АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ УЗЛОВ ГРАФА

М.Б. Букаренко

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

Многие задачи логистики, такие как оптимальное с точки зрения минимизации затрат на перевозку размещение складов или оптимальное с точки зрения минимизации затрат на обслуживание удаленных организаций размещение сервисных центров, сводятся к следующей формальной постановке.

Пусть имеется n узлов, каждый из которых может обслуживать сам себя и оставшиеся (n–1) узлов за цену $\omega_{ij} \in \Re$. Пусть $\Omega = \left\|\omega_{ij}\right\|_{i,\,j=1}^{n}$ – матрица весов $\omega_{ij} \in \Re$ (возможно отрицательных) дуг орграфа G с петлями неотрицательного веса $\omega_{ij} \geq 0$. Отсутствие дуги, направленной из вершины x_i в вершину x_j, обозначим символом бесконечности: $\omega_{ij}=\infty$. Требуется разместить m центров обслуживания в вершинах орграфа G таким образом, чтобы суммарные затраты на обслуживание всех n узлов были минимальными. При этом:

1) центр обслуживания может не обслуживать сам себя, т.к. стоимость обслуживания i-й вершины самой себя может оказаться больше, чем стоимость обслуживания j-й вершиной i-й;
2) любая вершина, выбранная в качестве центра, может обслуживать q узлов, $q \in [0, n]$;
3) если хотя бы один узел не может быть обслужен ни одним из центров, то суммарные затраты на обслуживание равны ∞.

Тогда суммарные затраты на обслуживание рассчитываются по формуле

$$C = \sum_{i=1}^{n} \min_{j \in Z} \omega_{ij}^{*}, \quad (1)$$

где Z – подмножество центров обслуживания мощностью m множества вершин орграфа G, ω^*_{ij} – наименьшие суммарные затраты на обслуживание i-*й* вершиной j-й.

Для решения задачи на первом этапе найдем матрицу W_S наименьших суммарных затрат ω^* на обслуживание данным узлом остальных (включая самообслуживание узла обслуживания). Для этого применим, например, алгоритм Беллмана-Форда-Мура, необходимым и достаточным условием применимости которого является отсутствие циклов отрицательного суммарного веса, которое является критерием корректности задачи о существовании пути наименьшей суммарной цены между любой парой сильно связных вершин орграфа.

Для заданного взвешенного графа $G = (V, E)$ количество путей длины $k: d[k][u] = \sum_{v:vu \in E} d[k-1][v]$. Обозначив стартовую вершину через s, перепишем ее для пути кратчайшей длины: $d[k][u] = \min_{v:vu \in E}\left(d[k-1][v] + \omega[uv]\right)$, $d[0][s] = 0,\ d[0][u] = +\infty$. Тогда реализацию данного алгоритма можно представить в виде блох-схемы (рис. 1).

