

# ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ МАТЕРИАЛЬНОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ

Д.Ю. Иванов

*Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королева, Самара, Россия*

Основным аппаратом моделирования задач стимулирования в теории управления является теория игр – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [1]. Простейшей игровой моделью является взаимодействие двух игроков – центра и подчиненного ему агента. Такая *организационная система* (ОС) имеет следующую структуру: на верхнем уровне иерархии находится центр, на нижнем – подчиненный ему агент [2]. В качестве центра может выступать работодатель, непосредственный руководитель агента или организация, заключившая трудовой договор с агентом. В качестве агента может выступать наемный работник, подчиненный или организация, являющиеся второй стороной по соответствующему договору.

Стратегией агента является выбор *действия*  $u \in A$ , принадлежащего множеству допустимых (то есть, удовлетворяющих существующим ограничениям) действий  $A$ . Содержательно действием агента может быть количество отработываемых часов, объем произведенной продукции и т. д. Множество допустимых действий представляет собой набор альтернатив, из которых агент производит свой выбор, например, диапазон возможной продолжительности рабочего времени, неотрицательный и не превышающий технологические ограничения объем производства и т. д.

*Механизм стимулирования* называется правило принятия центром решений относительно стимулирования агента. Механизм стимулирования включает в себя систему стимулирования, которая в рамках моделей, рассматриваемых в настоящей работе, полностью определяется функцией стимулирования. Функция стимулирования задает зависимость размера вознаграждения агента, получаемого им от центра, определяемое выбираемыми им действиями.

Стратегией центра является выбор *функции стимулирования*  $\sigma(\cdot) \in M$ ,

принадлежащей допустимому множеству  $M$  и ставящей в соответствие действию агента некоторое неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром, то есть  $\sigma: A \rightarrow \mathfrak{R}_1^+$ . Множество допустимых вознаграждений может ограничиваться как законодательно (например, минимальным размером оплаты труда), так и, например, соображениями экономической эффективности деятельности центра, тарифно-квалификационными требованиями к оплате труда данного агента и т. д. Выбор действия  $y \in A$  требует от агента *затрат*  $c(y)$ . Вводя в рассмотрение функцию затрат, следует понимать, что это стоимостной эквивалент тех усилий, которые затрачивает агент при достижении результата  $y$ . Будем считать далее, что если агент достигнет результата  $y$ , то это принесет центру *доход*  $H(y)$ . *Функцию затрат агента*  $c(y)$  и *функцию дохода центра*  $H(y)$  будем считать известными. Обсуждение проблем и результатов их идентификации изложены в работах [3,4]. Следует отметить, что наиболее сложной проблемой моделирования механизмов стимулирования является адекватная идентификация функции затрат  $c(y)$ .

Интересы участников организационной системы (центра и агента) отражены их *целевыми функциями* (функциями выигрыша, полезности и так далее, в записи которых зависимость от стратегии центра будет опускаться), которые обозначим соответственно:  $\Phi(y)$  и  $f(y)$ .

Целевые функции представляют собой: для агента – разность между стимулированием и затратами:

$$f(y) = \sigma(y) - c(y), \quad (1)$$

а для центра – разность между доходом и *затратами центра на стимулирование* – вознаграждением, выплачиваемым агенту [5]:

$$\Phi(y) = H(y) - \sigma(y). \quad (2)$$

*Рациональное поведение* [6] участника ОС заключается в максимизации (выбором собственной стратегии) его целевой функции с учетом всей имеющейся у него информации и существующих ограничениях.

Определим *информированность игроков* и *порядок функционирования*. Будем считать, что на момент принятия решения (выбора стратегии) участникам ОС известны все целевые функции и все допустимые множества. Специфика теоретико-игровой задачи стимулирования заключается в том, что в ней фиксирован порядок ходов (игра  $\Gamma_2$  с побочными платежами в терминологии теории иерархических игр [7]). Центр – *метаигрок* – обладает

правом первого хода, сообщая агенту выбранную им стратегию – функцию стимулирования, после чего при известной стратегии центра агент выбирает свое действие, максимизирующее его целевую функцию.

Таким образом описаны модели ОС (состав, структура, допустимые множества, целевые функции, информированность и порядок функционирования), что дает возможность сформулировать собственно задачу управления – задачу синтеза оптимального механизма стимулирования.

