

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ ВУЗА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРИ ОРГАНИЗАЦИИ**

Актуальность работы высока как никогда. Подготовка высококвалифицированных кадров является одной из основ развития реального сектора экономики. Сложившееся положение с обеспечением деятельности высших учебных заведений повышает требования к финансовому менеджменту в вузе и требует от руководства как оперативного принятия решений по оптимальному управлению ресурсами, так и долгосрочного финансового планирования.

**Ключевые слова:** оптимизация, ресурсы, задача оптимизации, динамическое программирование, распределение ресурсов в ВУЗе.

Целью данной работы является решение задачи разработки математической модели управления ресурсами вуза для оптимизации их распределения внутри организации.

В задачах динамического программирования экономический процесс зависит от времени (или от нескольких периодов времени), поэтому находится ряд оптимальных решений (последовательно для каждого этапа), обеспечивающих оптимальное развитие всего процесса в целом. Методы динамического программирования позволяют существенно сократить число анализируемых вариантов решений в процессе определения глобально-оптимального решения за счет учета априорной информации о решениях, не являющихся допустимыми, и использования информации, полученной на предыдущих шагах оптимизации.

Метод динамического программирования позволяет проводить оптимальное планирование поэтапно, оптимизируя на каждом этапе только один шаг. Процесс динамического программирования всегда разворачивается в обратном по времени направлении.

$W_m$  – выигрыш за последний шаг,

$W_{m-1,m}$  – выигрыш за два последних шага,

$W_{i,i+1,\dots,m}$  – выигрыш за последние  $(m-i+1)$  шага, начиная с  $i$ -го и заканчивая  $m$ -м.

---

\* © Юкласова А.В., 2016

*Юкласова Анастасия Валерьевна* – ассистент кафедры государственного и муниципального управления Самарского университета

© Егорова А.Ю., 2016

*Егорова Алена Юрьевна* – ассистент кафедры математики и бизнес информатики Самарского университета

Общая постановка задач динамического программирования и общие принципы их решения:

Имеется некая физическая система  $S$ , которая может менять свое состояние с течением времени. С процессом изменения состояния системы  $S$  связана какая-то заинтересованность, которая выражается численно с помощью критерия  $W$ , и нужно организовать процесс таким образом, чтобы этот критерий обратился максимум или минимум.  $U$  – управление.

С учетом начальных и конечных условий задача оптимального управления формулируется следующим образом: из множества возможных управлений  $U$  найти такое управление  $U^*$ , которое переводит физическую систему  $S$  из начального состояния в конечное так, чтобы некоторый критерий  $W(U)$  обращался в максимум.

Перейдем к постановке задачи. В ВУЗе имеется заданное исходное количество средств, которое следует распределить между тремя инвестиционным проектами в течение лет. Средства, вложенные в проекты в начале каждого года, приносят определенный доход, зависящий от количества вложенных средств. Полученный доход реинвестируется на эти же цели, и к концу года от него остается остаток, так же зависящий от количества средств, вложенных в проекты в начале года. Предполагается, что новых средств не поступает, и по истечении каждого года оставшиеся средства заново распределяются между проектами. Введем обозначения и соотношения между величинами:

Проект	Количество выделяемых средств	Значения функций дохода	Значения функций остатков
I	$x_i$	$f(x_i)$	$\varphi(x_i)$
II	$y_i$	$g(y_i)$	$\omega(y_i)$
III	$z_i$	$h(z_i)$	$\vartheta(z_i)$

Суммарный доход за  $i$ -й год равен:

$$W_i = f(x_i) + g(y_i) + h(z_i), \quad i = \overline{1, m} \quad (1)$$

Общее количество средств, вкладываемое в проект в начале  $i$ -ого года будет равно:

$$Q_{i-1} = x_i + y_i + z_i = (x_{i-1}) + \omega(y_{i-1}) + (z_{i-1}). \quad (2)$$

При указанных условиях требуется так распределить средства между проектами по годам в течение  $m$  лет, чтобы суммарный доход за весь планируемый период был наибольшим.

