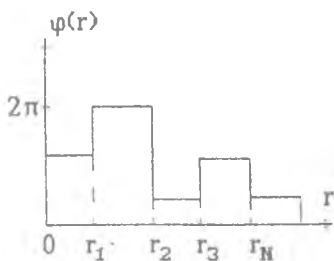


Рис. 8. Кусочно-постоянная фаза

Рассмотрим задачу дифракции светового поля на оптическом элементе с радиально-симметричной фазой. Пусть эта фаза задана в кусочно-постоянном виде, что является обычным при изготовлении такого оптического элемента по технологии фотолитографии.

На рис. 8 показана радиально-симметричная фаза $\varphi(r)$, $r^2 = x^2 + y^2$, которая задается своими значениями на выбранных радиусах:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi_1, & 0 < r \leq r_1 \\ \varphi_2, & r_1 < r \leq r_2 \\ \dots & \dots \\ \varphi_N, & r_{N-1} < r \leq r_N = R. \end{cases} \quad (65)$$

Комплексная амплитуда света в плоскости пространственного спектра светового поля с радиальной фазой выражается с помощью интегрального преобразования Ханкеля нулевого порядка

$$F(\rho) = \int_0^R e^{i\varphi(r)} J_0(kr\rho/f) r dr. \quad (66)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя, R — радиус фазового оптического элемента, k — волновое число света, f — фокусное расстояние линзы, формирующей в фокальной плоскости пространственный спектр.

Подставив в уравнение (66) выражение для фазы (65), получим

$$\begin{aligned}
 F(\rho) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\varphi_{n+1}} \int_{r_n}^{r_{n+1}} J_0(kr\rho/f) r dr = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\varphi_{n+1}} \left[\int_0^{r_{n+1}} J_0(kr\rho/f) r dr - \int_0^{r_n} J_0(kr\rho/f) r dr \right] = \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\varphi_{n+1}} \left[r_{n+1} \rho^{-1} J_1(k\rho f^{-1} r_{n+1}) - r_n \rho^{-1} J_1(k\rho f^{-1} r_n) \right], \quad (67)
 \end{aligned}$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка, ρ и r — радиальные координаты в плоскостях пространственного спектра и оптического элемента соответственно (рис.9).

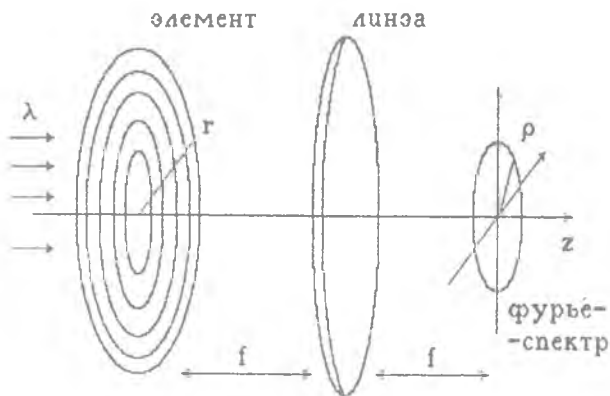


Рис. 9. Оптическая схема

Выражение (67) показывает, что световое поле в фокальной плоскости линзы от фазового оптического элемента с радиальной кусочно-постоянной фазой будет равно суперпозиции дифракционных картин плоской волны на круглой апертуре. После подходящего переобозначения получим вместо (67) следующее выражение:

$$F(\rho) = \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^N C_n J_1(k \rho f^{-1} r_n), \quad (68)$$

где

$$\begin{cases} C_n = r_n (e^{i \varphi_n} - e^{i \varphi_{n+1}}), \\ C_N = R \exp(i \varphi_N). \end{cases} \quad (69)$$

Заметим, что на основе формул (68) и (69) можно сформулировать задачу синтеза фазовых радиально-симметричных оптических элементов с кусочно-постоянной фазой. Для этого по произвольно заданному радиальному распределению интенсивности в фокальной плоскости линзы $I_0(\rho)$ требуется найти набор отсчетов фазы $\{\varphi_k\}$, $k = \overline{1, N}$. Формально такая задача сводится к решению интегрального уравнения

$$I_0(\rho) = \left| 2\rho^{-1} \sum_{n=1}^N C_n J_1(k \rho f^{-1} r_n) \right|^2. \quad (70)$$

Введя обозначения $\bar{F}(\rho) = \rho F(\rho) / 2$, вместо (68) получим выражение

$$\bar{F}(\rho) = \sum_{n=1}^N C_n J_1(\gamma_n \rho / R), \quad (71)$$

где γ_n — корни функции Бесселя: $J_1(\gamma_n) = 0$. Из сравнения (68) и (70) следует равенство, с помощью которого выбираются отсчеты r_n :

$$r_n = f \gamma_n (k R)^{-1}. \quad (72)$$

Уравнение (70) может быть приближенно решено итерациями. Выбирается оценка комплексной амплитуды $\bar{F}(\rho)$, с помощью которой ищутся коэффициенты суммы (71) по формуле

$$C_n = A_n \int_0^R \bar{F}(\rho) J_1(\rho \gamma_n / R) \rho d\rho. \quad (73)$$

Из (73) имеем

$$A_n = 2 \left[J_1'(\gamma_n) R \right]^{-2}, \quad (74)$$

где $J_1'(x)$ — производная функции Бесселя.

При выводе формулы (73) используется соотношение ортогональности для цилиндрических функций

$$\int_0^1 J_m(\gamma_p x) J_m(\gamma_q x) x dx = \delta_{pq} \left[J_1'(\gamma_p) \right]^2 / 2. \quad (75)$$

Рассчитанные по формулам (73) коэффициенты используются далее для нахождения искоемых фаз из следующих рекуррентных соотношений:

$$\varphi_n = \pi - \varphi_{n-1} - 2 \arg C_n, \quad \varphi_N = \arg C_N, \quad n = (N-1), (N-2), \dots, 1. \quad (76)$$

Для получения следующей оценки амплитуды $\bar{F}(\rho)$ вычисляется сумма (71) с коэффициентами, фазы которых сохраняются, а амплитуды заменяются в соответствии с выражением (69) на следующие:

$$|C_n| = 2 r_n \left| \sin \left[(\varphi_n - \varphi_{n+1}) / 2 \right] \right|. \quad (77)$$

3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА КАРТИН ДИФРАКЦИИ

3.1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ РАСТР

В общем случае задача анализа картин дифракции при прохождении света с комплексной амплитудой $E(u, v)$ через тонкий амплитудно-фазовый транспарант с пропусканием $T(u, v)$ сводится к вычислению двумерного интеграла Кирхгофа

$$W(x, y, z) = \frac{e^{ik(f+z)}}{i\lambda} \iint_S E(u, v) T(u, v) \frac{e^{ikS}}{S} du dv, \quad (78)$$

где

$$S^2 = (f+z)^2 + (u-x)^2 + (v-y)^2,$$

$W(x, y, z)$ — комплексная амплитуда света в окрестности плоскости наблюдения, которая отстоит от транспаранта на расстоянии f (рис.10), Σ — форма апертуры транспаранта.

