МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОЛЕЦ ВЫЧЕТОВ В УПРАВЛЕНИИ ОРГАНИЗАЦИОННО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

А.П. Котенко, М.Б. Букаренко

Любую организационно-экономическую систему, в которой поток требований на обслуживание встречает ограниченные средства их удовлетворения, можно рассматривать как систему массового обслуживания (СМО) [1].

В [2] подробно рассматриваются экономические приложения теории массового обслуживания (ТМО). Классическими задачами ТМО стали задачи исследования транспортного потока, задача «об обслуживании станков» в постановке Гнеденко [3] и Хинчина [4] при моделировании промышленного производства, задача оптимизации торговли и общественного питания и другие.

В большинстве случае граф, описывающий соответствующие СМО, представляет собой граф процесса гибели и размножения. Однако при переходе к практически распространенному в исследовании организационно-экономических систем случаю СМО с различимыми местами в очереди возникает граф гораздо более сложного вида. Это делает актуальным разработку новых подходов к аналитическому описанию СМО.

В настоящей работе предложено аналитическое описание систем массового обслуживания на основе аппарата конечных колец и полей. Нотификация состояний СМО обобщается для случая каналов с параллельной обработкой заявок и системы с различимыми местами в очереди.

Нотификация состояний СМО

Обозначим через $S(\bar{x},\bar{y})$ различимые состояния СМО сигнатуры

$$T = T(m_1, m_2, ..., m_k)$$

или размеченной сигнатуры

$$T = T(\mu_1 \times m_1, \mu_2 \times m_2, ..., \mu_k \times m_k)$$

с $k \geq 1$ каналами пропускных способностей $\mu_t \geq 0$, $t \in \overline{1,k}$, с раздельными очередями длины $m_t \geq 0$. Здесь цифра 0 в двоичном k-значном представлении числа

$$\bar{x} \overset{def}{=} (x_1 x_2 \dots x_k)_2 \in \overline{0,2^k}$$

обозначает свободный, а 1 – занятый канал. Тогда при

$$r \overset{def}{=} \max(m_1, m_2, \ldots, m_k) + 1$$

в r-ичном k-значном представлении цифры $\{y_t \in \overline{0, x_t m_t}\}_{t=1}^{k}$ числа

$$\overline{y} \overset{def}{=} (y_1 y_2 \ldots y_k)_r \in \overline{0, r^k}$$

будут соответствовать наполненности очередей.

Тогда матрица состояний СМО $A = A(T) = A(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ представляет собой бинарную $2^k \times (r^k + 1)$-матрицу с элементами

$$a(\overline{x}, \overline{y}) \overset{def}{=} f(S(\overline{x}, \overline{y})) : \overline{0, 2^k} \times \overline{0, r^k} \to \{0,1\}$$

где f – характеристическая функция множества различимых состояний СМО.

Метрические и алгебраические свойства состояний СМО

Обозначим t-ую слева цифру r-ичного n-значного ($1 \le t \le n$) представления числа $\overline{z} \in \overline{0, r^n}$ через $\Pr(r, n, t, \overline{z})$. Таким образом,

$$\overline{z} = (\Pr(r, n, 1, \overline{z}), \Pr(r, n, 2, \overline{z}), \ldots, \Pr(r, n, n, \overline{z}))_r .$$

Введём на множестве целых чисел $\overline{z} \in \overline{0, r^n}$ метрику Хемминга

$$\rho_{r,n}(\overline{z}_1, \overline{z}_2) \overset{def}{=} \sum_{t=1}^{n} \left| \Pr(r, n, t, \overline{z}_1) - \Pr(r, n, t, \overline{z}_2) \right|,$$

удовлетворяющую обычным аксиомам метрики.

Чтобы преобразовать метрику Хемминга в норму, превратим множество $\overline{0, r^n}$ при $r \ge 2$, $n \ge 1$ в конечномерное линейное пространство $L(r, n, B_2)$ над полем скаляров $B_2 \overset{def}{=} (\{0,1\}, \oplus, \times)$ с операциями двоичного сложения $\oplus : B_2 \times B_2 \to B_2$ и обычного умножения $\times : B_2 \times B_2 \to B_2$ со стандартными определениями и обычными полевыми аксиомами таких операций.

Приведено рекуррентное определение определителя в B_2 и строится теория матриц со стандартными операциями.