Сначала найдем условно оптимальное решение на последнем этапе ( $m$ -й год), затем на предпоследнем ( $m-1$  год) и т.д., пока не дойдем до последнего этапа. Таким образом, функция суммарного дохода за  $m$  год составит

$$W_m = f(x_m) + g(y_m) + h(z_m). \quad (3)$$

Максимальный суммарный доход за  $m$  год находим в результате решения задачи максимизации функции (3) при линейном ограничении

$x_m + y_m + z_m = Q_{m-1}$  и неотрицательности переменных  $x_m, y_m, z_m$ . Этот максимум будет являться функцией от  $Q_{m-1}$ :

$$\max W_m = W^m(Q_{m-1}). \quad (4)$$

На следующем этапе нужно найти условно оптимальную стратегию  $x_{m-1}^*, y_{m-1}^*, z_{m-1}^*$ . Согласно принципу оптимальности Беллмана функция суммарного дохода за  $m-1$  и  $m$ -й годы должна состоять из функций суммарного дохода за  $m-1$ -й год и максимального дохода за  $m$ -й год, т.е.

$$W_{m-1,m} = W_{m-1} + \max W_m = f(x_{m-1}) + g(y_{m-1}) + h(z_{m-1}) + W^m(Q_{m-1}). \quad (5)$$

$$W_{m-1,m} = W_{m-1,m}(x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1}). \quad (6)$$

т.е. является функцией трех неотрицательных аргументов  $x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1}$ , которые должны удовлетворять линейному ограничению

$$x_{m-1} + y_{m-1} + z_{m-1} = Q_{m-2}. \quad (7)$$

Таким образом, на этом этапе требуется максимизировать функцию (6) при ограничениях (7) и неотрицательности переменных  $x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1}$ . Для каждого  $Q_{m-2}$  может быть найдена условно оптимальная стратегия  $x_{m-1}^*, y_{m-1}^*, z_{m-1}^*$  и соответствующий ей условно максимальный доход

$$\max W_{m-1,m} = W_{m-1,m}(Q_{m-2}). \quad (8)$$

Продолжая процесс условной оптимизации, аналогичным образом получим для любого  $(m-1)$ -го года условную оптимальную стратегию  $x_{m-1}^*, y_{m-1}^*, z_{m-1}^*$  и соответствующий ей условно максимальный доход за все годы, начиная с данного

$$W_{m-1,\dots,m}(Q_{m-i-1}) = \max W_{m-i,m}(x_{m-i}, y_{m-i}, z_{m-i}). \quad (9)$$

где

$$W_{m-i,\dots,m} = f(x_{m-i}) + g(y_{m-i}) + h(z_{m-i}) + W_{m-i+1,m} [f(x_{m-i}) + \omega(y_{m-i}) + h(z_{m-i})] \quad (10)$$

После нахождения условно оптимальных стратегий для всех годов кроме первого, определяют оптимальное распределение средств на первый год.

Для получения функций дохода за весь период необходимо в общей формуле (10) положить  $i=m-1$ , тогда

$$W^{1,m} = f(x_1) + g(y_1) + h(z_1) + W^{2,m} [f(x_1) + \omega(y_1) + h(z_1)] \quad (11)$$

Для получения оптимальной стратегии для первого года следует максимизировать функцию (11) при условии

$$x_1 + y_1 + z_1 = Q_0 \quad (12)$$

и неотрицательности переменных  $x_1, y_1, z_1 \geq 0$ .

Условно оптимальное решение  $x_1^*, y_1^*, z_1^*$  на этом этапе и будет составлять оптимальную стратегию, то есть оптимальное распределение средств в начале первого года. Зная оптимальное распределение средств в начале первого года, мы можем найти оптимальное распределение во все

последующее годы. Для этого необходимо снова пройти все годы, но уже в обратном направлении – от начала к концу.

После краткого обзора теоретической части можно перейти к решению конкретного примера:

Для увеличения предельного допустимого контингента студентов, заданного лицензией, СамГУ планирует направить 15 миллионов рублей в течение 3 лет на финансирование мероприятий по увеличению учебно-лабораторных площадей под учебный процесс. Имеются два проекта: 1. Капитальное строительство новых площадей. 2. Аренда помещений под учебные цели у сторонних организаций. Требуется распределить ресурсы между проектами на каждый год так, чтобы суммарный доход за весь период был максимальным.

Введем обозначения и соотношения между величинами.

Проект	Количество выделяемых средств	Доход за счет дополнительного приема	Прирост основных фондов	Значения функций остатков
I	$x_i$	$-0,2x_i^2 + 2,7x_i$	$0,7x_i$	$0,5x_i$
II	$y_i$	$-0,8y_i^2 + 1,4y_i$	-	$0,8y_i$

Решение

Процесс решения начинается в обратном направлении.

Рассматривается третий год. Условно оптимальная стратегия  $(x_3, y_3)$  на последнем, третьем году находится как оптимальное решение задачи максимизации функции дохода на третьем году:

$$\begin{aligned}
 W_3(x_3, y_3) &= (-0,2x_3^2 + 2,7x_3) + 0,7x_3 + (-0,8y_3^2 + 1,4y_3), \\
 x_3 + y_3 &= Q_2, \\
 x_3 &\geq 0, \\
 y_3 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Где  $Q_2$  - суммарный остаток средств по прошествии 2х лет.