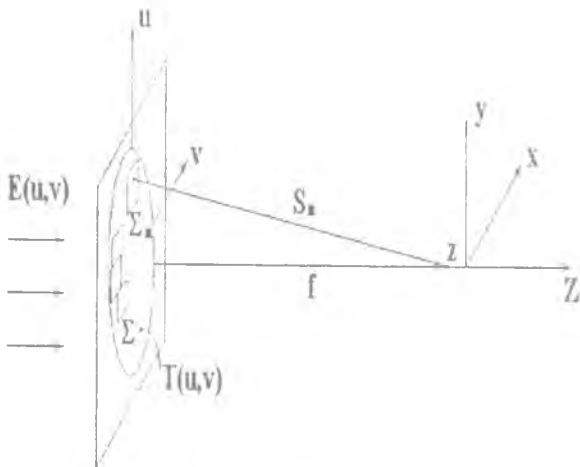


Рис. 10. Оптическая схема

Метод конечных элементов заключается в том, что апертура Σ разбивается без пересечений на N малых субапертур Σ_n . Тогда, если амплитуда освещающего пучка изменяется быстрее, чем изменяется функция пропускания транспаранта, то в рамках каждой субапертуры можно считать функцию $T(u, v)$ неизменной

$$T(u, v) = t_n, \quad (u, v) \in \Sigma_n$$

и вместо выражения (78) в приближении Френеля ($f \gg z$ и $f \gg L$, где L — максимальный линейный размер апертуры Σ) можно записать следующее равенство:

$$W(x, y, z) = \frac{f+z}{i\lambda} \sum_{n=1}^N t_n \frac{e^{ikS_n}}{S_n^2} \iint_{\Sigma_n} E(u, v)^* \cdot \exp \left[\frac{ik}{2S_n} \{ (u_n - u)(2x - u - u_n) + (v_n - v)(2y - v - v_n) \} \right] du dv, \quad (79)$$

где t_n — постоянное пропускание n -й субапертуры, $S^2 = (f+z)^2 + (x-u_n)^2 + (y-v_n)^2$ — расстояние от центральной точки субапертуры Σ_n с координатами (u_n, v_n) до точки наблюдения с координатами (x, y, z) .

Переход от сферических волн $\exp(ikS)$ в уравнении (78) к параболическим волнам в уравнении (79) следует из соотношений:

$$\begin{aligned}
 S &= \left[(f+z)^2 + (u-x)^2 + (v-y)^2 \right]^{1/2} = \\
 &= \left[(f+z)^2 + (u_n-x+u-u_n)^2 + (v_n-y+v-v_n)^2 \right]^{1/2} = \\
 &= \left[(f+z)^2 + (u-u_n)(u+u_n-2x) + (v-v_n)(v+v_n-2y) \right]^{1/2} \approx \\
 &= S_n + \frac{(u_n-u)(2x-u-u_n)}{2S_n} + \frac{(v-v_n)(2y-v-v_n)}{2S_n}. \quad (80)
 \end{aligned}$$

В знаменателе формулы (79) было использовано приближение

$$\frac{1}{S} \approx \frac{f+z}{S_n^2}$$

В случае, если субапертура Σ_n имеет вид прямоугольника и освещается сходящейся (или расходящейся) сферической волной или плоской волной, то интеграл (79) факторизуется и может быть вычислен в явном виде через функции Ломмеля.

3.2. КОЛЬЦЕВОЙ РАСТР

Если задача имеет круговую симметрию, то есть освещающее поле зависит только от радиальной переменной $E(u, v) = E(r)$, и функция пропускания зависит от радиальной переменной $T(u, v) = T(r) = t_n$ при $r_n < r < r_{n+1}$, то в качестве субапертур естественно выбирать кольцевые апертуры (рис.11). Тогда переходя в полярные координаты

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & u = r \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi, & v = r \sin \theta \end{cases}$$

и вводя обозначения радиусов центров колец: $\bar{r}_n = (r_{n-1} + r_n) / 2$, получим вместо выражения (79) следующее уравнение для комплексной амплитуды в окрестности плоскости наблюдения:

$$W(\rho, z) = \frac{f+z}{i\lambda} \sum_{n=0}^N t_n \exp \left[ik \left(L_n + \frac{2\rho r_n - r_n^2}{2L_n} \right) \right] \cdot \int_{r_{n-1}}^{r_n} E(r) \int_0^{2\pi} \exp \left[i \frac{kr^2}{2L_n} - i \frac{kr\rho \cos(\theta - \varphi)}{L_n} \right] r dr d\varphi \quad (81)$$

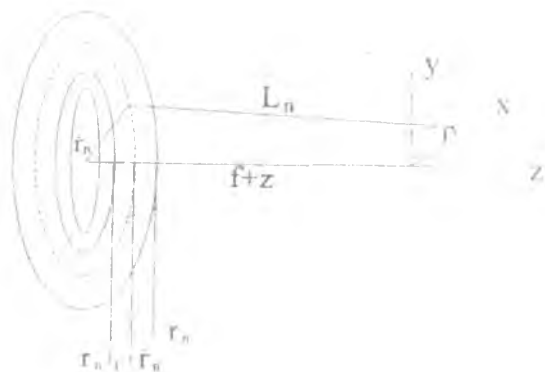


Рис. 11. Кольцевой растр

Здесь

$$L_n = \left[(f+z)^2 + (r_n - \rho)^2 \right]^{1/2} \quad (82)$$

Переход от расстояния S в формуле (78) к расстоянию L_n в формуле (82) задается следующим выражением:

$$\begin{aligned}
S &= \left[(f+z)^2 + (u-x)^2 + (v-y)^2 \right]^{1/2} = \\
&= \left[(f+z)^2 + (r \cos \theta - \rho \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta - \rho \sin \varphi)^2 \right]^{1/2} = \\
&= \left[(f+z)^2 + (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)) \right]^{1/2} = \\
&= \left[(f+z)^2 + (\bar{r}_n - \rho)^2 - (\bar{r}_n - \rho)^2 + (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)) \right]^{1/2} = \\
&= \left[L_n^2 + (2\bar{r}_n \rho - \bar{r}_n^2) + (r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)) \right]^{1/2} \approx \\
&\approx L_n + \frac{2\bar{r}_n \rho - \bar{r}_n^2}{2L_n} + \frac{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)}{2L_n}. \tag{83}
\end{aligned}$$

Используя интегральное представление функции Бесселя (19), вместо (81) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
W(\rho, z) &= -ik(f+z) \sum_{n=0}^N t_n B_n L_n^2 \exp \left[ik \left(L_n - \frac{\bar{r}_n^2 - 2\rho \bar{r}_n}{2L_n} \right) \right] * \\
&* \int_{r_{n-1}}^{r_n} \exp \left[i\psi(r) + i\frac{kr^2}{2L_n} \right] J_0(kr\rho/L_n) r dr, \tag{84}
\end{aligned}$$

где $E(r) = B(\bar{r}_n) e^{i\psi(r)} = B_n e^{i\psi(r)}$, $r_{n-1} < r < r_n$.

В случае падения на транспарант (см. рис. 11) сходящейся сферической волны, фаза которой в приближении Френеля описывается выражением

$$\psi(r) = -\frac{kr^2}{2(f+z)},$$

и которая сходится в фокусе, расположенном в центре плоскости наблюдения на расстоянии $L_0 = f + z$ от транспаранта, интегралы, стоящие под знаком суммы в выражении (84), вычисляются через формулы Ломмеля:

$$\begin{aligned}
 I_k &= \int_0^{r_k} \exp\left[i\psi(r) + i\frac{kr^2}{2L_n}\right] J_0(kr\rho/L_n) r dr = \\
 &= \int_0^{r_k} \exp\left[-i\frac{kr^2}{2L_0} + \frac{kr^2}{2L_n}\right] J_0(kr\rho/L_n) r dr = \\
 &= \begin{cases} r_k^2 q_k^{-1} \exp[-q_k/2] \{U_1(q_k, p_k) + iU_2(q_k, p_k)\}, & |q_k| < |p_k|, \\ -i r_k^2 q_k^{-1} \exp[-p_k^2(2q_k)^{-1}] \{V_1(q_k, p_k) - iV_2(q_k, p_k)\}, & |q_k| \geq |p_k|. \end{cases} \quad (85)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 U_m(\xi, \eta) &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left[\frac{\xi}{\eta}\right]^{2s-m} J_{2s-m}(\eta), \\
 V_m(\xi, \eta) &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left[\frac{\eta}{\xi}\right]^{2s-m} J_{2s-m}(\eta). \quad (86)
 \end{aligned}$$

где также $q_s = k r_s^2 [L_0^{-1} - L_n^{-1}]$; $p_s = k r_s \rho (L_n)^{-1}$, $s = 1, 2$,

$U_m(\xi, \eta)$ и $V_m(\xi, \eta)$ — функции Ломмеля.

