СЕКЦИЯ ЭКОНОМИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ББКУ9(2)0 – 56

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ФУНКЦИИ ЗАТРАТ НА ФОРМИРОВАНИЕ ДЕПОЗИТНО - КРЕДИТНЫХ КОНТРАКТОВ

Богатова М. Ю.

Научный руководитель: д. т. н., профессор Гришанов Г. М.

Самарский государственный аэрокосмический университет

им. академика С. П. Королева

Для оценки эффективности реализации совокупности агрегированных кредитных и депозитных контрактов следует учитывать доходы и расходы в виде процентных выплат, затраты банка на управление депозитными и кредитными контрактами. В формализованном виде задача кредитора по формированию совокупности депозитно-кредитных контрактов описывается следующей математической моделью:

$$ПР(y,x) = OD(y,x) - З(y,x) \xrightarrow[y,x\in X]{} \max, \quad (1)$$

где $X = \{x,y) | y \le \min(A,(1-\delta)П), y = (1-\delta)x\}$ – множество допустимых значений объемов кредитов, предлагаемых банком; y – агрегированный объем кредитов, предлагаемых банком заемщикам; X – агрегированный спрос на ресурсы со стороны банка; δ – норматив формирования обязательных резервов; α, β – процентные ставки кредита и депозита; A - агрегированный спрос на кредиты со стороны заемщиков; $П$ – агрегированное предложение ресурсов со стороны вкладчиков; $OD(y,x) = \tau(\alpha y - \beta y)$ – операционный доход, получаемый банком; $ПР(y,x)$ – прибыль, получаемая банком.

Поведение кредитора, описываемого моделью (1), определяется уровнем процентных ставок α, β и затратами $З(y,x)$ на реализацию финансовых операций. Производимые затраты включают в себя два вида затрат – постоянные и переменные. Постоянные затраты не зависят в краткосрочном периоде от объема кредитов и депозитов, а переменные – непосредственно зависят от объемов привлекаемых и размещаемых в кредиты ресурсов.

На рис. 1 и рис. 2 представлены зависимости операционного дохода и прибыли от объема предлагаемых банком кредита при линейной и нелинейной функции затрат. В точке $y = y_{min}$ - достигается условие безубыточности, до этой точки кредитор несет убытки, после этой точки – получает прибыль.

Для случая линейных затрат прирост операционного дохода больше прироста затрат, т.е.

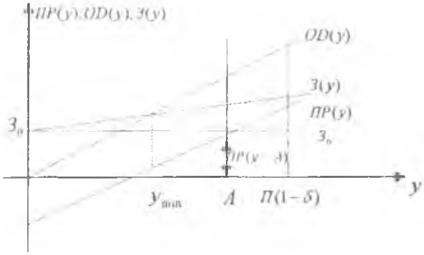
$$\frac{\partial OD(y)}{\partial y} > \frac{\partial З(y)}{\partial y} \qquad (2)$$

Неравенство (2) означает, что предельный операционный доход больше предельных затрат при объеме кредита равном y.

Для случая нелинейных затрат это неравенство соблюдается до точки $y = y_{max}$ (рис. 2). В этой точке прибыль достигает своего максимального значения, а неравенство (2) становится равенством, т.е.

$$\frac{\partial OD(y_{max})}{\partial y} = \frac{\partial З(y)}{\partial y} \qquad (3)$$

Из этого равенства следует, что при фиксированных процентных ставках кредита и депозита максимальная прибыль соответствует объему кредита y_{max}, при котором прирост затрат с увеличением объема кредита на единицу равен приросту операционного дохода.



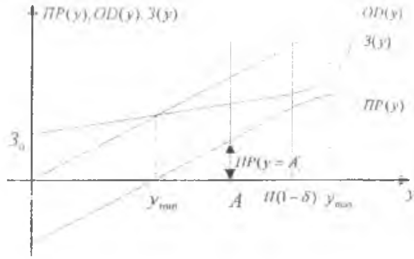


Рисунок 1 - Зависимость операционного дохода и прибыли от объема кредита при линейной функции затрат.

Рисунок 2 - Зависимость операционного дохода и прибыли от объема кредита при нелинейной функции затрат.

На рис. 1 и рис. 2 спрос на кредиты A меньше предложения ресурсов ($A<(1-\delta)П$), поэтому решением модели (1) является $y=A,\quad x=\dfrac{A}{(1-\delta)}$. Пусть функция затрат задается как $З(y)=З_0 y_y y+y_\tau x$. Тогда определим величину прибыли банка:

$$ПР(y=A)=\tau\left(\alpha-\frac{\beta}{1-\delta}\right)A-\left(y_\nu+\frac{y_x}{1-\delta}\right)A-З_0=A\left(\tau\alpha-y_y-\frac{\tau\beta+y_x}{1-\delta}\right)-З_0 \quad \textbf{(4)}$$

В точке $y=A$ соблюдается неравенство (2), в котором предельный процентный доход и предельные затраты равны.