Обобщением поля B_2 является кольцо

$$B_r \overset{def}{=} \left(\{0, 1, \ldots, r-1\}, \overset{r}{\oplus}, \overset{r}{\otimes} \right)$$

при $r \ge 2$ с операциями сложения $\overset{r}{\oplus} : B_r^2 \to B_r$ по модулю r и умножения $\overset{r}{\otimes} : B_r^2 \to B_r$ по модулю r с определениями

$$x \overset{r}{\oplus} y \overset{def}{=} [x + y] \bmod r, \quad x \overset{r}{\otimes} y \overset{def}{=} [x \times y] \bmod r,$$

являющееся полем в случае, если r простое число, и для которого также построена теория матриц.

Нотификация состояний СМО с различимыми местами в очередях

Модифицируем предыдущую нотификацию состояний СМО $S(\overline{x},\overline{y})$ для практически распространённого случая различимого места элементов в раздельных очередях каналов обслуживания.

Пусть, как и выше, цифра 0 в двоичном k-значном представлении числа

$$\overline{x} \stackrel{def}{=} (x_1 x_2 \ldots x_k)_2 \in \overline{0,2^k}$$

обозначает свободный, а 1 – занятый канал.

Тогда цифра 0 в двоичном m_t-значном представлении числа

$$\overline{y}_t \stackrel{def}{=} (j_1 j_2 \ldots j_{m_t})_2 \in \overline{0,2^{m_t}}$$

обозначает свободное, а 1 – занятое место в очереди t-канала при $t \in \overline{1,k}$.

Очевидно, $0 \le \sum_{u=1}^{m_t} j_u \le x_t m_t = \begin{cases} 0 \leftarrow i_t = 0; \\ m_t \leftarrow i_t = 1. \end{cases}$

Различимые состояния системы обозначим через $S(\overline{x};\overline{y}_1,\overline{y}_2,\ldots,\overline{y}_k)$. При этом сигнатура $T = T(m_1, m_2,\ldots, m_k)$ вновь будет однозначно определять граф различимых состояний системы.

Бинарный $(k+1)$-мерный $2^k \times 2^{m_1} \times 2^{m_2} \times \ldots \times 2^{m_k}$ - тензор A с элементами

$$a(\overline{x};\overline{y}_1,\overline{y}_2,\ldots,\overline{y}_k) \stackrel{def}{=} f(S(\overline{x};\overline{y}_1,\overline{y}_2,\ldots\overline{y}_k)): \overline{0,2^k} \times \overline{0,2^{m_1}} \times \overline{0,2^{m_2}} \times \ldots \overline{0,2^{m_k}} \to \{0,1\},$$

где f – характеристическая функция множества различимых состояний СМО $T = T(m_1, m_2,\ldots, m_k)$, назовём тензором состояний системы массового *обслуживания* и обозначим $A = A(T) = A(m_1, m_2,\ldots, m_k)$.

Очевидно, тензор состояний $A = A(T) = A(m_1, m_2,\ldots, m_k)$однозначно определяет граф данной системы массового обслуживания.

Рассмотрены две аналогичные многоканальные СМО с отказами с общей ограниченной очередью (с графом процесса гибели и размножения) и с раздельными очередями к каналам. Показано, что отсутствует согласование предельных вероятностей состояний двух указанных систем, так что нельзя перейти от описания СМО с раздельными очередями (различимыми каналами обслуживания) к системе сгруппированных по числу заявок в системе состояний.

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. Бусленко Н.П., Черенков А.П. Применение методов теории массового обслуживания при исследовании операций // Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. – М.: ВИНИТИ, 1970. С. 69–110.
3. Гнеденко Б. В. О среднем простое станков при многоступенчатой работе // Изв. хлопчатобум. пром-сти, 1934. – Т. 11, С. 15–18.
4. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – М., 1955. – 129 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КОРПОРАТИВНЫХ СТРУКТУРАХ

Ю.В.Матвеева

В статье представлены механизмы оптимизации корпоративных структур холдингового типа. Выбор не случаен, поскольку основными субъектами рыночных отношений на современном этапе развития бизнеса являются сложноструктурированные корпорации и транснациональные компании. Доминирующее значение в оптимизации функционирования указанных бизнес-объектов приобретают внутрифирменные компоненты организации в их взаимодействии.

Любой процесс оптимизации представим как согласование взаимодействий элементов, участвующих в рассматриваемой деятельности.

Опишем механизмы взаимодействия между в двухуровневой иерархической корпоративной структуре, состоящей из управляющей компании (центра (управляющий уровень)) и подразделений (предприятий (подчиненный уровень)).

Одним из методов воздействия управляющей компании на функционирование системы является внутрифирменная мотивация подразделений, когда устанавливаются нормативы отчислений в пользу управляющей компании с доходов предприятий, входящих в ее состав.

Сущность механизма отчислений состоит в том, что предприятия выплачивают управляющей компании определенный процент от выручки [4].