$$\Psi\ x,y\ =W\ x,y\ \exp\left[i2\psi\ x,y\ \right],$$

где весовая функция $W\ x,y$ имеет смысл достоверности (надежности оценки) поля направлений в данной точке, а $\psi\ x,y$ имеет физический смысл угла наклона касательной к функции яркости. Поле направлений $\Psi\ x,y$ может быть получено путём свёртки функции яркости $I(x,y)$ с фазовой маской

$$f\ x,y\ =\begin{cases}\exp\left[i\arg\ x+iy\ \right]=\dfrac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 0<x^2+y^2\le R^2,\\ 0,\quad x^2+x^2>R^2\quad или\ \ x=y=0. & \end{cases}$$

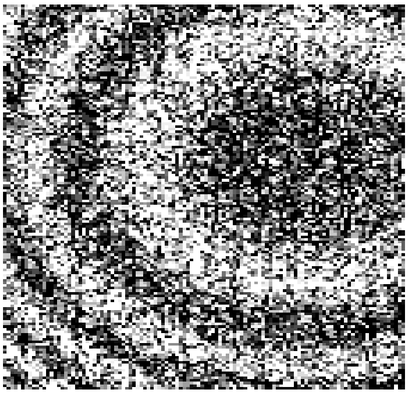
где R – радиус окна обработки.

Для локальной области достаточно малого радиуса R функция яркости может быть представлена в виде гармонической функции: $I\ x,y\ \sim\cos\left[\omega\ x\sin\psi+y\cos\psi\ +\varphi_0\right]$. Основная идея метода заключается в использовании весовой функции $W\ x,y$ для оценивания модуля градиента функции яркости.

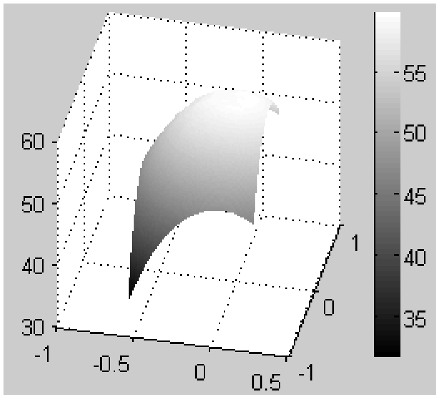
$$\left|\frac{1}{\omega}\left[J_1\ \omega\ \mathrm{H}_0\ \omega\ -J_0\ \omega\ \mathrm{H}_1\ \omega\ \right]\sin\varphi_0\right|\sim W,$$

где функции $J_k\ \omega$ и $\mathrm{H}_k\ \omega$ — это цилиндрические функции Бесселя и Струве порядка k, соответственно, ω – локальная частота.

Метод фазовой маски может применяться также на этапе предварительной обработки интерферограммы для устранения шумов. На рисунке 3 показан результат восстановления фазовой функции для сильно зашумлённой интерферограммы, зарегистрированной без пространственной несущей.



а



б

Рисунок 3. Пример восстановления фазовой функции:
(*а*) - исходное изображение; (*б*) - восстановленная фазовая функция

УДК 517.9

ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧ ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Осинцев М.С., Соболев В.А.
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет), г.Самара.

Движение систем твердых тел представляет собой сложную композицию быстрых и медленных движений, что может быть обусловлено наличием в системе малых или больших параметров. В задачах динамики спутников это может быть связано с наличием демпфирующих устройств или упругих элементов малой массы. Для гироскопических приборов и систем наличие быстрых — нутационных и медленных — прецессионных колебаний хорошо известно и наблюдается почти всегда. При моделировании динамики систем твердых тел, характерной особенностью которых является наличие быстрых и медленных движений, обычно используются сингулярно возмущенные дифференциальные системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} = g(x, y, y, \varepsilon) \end{cases} \tag{1}$$

где точкой обозначается дифференцирование по времени t, x и y — векторные переменные, ε — малый положительный параметр. В теории автоматического управления модели, описываемые сингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями, возникают по целому ряду причин. Такая ситуация естественна для задач управления системами, динамика которых объективно складывается из разнотемповых движений: гироскопические, электромеханические и другие системы. Кроме того, появление сингулярных возмущений может быть связано со спецификой применяемых методов управления и для однотемповых систем. Примерами могут служить задачи с использованием метода штрафа при малом коэффициенте штрафа за управление («дешевое» управление) или задачи стохастической фильтрации с малым шумом в канале наблюдения.