Подставляя полученные предельные значения процентного дохода и затрат в неравенство (2), находим, что процентная ставка кредита должна удовлетворять неравенству:

$$\alpha>\frac{1}{\tau}\left(\frac{y_x+\tau\beta}{1-\delta}+y_\nu\right)$$

(5)

Прибыль, получаемая банком в соответствии с уравнением (4), является неотрицательной величиной, если процентная ставка кредита удовлетворяет неравенству:

$$\alpha>\frac{1}{\tau}\left(\frac{y_x+\tau\beta}{1-\delta}+y_\nu+\frac{З_0}{A}\right)$$

(6)

Это неравенство представляет собой условие безубыточности реализации агрегированного депозитно-кредитного контракта в объеме $y=A$, а также для любой другой агрегированной суммы кредита y.

Усложним модели принятия решений и предположим, что объем предложения кредитов зависит от процентной ставки кредита, а объем спроса на кредитные ресурсы является функцией от процентной ставки депозита. Тогда:

$$\begin{cases} ПР = OD - З \xrightarrow[\alpha,\beta,x(\alpha),y(\beta)\in X]{} \max; \\ OD(\alpha,\beta,x(\alpha),y(\beta)) = \tau(\alpha y(\alpha) - \beta x(\beta)) \to \max; \\ З(\alpha,\beta,x(\alpha),y(\beta)) = З_0 + y_y(\underline{y} + b_\alpha(\alpha - \underline{\alpha})) + y_x(x - b_\beta(\beta - \underline{\beta})), \\ X = \{x(\alpha), y(\alpha), \alpha, \beta \mid y(\alpha) \le A, x(\beta) \le П, y(\alpha) = x(\beta), \underline{\alpha} \le \alpha \le \bar{\alpha}, \underline{\beta} \le \beta \le \bar{\beta}\} \end{cases} \quad (7)$$

Предположим, что:

$$y(\alpha) = \underline{y} + b_\alpha(\alpha - \underline{\alpha}), \quad A(\alpha) = \bar{A} - a_\alpha(\alpha - \underline{\alpha});$$
$$x(\beta) = \bar{x} - b_\beta(\beta - \underline{\beta}), \quad П(\beta) = \underline{П} + a_\beta(\beta - \underline{\beta}).$$

(8)

где $b_\alpha, a_\alpha, b_\beta, a_\beta > 0$ – коэффициенты, характеризующие относительные изменения объемов предложения, спроса кредитов и ресурсов при малых изменениях процентных ставок; $\underline{y}, \bar{A}$ – предложение и спрос на кредиты при нижней границе процентной ставки $\underline{\alpha}$; $\bar{x}$, $\underline{П}$ – спрос и предложение ресурсов при нижней границе процентной ставки $\underline{\beta}$.

Учитывая (8) модель задачи выбора менеджером параметров депозитно – кредитных контрактов (7) можно представить в виде

$$ПР(\Delta\alpha,\Delta\beta) = (\underline{y} + \beta_\alpha\Delta\alpha)[\tau(\Delta\alpha + \underline{\alpha}) - y_x] - (\bar{x} - b_b\Delta\beta)[\tau(\Delta\beta + \underline{\beta}) + y_y] - З_0 \xrightarrow[\Delta\alpha,\Delta\beta\in E]{} \max \quad \textbf{(9)}$$

где:

$$E = \left\{\Delta\alpha, \Delta\beta \,\middle|\, \Delta\alpha \le \frac{\bar{A} - y}{b_\alpha + a_\alpha}, \Delta\beta \ge \frac{\bar{x} - П}{b_\beta + a_\beta}, b_\alpha\Delta\alpha + b_\beta\Delta\beta = (\bar{x} - \underline{y}), \Delta\alpha = \alpha - \underline{\alpha}, \Delta\beta = \beta - \underline{\beta}, \Delta\alpha, \Delta\beta \ge 0\right\} \textbf{(10}$$

- допустимое множество изменений процентных ставок.

В результате решения модели (9)-(10) определяются такие значения изменения процентных ставок кредитов $\Delta\alpha$ и депозитов $\Delta\beta$, которые удовлетворяют допустимым ограничениям и обеспечивают максимум операционного дохода.