Если на транспарант падает плоская волна $\psi(r) = 0$, то интегралы, стоящие под знаком суммы в выражении (84), также легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_{r_{n-1}}^{r_n} \exp\left[\frac{ikr^2}{2L_n}\right] J_0(kr\rho/L_n) r dr = \\
 &= J_0(k\rho\bar{r}_n/L_n) \int_{r_{n-1}}^{r_n} \exp\left[\frac{ikr^2}{2L_n}\right] r dr = \\
 &= 2i L_n k^{-1} \sin\left[\frac{k}{4L_n}(r_n^2 - r_{n-1}^2)\right] \exp\left[\frac{ik}{4L_n}(r_n^2 + r_{n-1}^2)\right] J_0(k\rho\bar{r}_n/L_n). \quad (87)
 \end{aligned}$$

Заметим, что при условии $L_n = L_0 = f + z$ формула (84) с учетом результата (87) примет вид

$$W(\rho, z) = \sum_{n=0}^N C_n J_0(k\rho\bar{r}_n / L_0) \exp[ik\rho\bar{r}_n / L_0], \quad (88)$$

где

$$C_n = t_n B_n \sin \left[\frac{k}{4L_0} (r_n^2 - r_{n-1}^2) \right] \exp \left[ikL_0 - i \frac{k\bar{r}_n^2}{2L_0} + i \frac{k}{4L_0} (r_n^2 + r_{n-1}^2) \right].$$

Можно получить формулу для расчета амплитуды $W(\rho, z)$ для произвольной фазы $\psi(r)$, если она слабо меняется на кольцевой субапертуре шириной $\delta = r_n - r_{n-1} \ll r_n$. В этом случае интегралы, входящие в сумму (84), приближенно вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I(c, \delta) &= \int_c^{c+\delta} \exp \left[i\psi(r) + i \frac{k r^2}{2L_n} \right] J_0(kr\rho / L_n) r dr = \\ &= \exp \left[i\psi(c) + i \frac{k c^2}{2L_n} \right] \left\{ J_0(kc\rho / L_n) + \right. \\ &\quad \left. + \left[-J_1(kc\rho / L_n)c + iJ_0(kc\rho / L_n)c \left(\frac{kc}{L_n} + \frac{d\psi}{dr} \Big|_c \right) \right] \delta / 2 \right\}, \quad (89) \end{aligned}$$

Последнее выражение (89) получено при использовании следующих приближений:

$$\begin{aligned} \exp[i\psi(r)] &= \exp[i\psi(c)] \left\{ 1 + i \frac{d\psi}{dr} \Big|_c \delta \right\}, \\ \exp \left[i \frac{k r^2}{2L_n} \right] &= \exp \left[i \frac{k c^2}{2L_n} \right] \left\{ 1 + i k c \delta / L_n \right\}, \\ J_0(kr\rho / L_n) &\approx J_0(kc\rho / L_n) - \\ &- \delta J_1(kc\rho / L_n), \quad \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x). \end{aligned}$$

Приведенные формулы — (79), (85), (88), и (89) — являются упрощающими аналитическими выражениями при расчете интег-

рала Кирхгофа в приближении Френеля. Их использование более эффективно, чем прямой расчет интеграла Кирхгофа, например, по методу Симпсона.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ

Примеров световых полей с радиальной симметрией много — это лазерные пучки света, гауссовы и бesselевые моды и т.д. Их распространение в пространстве в рамках скалярной теории дифракции описывается с помощью преобразования Ханкеля. Поэтому для численного моделирования на компьютерах световых полей с радиальной симметрией требуются эффективные (быстрые и точные) процедуры для вычисления этого преобразования.

Ниже рассматриваются несколько приемов, с помощью которых можно увеличить скорость вычисления преобразования Ханкеля и связанных с ним функций.

4.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ЭРМИТА

Функцию Бесселя первого рода n -го порядка обычно программируют с помощью аппроксимации первыми членами ряда Тейлора. При этом вычисляются с помощью многочлена только функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$, а остальные функции Бесселя вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x). \quad (90)$$

Можно быстрее рассчитывать функцию Бесселя n -го порядка без формулы (90), а с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). В этом случае исходят из известного интегрального представления

$$J_n(x) = \frac{(i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{i x \cos(t)} \cos(nt) dt. \quad (91)$$

После замены переменных

$$\xi = \cos(t), \quad d\xi = -\sin(t) dt, \quad dt = -\left[1 - \xi^2\right]^{-1/2} d\xi \quad (92)$$

вместо равенства (91) получим выражение вида

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_{-1}^1 [1 - \xi^2]^{-1/2} \cos[n \arccos \xi] e^{ix\xi} d\xi. \quad (93)$$

Из уравнения (93) видно, что функция Бесселя n -го порядка равна Фурье-образу от функции

$$I_n(\xi) = \frac{(-i)^n}{\pi} \operatorname{rect}(\xi) \cos[n \arccos \xi] \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (94)$$

$$J_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Аналогичным образом можно вычислять многочлены Эрмита сразу n -го порядка и использовать при этом также алгоритм БПФ, и не использовать рекуррентные соотношения

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x), \quad (95)$$

где $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$.

Воспользуемся представлением многочленов Эрмита через производную

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] \quad (96)$$

и представлением гауссовой экспоненты через преобразование Фурье

$$e^{-x^2} = (2\sqrt{\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4} e^{ix\xi} dx. \quad (97)$$

Тогда n -я производная от гауссовой экспоненты представима в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] &= (2\sqrt{\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4} \frac{d^n}{dx^n} [e^{ix\xi}] d\xi = \\ &= i^n (2\sqrt{\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n e^{-x^2/4} e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (98)$$

Используя соотношения (96) и (98), получим окончательное выражение для многочлена Эрмита n -го порядка

$$H_n(x) = (-i)^n (2\sqrt{\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n e^{-\xi^2/4} e^{ix\xi} d\xi. \quad (99)$$

Равенство (99) позволяет, используя алгоритм БПФ, эффективно вычислять многочлены Эрмита любого порядка. Причем скорость расчета не будет зависеть от номера порядка многочлена.

4.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ ЧЕРЕЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Преобразование Ханкеля n -го порядка в оптическом смысле связывает комплексную амплитуду света $f(r)$ радиально-симметричного поля в плоскости объекта с комплексной амплитудой света $F(\rho)$, также радиально-симметричной, в фокальной плоскости сферической линзы

$$F(\rho) = \int_0^{\infty} f(r) J_n(r\rho) r dr. \quad (100)$$

Экспоненциальная замена переменных

$$r = r_0 \exp(x), \quad \rho = \rho_0 \exp(y) \quad (101)$$

позволяет перейти от одностороннего интегрирования в выражении (100) к двустороннему интегрированию по переменным x и y :

$$\begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 < \rho < \infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ -\infty < y < \infty, \end{cases} \quad (102)$$

а также свести интеграл (100) к интегралу типа свертки.

Действительно, введя обозначения

$$\bar{f}(x) = r f(r), \quad \bar{F}(y) = \rho F(\rho), \quad j(x+y) = r\rho J_n(r\rho),$$

вместо (100) получим следующее выражение:

$$\bar{F}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) j(x+y) dx \quad (103)$$

Применим к обеим частям уравнения (103) преобразование Фурье и получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(y) e^{-i\xi y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) e^{ix\xi} j(x+y) e^{-i\xi(x+y)} dx dy. \quad (104)$$

Выражение (104) можно представить в более сжатой форме

$$\mathcal{F}[\bar{F}] = \mathcal{F}^{-1}[\bar{f}] \mathcal{F}[j], \quad (105)$$

где \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} — обозначение прямого и обратного преобразований Фурье. Из (105) следует равенство

$$\bar{F} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[j] \mathcal{F}^{-1}[\bar{f}]]. \quad (106)$$

И в окончательном виде получим выражение для вычисления преобразования Ханкеля

$$F(\rho) = \rho^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}(j) \mathcal{F}^{-1}(\bar{f})] \exp[i\xi \ln(\rho/\rho_0)/2] d\xi. \quad (107)$$

Из уравнения (107) следует, что для выполнения преобразования Ханкеля следует осуществить экспоненциальную замену переменных (101), затем выполнить прямое преобразование Фурье от функции Бесселя и обратное преобразование Фурье от исходной функции, полученные функции перемножить и вычислить от произведения третье преобразование Фурье.

