

РАСЧЁТ ВЫНУЖДЕННЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА ПОРШНЕВОГО КОМПРЕССОРА ПРИ РЕЗОНАНСЕ

Капустин П.Н.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
г. Москва, pavel.kapustin.1991@gmail.com

Ключевые слова: поршневой компрессор, коленчатый вал, крутильные колебания.

Во время эксплуатации поршневого компрессора на шатунную шейку коленчатого вала действуют тангенциальная (T) и нормальная (Z) силы, непрерывно изменяющиеся по углу поворота (см. рис. 1а).

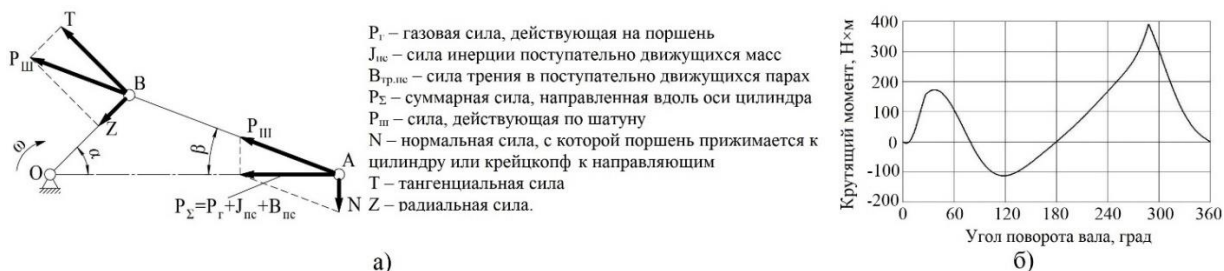


Рисунок 1 - Динамика кривошипно-шатунного механизма: а – силы, действующие в механизме движения поршневого компрессора; б – пример диаграммы крутящего момента, действующего на шатунную шейку

Вследствие переменного крутящего момента, вызванного постоянно изменяющейся тангенциальной силой (см. рис. 1б), возникает периодическое закручивание отдельных участков вала. Данные колебания, вызванные периодически изменяющимся крутящим моментом, называются *крутильными*. Крутильные колебания бывают двух видов: свободные и вынужденные. При свободных колебаниях система, выведенная из состояния покоя, совершает движение под действием только моментов сил упругости вала и моментов сил инерции, связанных с ним масс. Вынужденные крутильные колебания возникают вследствие действия на коленчатый вал периодически изменяющихся крутящих моментов, вызывающих переменные упругие деформации скручивания отдельных участков вала. Дополнительные напряжения от действия крутильных колебаний могут привести к усталостному разрушению вала, поэтому необходимо проводить их тщательный анализ. Переменные нормальные силы вызывают изгибные колебания, однако экспериментальные исследования показывают, что изгибные колебания намного менее опасны, и в первом приближении ими можно пренебречь [1].

Расчёт крутильных колебаний проводится в два этапа. Вначале проводят анализ свободных крутильных колебаний, из которого определяют относительные амплитуды каждой колеблющейся массы (a_i), формы колебаний и узловые точки (места, где максимальное дополнительное напряжение от действия крутильных колебаний), а также порядок резонирующих гармоник (k). Подробный алгоритм расчёта собственных крутильных колебаний коленчатого вала поршневого компрессора приведен в работе [2].

Расчёт вынужденных крутильных колебаний начинается с гармонического анализа крутящего момента, действующего на шатунную шейку. Как видно из рис. 1б диаграмма крутящего момента является периодической, но не гармонической функцией. Однако график крутящего момента удовлетворяет условиям Дирихле [1], поэтому может быть разложена в ряд Фурье:

$$M(t) = \frac{M_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (M_{Ak} \sin(k \cdot \omega \cdot t + \varepsilon_k)),$$

где

$$M_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} M(t) dt; M_{ak} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} M(t) \cos(k\omega t) dt; M_{bk} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} M(t) \sin(k\omega t) dt; M_{Ak} = \sqrt{M_{ak}^2 + M_{bk}^2}; \varepsilon_k = \arctan \left(\frac{M_{bk}}{M_{ak}} \right)$$

Порядок k до которого происходит разложение в ряд Фурье определяется с помощью диаграммы Кэмпбелла по время анализа собственных крутильных колебаний [2].

