МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНО ОПЕРТОГО НАНОРАЗМЕРНОГО ПЛАНАРНОГО ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА НЭМС/МЭМС

Р.А. Романов[1,2], М.А. Барулина[1,3]

[1]Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов
[2]Саратовский национальный исследовательский университет им. Н.Г. Чернышевского
[3]Пермский государственный национальный исследовательский университет

romanov@iptmuran.ru

В настоящее время одно из направлений в разработке микромеханических гироскопов и акселерометров – это миниатюризация основных компонент датчиков. При этом исследователи сталкиваются с проблемой невозможности применения классических теорий упругости при достижении эффективных размеров датчиков от 20 до 200 нм, так как при таких размерах нарушается предположение о сплошности среды. К настоящему времени разработано большое количество нелокальных теорий, которые позволяют учесть такие эффекты. Но большинство из них либо вводят слишком много параметров, которые нельзя определить, либо приводят к некорректным уравнениям. Поэтому есть необходимость создания математической модели динамической деформации чувствительных элементов нанодатчиков, эффективные размеры которых лежат в пределах от 20 до 200 нм. При этом особый интерес представляют именно планарные чувствительные элементы, работающие на резонансных частотах, и для которых необходимо исследовать собственные частоты и формы собственных колебаний.

Целью настоящей работы является создание математической корректной модели деформации планарного чувствительного элемента и получение уравнений для определения его собственных частот и форм колебаний. В качестве теории деформации используется нелокальная теория градиентов, кинематические соотношения формулируются на основе теории деформации пластин третьего порядка.

Математическая модель. Рассмотрим изотропную тонкую пластину с постоянной толщиной h (Рис. 1) и плотностью ρ_0. Возмущающая сила приложена на поверхность $x_3 = -h/2$. Координатная система показана на рис. 1.

Выражения для поля перемещений (u_1,u_2,u_3) в соответствии с теорией деформации пластин 3го порядка имеет вид [1] :

$$u = u_0 + x_3\phi - cx_3^3(\phi + w)$$

где $u=u(t,x_1,x_2,x_3)$ вектор перемещения точки, ϕ – вектор поворота, $w = (u^0_{3,1}; u^0_{3,2}, 0)^T$, $c=4/(3h^2)$.

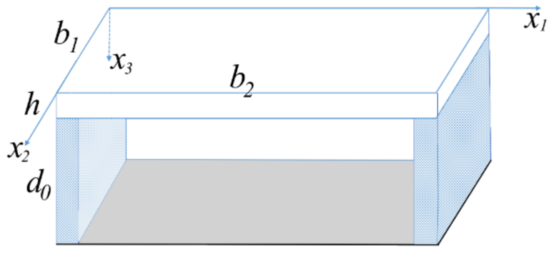

Рисунок 1 – Планарный компонент нанодатчика

Общая корректная нелокальная градиентная теория для изотропного тела может быть записана в виде [2]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$$\mu_{ijk} = a_1\left(\Delta u_k\delta_{ij} + \Delta u_j\delta_{ik} + \theta_{,i}\delta_{jk}\right) + 2a_2\left(\theta_{,k}\delta_{ij} + \theta_{,j}\delta_{ik}\right) + a_7\Delta u_i\delta_{jk} + 2a_8 u_{i,jk} + 2a_{11}\left(u_{j,ik} + u_{k,ij}\right),$$

где λ, μ коэффициенты Ламэ; $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ тензор напряжений; a_i некие положительные константы, которые используются при определении тензора градиентных модулей $A=A_{ijklm}$; $\mu_{ijk}= A_{ijklm}u_{l,mn}= A_{ijklm}\varepsilon_{lm,n}$ –тензор градиентов. Константы a_i могут рассматриваться как размерно-зависимые параметры.

Условия симметрии имеют вид:

$$u_{i,jk} = u_{i,kj},\ \mu_{ijk} = \mu_{ikj} = \mu_{kij}$$

Используя принцип виртуальных перемещений, после интегрирования по частям, перехода в уравнениях к перемещениям, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
A_1(u_1,u_2) + H_1(u_1,u_2) = I_0\ddot{u}_1 \\
A_2(u_1,u_2) + H_2(u_1,u_2) = I_0\ddot{u}_2 \\
A_3(u_3,\phi_1,\phi_2) + H_3(u_3,\phi_1,\phi_2) = F_{dr} + I_0\ddot{u}_3 + cJ_4\left(\ddot{\phi}_{1,1} + \ddot{\phi}_{2,2}\right) - c^2 I_6(\ddot{u}_{3,11} + \ddot{u}_{3,22}) \qquad (1) \\
A_4(u_3,\phi_1,\phi_2) + H_4(u_3,\phi_1,\phi_2) = J_1^2\ddot{\phi}_1 - cJ_4\ddot{u}_{3,1} \\
A_5(u_3,\phi_1,\phi_2) + H_5(u_3,\phi_1,\phi_2) = J_1^2\ddot{\phi}_2 - cJ_4\ddot{u}_{3,2}
\end{gathered}$$

В полученной системе A_i – классические части уравнений, которые получаются при обнулении размерно-зависимых параметров. H_i – неклассические части уравнений, учитывающие размерно зависимые параметры. Выражения для H_i имеют сложный вид, и зависят от размерно зависимых параметров a_i.