Вычисление преобразования Ханкеля через БПФ более эффективно, чем с помощью прямого интегрирования методом Симпсона.

4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ ЧЕРЕЗ ТЕОРЕМУ ОТСЧЕТОВ ДИНИ

На основе теоремы Котельникова функция $F(\xi)$ с ограниченным спектром, что есть представленная в виде

$$F(\xi) = \int_a^a f(x) e^{ix\xi} dx, \quad (108)$$

может быть определена однозначным образом через счетный набор своих отсчетов в эквидистантных точках:

$$F(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\xi_n) \operatorname{sinc} \left[\frac{\xi - \Delta n}{\Delta} \right], \quad (109)$$

где $\xi_n = \Delta n$, $\Delta = a^{-1}$ — пространственная частота Найквиста.

Аналогичная теорема имеет место для радиально-симметричных функций. Это теорема Дини, согласно которой радиально-симметричная функция с ограниченным спектром, то есть представленная в виде

$$F(\rho) = \int_0^1 f(r) J_0(r\rho) r dr, \quad (110)$$

может быть выражена также рядом

$$F(\rho) = \frac{2J_1(\rho)}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} F(\rho_n) J_0(\rho_n)^{-1} \left[1 - (\rho_n / \rho)^2 \right], \quad (111)$$

где $\rho_0 = 0$, ρ_n — корни функции Бесселя первого порядка: $J_1(\rho_n) = 0$, $F(\rho_n)$ — отсчеты функции $F(\rho)$.

Проверим, что при $\rho = \rho_n$ формула (111) приводит к тождеству $F(\rho_n) = F(\rho_n)$. Действительно, так как вблизи корня ρ_n верна следующая аппроксимация:

$$J_1(\rho) \approx J_1(\rho_n) + \frac{d}{d\rho} [J_1(\rho)] \Big|_{\rho_n} (\rho - \rho_n),$$

и производная функции Бесселя в точке ρ_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\frac{d}{d\rho} [J_1(\rho)] \Big|_{\rho_n} = J_0(\rho_n) - \rho_n^{-1} J_1(\rho_n) = J_0(\rho_n),$$

то получим линейную зависимость бesselевой функции вблизи корня ρ_n

$$J_1(\rho) \approx J_0(\rho_n) (\rho - \rho_n). \quad (112)$$

Подставив (112) в (111), получим следующее выражение при $\rho \Rightarrow \rho_n$:

$$F(\rho) \approx \sum_{m=0}^{\infty} 2\rho^{-1} J_0(\rho_n) \times \\ \times (\rho - \rho_n) J_0^{-1}(\rho_n) F(\rho_n) \left[1 - (\rho_n / \rho)^2 \right], \quad (113)$$

В уравнении (113) слагаемые, для которых $\rho_m \neq \rho_n$, равны нулю, а слагаемое с номером m , равным n , имеет вид

$$2 J_0(\rho_n) \rho_n F(\rho_n) J_0^{-1}(\rho_n) (2\rho_n)^{-1} = F(\rho_n).$$

Далее покажем, как с помощью теоремы отсчетов Дини (111) можно вычислить преобразование Ханкеля нулевого порядка (110). Из (110) следует выражение для отсчетов функции $F(\rho)$:

$$F(\rho_n) J_0^{-1}(\rho_n) = 2 J_0^{-1}(\rho_n) \int_0^1 f(r) J_0(r \rho_n) r dr. \quad (114)$$

Представим функцию $f(r)$ в виде конечной суммы по четным степеням переменной r :

$$f(r) = \sum_{p=0}^N C_p r^{2p}. \quad (115)$$

Тогда отсчеты функции $F(\rho)$ согласно уравнениям (114) и (115) можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} F(\rho_n) J_0^{-1}(\rho_n) &= \sum_{p=0}^N C_p \left[2 J_0^{-1}(\rho_n) \int_0^1 r^{2p} J_0(r \rho_n) r dr \right] = \\ &= \sum_{p=0}^N C_p S_{p-1, n}. \end{aligned} \quad (116)$$

Здесь

$$S_{p-1, n} = 2 J_0^{-1}(\rho_n) \int_0^1 r^{2p} J_0(r \rho_n) r dr. \quad (117)$$

Функции $S_{p-1, n}$ можно вычислить через функции Бовина вида

$$A_{p-1}(z) = 2(p+1) \int_0^1 r^{2p} J_0(rz) r dr. \quad (118)$$

Для функций Бовина (118) справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$A_p(z) + \frac{z^2}{4p(p+1)} A_{p-1}(z) = A_p(z) + \frac{z^2}{4p} A_1(z). \quad (119)$$

где $A_x(z) = J_0(z)$, $A_1(z) = 2z^{-1}J_1(z)$.

Функции (117) и (118) связаны между собой очевидным соотношением

$$S_{p+1,n} = \frac{A_{p+1}(\rho_n)}{(p+1)A_x(\rho_n)}, \quad (120)$$

из которого следует рекуррентное выражение для вычисления функций $S_{p+1,n}$:

$$S_{p+1,n} = \frac{4p}{\rho_n^2} [1 - \rho S_{p,n}], \quad S_{1,n} = 0. \quad (121)$$

Итак, окончательно получим, что для вычисления преобразования Ханкеля нулевого порядка (110) следует использовать формулу

$$F(\rho) = 2\rho^{-1}J_1(\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^N C_p S_{p+1,n} \left[1 - (\rho_n/\rho)^2\right]^{-1}, \quad (122)$$

где функции $S_{p+1,n}$ определены соотношением (121), а коэффициенты C_p находятся из (115).

Рассмотрим два предельных случая для формулы (111).

1. УЗКАЯ КОЛЬЦЕВАЯ ЩЕЛЬ В ЭКРАНЕ. В этом случае функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = \delta(r-1). \quad (123)$$

Тогда в фокальной плоскости линзы получим следующее выражение для комплексной амплитуды:

$$F(\rho) = \int_0^1 f(r)J_0(r\rho)rdr = \int_0^1 \delta(r-1)J_0(r\rho)rdr = J_0(\rho). \quad (124)$$

С другой стороны, используя разложение Дини (111), получим интересную формулу для разложения функции Бесселя нулевого порядка по корням функции Бесселя первого порядка:

$$J_0(\rho) = 2\rho^{-1}J_1(\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - (\rho_n/\rho)^2\right]^{-1}. \quad (125)$$

2. КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ В ЭКРАНЕ. В этом предельном случае исходная функция имеет вид $f(r) = 1$, и в фокальной

плоскости линзы получим выражение, описывающее дифракционную картину Эйри:

$$F(\rho) = \int_0^1 J_0(r\rho) r dr = \rho^{-1} J_1(\rho). \quad (126)$$

С другой стороны, в формуле (111) остается отличным от нуля только первое слагаемое, так как при $n > 1$ имеют место равенства

$$F(\rho_n) = \rho_n^{-1} J_1(\rho_n) = 0,$$

а при $n = 0$ верно следующее соотношение:

$$F(0) = \frac{J_1(0)}{0} = 1/2.$$

Оставшееся в (111) первое слагаемое как раз равно выражению (126), описывающему дифракционную картину Эйри — дифракцию Фраунгофера плоской волны на круглой апертуре.

4.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ ЧЕРЕЗ МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГЕРРА

Радиально-симметричную комплексную амплитуду света в объектной плоскости представим в виде ряда по ортогональным функциям Лагерра

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Psi_n(r). \quad (127)$$

Здесь

$$\Psi_n(r) = \frac{\sqrt{2}}{n!} \exp\left[-\frac{r^2}{2}\right] L_n(r^2), \quad (128)$$

где $\Psi_n(r)$ — функция Лагерра, $L_n(x)$ — многочлен Лагерра.