Так как значение целевой функции агента зависит как от его собственной стратегии – действия, так и от функции стимулирования, то в рамках принятой гипотезы рационального поведения агент будет выбирать действия, которые при заданной системе стимулирования максимизируют его целевую функцию. Понятно, что множество таких действий, называемое множеством *реализуемых действий*, зависит от используемой центром системы стимулирования.

**Основная идея стимулирования** заключается в том, что, варьируя систему стимулирования, центр может побуждать агента выбирать те или иные действия.

Так как целевая функция центра зависит от действия, выбираемого агентом, то *эффективность системы стимулирования* оценивается значением целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых данной системой стимулирования (то есть тех действий, которые агент выбирает при данной системе стимулирования). Следовательно, задача стимулирования заключается в том, чтобы найти такую систему стимулирования, которая обеспечивает максимальную эффективность. Приведем формальные определения.

Множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции (и, естественно, зависящее от функции стимулирования), называется *множеством решений игры*, или *множеством действий, реализуемых данной системой стимулирования*:

$$P(\sigma) = \text{Arg} \max_{y \in A} \{\sigma(y) - c(y)\}. \quad (3)$$

Зная, что агент выбирает действия из множества (3), центр должен найти систему стимулирования, которая максимизировала бы его собственную целевую функцию. Так как множество  $P(\sigma)$  может содержать более одной точки, необходимо доопределить (с точки зрения предположений центра о поведении агента) выбор агента. Если выполнена *гипотеза*

*благожелательности* (ГБ), которую будем считать имеющей место, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения, то агент выбирает из множества (3) наиболее благоприятное для центра действие. Гипотеза благожелательности заключается в следующем: если агент безразличен между выбором нескольких действий (например, действий, на которых достигается глобальный максимум его целевой функции), то он выбирает из этих действий то, которое наиболее благоприятно для центра, то есть действие, доставляющее максимум целевой функции центра. Альтернативой для центра является расчет на наихудший для него выбор агента из множества решений игры.

Следовательно, эффективность системы стимулирования  $\sigma \in M$  равна:

$$K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} \Phi(y), \quad (4)$$

где  $\Phi(y)$  определяется (2).

Задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

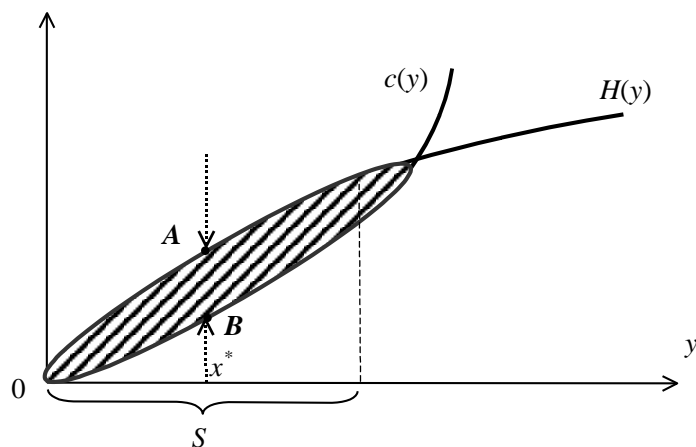
$$K(\sigma) \rightarrow \max_{\sigma \in M}. \quad (5)$$

Отметим, что решение данной задачи «в лоб» достаточно трудоемко. Но можно спрогнозировать оптимальную систему стимулирования исходя из содержательных соображений, а затем корректно обосновать ее оптимальность.

На рис. 1 изображены графики функций:  $H(y)$  и  $c(y)$ . С точки зрения центра стимулирование не может превышать доход, получаемый им от деятельности агента (так как, отказавшись от взаимодействия с агентом, центр всегда может получить нулевую полезность). Следовательно, допустимое решение лежит ниже функции  $H(y)$ . С точки зрения агента стимулирование не может быть меньше, чем сумма затрат и резервная полезность (которую агент всегда может получить, выбирая нулевое действие). Следовательно, допустимое решение лежит выше функции  $c(y)$ .