Функция  $W_3(x_3, y_3)$  строго вогнутая, поэтому существует единственный экстремум, в котором эта функция достигает своего максимума.

Найдем точку максимума с помощью неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа и приравняем все ее частные производные нулю.

$$F(x_3, y_3, \lambda) = (-0,2x_3^2 + 2,7x_3) + 0,7x_3 + (-0,8y_3^2 + 1,4y_3) + \lambda(x_3 + y_3 - Q_2). \tag{14}$$

В результате получим систему двух нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 0,4x_3 - 1,6y_3 = 2, \\ x_3 + y_3 = Q_2 \end{cases} \tag{15}$$

Единственное решение этой системы:

$$\begin{aligned}
 x_3 &= 0,8Q_2 + 1, \\
 y_3 &= 0,2Q_2 - 1.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Это решение будет удовлетворять условию неотрицательности переменной  $y_3$ , только если  $Q_2 \geq 5$ . Следовательно, (16) будет представлять условно оптимальную стратегию на третий год планирования при любом  $Q_2 \geq 5$ .

Подставляя выражение (16) в (13), получаем условно максимальный доход за третий год.

$$\max W_3(Q_2) = -0,16Q_2^2 + 3Q_2 + 1. \quad (17)$$

Данные второго года находятся по аналогии. А на последнем этапе находим не условно оптимальную, а действительно оптимальную стратегию  $(x_1, y_1)$  планирования на первый год, так как будем находить не из предполагаемого, а определенного наличия начальных средств. Полученная в итоге система имеет единственное решение:

$$x_1 = 12,8 \text{ миллионов рублей.}$$

$$y_1 = 2,2 \text{ миллионов рублей.}$$

Максимальный суммарный доход за весь трехлетний период

$$\max W(x_1, y_1) = 32,475.$$

Таким образом, в начале трехлетнего периода на капитальное строительство должно быть выделено 12,8 млн.р., а на аренду площадей у сторонних организаций – остальные 2,2 млн.р.

Для определения оптимальных стратегий в последующие годы надо пройти все этапы в обратном направлении.

Результат решения задачи представим в таблице.

Год	Оптимальное распределение		Доход
	Проект I	Проект II	
1	12,8	2,2	11,544
2	5,1	3,06	8,931
3	5	0	12
	Суммарные инвестиции: 28,16 млн.руб.		Суммарный доход: 32,475 млн.руб.

### Библиографический список

1. Егорова А.Ю. Моделирование связей между работами. Экономическое развитие России: тенденции, перспективы. Труды I научно-практической студенческой конференции (23 апреля 2015 г.), том II, изд-во «Мининский университет», 2015, с.216-219.
2. Егорова А.Ю., Монтлевич В.М. Решение задачи распределения взаимосвязанных работ в заданном интервале времени. «Математика, экономика и управление», сборник факультета ЭиУ, Т1 №1 Самара, «Самарский университет», 2015, с.50-53.
3. Егорова А.Ю., Монтлевич В.М. Моделирование технологических связей комплекса взаимосвязанных работ. Вестник Самарского государственного университета, Самара, изд-во «Самарский университет» 2014, №8 (119), с.259-263.

4. Истомин А.Л. Исследование операций в управлении вузом. Учебное пособие для руководителей вузов, «Синтег», 2008. с.179-185.

5. Левченко В.О., Мантуленко А.В. Адаптивный web-дизайн: актуальность, рекомендации, анализ результатов после внедрения. Математика, экономика и управление. 2015. Т. 1. С. 61-65.

*A.V.Yuklasova A. Y. Egorova\**

### **THE TASK OF DEVELOPING A MATHEMATICAL MODEL FOR RESOURCE MANAGEMENT OF THE UNIVERSITY TO OPTIMIZE THEIR DISTRIBUTION WITHIN THE ORGANIZATION**

The relevance of the work is greater than ever. The training of highly qualified personnel is one of the foundations of the development of the real sector of the economy. The situation with ensuring of activities of higher education institutions increases the requirements for financial management in the University and requires management as an operational decision making on optimal resource management and long-term financial planning.

**Key words:** optimization, resources, optimization problem, dynamic programming, allocation of resources at the University.

---

\* © Yuklasova A.V., 2016

*Yuklasova Anastasiya Valeryevna* – assistant of the Department of state and municipal management, Samara state Aerospace University

© Egorov A. Yu., 2016

*Egorova Alena Yurievna* – assistant of the Department of mathematics and business Informatics, Samara state Aerospace University