Как известно, удобным аппаратом исследования многомерных систем дифференциальных уравнений является метод интегральных многообразий, использование которого позволяет решать важную для приложений задачу понижения размерности. Можно показать, что при естественных предположениях для системы (1) существует притягивающее интегральное многообразие медленных движений. Построение интегрального многообразия не только позволяет получить систему меньшей размерности, но и сохраняет качественные характеристики движения системы при замене полных уравнений уравнениями меньшей размерности на многообразии. Характерной особенностью динамики систем твердых тел с малой диссипацией, к которым относятся гироскопические системы и манипуляционные роботы, является наличие относительно медленно угасающих быстрых колебаний, обладающих высокой частотой. С математической точки зрения это означает, основная функциональная матрица сингулярно возмущенной дифференциальной системы, которая получается в результате линеаризации правой части быстрой подсистемы на медленной поверхности, имеет чисто мнимые корни характеристического уравнения. Если в системе присутствует слабая диссипация типа относительно малого вязкого трения, то корни характеристического уравнения сдвигаются в левую комплексную полуплоскость, что обеспечивает существование притягивающего интегрального многообразия медленных движений и сведение задач динамики таких систем к исследованию системы на интегральном многообразии. Размерность системы при этом понижается до размерности медленных переменных. Следует отметить, что в такой ситуации асимптотические методы типа метода пограничных функций неприменимы, а при использовании метода усреднения утрачивается эффект слабого затухания быстрых движений.

Более сложная ситуация возникает при решении задач оптимальной фильтрации и линейно-квадратичных задач оптимального управления. Так, при решении задачи фильтрации для гироскопических систем, возникает необходимость в изучении системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений Риккати вида

$$\dot{P}_1 = P_2^T + P_2 - P_1 C^T R^{-1} C P_1; \tag{2}$$

$$\varepsilon\dot{P}_2 = \varepsilon P_3 - \varepsilon P_1 N^T - P_2 (G_0 + \varepsilon G_1)^T - \varepsilon P_1 C^T R^{-1} C P_2; \tag{3}$$

$$\varepsilon\dot{P}_3 = -\varepsilon (N P_2 + P_2^T N^T) - P_3 (G_0 + \varepsilon G_1)^T - (G_0 + \varepsilon G_1) P_3 - \varepsilon P_2^T C^T R^{-1} C P_2 + \varepsilon B Q B^T, \tag{4}$$

где $G_0(t)$ — кососимметрическая матрица гироскопических сил, не имеющая нулевых собственных чисел; $G_1(t)$ — симметрическая положительно определенная матрица сил трения; $N(t)$ — матрица неконсервативных сил; $C(t)$ — вектор, характеризующий функцию наблюдения; $B(t)$ — вектор коэффициентов при случайной функции; $Q(t)$ — неотрицательно определенная матрица, характеризующая корреляционную функцию случайного воздействия на систему, $R(t)$ — симметрическая положительно определенная матрица, характеризующая корреляционную функцию шума измерения. Искомая матрица $P(t)$, блоки которой играют роль неизвестных в дифференциальной системе (2)–(4), является корреляционной функцией оптимального фильтра для гироскопической системы.

На первый взгляд только уравнение (2) описывает поведение медленных переменных в этой системе. Однако в подсистеме (4) есть «скрытые» медленные переменные. В постановке задачи присутствует требование о том, чтобы матрица $G_0(t)$ не имела нулевых собственных чисел для всех $t \in R$. Главная часть уравнения (4) может быть представлена как линейный оператор вида

$$LX = XA - BX. \tag{5}$$

Известно, что собственные числа линейного оператора L представляют собой всевозможные разности собственных чисел матриц A и B. Матрица G по условию задачи является кососимметрической, то есть в выражении (5) $A = B = G_0$. Следовательно, среди собственных чисел линейного оператора L обязательно есть нулевые. Это означает, что размерность интегрального многообразия медленных движений повышается. Тем не менее, в результате повторного применения процедуры понижения размерности, основанной на применении метода интегральных многообразий, удается построить фильтр максимально возможного низкого порядка.

В качестве приложений, иллюстрирующих эффективность предлагаемого подхода, рассмотрены задачи динамики и оптимального оценивания для гироскопического маятника и манипулятора с гибким сочленением.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований 15 Отделения энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН.