УДК 681.3.07

МЕТОДЫ И МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЯДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ARMA МОДЕЛЕЙ

Сергеев А.В.

Научный руководитель: д.т.н., д.э.н., профессор Семенычев В.К.

Самарский государственный аэрокосмический университет

им. акад. С.П. Королева

Статистические модели - класс моделей, которые предлагает математика исследователю. С помощью этих моделей описываются явления, в которых присутствуют статистические факторы, не позволяющис объяснить явление в чисто детерминистских терминах. Типичные примеры такого рода моделей представляют временные ряды в экономике и финансовой сфере, имеющие детерминированную компоненту и случайную составляющую.

Временной ряд Y_k – совокупность дискретных, эквидистантно упорядоченных во времени наблюдений.

$$Y_k = Y(k\Delta),$$

где k – номер отсчета,

Δ - период времени между наблюдениями,

$Y(k\Delta)$ - значение (уровень) ряда в k-ый момент.

Финансовый ряд это временной ряд стоимостного показателя; отражает тенденцию изменения денежного показателя во времени. Закономерность изменения финансового ряда можно определить моделированием.

Моделью будем считать образ процесса, явления в форме математических соотношений, отражающий существенные свойства моделируемой системы и замещающий его в ходе исследования и управления.

При моделировании временного ряда на первом этапе производится ***структурная идентификация*** модели (выбор используемой модели). Зачастую выбор модели осуществляется визуально, исходя из опыта исследователя и представлений о характере динамических процессов и явлений, положений экономической теории.

Опрсделим модель как регрессию m факторных переменных X_{ik} на показатель Y_k:

$$Y_k = D_k + \xi_k, \tag{1}$$

$$D_k = D(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}, A_0, A_1, \dots, A_d),$$

где ξ_k - случайный ряд чисел, называемый стохастической компонентой, $D(x_{1k}, x_2 k, \dots, x_{mk}, A_0, A_1, \dots, A_d)$ - детерминированная, в общем случае нелинейная, функция, зависящая от времени (номера наблюдения) и от вектора параметров размерности d, $A_i \in R^d$.

Декомпозиция (разложение) временного ряда на компоненты (составляющие) позволяет описать почти любой социально - экономический процесс или явление, независимо от их характера. В структуре одномерного временного ряда обычно выделяют четыре компоненты: тренд, циклические (или конъюнктурные) колебания относительно тренда, сезонные колебания, стохастическую компоненту.

Рассмотрим два вида детерминированной составляющей модели: экспоненциальную и линейную, как наиболее частых, встречающихся в экономике трендов, взятых вместе с колебательной компонентой.

$$D_k = A_0 + A_1(k\Delta) + A_2 Sin(\omega k\Delta + \psi) \tag{2}$$

$$D_k = A_0 + A_1 e^{-\alpha(k\Delta)} + A_2 Sin(\omega k\Delta + \psi) \tag{3}$$

Вторым этапом моделирования является ***параметрическая идентификация*** модели. Для использования МНК применяется перепараметризация модели Z-преобразованием. В результате конструируются ARMA (autoregression moving average models) или авторегрессионные модели.

Таблица 1

Параметрическая идентификация линейного и экспоненциального трендов с колебательными компонентами

$D_k = A_0 + A_1(k\Delta) + A_2 Sin(\omega k\Lambda + \psi)$	$D_k = A_0 + A_1 e^{-\omega k\Delta} + A_2 Sin(\omega k\Lambda + \psi)$
$Z[D_k] = \frac{A_1 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{A_0}{1-z^{-1}} + \frac{A_2(\cos\psi - \lambda_0(\cos\psi + \sin\psi)}{1 - \lambda_1 z^{-1} + z^{-2}}$.где $\lambda_1 = 2\cos\omega\Delta, \lambda_0 = \cos\omega\Lambda$ Приведя правую часть к общему знаменателю, получим	$Z[D_k] = \frac{A_1}{1-\lambda_0 z^{-1}} + \frac{A_0}{1-z^{-1}} + \frac{A_2(\cos\psi - \lambda_0(\cos\psi + \sin\psi)}{1 - \lambda_1 z^{-1} + z^{2}}$.где $\lambda_0 = e^{-\alpha\Delta}$, $\lambda_1 = Cos(\omega\Delta)$ Приведя правую часть к общему знаменателю, получим

$Z[D_k] = \frac{(A_1 z^{-1} + A_0(1 - z^{-1}))\cdot(1 - \lambda_1 z^{-1} + z}{1 - 2(z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}) +}$ $\frac{+ A_2(1 - z^{-1})^2(\cos\psi - \lambda_0 z^{-1}(\cos\psi - \sin\psi))}{+ z^{-4} - \lambda_1(z^{1} - 2z^{2} + z^{3})}$	$Z[D_k] = \frac{(A_1(1 - z^{-1}) + A_0(1 - \lambda_0 z^{-1}))(1 - \lambda_1 z^{-1}}{1 - 2(z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}) +}$ $\frac{+ z^{-2}) + A_2(1 - z^{-1})^2 \cdot}{+ z^{-4} -}$ $\frac{\cdot(\cos\psi - \lambda_0 z^{-1}(\cos\psi - \sin\psi))}{- \lambda_1(z^{1} - 2z^{2} + z^{-3})}$
Умножив левую и правую части на знаменатель, и возвращаясь в область оригинала, используя свойство смещения получим $2z^{-1}Z[D_k] \to 2D_{k-1}$, $2z^{-2}Z[D_k] \to 2D_{k-2}$, $2z^{-3}Z[D_k] \to 2D_{k-3}$, $z^{-4}Z[D_k] \to D_{k-4}$, $\lambda_1 z^{-1}Z[D_k] \to \lambda_1 D_{k-1}$, $2\lambda_1 z^{-2}Z[D_k] \to 2\lambda_1 D_{k-2}$ $\lambda_1 z^{-3}Z[D_k] \to \lambda_1 D_{k-3}$	
Для $k \geq 4$ переходим к разностной схеме $D_k = \lambda_1(D_{k-1} - 2D_{k-2} + D_{k-3}) +$ $2(D_{k-1} - D_{k-2} + D_{k-4}) - D_{k-4}$ Подставляя в (1) получим $Y_k = \lambda_1(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + Y_{k-3}) +$ $2(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-4}) - Y_{k-4} + \zeta_k$	Для $k \geq 4$ переходим к разностной схеме $D_k = 2\lambda_1(D_{k-1} - D_{k-2}) + \lambda_0(D_{k-1} - D_{k-2} + D_k$ $- D_{k-4}) - 2\lambda_0\lambda_1(D_{k-2} - D_{k-3}) +$ $+ D_{k-1} - D_{k-2} + D_{k-3}$ Подставляя в (1) получим $Y_k = 2\lambda_1(Y_{k-1} - Y_{k-2}) + \lambda_0(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3} -$ $- Y_{k-4}) - 2\lambda_0\lambda_1(Y_{k-2} - Y_{k-3}) +$ $+ Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3} + \zeta_k$
где ζ_k -гомоскедастическая стохастическая компонента (при условии гомоседастичности ξ_k в (1)	

Для оценки параметров λ_i в моделях применим МНК.

Остальные параметры найдем применением МНК к

$Y_k = A_1 k\Delta + A_0 + A_4 \sin\omega^0 k\Delta + A_5 \cos\omega^0 k\Delta$ $A_4 = A_3\cos\psi \quad A_5 = A_3\sin\psi$	$Y_k = A_0 + A_1 e^{-\alpha^0 k\Delta} + A_4\sin(\omega^0 k\Delta) + A_5\cos(\omega^0 k\Delta)$ $A_4 = A_3\cos\psi \quad A_5 = A_3\sin\psi$

Последним этапом моделирования является оценка точности параметров. Для этого может использоваться коэффициент детерминации.

Произведем моделирование финансового ряда цен на нефть марки Brent, взятый за период с 12.09.2005 по 9.06.2006.

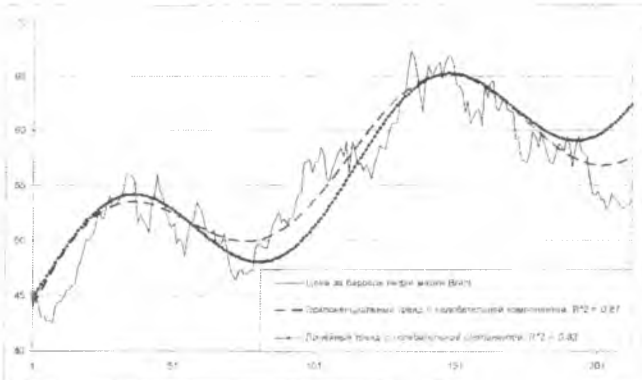

Рис. 1 Моделирование финансового ряда цены на нефть линейной и экспоненциальной моделями с колебательными компонентами

Финансовым рядам характерна не только главная тенденция (тренд), но и существенное влияние оказывают сезонная и циклическая компоненты. Известные методы декомпозиции имеют либо все два. либо один их двух следующих недостатков:

- Требуют большой объем выборки (2 и более лет). Возможность сбора такого количества данных возможна только при рассмотрении отдельных финансовых рядов (н-р: ВВП, показатели отраслей и т.д.). Для инновационных процессов, явлений, имеющих короткий период жизненного цикла такой подход не возможен. Причем даже при возможности сбора нужного количества информации имеет место возможность структурного разрыва, то есть смены модели. При этом собранные данные перестают иметь ценность для краткосрочного прогнозирования.
- Не имеют аналитического выражения. Вследствие чего возникает трудность в вычислении уровня ряда от конкретной даты.

Предложенный метод свободен от этих недостатков, работоспособен на выборках в 12. 24 и т.д. отсчетов, обладает вычислительной устойчивостью.

Литература:

1. Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В. Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций./СГАУ; Самара, 2006.-240с.