Для его расчета удобно использовать рекуррентную формулу

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x), \quad (129)$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

Многочлены (129) удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} L_n(r^2) L_m(r^2) r dr = \frac{(n!)^2}{2} \delta_{nm}. \quad (130)$$

Функции Лагерра (128) являются собственными функциями преобразования Ханкеля нулевого порядка

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} L_n(r^2) J_0(r\rho) r dr = (-1)^n e^{-\rho^2/2} L_n(\rho^2). \quad (131)$$

Поэтому, используя соотношения (127) и (131), комплексную амплитуду $F(\rho)$ в фокальной плоскости линзы можно представить в виде суммы функции Лагерра

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \int_0^{\infty} f(r) J_0(r\rho) r dr = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^{\infty} \Psi_n(r) J_0(r\rho) r dr = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-1)^n \Psi_n(\rho). \end{aligned} \quad (132)$$

Коэффициенты в сумме (127), а также и в сумме (132), находятся из соотношения

$$C_n = \int_0^{\infty} f(r) \psi_n(r) r dr. \quad (133)$$

После замены переменных $r^2 = x$, $f(r) = f(x)$ вместо выражения (133) можно записать равенство

$$C_n = 1/2 \int_0^{\infty} f(x) \psi_n(x) dx. \quad (134)$$

Коэффициенты (134) можно быстро, но приближенно найти с помощью преобразования Фурье, которое реализуется на компьютере как алгоритм БПФ от функции

$$\tilde{f}(x) = f(x) \tau(x). \quad (135)$$

Здесь

$$\tau(x) = 1/2 \sum_{n=0}^N \Psi_n(x) e^{i x \alpha_n}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N. \quad (136)$$

При этом будет иметь место приближенное равенство

$$\int_0^{\infty} f(x) \tau(x) e^{-i x \xi} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^N 1/2 \int_0^x f(x) \psi_n(x) e^{i(\xi - \alpha_n)x} dx = \\
 &\approx \sum_0^N C_n \delta(\xi - \alpha_n). \quad (137)
 \end{aligned}$$

Из формулы (137) следует, что коэффициенты суммы (132) будут равны значениям отсчетов функции, являющейся результатом преобразования Фурье от функции (135), в точках с координатами α_n .

Равенство (137) будет выполняться тем точнее, чем больше будут значения пространственных несущих α_n , или чем меньше будет вклад в сумму (137) слагаемых вида

$$I_{mn} = \int_0^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) \exp[ix(\alpha_n - \alpha_m)] dx. \quad (138)$$

Интеграл (138) можно представить как отчет в точке $(\alpha_n - \alpha_m)$ свертки Фурье-образов от функций Лагерра

$$I_{mn} = \mathcal{F}[\psi_n] \oplus \mathcal{F}[\psi_m] \Big|_{a_n - a_m} \quad (139)$$

Из (139) имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\psi_n] &= (n!)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-x/2} L_n(x) e^{-ix^2} dx = \\
 &= [i\xi - 1/2]^n [i\xi + 1/2]^{-n-1} \quad (140)
 \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}[\psi_n]$ — Фурье-образ от функции Лагерра.

При получении уравнения (140) был использован справочный интеграл

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} e^{-px} J_0(b\sqrt{x}) L_n(cx) dx = \\
 &= (p-c)^n p^{-n-1} \exp\left[-\frac{b^2}{4p}\right] L_n\left\{\frac{b^2 c}{4pc - 4p^2}\right\}. \quad (141)
 \end{aligned}$$

Из (140) следует, что квадрат модуля функции $\mathcal{F}[\psi_n]$ при стремлении аргумента ξ к бесконечности убывает как ξ^{-2}

$$|\mathcal{F}[\psi_n]|^2 = \left[1/4 + \xi^2\right]^{-1}. \quad (142)$$

Поэтому при выборе разности между двумя последующими несущими $|\alpha_{n+1} - \alpha_n|$ большей 10 значение интеграла $I_{n+1,n}$ будет, согласно (139) и (142), около 0.01, и их вкладом в сумму (137) можно пренебречь.

Итак, шаги алгоритма выполнения преобразования Ханкеля через многочлены Лагерра следующие: выполняется квадратичная замена переменных; выполняется преобразование Фурье (137) от функции (135) и вычисляется сумма (132).

5. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ РЕЛЬЕФНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

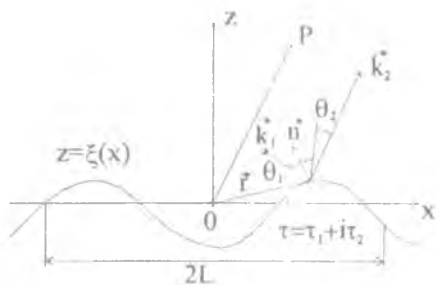


Рис. 12 Схема отражения от поверхности

Рассмотрим одномерный вариант дифракции Фраунгофера плоской линейно поляризованной волны при отражении от поверхности с рельефом. Обозначения, используемые в дальнейшем, показаны на рис. 12.

Пусть на поверхность, описываемую функцией $z = \xi(x)$, падает плоская волна под углом θ_1 и с волновым вектором \vec{k}_1 , а рассеянное поверхностью излучение наблюдается под углом θ_2 и определяется своим вектором \vec{k}_2 .

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k = 2\pi/\lambda.$$

Комплексный показатель поверхности τ состоит из двух слагаемых

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2, \quad (143)$$

где $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon)$ — коэффициент поглощения поверхности, зависящий от диэлектрической проницаемости ε , и $\tau_2 = \tau_2(\sigma)$ — коэффициент отражения, зависящий от проводимости материала σ .

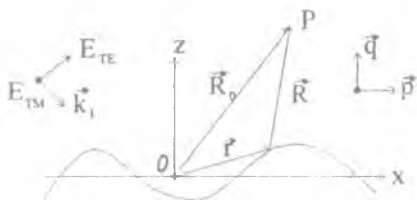


Рис. 13. Векторы наблюдения при отражении

Приближение Фраунгофера (дальняя зона) будет выполняться при условии, что точка наблюдения P (рис.12) находится далеко от поверхности, т.е. имеет место равенство (рис.13)

$$k R = k R_0 - k_2 r. \quad (144)$$

Угол между вектором падающей волны k_1 и единичным вектором нормали к поверхности \bar{n} представлен как

$$\theta = \theta_1 - \beta = \theta_1 - \arctg[\xi'(x)], \quad (145)$$

где $\xi'(x)$ — производная от функции рельефа поверхности.

Согласно скалярной теории дифракции Кирхгофа комплексная амплитуда $E(P)$ рассеянного излучения в точке P связана с комплексной амплитудой E_s вблизи поверхности выражением

$$E(P) = (4\pi)^{-1} \iint \left[E_s \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial E_s}{\partial n} \right] ds. \quad (146)$$

Здесь

$$\psi = \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ikR_0}}{R_0} e^{-ik_2 r}, \quad (147)$$

где ψ — сферическая волна.

Падающая на поверхность волна описывается выражением

$E_0 = A e^{ik_1 r}$, а граничное условие Бекмана для поля вблизи поверхности имеет вид

$$E_s = E_0 + \Omega E_0 = (1 + \Omega) E_0, \quad (148)$$

где $\Omega = \Omega(\tau)$ — френелевский коэффициент отражения, который связан с комплексным коэффициентом поверхности τ .

Из соотношений (147) и (148) можно получить выражения для производных по нормали, входящих в интеграл (146)

$$\frac{\partial E_s}{\partial n} = i(1 - \Omega)(\bar{k}_1, \bar{n}) E_0, \quad (149)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = (\bar{\nabla} \psi, \bar{n}) = -i(\bar{k}_2, \bar{n}) \psi, \quad (150)$$

где (\bar{x}, \bar{y}) — скалярное произведение двух векторов, $\bar{\nabla}$ — вектор градиента.

