М.Г. СОРОКИНА

ПРЯМАЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НА ДЕПОЗИТНО-КРЕДИТНОМ РЫНКЕ

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассмотрим прямую задачу принятия оптимальных решений при согласованных во времени платежных потоках, описанную в работах /1,2/.

$$ПМ = \tau(\alpha X_1 - \beta X_2) \rightarrow \max \qquad (1)$$

$$X_1 - X_2 = 0$$
$$X_1 \leq A$$
$$X_2 \leq П$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0.$$

В этой задаче требуется определить такие значения объемов предложения кредитов X_1 и объемов спроса на ресурсы X_2 со стороны банка, при которых достигается максимум процентной маржи ПМ с учетом ограничений на объем спроса кредитов А со стороны заемщиков, объем предложения ресурсов П со стороны вкладчиков при условии, что привлеченные ресурсы в полном объеме вовлекаются в кредиты ($X_1 = X_2$).

Задаче (1) соответствует следующая двойственная ей задача:

$$AY_2 + ПY_3 \rightarrow \min \qquad (2)$$

$$Y_1 + Y_2 \geq \tau\alpha$$
$$-Y_1 + Y_3 \geq -\tau\beta$$
$$Y_2 \geq 0$$
$$Y_3 \geq 0,$$

где Y_1, Y_2, Y_3 - двойственные переменные.

Из (1) и (2) непосредственно следует, что при заданной модели одной из задач можно построить модель второй задачи. Правило построения модели (2) при заданной модели (1) заключается в следующем/3,4/:

1. Требование максимизации целевой функции прямой задачи заменяется требованием минимизации целевой функции двойственной задачи;
2. Коэффициенты целевой функции прямой задачи являются правыми частями ограничений двойственной задачи, а правые части ограничений задачи - коэффициентами целевой функции двойственной задачи;
3. Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, при этом ограничению, записанному в виде неравенства, соответствует двойственная переменная, связанная условием неотрицательности;
4. Матрица условий двойственной задачи получается из матрицы условий прямой задачи с помощью транспонирования.

Важные в практическом отношении зависимости между результатами решений прямой и двойственной задачи следуют из теорем двойственности. Основные результаты этих теорем следующие.

Теорема 1. Если одна из задач имеет хотя бы одно оптимальное решение

$X^0 = (X_1^0, X_2^0)$ то и вторая задача также имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение $Y^0 = (Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0)$, причем значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают, т.е.

$$\tau(\alpha X_1^0 - \beta X_2^0) = A\,Y_2^0 + \Pi\,Y_3^0. \qquad (3)$$

Эта теорема двойственности дает возможность непосредственно проверить, является ли то или иное решение оптимальным. Если известны допустимые решения обеих задач, то по абсолютной величине разности целевых функций для этих решений можно судить о степени приближения к оптимальному решению.

Теорма 2. Для того, чтобы два допустимых решения $X=(X_1,X_2)$ и $Y=(Y_1, Y_2, Y_3)$ пары двойственных задач (1) и (2) были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли условиям дополняющей нежесткости.

$$X_1(Y_1 + Y_2 - \tau\alpha)=0,$$
$$X_1(-Y_1 + Y_3 + \tau\beta)=0;$$
$$Y_1(X_1 - X_2)= 0,$$
$$Y_2(X_1 - A)= 0,$$
$$Y_3(X_2 - \Pi)= 0.$$

Из этих условий следует, что допустимые решения X и Y пары двойственных задач оптимальны тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующим условиям:

а) если $X_1>0$, то $(Y_1+ Y_2 - \tau\alpha)=0$; $X_2 >0$, то $(- Y_1+ Y_3 + \tau\beta)=0$;

б) если $Y_1>0$, то $X_1-X_2= 0$; $Y_2 >0$, то $X_1=A$; $Y_3 >0$, то $X_2=\Pi$;

c) если $Y_1+ Y_2 >\tau\alpha$, то $X_1=0$; $Y_3 - Y_1 >\tau\beta$, то $X_2=0$;

d) если $X_1-X_2 < 0$, то $Y_1=0$; $X_1 < A$, то $Y_2=0$; $X_2 <\Pi$, то $Y_3=0$.

Дадим финансово-экономическую интерпретацию двойственной задачи (2) при известной формулировке прямой задачи (1).

Из уравнения (3), характеризующего зависимость между оптимальными решениями обеих задач, следует, что величина Y_2 должна интерпретироваться как некоторая цена единицы вовлекаемого в кредит на время τ денежного ресурса, а Y_3 - цена единицы привлекаемого банком на время τ денежного ресурса. Поэтому величина

$AY_2 +\Pi Y_3$ является оценкой привлеченных и вовлеченных в кредиты денежных ресурсов.

Рассмотрим ограничения задачи (2). Исключая двойственную переменную Y_1 из системы ограничений, получим следующее неравенство:

$Y_2 + Y_3 \geq \tau(\alpha-\beta)$, $Y_2 \geq 0$, $Y_3 \geq 0$.

Таким образом, двойственную задачу (2) можно представить в виде:

$$AY_2 + \Pi Y_3 \rightarrow \min \qquad (4)$$
$$Y_2 + Y_3\ \tau(\alpha-\beta)$$
$$Y_2 \geq 0$$
$$Y_3 \geq 0.$$

Задачу (4) можно интерпретировать следующим образом:

определить такие значения цен на привлекаемые Y_3 и вовлекаемые в кредиты Y_2 ресурсы, которые минимизируют суммарную стоимость денежных ресурсов. При этом цены на ресурсы должны удовлетворять условию неотрицательности.

Если конъюнктура на депозитно-кредитном рынке для банка сложилась так, что А<П, то оптимальное решение задачи (4) равно:

$$Y_2^0 = \tau(\alpha-\beta), \quad Y_3^0 = 0.$$

Минимальная стоимость денежных ресурсов при этом оптимальном решении составит величину:

$$A\, Y_2^0 = \tau(\alpha-\beta)A. \tag{5}$$

Оптимальное решение задачи (1) при условии, что А<П равно:

$$X_1^0 = X_2^0 = A.$$

При этом оптимальном решении процентная маржа составит следующую величину:

$$ПМ = \tau(\alpha-\beta)\, A. \tag{6}$$

Сравнивая решения (5) и (6) , заключаем, что суммарная оценка покупаемых и вовлекаемых в кредиты ресурсов не должна быть меньше получаемой за время τ прибыли на единицу ресурса, ибо в противном случае часть ресурсов была бы привлечена бесплатно, что является нереальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришанов Г.М., Лотин В.В., Чумак В.Г. Модели и алгоритмы выбора коммерческим банком оптимальных оперативных стратегий на депозитно-кредитном рынке. Учебное пособие. Самара:СГАУ, 1995.
2. Гришанов Г.М., Лотин В.В., Сорокина М.Г. Методические основы моделирования механизмов принятия решений на депозитно-кредитном рынке при согласованных во времени платежных потоках. - Рыночная экономика: состояние, проблемы, перспективы, методич. разработки. Сб. научн.тр. МИР,Самара: АО ПО “Самвян”, 1995.
3. Гдалевич С.С. Вопросы прикладного использования двойственных оценок. М.: Наук, 1975.
4. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.