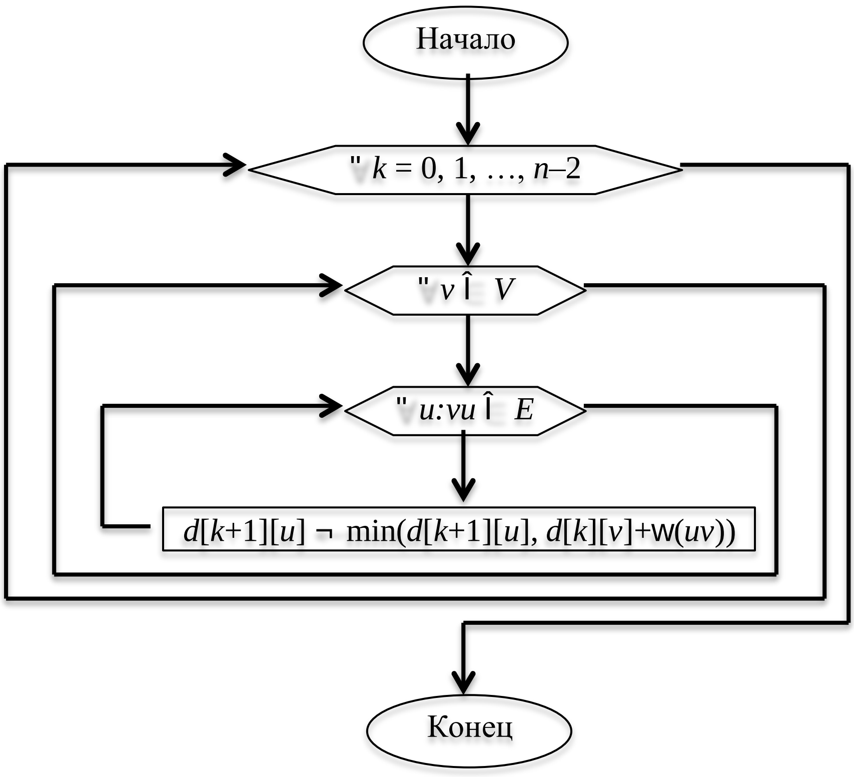

Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма Беллмана – Форда – Мура

Здесь u, v – смежные вершины орграфа G.

При отсутствии отрицательных весов дуг орграфа G целесообразно применить для отыскания W_s алгоритма Дейкстры (рис. 2).

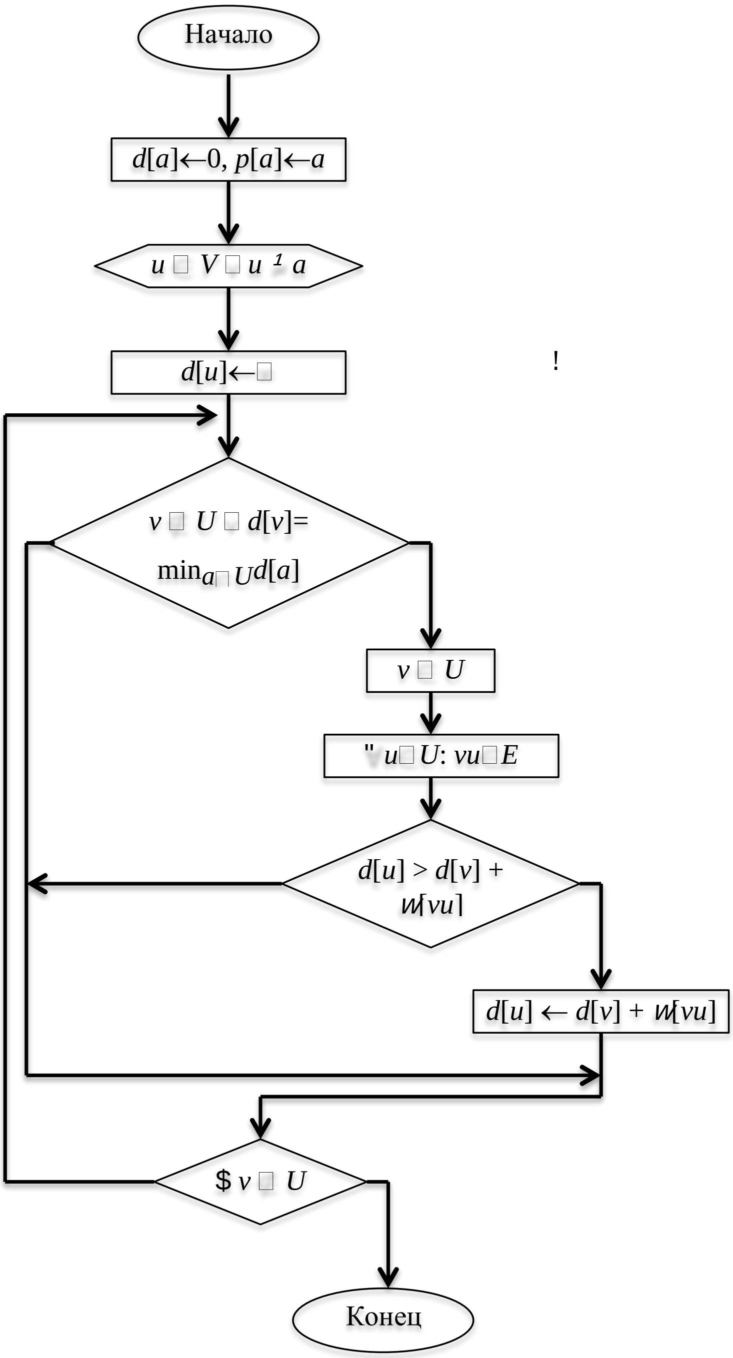

Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма Дейкстры

Здесь a – вершина, расстояния от которой ищутся, U – множество посещенных вершин, $d[u]$ – длина текущего кратчайшего пути из a в u.