Из соотношений (149) и (150) получим вид подынтегрального выражения в уравнении (146)

$$E_s \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial E_s}{\partial n} = -\frac{iA}{R_0} e^{ikR_0} e^{ir(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)} \left[\bar{n}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) - \Omega \bar{n}(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \right] \quad (151)$$

Введем обозначения (рис. 13):

$$\bar{k}_1 - \bar{k}_2 = \bar{v} = v_x \bar{p} + v_z \bar{q} = k(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \bar{p} - k(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \bar{q},$$

$$\bar{k}_1 + \bar{k}_2 = \bar{u} = u_x \bar{p} + u_z \bar{q} = k(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \bar{p} + k(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \bar{q},$$

$$\bar{k}_1 = k \sin \theta_1 \bar{p} - k \cos \theta_1 \bar{q},$$

$$\bar{k}_2 = k \sin \theta_2 \bar{p} + k \cos \theta_2 \bar{q}.$$

Тогда вместо уравнения (151) будем иметь выражение

$$E_s \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial E_s}{\partial n} = \frac{iA e^{ikR_0}}{R_0} e^{irv} k \cos \beta [\xi(x)a - b]. \quad (152)$$

Из (152) находим

$$\begin{cases} a = \sin \theta_1 (1 - \Omega) + \sin \theta_2 (1 + \Omega), \\ b = \cos \theta_2 (1 + \Omega) - \cos \theta_1 (1 - \Omega), \\ \bar{v} \bar{r} = v_x x + v_z \xi(x). \end{cases} \quad (153)$$

Итак, окончательно получим выражение для комплексной амплитуды отраженного от поверхности излучения, распространяющегося под углом θ_2 :

$$E(P) = \frac{ikAe^{ikR_0}}{4\pi R_0} \int_L^L [a(x)\xi(x) - b(x)] e^{i(x-x_0)} e^{i(x-x_0)} dx, \quad (154)$$

где $[-L, L]$ — отрезок, ограничивающий участок освещенной поверхности.

Выражение для френелевского коэффициента Ω для случая ТЕ-волны, когда электрический вектор светового поля перпендикулярен плоскости (x, z) , имеет вид

$$\Omega_{TE} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\tau_1 + i \tau_2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\tau_1 + i \tau_2 - \sin^2 \theta}} \quad (155)$$

где $\theta = \theta_1 - \text{arc tg} [\xi'(x)]$.

Коэффициенты Френеля (155) можно представить в форме, удобной для разделения на реальную и мнимую части:

$$\Omega_{TE} = \Omega_1 + i \Omega_2 = \frac{\left[\cos \theta - \sqrt{w} \cos(v/2) \right] - i \left[\sqrt{w} \sin(v/2) \right]}{\left[\cos \theta + \sqrt{w} \cos(v/2) \right] + i \left[\sqrt{w} \sin(v/2) \right]} \quad (156)$$

где $v = \text{arctg} \left[\frac{\tau_2}{\tau_1 - \sin^2 \theta} \right]$, $w^2 = \tau_2^2 + (\tau_1 - \sin^2 \theta)^2$.

Удобнее рассматривать угловой спектр $\rho(\theta_2)$ рассеянного излучения. Для этого выражение для комплексной амплитуды (154) следует поделить на амплитуду света, зеркально отраженного от безрельефной поверхности. Для безрельефной поверхности параметры принимают вид

$$\theta_1 = \theta_2, \quad v_x = 0, \quad \xi'(x) = 0, \quad b = 2 \tau \cos \theta_1.$$

Тогда зеркальная амплитуда будет равна выражению

$$E^s = \frac{ik A e^{ik R_0}}{4 \pi R_0} 4 L \tau \cos \theta_1, \quad (157)$$

а выражение для углового спектра рассеяния будет иметь вид

$$\rho(\theta_2) = \frac{E(P)}{E^s} = \frac{1}{4 L \cos \theta_1} \int_L \left[a(x) \xi'(x) - b(x) \right] \cdot e^{ix v_x(\theta_2)} e^{i \xi(x) v_z(\theta_2)} dx. \quad (158)$$

В частном случае идеально отражающей поверхности, т. е. при бесконечно большой проводимости материала, получим

$$\sigma \Rightarrow \infty, \tau_1 + i\tau_2 \Rightarrow i\tau_2 \Rightarrow i\infty, S_{TE} \Rightarrow -1.$$

В этом случае френелевские коэффициенты S_{TE} не зависят от координат поверхности, и вместо уравнения (158) получим

$$\rho(\theta_2) = \frac{1}{2L} \left[\frac{1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\cos \theta_2 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)} \right] \times \int_{-L}^L \exp[i v_x \xi(x) + i v_x x] dx \quad (159)$$

Далее, введя функцию зрачка поверхности

$$\Sigma(x) = \text{rect}(x/L) = \begin{cases} 1, & |x| \leq L, \\ 0, & |x| > L, \end{cases} \quad (160)$$

преобразуем выражение (158) к виду, удобному для вычисления с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Для этого перепишем (158) в виде

$$\begin{aligned} \rho(\theta_2) = & \frac{1}{4L \cos \theta_1} \int_{-L}^L \Sigma(x) f_1(x) e^{iG(x, \theta_2)} dx + \\ & + \frac{\sin \theta_2}{4L \cos \theta_1} \int_{-L}^L \Sigma(x) f_2(x) e^{iG(x, \theta_2)} dx - \\ & - \frac{\cos \theta_2}{4L \cos \theta_1} \int_{-L}^L \Sigma(x) f_3(x) e^{iG(x, \theta_2)} dx \end{aligned} \quad (161)$$

$$\text{где } f_1(x) = [1 - \Omega(-x)] \left[\frac{\xi}{v_x} (-x) \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \right],$$

$$f_2(x) = [1 + \Omega(-x)] \frac{\xi}{v_x} (-x), \quad f_3(x) = 1 + \Omega(-x).$$

Вводя обозначения для Фурье-образов от соответствующих функций

$$F_1 = \mathcal{F}[f_1], \quad F_2 = \mathcal{F}[f_2], \quad F_3 = \mathcal{F}[f_3],$$

$$\bar{\Sigma} = \mathcal{F}[\Sigma] = 2 \sin c(L v_x), \quad I = (v_x) = \mathcal{F}[e^{i v_x \xi(x)}] \quad (162)$$

и пользуясь обозначением операции свертки ($v_x \Rightarrow y$)

$$(y) \oplus H(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y - y') H(y') dy',$$

получим вместо выражения (161) более компактное уравнение

$$\rho(\theta_2) = \frac{1}{4l \cos \theta_1} \times \\ \times [\bar{\Sigma} \oplus F_1 \oplus I + \sin \theta_2 \bar{\Sigma} \oplus F_2 \oplus I - \cos \theta_2 \bar{\Sigma} \oplus F_3 \oplus I]. \quad (163)$$

В уравнении (163) первые свертки в каждом слагаемом можно вычислить с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Обозначим эти первые свертки следующим образом:

$$K_1(y) = \bar{\Sigma} \oplus F_1, \quad K_2(y) = \bar{\Sigma} \oplus F_2, \quad K_3(y) = \bar{\Sigma} \oplus F_3. \quad (164)$$

Интеграл $I(v_x)$ в общем случае нельзя вычислить с помощью БПФ, т. к. функции v_z и v_x зависят от угла рассеяния θ_2 и не могут рассматриваться независимо. Однако в случае периодического профиля поверхности

$$\xi(-x) = d \cos(gx), \quad (165)$$

где d — амплитуда рельефа поверхности, $2\pi g^{-1}$ — период рельефа, можно воспользоваться разложением в ряд по функциям Бесселя

$$\exp[i v_z d \cos(gx)] = \sum_{-\infty}^{\infty} i^m J_m(v_z d) \exp[imgx].$$

В этом случае интеграл I может быть легко вычислен:

$$I(v_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i v_z(\theta_2) \xi(-x) - i v_x(\theta_2) x] dx = \\ = \sum_{-\infty}^{\infty} i^m J_m(v_z d) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[imgx - i v_x x] dx = \\ = \sum_{-\infty}^{\infty} i^m J_m(v_z d) \delta(v_x - mg). \quad (166)$$

Окончательно получим следующую формулу для углового спектра в случае отражения света от поверхности с синусоидальным рельефом:

$$\rho(\theta_2) = \frac{1}{4 L \cos \theta_1} \sum_{p=1}^3 A_p \times$$

$$\times \sum_m i^m J_m [v_z(\theta_2) d] K_p [v_x(\theta_2) - m g], \quad (167)$$

$$\text{где } A_p = \begin{cases} 1, & p=1, \\ \sin \theta_2, & p=2, \\ -\cos \theta_2, & p=3. \end{cases}$$

Дифракционные порядки отраженного от периодической поверхности излучения будут распространяться под углами θ_{2m} , определяемыми уравнениями

$$v_x = m g, \quad (168)$$

$$k(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2m}) = m g,$$

при $m = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$; $\theta_{20} = \theta_1$.