Модель (9) – нелинейная относительно переменных $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$. Множество допустимых решений (10) представляет собой отрезок MS на прямой $b_\alpha\Delta\alpha + b_\beta\Delta\beta = \bar{x} - y$. Любая точка на этом отрезке удовлетворяет ограничениям модели (9)- (10). Координаты точки $M(\Delta\alpha^0, \Delta\beta^0)$ являются оптимальными и обеспечивают максимальную величину операционного дохода $OD(\Delta\alpha^0, \Delta\beta^0) = \max$. Этой точке соответствует максимальное значение процентной ставки кредита $\Delta\alpha^0$ и минимальная величина процентной ставки депозита, равная $\Delta\beta^0$. Поэтому линии равных значений, проходящей через точку М, соответствует максимальное значение операционного дохода. Точка М может быть образована пересечением вертикальной прямой с наклонной прямой, образующих следующую систему:

$$\begin{cases} \Delta\beta = \dfrac{\bar{x}_0 - \underline{\Pi}_0}{b_\beta + a_\beta} \\ b_\alpha \Delta\alpha^0 + b_\beta \Delta\beta^0 = \bar{x} - \underline{y}. \end{cases},$$

(11)

тогда:

$$\Delta\alpha^0 = \frac{\bar{x} - y}{b_\alpha} - \frac{b_\beta}{b_\alpha} \frac{\bar{x} - \underline{\Pi}}{(b_\beta + a_\beta)}; \qquad \textbf{(12)}$$

или системой:

$$\begin{cases} \Delta\alpha^0 = \dfrac{\bar{A} - \underline{y}}{b_\alpha + a_\alpha} \\ b_\alpha \Delta\alpha^0 + b_\beta \Delta\beta^0 = \bar{x} - \underline{y}. \end{cases} \qquad \textbf{(13)}$$

тогда:

$$\Delta\beta^0 = \frac{\bar{x} - \underline{y}}{b_\beta} - \frac{b_\alpha(\bar{A} - \underline{y})}{b_\beta(b_\alpha + a_\alpha)}.$$

(14)

Эти значения являются одновременно и оптимальным изменением процентной ставки депозита, образующим одну из координат точки М.

В результате стратегия банка такова: купить депозиты по цене $\beta^0 = \underline{\beta} + \Delta\beta^0$ в объеме $x(\Delta\beta^0) = \bar{x} - b_\beta\Delta\beta^0$ и вовлечь их в кредиты по цене $\alpha^0 = \underline{\alpha} + \Delta\alpha^0$ в объеме $y(\Delta\alpha^0) = \underline{y} + b_\alpha\Delta\alpha^0$.

Рассмотрим числовой пример. Пусть заданы следующие параметры депозитно – кредитного рынка: $\tau = 1$, $\underline{\beta} = 5\%$, $\underline{\alpha} = 10\%$, $\bar{x} = 80$ д.ед., $\underline{y} = 26$ д.ед., $\bar{A} = 80$ д.ед., $\underline{\Pi} = 26$ д.ед., $b_\alpha = 200$ д.ед., $a_\alpha = 150$ д.ед., $b_\beta = 400$ д.ед., $a_\beta = 500$ д.ед.

Данная задача была решена графическим методом (рис. 3) и методом математического программирования в пакете Maple 9.

Результаты выглядят следующим образом:

$$ПР = 3{,}94 д.ед.;$$
$$\Delta\alpha = 0.15, \quad \Delta\beta = 0.06;$$
$$\alpha^0 = 25\%, \quad \beta^0 = 11\%;$$
$$x^0 = 56 д.ед., \quad y^0 = 56 д.ед.$$

Отсюда следует, что если менеджер банка купит депозит сроком хранения один год с процентной ставкой 11% объемом 56 д.ед. и вовлечет их в полном объеме в кредит с процентной ставкой 25%, то операционный доход от реализации депозитно-кредитного контракта в их совокупности составит 3,94 д.ед.

Таким образом, полученная стратегия позволяет обеспечить, с одной стороны, максимальное значение операционного дохода, а с другой, сбалансировать депозитный и кредитный рынки. Это означает, что спрос на кредиты и предложение ресурсов на денежном рынке будут удовлетворены в полной мере.

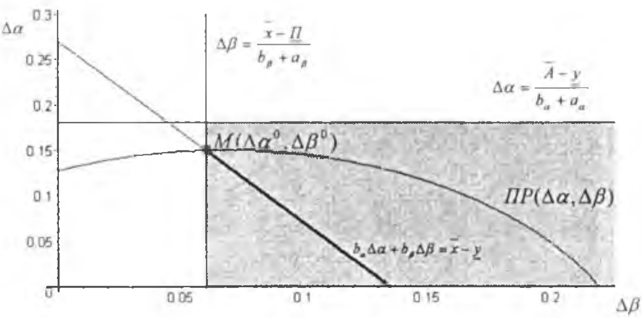


Рисунок 3 - К примеру