МАКСИМИЗАЦИЯ ПОТОКА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.П. Котенко, М.Б. Букаренко

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, г. Самара, Россия

Многие системы массового обслуживания (СМО) допускают интерпретацию ориентированными размеченными графами, вершины которых описывают загруженность системы, а дуги размечены вероятностями переходов между вершинами. При этом задача увеличения пропускной способности СМО сводится к максимизации потока на транспортной сети с аналогичным орграфом. Это позволяет применить методы определения максимального потока и динамического программирования при распределении ограниченных дискретных ресурсов для оптимизации заданной СМО.

Постановка задачи. Пусть зависящий от векторного параметра X поток $F=F(X)$ максимальной величины $|F(X)|$ в конечной сети $R=R(X)$ из ориентированных дуг $r_i(x_i)\in R(X)$, $1\le i\le n:=\mathrm{Card}R(X)=\mathrm{Const}<+\infty$, двумерной разметки $(f_i,c_i):=(f(r_i(x_i)),c(r_i(x_i)))\in\Re^2$, $0\le f_i\le c_i<+\infty$, определяется аддитивным разбиением $X:=(x_1,\dots,x_n)\in\Re^n$ на неотрицательные слагаемые $x_i\ge 0$ ограниченного вещественнозначного неотрицательного ресурса $U=\mathrm{Const}\ge\sum_{i=1}^n x_i\ge 0$. Оптимальным разбиением $X^*:=(x_1^*,\dots,x_n^*)$ ресурса U максимизируем величину потока $|F|^*:=\sup_X|F(X)|$.

По теореме Форда–Фалкерсона $|F(X)|=\min_{t\in T}\sum_{r_i(x_i)\in t}c(r_i(x_i))$, где минимум взят по непустому конечному множеству T разрезов t сети $R(X)$; множество T и его элементы не зависят от разбиения X. Обозначим зависящее от X непустое конечное множество $T^*(X)$ критических разрезов $t^*(X)$, набор и пропускная способность дуг которых зависят от X:

$$T^*(X):=\arg\min_{t\in T}\sum_{r_i(x_i)\in t}c(r_i(x_i))\ne\varnothing;\ 1\le\mathrm{Card}\,T^*(X)\le\mathrm{Card}\,T\le 2^{k-2},$$

где k=Const≥2 – конечное число узлов сети $R(X)$.

Тогда $|F|^*=\sup_X|F(X)|=\sup_X\sum_{r_i(x_i)\in t^*(X)}c(r_i(x_i))$. Супремум достижим при табличном задании пропускных способностей $c(r_i(x_i))\geq 0$ дуг $r_i(x_i)\in R(X)$ на конечном множестве Y допустимых аргументов

$$x_i \in Y := \{y_1,\dots,y_N\}\subset \Re^N,\ 0=y_1<y_2<\dots<y_N\leq U<+\infty,\ 1\leq j\leq N<+\infty,$$

и, возможно, не единственное оптимальное разбиение

$$X^* \in \arg\max_X |F(X)| \neq \varnothing \ \Leftrightarrow\ |F|^* = |F(X^*)| = \sum\nolimits_{r_i(x_i^*)\in t^*(X^*)} c(r_i(x_i^*))$$

можно найти дискретным динамическим программированием [1,2].

Дискретное динамическое программирование. Обозначив s-кратное повторение аргумента $y_1=0$ через $y_1^s = 0^s$, найдём начальный условный по $x_1 \in Y$ максимум частичной целевой функции $|F|_2^*(x_1) := \max_{x_2\in Y}|F(x_1,x_2,0^{n-2})|$, который достигается в точке условного по $x_1\in Y$ оптимального управления

$$x_2^* := x_2^*(x_1)\in \arg\max_{x_2\in Y}|F(x_1,x_2,0^{n-2})| \neq \varnothing \ \Leftrightarrow\ |F|_2^*(x_1) = |F(x_1,x_2^*(x_1),0^{n-2})|.$$

Рекурсивно определим условные по $x_1\in Y$ максимумы частичных целевых функций и соответствующие точки условных оптимальных управлений

$$|F|_3^*(x_1) := |F|_3^*(x_1,x_2^*(x_1)) := \max_{x_3\in Y}|F(x_1,x_2^*(x_1),x_3,0^{n-3})|,$$

$$x_3^* := x_3^*(x_1) := x_3^*(x_1,x_2^*(x_1)) \in \arg\max_{x_3\in Y}|F(x_1,x_2^*(x_1),x_3,0^{n-3})| \neq \varnothing \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |F|_3^*(x_1) = |F|_3^*(x_1,x_2^*(x_1)) = |F(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),0^{n-3})|;\ \dots$$

$$\dots\ |F|_j^*(x_1) := |F|_j^*(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),\dots,x_{j-1}^*(x_1)) := \max_{x_j\in Y}|F|_{j-1}^*(x_1) =$$