На рис. 14 показаны схематично дифракционные порядки, возникающие при отражении света от поверхности с синусоидальным рельефом.

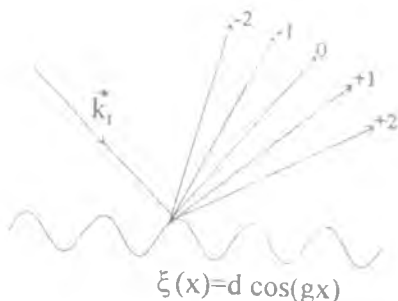


Рис. 14. Дифракционные порядки

Заметим, что интеграл $I(v_x)$ можно вычислить с помощью БПФ для поверхности с произвольным рельефом, если использовать разложение в ряд по углу рассеяния θ_2 :

$$\exp[i v_z(\theta_2) \xi(-x)] = \exp[-i k \cos \theta_1 \xi(-x) - i k \cos \theta_2 \xi(-x)] =$$

$$= \exp[-i k \xi(-x) \cos \theta_1] \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m [k \xi(-x)] e^{i m \theta_2}. \quad (169)$$

Тогда вместо выражения (166) получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 I(v_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i v_x (\theta_2) \xi(-x) - i v_x x] d x = \\
 &= \sum_{-m}^{+m} i^m e^{i m \theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} J_m [k \xi(-x)] \exp [-i k \xi(-x) \cos \theta_1 - i v_x x] d x = \\
 &= \sum_{-m}^{+m} i^m e^{i m \theta_2} I_m(v_x). \quad (170)
 \end{aligned}$$

Итак, формулы (163) с учетом (170) более эффективны для численного анализа дифракции света на рельефной поверхности, чем прямое вычисление интеграла Кирхгофа (146).

6. ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВОГО ПУЧКА НА ЛИНЗЕ С КОНЕЧНОЙ АПЕРТУРОЙ

Получим ниже простые и удобные для вычисления формулы, описывающие скалярную дифракцию гауссового пучка на сферической линзе с конечной апертурой. Гауссовы пучки — это световые пучки на выходе лазерных источников. Пусть линза находится в перетяжке гауссового пучка (рис.15), то есть в плоскости, в которой пучок имеет плоский волновой фронт. В этом случае комплексная амплитуда поля сразу за тонкой сферической линзой будет иметь вид

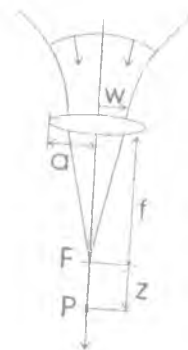


Рис. 15
Оптическая
схема

$$\bar{U}_0(\rho) = A f^{-1} \exp \left[-(\rho/w)^2 - i k f \right], \quad (171)$$

где f — фокусное расстояние линзы, w — эффективный радиус перетяжки гауссового пучка.

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля поле на расстоянии S от исходной плоскости вычисляется с помощью интеграла Кирхгофа

$$U(P) = -\frac{ik}{2\pi} \iint_{\Sigma} U_0(\rho) \frac{e^{ikS}}{S} dx dy, \quad (172)$$

где P — точка наблюдения на оптической оси, Σ — форма апертуры линзы, S — расстояние. Оно вычисляется по формуле (рис.16)

$$S^2 = \rho^2 + \left(z + \sqrt{f^2 - \rho^2}\right)^2. \quad (173)$$

На рис.16 изображен участок сферической поверхности радиуса f .

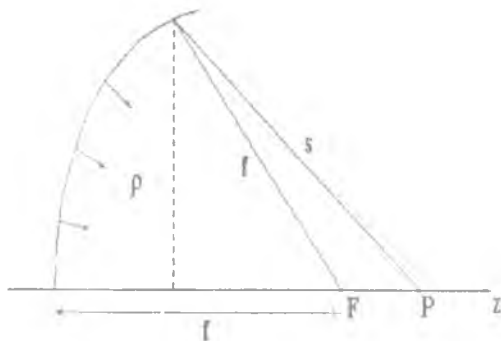


Рис 16 Сферический волновой фронт

В приближении Френеля расстояние S , определенное выражением (173), вычисляется по следующей формуле

$$S = \sqrt{(z+f)^2 - z\rho^2/f} \approx (z+f) - \frac{z\rho^2}{2f(f+z)} \quad (174)$$

и тогда вместо выражения (172) можно записать

$$U(\rho) = -\frac{ikAe^{ikz}}{f(f+z)} \int_0^a e^{-(\rho/w)^2} \exp\left[-i\frac{zk\rho^2}{2f(f+z)}\right] \rho d\rho, \quad (175)$$

где было использовано, что $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ и $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$,

a — радиус линзы.

В выражении (175) интеграл по радиальной переменной ρ легко вычисляется. Введем удобные обозначения:

$$\alpha = \left[\frac{a}{w} \right]^2, \quad (176)$$

α — безразмерный параметр, характеризующий степень усечения гауссового пучка апертурой линзы;

$$N = \frac{a^2}{\lambda f}, \quad (177)$$

N — френелевское число;

$$u = \pi N \frac{z}{f+z}, \quad (178)$$

u — безразмерный параметр.

В этих обозначениях выражение (175) после взятия интеграла примет следующий вид:

$$U(\rho) = \frac{i \pi N A}{f} \left[1 - \frac{u}{\pi N} \right] \exp \left[i k f \frac{u}{\pi N - u} \right] \left\{ \frac{e^{-\alpha - i u} - 1}{\alpha + i u} \right\}. \quad (179)$$

Из уравнения (179) следует выражение для интенсивности света в точке P на оптической оси

$$I(\rho) = |U(\rho)|^2 = I(F) \left[1 - \frac{u}{\pi N} \right]^2 \frac{g(\alpha, u)}{g(\alpha, 0)}. \quad (180)$$

Здесь

$$g(\alpha, u) = \frac{2e^{-\alpha}}{\alpha^2 + u^2} \left[\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(u) \right], \quad (181)$$

$$I(F) = I(z=0, u=0) = \left[\frac{\pi N A}{f} \right]^2 \left[\frac{e^{-\alpha} - 1}{\alpha} \right]^2, \quad (182)$$

где $I(F)$ — интенсивность в точке геометрического фокуса линзы.

Точка реального фокуса на оптической оси может быть найдена, если приравнять производную от функции $I(\rho)$ по расстоянию z к нулю. Точка фокуса — это точка максимальной интенсивности на оси

$$\frac{dI(\rho)}{dz} = \frac{dI(u)}{du} \frac{du}{dz} = 0. \quad (183)$$

Из уравнения (178) следует, что имеет место равенство

$$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{\pi N z}{f+z} \right] = \frac{\pi N f}{(f+z)^2} \neq 0,$$

и поэтому точку реального фокуса следует искать из уравнения

$$\frac{dI(u)}{du} = 0. \quad (184)$$

После подстановки соотношения (180) в уравнение (184) получим

$$\frac{\alpha^2 + \pi N u}{\pi N - u} g_0(\alpha, u) = \sin u, \quad (185)$$

где

$$g_0(\alpha, u) = 2 \frac{c h(\alpha) - \cos(u)}{\alpha^2 + u^2}. \quad (186)$$

Введя удобное обозначение $u_c = -\alpha^2 (\pi N)^{-1}$, получим окончательный вид трансцендентного уравнения для поиска точки реального фокусного расстояния

$$\frac{u - u_c}{1 - \frac{u}{\pi N}} g_0(\alpha, u) = \sin(u) \quad (187)$$

Пусть u_m — главное решение уравнения (187), при котором имеет место глобальный максимум выражения для интенсивности $I(\rho)$, тогда абсолютное смещение фокуса из геометрического положения находится с помощью выражения (178):

$$z_m = \frac{f u_m}{\pi N - u_m} = \Delta f, \quad (188)$$

а относительное смещение фокуса определяется формулой

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{u_m}{\pi N - u_m}. \quad (189)$$

В общем случае трансцендентное уравнение (187) не имеет аналитического решения. Поэтому рассмотрим его приближенные решения.