Множество действий агента и соответствующих значений целевых функций, удовлетворяющих одновременно всем перечисленным выше ограничениям (согласования и индивидуальной рациональности, как для центра, так и для агента), формируют «*область компромиссов*» заштрихованную на рис. 1. Множество действий агента, при которых область компромисса не пуста, называется *множеством согласованных решений*:

$$S = \{x \in A \mid H(x) \geq c(x) \geq 0\}. \quad (6)$$



**Рис. 1.** Оптимальное решение задачи стимулирования

Так как центр стремится минимизировать выплаты агенту при условии, что последний выбирает требуемое действие, то оптимальная точка в рамках гипотезы благожелательности должна лежать на нижней границе области компромисса, то есть **стимулирование в точности должно равняться затратам агента**. Этот важный вывод получил название «*принцип компенсации затрат*». В соответствии с этим принципом, для того чтобы побудить агента выбрать определенное действие, центру достаточно компенсировать затраты агента.

Кроме компенсации затрат, центр может устанавливать также *мотивирующую надбавку*  $\delta \geq 0$ . Если гипотеза благожелательности (ГБ) не выполнена, и при определении эффективности стимулирования центр использует максимальный гарантированный результат (МГР) по множеству максимумов целевой функции агента, то с формальной точки зрения мотивирующая надбавка должна быть строго положительна (но может быть выбрана сколь угодно малой). Если гипотеза благожелательности выполнена, то с формальной точки зрения мотивирующая надбавка может быть выбрана равной нулю. С неформальной точки зрения мотивирующая надбавка отражает аспект нематериального стимулирования.

Следовательно, для того чтобы агент выбрал действие  $x \in A$ , стимулирование со стороны центра за выбор этого действия должно быть не меньше

$$\sigma(x) = c(x) + \delta. \quad (7)$$

Легко видеть, что если в случае выбора агентом других действий

(отличных от  $x$ ) вознаграждение равно нулю, то выполнены как условия согласованности стимулирования, так и условие индивидуальной рациональности агента. При этом стимулирование со стороны центра является минимально возможным. Следовательно, тем самым обосновывается, что параметрическим (с параметром  $x \in S$ ) решением задачи (5) является следующая система стимулирования:

$$\sigma_k(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}, \quad (8)$$

которая называется *компенсаторной (K-типа)*.

Параметр  $x \in A$ , фигурирующий в компенсаторной системе стимулирования, в теории управления называется *планом* – желательным с точки зрения центра действием агента. План является *согласованным*, если его выполнение (выбор действия, совпадающего с планом) выгодно агенту, то есть принадлежит множеству реализуемых действий (тех действий, на которых достигается максимум целевой функции агента). Принцип компенсации затрат является достаточным условием реализации требуемого действия.

Рассмотрим теперь, какое действие следует реализовывать центру, то есть каково оптимальное значение согласованного плана  $x \in S$ .

Так как в силу (6)–(7) стимулирование равно затратам агента, то оптимальным реализуемым действием  $x^*$  является действие, максимизирующее на множестве  $S$  разность между доходом центра и затратами агента. Следовательно, *оптимальный согласованный план* может быть найден из решения следующей стандартной оптимизационной задачи:

$$x^* = \arg \max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}, \quad (9)$$

которая получила название *задачи оптимального согласованного планирования* [8].

Отметим еще одну содержательную интерпретацию условия (9). Оптимальный согласованный план  $x^*$  максимизирует разность между доходом центра и затратами агента, то есть доставляет максимум суммы целевых функций (1) и (2) участников ОС, и, следовательно, является эффективным по Парето. То есть, таким, что не существует другого плана, при выполнении агентом которого, все участники ОС (и центр, и агент) получают не меньший выигрыш, а кто-то из них – строго больший.

Из проведенного выше анализа следует, что решение задачи

стимулирования может быть разделено на два этапа. На *первом этапе* решается *задача согласования* – определяется множество реализуемых при заданных ограничениях действий – множество согласованных планов. На *втором этапе* решается *задача оптимального согласованного планирования* – ищется реализуемое действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра. Подобная идеология разбиения решения задачи управления ОС на два этапа широко используется в теории управления и при решении более сложных задач [9,10].

#### Список литературы:

1. Губко М. В., Новиков Д. А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.
2. Myerson R. B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
3. Кочиева Т. Б., Новиков Д. А. Базовые системы стимулирования. – М.: Апостроф, 2000. – 108 с.
4. Новиков Д. А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003. – 312 с.
5. Новиков Д. А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 1998. – 68 с.
6. Новиков Д. А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.
7. Гермейер Ю. Б. Игры с противоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
8. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
9. Новиков Д. А. Теория управления организационными системами. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
10. Новиков Д. А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.