Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова, А.С. Лосев

ВЕРОЯТНОСТЬ НЕСВЯЗНОСТИ ГРАФА НА ДВУМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

(ИПМ ДВО РАН, ДВФУ)

Введение

Рассмотрим неориентированный связный граф G с множеством вершин U и множеством ребер V, уложенный на двумерном многообразии S так, что его ребра не пересекаются в своих внутренних точках. Полагаем, что ребра графа G независимо отказывают с вероятностью h. Нашей задачей является вычисление асимптотики вероятности несвязности P_h графа G при $h \to 0$.

В силу формулы Буртина-Питтеля [1] $P_h \sim c_m h^m, h \to 0$, где m - минимальная длина коцикла графа G, а c_m - число таких коциклов. По определению разрез графа - совокупность ребер, удаление которых делает его несвязным, а коцикл - минимальный по теоретико-множественному включению разрез. Эта формула была применена к планарным графам и графам, уложенным на торе, и было обнаружено, что в некоторых случаях точность асимптотической формулы является недостаточной.

В настоящей работе формула Буртина-Питтеля уточнена применительно к графам, уложенным на двумерном многообразии достаточно общего вида, имеющем плоскую развертку. Такая постановка задачи вытекает из моделей наноструктур [2], фуллеренов и графенов [3]. Для ее решения используется соответствие между коциклами графа G и простыми циклами в двойственном графе G^*, а также формулы для подсчета числа простых циклов [4, 5]. Под двойственным понимаем граф, в котором вершинами являются грани графа G, а ребрами являются ребра графа G, разделяющие грани.

1. Основной результат

Пусть множество V состоит из n ребер. Обозначим C_k множество всех коциклов длины k (содержащих k ребер), а c_k число коциклов длины k. Тогда множество C всех коциклов графа G удовлетворяет равенству

$$C = \bigcup_{m \le k \le n} C_k. \qquad (1)$$

В силу (1) $P_h = F(C)$, где $F(C')$ вероятность отказа всех ребер какого-либо коцикла, входящего в множество C', $C' \subseteq C$. Определим

$$A = \bigcup_{m \le k < l} C_k,\ B = \bigcup_{l \le k \le n} C_k,\ C = A \bigcup B.$$

Лемма 1. *Для любого $l > 1$ справедлива следующая формула*

$$P_h = F(A) + O(h^l),\ h \to 0. \qquad (2)$$

Доказательство. По определению

$$P_h = F\left(A \bigcup B\right) = F(A) + F(B) - F\left(A \bigcap B\right),$$

причем

$$F\left(A \bigcap B\right) \le F(B) \le \sum_{l \le k \le n} F(C_k) = \sum_{l \le k \le n} c_k h^k = O(h^l).$$

Отсюда следует формула (2). Лемма доказана.

Условие двойственности. Для любого $k, m \le k < l(m)$, между коциклами длины k в графе G и простыми циклами длины k в двойственном графе G^* существует взаимно-однозначное соответствие. Здесь

$$l = l(m) = \min\{k : k = 1,2,\dots, k \ge 3m/2\}.$$

Замечание. Из теоремы Уитни [6, Теорема 1.5] следует, что это условие для планарного графа выполняется.

Лемма 2. *В графе G для любых коциклов $a \in C_k$, $b \in C_t$, $m \le k, t < l(m)$, число ребер L в объединении $a \bigcup b$ больше или равно $l(m)$.*

Доказательство. Обозначим a^*, b^* простые циклы, соответствующие коциклам a, b, соответственно. Тогда число L равно числу ребер в объединении $a^* \bigcup b^*$. Если у циклов a^*, b^* не более одной общей вершины, то $L \ge 2m$, где m - минимальная длина цикла в двойственном графе G^* по определению.

Пусть теперь у циклов a^*, b^* есть хотя бы две общие вершины 1, 2. Будем двигаться по часовой стрелке вдоль циклов a^*, b^*, начиная с вершины 1, до вершины 2 (рис. 1). Пусть k_a, k_b число ребер на пути 1, 2 в циклах a^*, b^*, соответственно, а K_a число ребер в цикле a^*. По определению $L \ge K_a + k_b$,

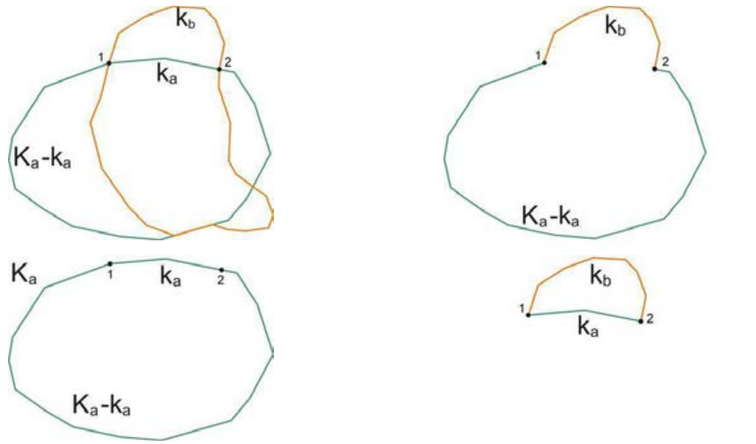

Рис. 1. Графическая иллюстрация доказательства

причем в объединении циклов a^*, b^* можно выделить три простых цикла с числом ребер $K_a \ge m,$ $k_a + k_b \ge m,$ $k_b + K_a - k_a \ge m.$ Суммируя эти неравенства, имеем $2(K_a + k_b) \ge 3m,$ следовательно, $L \ge 3m/2$ и $L \ge l(m).$