$$= \max_{x_j\in Y}|F|_{j-1}^*(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),\dots,x_{j-2}^*(x_1)) = \max_{x_j\in Y}|F(x_1,x_2^*(x_1),\dots,x_{j-2}^*(x_1),x_{j-1}^*(x_1),x_j,0^{n-j})|,$$

$$x_j^* := x_j^*(x_1) := x_j^*(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),\dots,x_{j-1}^*(x_1)) \in \arg\max_{x_j\in Y}|F|_{j-1}^*(x_1) =$$

$$= \arg\max_{x_j\in Y}|F|_{j-1}^*(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),\dots,x_{j-2}^*(x_1)) =$$

$$= \arg\max_{x_j\in Y}|F(x_1,x_2^*(x_1),\dots,x_{j-2}^*(x_1),x_{j-1}^*(x_1),x_j,0^{n-j})| \neq \varnothing \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |F|_j^*(x_1) = |F|_j^*(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),\dots,x_{j-2}^*(x_1)) =$$

$$= |F(x_1,x_2^*(x_1),\dots,x_{j-2}^*(x_1),x_{j-1}^*(x_1),x_j^*(x_1),0^{n-j})|,\ 3\leq j\leq N.$$

В том числе, при $j=n$ получим условный по $x_1\in Y$ максимум исходной целевой функции

$$|F|_n^*(x_1) := |F|_n^*(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),\dots,x_{n-1}^*(x_1)) := \max_{x_n\in Y}|F|_{n-1}^*(x_1) =$$

$$= \max_{x_n\in Y}|F|_{n-1}^*(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),\dots,x_{n-2}^*(x_1)) = \max_{x_n\in Y}|F(x_1,x_2^*(x_1),\dots,x_{n-2}^*(x_1),x_{n-1}^*(x_1),x_n)|$$

и соответствующее условное по $x_1\in Y$ оптимальное управление

$$x_n^* := x_n^*(x_1) := x_n^*(x_1,x_2^*(x_1),x_3^*(x_1),\dots,x_{n-1}^*(x_1)) \in \arg\max_{x_n\in Y}|F|_{n-1}^*(x_1) =$$

$$= \arg\max_{x_n \in Y} |F|^*_{n-1}\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), \ldots, x_{n-2}^*(x_1)\right) \neq \varnothing .$$

Тогда искомый безусловный максимум имеет вид:

$$|F|^* = \max_{x_1 \in Y} |F|^*_n(x_1) = \max_{x_1 \in Y} |F|^*_n\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), \ldots, x_{n-1}^*(x_1)\right).$$

Ему соответствует искомое безусловное оптимальное управление

$$X^*\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right):\ x_1^* \in \arg\max_{x_1 \in Y} |F|^*_n(x_1) \ \Rightarrow\ x_n^* = x_n^*\left(x_1^*\right) \in \arg\max_{x_n \in Y} |F|^*_{n-1}\left(x_1^*\right) \ \Rightarrow$$

$$x_{n-1}^* = x_{n-1}^*\left(x_1^*\right) \in \arg\max_{x_{n-1} \in Y} |F|^*_{n-2}\left(x_1^*\right) \ \Rightarrow\ \ldots \ \Rightarrow\ x_3^* = x_3^*\left(x_1^*\right) \in \arg\max_{x_3 \in Y} |F|^*_2\left(x_1^*\right)$$

$$\Rightarrow\ x_2^* = x_2^*\left(x_1^*\right) \in \arg\max_{x_2 \in Y} |F|^*_1\left(x_1^*\right).$$

Пример. Рассмотрим сеть с k=4 узлами 1 (источник), 2, 3, 4 (сток) с матрицей соседства

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

представляющей n=4 ориентированные дуги r_1=(1-2), r_2=(1-3), r_3=(2-4), r_4=(3-4) с таблицей пропускной способности

$$C := \left\| c\left(r_i\left(y_j\right)\right)\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

в зависимости от выделенного ресурса y_1=0, y_2=1, y_3=2, y_4=3, y_4=4. Суммарное значение ресурса U=4. Множество разрезов имеет вид

T={{(1-2),(1-3)},{(1-2),(3-4)},{(1-3),(2-4)},{(2-4),(3-4)}}.

Начальный условный по $x_1 \in Y = \{0,1,2,3,4\}$ максимум частичной целевой функции $|F|^*_2(x_1) := \max_{x_2 \in Y} |F(x_1, x_2, 00)|$ достигается в точке условного по $x_1 \in Y$ оптимального управления

$$x_2^* := x_2^*(x_1) \in \arg\max_{x_2 \in Y} |F(x_1, x_2, 00)| \neq \varnothing \ \Leftrightarrow\ |F|^*_2(x_1) = \left|F\left(x_1, x_2^*(x_1), 00\right)\right|.$$