Последовательно перебирая m строк матрицы W_S, будем отыскивать такое сочетание из m различных вершин орграфа G, суммарные затраты C которых, рассчитываемые по формуле (1), будут минимальными (рис.3).

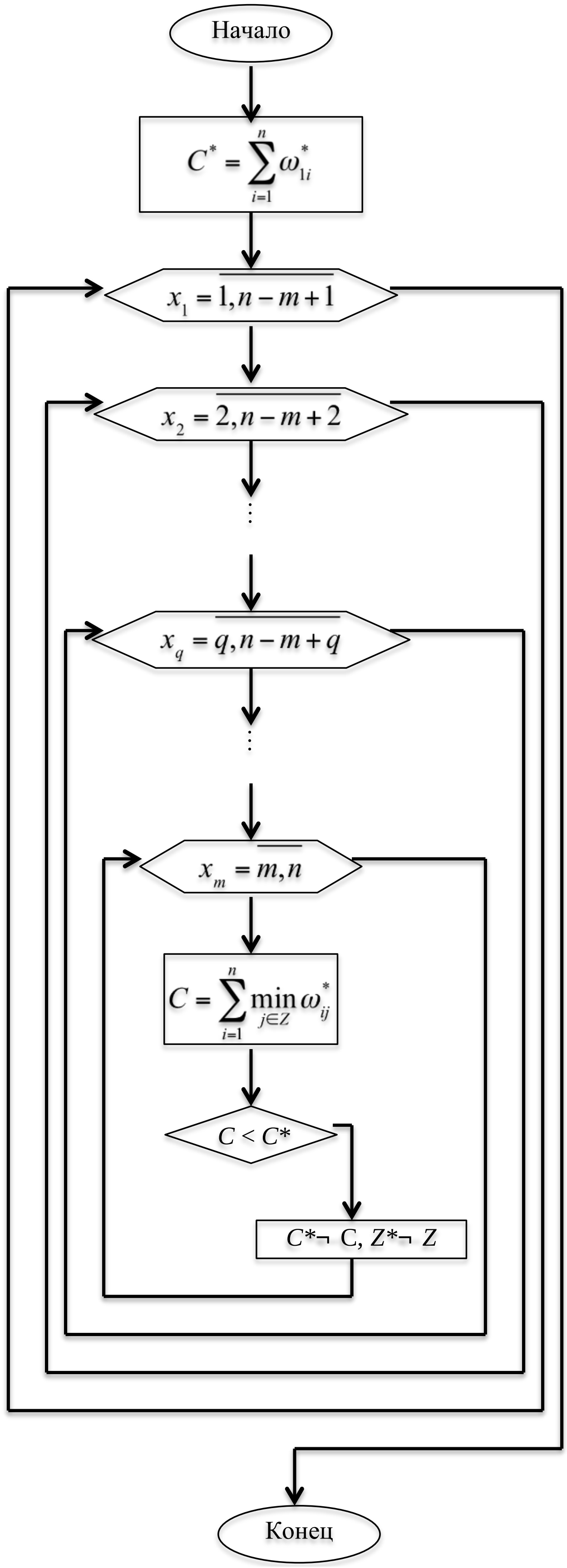

Рисунок 3 – Блок-схема алгоритма оптимального размещения обслуживающих узлов

Здесь Z – текущее подмножество m узлов обслуживания множества вершин орграфа *G*, *C* – текущие суммарные затраты на обслуживание, *Z** – оптимальное множество *m* узлов обслуживания, *C** – минимальные затраты на обслуживание вершин орграфа *G* при размещении узлов обслуживания в вершинах, принадлежащих подмножеству *Z**.

Сложность алгоритма нахождения текущего *C*(*m*,*n*) равна *mn*. Тогда сложность всего алгоритма отыскания *C**, *Z** по матрице W_S равна:

$$O(m,n) = C_n^m mn = \frac{n!n}{(m-1)!(n-m)!}. \quad (2)$$

Предложенный алгоритм решения применим к поставленной задаче произвольной размерности, однако его сложность (2) быстро возрастает с ростом числа обслуживающих узлов, которые необходимо разместить. Поэтому, учитывая широкую распространенность данной задачи на практике и неприемлемо быстрый рост вычислительных затрат на реализацию алгоритма (рис.3), целесообразным является поиск путей снижения *O*(*m*, *n*). Одним из таких путей является предварительное усечение множества рассматриваемых в качестве возможных узлов обслуживания вершин орграфа *G*.