Теорема 1. *При выполнении условия двойственности для графа* G, *уложенного на двумерном многообразии* S, *справедлива формула*

$$P_h = \sum_{m \le k < l} c_k h^k + O(h^l),\ h \to 0. \tag{3}$$

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно доказать, что

$$F(A) = \sum_{m \le k < l} c_k h^k + O(h^l),\ h \to 0. \tag{4}$$

Потребуются следующие соотношения:

$$\sum_{m \le k < l} F(C_k) - \sum_{m \le k < t < l} F\left(C_k \bigcap C_t\right) \le \sum_{m \le k < l} F(C_k), \tag{5}$$

$$\sum_{f \in C_k} F(f) - \sum_{f,\, g \in C_k,\, f \ne g} F\left(f \bigcup g\right) \le F(C_k) \le \sum_{f \in C_k} F(f), \tag{6}$$

$$\sum_{f \in C_k} F(f) = c_k h^k,\ k \ge 1,\ F\left(C_k \bigcap C_t\right) \le \sum_{f \in C_k,\, g \in C_t} F\left(f \bigcup g\right). \tag{7}$$

В силу леммы 2

$$F\left(f \bigcup g\right) = O(h^l),\ f \in C_k,\ g \in C_t,\ m \le k \le t < l,\ f \ne g. \tag{8}$$

Из соотношений (5) - (8) получаем формулу (4) и вытекающую из нее формулу (3). Теорема доказана.

2. Вычислительные эксперименты

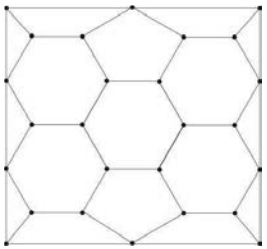

Рис. 2. Планарный граф

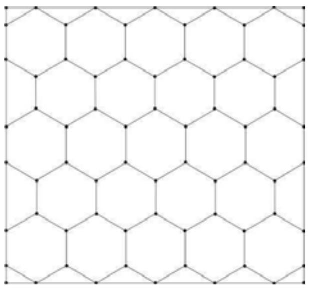

Рис. 3. Граф, уложенный на торе

Рассмотрим связный планарный граф G (рис. 1). В этом графе $m = 3,$ $l = 5, c_3 = 22, c_4 = 33.$ Вероятность несвязности графа рассчитывалась методом Монте-Карло с 10^6 числом реализаций (результат обозначен P_{MC}), по формуле Буртина-Питтеля (результат обозначен P_{BP}) и по асимптотической

формуле (3) (результат обозначен P_h). Полученные результаты вместе с относительными погрешностями вычислений Δ_{BP}, Δ_h

$$\Delta_{BP} = \frac{|P_{MC} - P_{BP}|}{P_{MC}},\ \Delta_h = \frac{|P_{MC} - P_h|}{P_{MC}}$$

занесены в таблицу.

Планарный граф					
h	P_{MC}	P_{BP}	P_h	Δ_{BP}	Δ_h
0,01	0,000023	0,000022	0,00002233	0,043	0,029
0,02	0,000179	0,000176	0,000176	0,017	0,011

Тор имеет плоскую развертку в виде квадрата со склеивающимися противоположными сторонами. Рассмотрим граф $G,$ уложенный на торе (рис. 3), вершины которого на сторонах квадрата при склеивании противоположных сторон склеиваются. В этом графе минимальная длина пояса, нестягиваемого на торе непрерывно в точку равна $l = 5,$ $m = 3,$ $c_3 = 42, c_4 = 57.$ Результаты вычислений приведены в таблице.

Граф, уложенный на торе					
h	P_{MC}	P_{BP}	P_h	Δ_{BP}	Δ_h
0,01	0,000043	0,000042	0,00004257	0,023	0,01
0,02	0,000361	0,000336	0,00034512	0,069	0,044

Литература

1. Буртин Ю., Питтель Б. Асимптотические оценки надежности сложных систем// Техническая кибернетика, 1972. Т. 10. № 3. С. 90-96.

2. Еняшин А.Н., Ивановский А.Л. Электронные энергетические и термические свойства ленты Мебиуса и родственных кольцевых наноструктур NbS_3// Физика твердого тела. 2006. Т. 48, вып. 4. С. 732-736.

3. Buchstaber V.M., Erokhovets N.Yu. Graph-truncations of simple polytopes// Proc. of Steklov Math. Inst. Maik. Moscow. 2015. Vol. 285.

4. Harary F., Manvel B. On the Number of Cycles in a Graph// Matematicky casopis, 1971. Vol. 21. No. 1. P. 55-63.

5. Воропаев А.Н. Вывод явных формул для подсчета циклов фиксированной длины в неориентированных графах// Информационные процессы, 2011. Т. 11. № 1. С. 90-113.

6. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО. 2004.