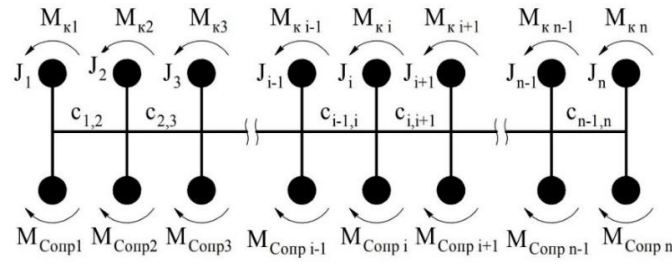


Рисунок 2 - Эквивалентная схема n -массовой крутильной системы

На рис. 2 представлена эквивалентная схема n -массовой крутильной системы. Система дифференциальных уравнений, описывающих вынужденные крутильные колебания имеет вид [3]:

$$\begin{cases} J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c_{1,2} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = M_{Ak1} \cdot \sin(k \cdot \omega_c \cdot t + \varepsilon_{k1}) \\ J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - c_{1,2} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + c_{2,3} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = M_{Ak2} \cdot \sin(k \cdot \omega_c \cdot t + \varepsilon_{k2}) \\ \dots \\ J_i \cdot \ddot{\varphi}_i - c_{i-1,i} \cdot (\varphi_{i-1} - \varphi_i) + c_{i,i+1} \cdot (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = M_{Aki} \cdot \sin(k \cdot \omega_c \cdot t + \varepsilon_{ki}) \\ \dots \\ J_n \cdot \ddot{\varphi}_n - c_{n-1,n} \cdot (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = M_{Akn} \cdot \sin(k \cdot \omega_c \cdot t + \varepsilon_{kn}) \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений имеет вид [3]:

$$\varphi = A_i \cdot \sin(k \cdot \omega_c \cdot t - \gamma_{ki})$$

Работа отдельной i -ой возмущающей гармоник W_{ki} и полная работа W_k определяются:

$$W_{ki} = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} M_{ki} d\varphi_i = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} M_{Aki} \sin(k \cdot \omega_c \cdot t + \varepsilon_{ki}) \cdot A_i \cdot k \cdot \cos(k \cdot \omega_c \cdot t - \gamma_{ki}) d\varphi_i = \pi \cdot M_{Aki} \cdot A_i \cdot \sin(\varepsilon_{ki} + \gamma_{ki})$$

$$W_k = \sum_{i=1}^n W_{ki} = \pi \cdot \sum_{i=1}^n M_{Aki} \cdot A_i \cdot \sin(\varepsilon_{ki} + \gamma_{ki}). \quad (1)$$

Поскольку вал жёсткий и колебания крутильных масс происходит синхронно, угол запаздывания γ_{ki} для всех масс одинаков [1]. Определяется этот угол исходя из условия максимума работы возмущающих гармоник.

$$\frac{dW_k}{d\gamma_k} = \frac{d}{d\gamma_k} \left(\pi \cdot \sum_{i=1}^n M_{Aki} \cdot A_i \cdot \sin(\varepsilon_{ki} + \gamma_{ki}) \right) = \pi \cdot \sum_{i=1}^n M_{Aki} \cdot A_i \cdot (-\sin \varepsilon_{ki} \cdot \sin \gamma_k + \cos \varepsilon_{ki} \cdot \cos \gamma_k) = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получаем выражение для тангенса угла запаздывания:

$$\tan \gamma_k = \sum_{i=1}^n \frac{A_i \cdot M_i \cdot \cos \varepsilon_{ki}}{A_i \cdot M_i \cdot \sin \varepsilon_{ki}}. \quad (3)$$

Подставив значение тангенса угла запаздывания (3) в выражение (1), получим итоговую формулу для полной работы возмущающих гармоник:

$$W_k = \pi \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n M_{ki} \cdot A_i \cdot \sin \varepsilon_{ki} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n M_{ki} \cdot A_i \cdot \cos \varepsilon_{ki} \right)^2}.$$

Работа сил трения в i -ой массе W_{ξ_i} и полная работа сил трения W_{ξ} определяются [4]:

$$W_{\xi_i} = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} M_{\xi_i} d\varphi = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \xi_i \cdot \frac{d\varphi_i}{dt} d\varphi = \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \xi_i \cdot A_i \cdot k \cdot \omega_c \cdot \cos(k\omega_c t - \gamma_{ki}) \cdot A_i \cdot k \cdot \cos(k\omega_c t - \gamma_{ki}) d\varphi_i = \pi \cdot k \cdot \omega_c \cdot \xi_i \cdot A_i^2$$

$$W_{\xi} = \sum_{i=1}^n W_{\xi_i} = \pi \cdot k \cdot \omega_c \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot A_i^2,$$

где ξ_i коэффициент трения, определяемый экспериментально.