Для свободно опертой пластины возможно получение аналитического решения системы (1). Для этого необходимо рассмотреть линейные и угловые перемещения как двойные тригонометрические ряды:

$$\begin{gathered}
u_1(x_1,x_2) = U_{nm}cos(a_n\,x_1)sin(b_m\,x_2) \\
u_2(x_1,x_2) = V_{nm}sin(a_n\,x_1)cos(b_m\,x_2) \\
u_3(x_1,x_2) = W_{nm}sin(a_n\,x_1)sin(b_m\,x_2) \\
\phi_1(x_1,x_2) = \Phi 1_{nm}cos(a_n\,x_1)sin(b_m\,x_2) \\
\phi_2(x_1,x_2) = \Phi 2_{nm}sin(a_n\,x_1)cos(b_m\,x_2)
\end{gathered}$$

Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{gathered}
(G_{11} + Gn_{11})U_{nm} + (G_{12} + Gn_{12})V_{nm} = Gt_1\ddot{U}_{nm} \\
(G_{12} + Gn_{12})U_{nm} + (G_{22} + Gn_{22})V_{nm} = Gt_2\ddot{V}_{nm} \qquad (2) \\
(G_{33} + Gn_{33})W_{nm} + (G_{34} + Gn_{34})\Phi 1_{nm} + (G_{35} + Gn_{35})\Phi 2_{nm} = Gt_3\ddot{W}_{nm} \\
(G_{43} + Gn_{43})W_{nm} + (G_{44} + Gn_{44})\Phi 1_{nm} + (G_{45} + Gn_{45})\Phi 2_{nm} = Gt_4\ddot{\Phi 1}_{nm} \\
(G_{53} + Gn_{53})W_{nm} + (G_{54} + Gn_{54})\Phi 1_{nm} + (G_{55} + Gn_{55})\Phi 2_{nm} = Gt_5\ddot{\Phi 2}_{nm}
\end{gathered}$$

Система уравнений (2) фактически представляет собой две системы уравнений и может быть переписана в матричной форме. Представляя $U_{nm} = U^0{}_{nm}e^{i\omega t}, V_{nm} = V^0{}_{nm}e^{i\omega t}, W_{nm} = W^0{}_{nm}e^{i\omega t}$, $\Phi 1_{nm} = \Phi 1^0{}_{nm}e^{i\omega t}$, $\Phi 2_{nm} = \Phi 2^0{}_{nm}e^{i\omega t}$, получим следующие системы матричных уравнений для определения собственных частот и форм колебаний:

$$\left(-\begin{bmatrix} G_{11}+Gn_{11} & G_{12}+Gn_{12} \\ G_{12}+Gn_{12} & G_{22}+Gn_{22} \end{bmatrix} - \omega_{nm}^2 \begin{bmatrix} Gt_1 \\ Gt_2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} {U^0}_{nm} \\ {V^0}_{nm} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(-\begin{bmatrix} G_{33}+Gn_{33} & G_{34}+Gn_{34} & G_{35}+Gn_{35} \\ G_{12}+Gn_{12} & G_{44}+Gn_{44} & G_{45}+Gn_{45} \\ G_{53}+Gn_{53} & G_{54}+Gn_{54} & G_{55}+Gn_{55} \end{bmatrix} - \omega_{nm}^2 \begin{bmatrix} Gt_3 \\ Gt_4 \\ Gt_5 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} {W^0}_{nm} \\ \Phi{1^0}_{nm} \\ \Phi{2^0}_{nm} \end{bmatrix} = 0$$

Полученные матричные уравнения могут быть вычислены и исследованы независимо друг от друга.

Заключение

В работе построена математическая модель динамической деформации наноразмерного планарного чувствительного элемента. Чувствительный элемент рассматривался в виде тонкой однородной размерно-зависимой пластины, находящейся под действием сложной распределенной нагрузки. В качестве теории деформации была использована нелокальная теория градиентов, кинематические соотношения были сформулированы на основе теории деформации пластин третьего порядка. Полученная система уравнений распалась на две независимые системы, одна из которых описывает перемещения в плоскости пластины, вторая – изгибные деформации. Также были получены матричные уравнения для определения собственных частот и форм колебаний, которые позволяют исследовать влияние размерно зависимых параметров на частоты и формы собственных колебаний нанопластин.

Список литературы:

1. Analytical Solution for Bending and Free Vibrations of an Orthotropic Nanoplate based on the New Modified Couple Stress Theory and the Third-order Plate Theory / M. Barulina, D. Kondratov, S. Galkina [et al.] // Journal of Mathematical and Fundamental Sciences, ISSN: 2338-5510, Vol: 54, Issue: 1, Page: 11-38.
2. A. Gusev, S. Lurie. Symmetry conditions in strain gradient elasticity. Mathematics and Mechanics of Solids, 2017, 22(4), pp. 683–691.
3. J. Reddy. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis, CRC, 2004.