1. Слабое усечение гауссового пучка. В этом случае имеет место условие $a \gg w$ или $\alpha = (a/w)^2 \gg 1$, которое означает, что радиус круглой апертуры линзы намного больше эффективного радиуса перетяжки гауссового пучка. При этом имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g(\alpha, u) = \infty,$$

с учетом которого из уравнения (187) следует, что

$$u_m = u_c = -\frac{\alpha^2}{\pi N}.$$

Подставляя последнее соотношение в формулу (189), получим для относительного смещения фокуса следующее выражение:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{1 + \pi^2 G^2}, \quad (190)$$

где $G = \frac{N}{\alpha} = \frac{w^2}{\lambda f}$ — гауссовое френелевское число.

На рис.17 показан вид зависимости относительного смещения фокуса от величины гауссового френелевского числа. Из формулы (190) и рис.17 видно, что смещение всегда отрицательно, то есть реальный фокус всегда ближе к линзе, чем положение геометрического фокуса.

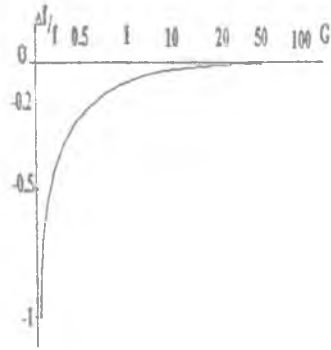


Рис. 17. График смещения фокуса

2. Сильное усечение гауссового пучка. В этом случае имеют место неравенства: $a \ll w$, $\alpha \ll 1$, а величина функции $g(\alpha, u)$ при этом равна: $g(\alpha = 0, u) = \sin^2(u/2)$.

Тогда из соотношения (187) следует упрощенный вид уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}(u/2)}{u/2} = 1 - \frac{u}{\pi N}, \quad (191)$$

где $u \in [-\pi, 0]$.

Уравнение (191) решается в двух предельных случаях

1-й случай. При $N \gg 1$ слева в уравнении (191) возникает неопределенность «ноль на ноль», которая раскрывается, если разложить тангенс в ряд до третьего слагаемого

$$\operatorname{tg}(u/2) = u/2 + \frac{1}{3}(u/2)^3.$$

При этом вместо уравнения (191) получим выражение

$$\frac{u/2 + u^3/24}{u/2} = 1 + u^2/12 = 1 - \frac{u}{\pi N},$$

из которого следует, что

$$u_m = -\frac{12}{\pi N}. \quad (192)$$

Подставив (192) в (189), получим выражение для величины относительного смещения точки геометрического фокуса

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{1 + \pi^2 N^2 / 12}. \quad (193)$$

Формула (193) верна с точностью до 1% при $N > 12$.

2-й случай. При $N \ll 1$ уравнение (191) выполняется при $u_m = -\pi$, и поэтому из уравнения (189) следует выражение для относительного смещения фокуса

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{1 + N}. \quad (194)$$

Формула (194) верна с ошибкой 1% при $N < 0,1$.

Итак, из полученных выражений (190), (193) и (194) следует, что во всех случаях реальный фокус находится ближе к линзе, чем точка идеального геометрического фокуса. Прогнозирование смещения фокальной точки гауссового пучка является актуальным для задач лазерной диагностики поверхностей, а также при считывании и записи информации с оптических дисков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии рассмотрены несколько характерных задач прикладной оптики, для которых получены простые аналитические соотношения, позволяющие более эффективно и быстрее проводить численное моделирование. При этом исходные дифракционные интегралы Кирхгофа, Френеля, Ханкеля, вычисление которых и есть основа модельных экспериментов в оптике, сводились либо к явным аналитическим выражениям, когда это представлялось возможным, либо к сумме из таких явных выражений. Кроме того, показано, как с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье можно вычислять некоторые интегральные выражения и функции.

Данное пособие может помочь студентам специальностей «Обработка изображений» и «Компьютерная оптика» более эффективно организовать численное моделирование задач прикладной оптики, которое от них требуется при курсовом и дипломном проектировании. Кроме того, сравнение вычислительных затрат и точности вычислений при прямом вычислении дифракционных интегралов и при их аналитической аппроксимации может стать интересной темой для будущих курсовых и дипломных работ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Saga N.* New line integral expressions for Fraunhofer diffraction //Optics Communications. 1987. V.64. N.1. P.4-8.
- Steane A. M., Rutt H. N.* Diffraction calculations in the near field and the validity of the Fresnel approximation //J. Opt. Soc. Am. A. 1989. V.6. N.12. P.1809-1814.
- Василенко Г. И., Тараторин А. М.* Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986. 250 с.
- Бельский А. М.* Самовоспроизводящиеся пучки и их связь с недифрагирующими пучками. //Оптика и спектроскопия. 1992. Т.73. Вып.5. С.947-951.
- Goodman J. W., Silvestri A. M.* Some effects of Fourier-domain phase quantization //IBM J. Res. Develop. 1970. V.14. P.478-484.
- Yajun Li.* Accurate approximation of the focal shift in the transformation of truncated Gaussian beams //Optical Engineering. 1993. V.32. N.4. P.774-780.
- Siegman A. E.* Quasi-fast Hankel transform //Optics Letters. 1977. V.1. N.1. P.13-15.
- Szapiel S.* Rapid evaluation of the zero-order Hankel transform for optical diffraction problems //Opt. Applicata. 1987. V.17. N.4. P.355-362.
- Lehmann P., Schone A., Peters J.* FFT method to estimate electromagnetic scattering patterns from sinusoidal surface of finite electrical conductivity //Optik. 1992. V.90. N.2. P.90-96.
- Beckmann P, Spezzichino A.* The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces Pergamon Press. Oxford, 1963.
- Смирнов А. П.* Новый метод оценки погрешности приближения Френеля дифракционного интеграла в ближней зоне дифракции //Оптика и спектроскопия. 1992. Т.73. Вып.5. С.989-998.
- Минц М. Я., Прилепский Е. Д.* Применение дискретизации изображения к решению задач восстановления объекта //Оптика и спектроскопия. 1993. Т.75. Вып.3. С.696-701.
- Kraus H. G.* Finite element Fourier and Abbe transform methods for generalization of aperture function and geometry in Fraunhofer diffraction theory //Optical Engineering, 1991. V. 30. N.8. P. 1191-1207.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Дифракция света на плоских апертурах	4
1.1. Дифракция Фраунгофера	4
1.2. Дифракция Френеля	12
2. Дифракция светового поля с квантованной фазой	16
2.1. Одномерный случай	16
2.2. Радиальный случай	22
3. Метод конечных элементов для расчета картин дифракции	25
3.1. Прямоугольный растр	25
3.2. Кольцевой растр	27
4. Интегральное преобразование Ханкеля	32
4.1. Вычисление функций Бесселя и Эрмита	32
4.2. Вычисление преобразования Ханкеля через преобразование Фурье	34
4.3. Вычисление преобразования Ханкеля через теорему отсчетов Дини	35
4.4. Вычисление преобразования Ханкеля через многочлены Лагерра	39
5. Дифракция света при отражении от рельефной поверхности	42
6. Дифракция гауссова пучка на линзе с конечной апертурой	49
Заключение	55
Библиографический список	56

Котляр Виктор Викторович

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ
ДЛЯ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

Редактор Т. И. Кузнецова
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Т. И. Щелокова
Компьютерная верстка О. А. Карасева

Лицензия ЛР № 020301 от 28. 11. 91.
Подписано в печать 27.03.95 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,49. Усл. кр.-отг. 3,61. Уч.-изд. л. 4,0.
Тираж 100 экз. Заказ *114*. Арт. С — 12/95.

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского аэрокосмического университета.
443001, г. Самара, ул. Ульяновская, 18.