Работа сил внутреннего сопротивления (гистерезис) при кручении участка вала $i, i+1$ W_{ψ_i} и полная работа W_{ψ} определяются [3]:

$$W_{\psi_i} = \Delta U_i = \frac{\psi}{2} \cdot c_{i,i+1} \cdot (A_i - A_{i+1})^2,$$

$$W_{\psi} = \sum_{i=1}^{n-1} W_{\psi i} = \frac{\psi}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,i+1} \cdot (A_i - A_{i+1})^2,$$

где ψ коэффициент поглощения, определяемый экспериментально.

Полная работа демпфирующих сил равна:

$$W_{\text{сопр}} = W_{\xi} + W_{\psi} = \pi \cdot k \cdot \omega_c \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot A_i^2 + \frac{\psi}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,i+1} \cdot (A_i - A_{i+1})^2.$$

Демпфирующие силы препятствуют увеличению амплитуд крутильных колебаний при резонансе до бесконечности. Амплитуды возрастают до тех пор, пока не установится равновесие между работами возмущающих сил W_k и сил сопротивления $W_{\text{сопр}}$ [1,3,4].

$$\pi \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n M_{ki} \cdot A_i \cdot \sin \varepsilon_{ki} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n M_{ki} \cdot A_i \cdot \cos \varepsilon_{ki} \right)^2} = \pi \cdot k \cdot \omega_c \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot A_i^2 + \frac{\psi}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,i+1} \cdot (A_i - A_{i+1})^2.$$

С учётом выражения для относительных амплитуд [1-4]:

$$a_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1, a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \dots, a_i = \frac{A_i}{A_1}, \dots, a_n = \frac{A_n}{A_1}$$

выражение для поиска действительной амплитуды каждой крутильной массы принимает вид:

$$A_i = a_i \cdot \frac{\pi \cdot \sqrt{(\sum_{i=1}^n M_{ki} \cdot a_i \cdot \sin \varepsilon_{ki})^2 + (\sum_{i=1}^n M_{ki} \cdot a_i \cdot \cos \varepsilon_{ki})^2}}{\pi \cdot k \cdot \omega_c \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot a_i^2 + \frac{\psi}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,i+1} \cdot (a_i - a_{i+1})^2}.$$

Определив действительные амплитуды, находят момент силы упругости для каждого участка вала M_y и амплитудное значение дополнительного напряжения τ_a :

$$M_y = c_{i,i+1} \cdot (A_{i+1} - A_i),$$

$$\tau_a = \pm \frac{M_y}{W_{\text{кр}}}.$$

Список литературы

1. Гоц, А.Н. Крутильные колебания коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей: учеб. пособие / А.Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 200 с.
2. Капустин П.Н. Определение собственных частот крутильных колебаний вала многорядного поршневого компрессора / П.Н. Капустин, Т.С. Дегтярева // Компрессорная техника и пневматика. – 2022. – №2. – С.26-30.
3. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. Справочное пособие / Г.С. Маслов. – М.: Машиностроение, 1968. – 272 с.
4. Истомин П.А. Крутильные колебания в судовых ДВС / П.А. Истомин. – Л.: Судостроение, 1968. – 303 с.

Сведения об авторах

Капустин П.Н., МГТУ им. Н.Э. Баумана, аспирант; АО «Технолизинг», ведущий инженер-механик. Область научных интересов: динамические и прочностные расчёты деталей вакуумных, компрессорных и гидравлических машин; химические процессы получения метанола и аммиака.

FORCED TORSIONAL VIBRATIONS CALCULATION OF THE CRANKSHAFT OF A RECIPROCATING COMPRESSOR AT RESONANCE POINT

Kapustin P.N.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia, pavel.kapustin.1991@gmail.com

Keywords: reciprocating compressor, crankshaft, torsional vibrations.

During the operation of a reciprocating compressor continuously changing tangential forces act on the crankpin of the crankshaft and cause periodic twisting of individual crankshaft sections. These periodic angular oscillations are called torsional vibrations. Additional stresses generated by torsional vibrations near resonance points often lead to crankshaft fatigue. That is why thorough torsional vibration analysis