Рекурсивно определим условные по $x_1 \in Y$ максимумы частичных целевых функций и соответствующие точки условных оптимальных управлений:

$$|F|^*_3(x_1) := |F|^*_3\left(x_1, x_2^*(x_1)\right) := \max_{x_3 \in Y} \left|F\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3, 0\right)\right|,$$

$$x_3^* := x_3^*(x_1) := x_3^*\left(x_1, x_2^*(x_1)\right) \in \arg\max_{x_3 \in Y} \left|F\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3, 0\right)\right| \neq \varnothing \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |F|^*_3(x_1) = |F|^*_3\left(x_1, x_2^*(x_1)\right) = \left|F\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), 0\right)\right|;\ \ldots$$

$$\ldots\ |F|^*_j(x_1) := |F|^*_j\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), \ldots, x_{j-1}^*(x_1)\right) := \max_{x_j \in Y} |F|^*_{j-1}(x_1) =$$

$$= \max_{x_j \in Y} \left|F\right|^*_{j-1}\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), \ldots, x_{j-2}^*(x_1)\right) = \max_{x_j \in Y} \left|F\left(x_1, x_2^*(x_1), \ldots, x_{j-2}^*(x_1), x_{j-1}^*(x_1), x_j, 0^{4-j}\right)\right|,$$

$$x_j^* := x_j^*(x_1) := x_j^*\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), \ldots, x_{j-1}^*(x_1)\right) \in \arg\max_{x_j \in Y} \left|F\right|^*_{j-1}(x_1) =$$

$$= \arg\max_{x_j \in Y} \left|F\right|^*_{j-1}\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), \ldots, x_{j-2}^*(x_1)\right) =$$

$$= \arg\max_{x_j \in Y} \left|F\left(x_1, x_2^*(x_1), \ldots, x_{j-2}^*(x_1), x_{j-1}^*(x_1), x_j, 0^{4-j}\right)\right| \neq \varnothing \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left|F\right|^*_j(x_1) = \left|F\right|^*_j\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), \ldots, x_{j-2}^*(x_1)\right) =$$

$$= \left|F\left(x_1, x_2^*(x_1), \ldots, x_{j-2}^*(x_1), x_{j-1}^*(x_1), x_j^*(x_1), 0^{4-j}\right)\right|,\; 3 \le j \le N.$$

В частности, при j=4 получим условный по $x_1 \in Y$ максимум исходной целевой функции

$$\left|F\right|^*_4(x_1) := \left|F\right|^*_4\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1)\right) := \max_{x_4 \in Y} \left|F\right|^*_3(x_1) =$$

$$= \max_{x_4 \in Y} \left|F\right|^*_3\left(x_1, x_2^*(x_1)\right) = \max_{x_4 \in Y} \left|F\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1), x_4\right)\right|$$

и условное по $x_1 \in Y$ соответствующее оптимальное управление

$$x_4^* := x_4^*(x_1) := x_4^*\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1)\right) \in \arg\max_{x_4 \in Y} \left|F\right|^*_3(x_1) = \arg\max_{x_4 \in Y} \left|F\right|^*_3\left(x_1, x_2^*(x_1)\right) \neq \varnothing.$$

Тогда искомый безусловный максимум имеет вид:

$$\left|F\right|^* = \max_{x_1 \in Y} \left|F\right|^*_4(x_1) = \max_{x_1 \in Y} \left|F\right|^*_4\left(x_1, x_2^*(x_1), x_3^*(x_1)\right).$$

Ему соответствует искомое безусловное оптимальное управление

$$X^*\left(x_1^*, \ldots, x_4^*\right):\; x_1^* \in \arg\max_{x_1 \in Y} \left|F\right|^*_4(x_1) \;\Rightarrow\; x_4^* = x_4^*\left(x_1^*\right) \in \arg\max_{x_4 \in Y} \left|F\right|^*_3\left(x_1^*\right) \;\Rightarrow$$

$$x_3^* = x_3^*\left(x_1^*\right) \in \arg\max_{x_3 \in Y} \left|F\right|^*_2\left(x_1^*\right) \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; x_3^* = x_3^*\left(x_1^*\right) \in \arg\max_{x_3 \in Y} \left|F\right|^*_2\left(x_1^*\right)$$

$$\Rightarrow\; x_2^* = x_2^*\left(x_1^*\right) \in \arg\max_{x_2 \in Y} \left|F\right|^*_1\left(x_1^*\right).$$

Оптимальное распределение ограниченного ресурса позволяет максимизировать скорость перехода СМО при фиксированном потоке заявок от состояния простоя к состоянию полной загрузки каналов, что эквивалентно повышению пропускной способности данной СМО.

Список литературы:

1. Котенко А.П., Докучаев А.В. Оптимизация привлечения дополнительных ресурсов в сетевом планировании. / Вестник СамГТУ. Сер. «Физ.-мат. науки», №1(20), Самара, 2010. – С. 234-238.

2. Котенко А.П., Докучаев А.В. Свойства графов задач сетевого планирования и управления. / Вестник СамГТУ. Сер. «Физ.-мат. науки», №5(21), Самара, 2010. – С. 204-211.