Теорема: Последовательность $\{\eta_t\}_{t=0}^{\infty}$ образует мартингал относительно последовательности σ - алгебр, $\{\zeta_t\}_{t=0}^{\infty}$

б) Если $u_{f^2,0,0}(x,t) < +\infty$ и $u_{|f|,0,0}(x,t) < +\infty$, то η_t является квадратично интегрируемой.

Литература

1. Купцов Л.П. О свойстве средного для обобщенного уравнения А.Н. Колмогорова I //Дифф.уравнение 1983,т. XIX, № 2.
2. Кушнер Г.Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах и теории эллиптических уравнений. Москва. Наука. 1985.222 с.

А.М. Шокиров

ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В MSEXCEL

(Ферганский филиал Ташкентского университета
информационных технологии)

Численное вычисление определенного интеграла методом прямоугольников и трапеций. Рассмотрим два разных интеграла

$$I = \int_{-1}^{+1} \sqrt{2+x}\,dx, \tag{1}$$

$$I = \int_{3}^{7} x^2 \ln x dx. \tag{2}$$

Простейшим методом численного интегрирования является метод прямоугольников. Он непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой

$$\int_a^b f(x)dx = S; \tag{3}$$

$$S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{4}$$

В качестве точек ξ_i выберем средние точки элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\xi_i = x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2 = x_{i-1} + h_{i/2}; \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Тогда (1) и (2) запишутся так:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot f(x_{i-1/2});\ i=1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Формула (4) и есть формула прямоугольников. Эта формула использует интерполяцию нулевого порядка (кусочно постоянную) (см. рис. 1).

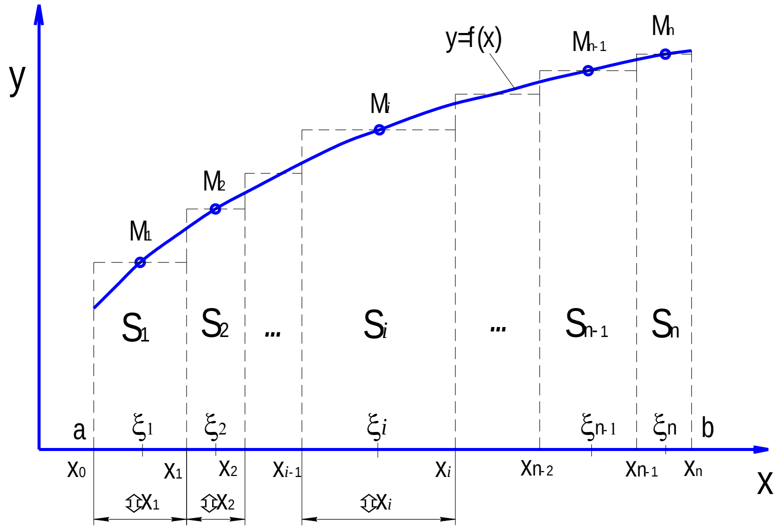

Рис. 1. Геометрический смысл определенного интеграла

Метод трапеций использует линейную интерполяцию, т.е. график функции $y=f(x)$ представляется в виде ломанной, соединяющей точки с координатами (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i). В этом случае площадь всей фигуры (криволинейной трапеции) складывается из площадей элементарных прямолинейных трапеций (рис. 2).

Площадь каждой элементарной трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot h_i;\ (i = 1, 2,\ \ldots,\ n)\ . \tag{7}$$

Складывая площади элементарных фигур, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i(y_{i-1} + y_i)\,. \tag{8}$$

Важным частным случаем рассмотренных формул является их применение при численных интегрирований с постоянным шагом $h_i = h = const$

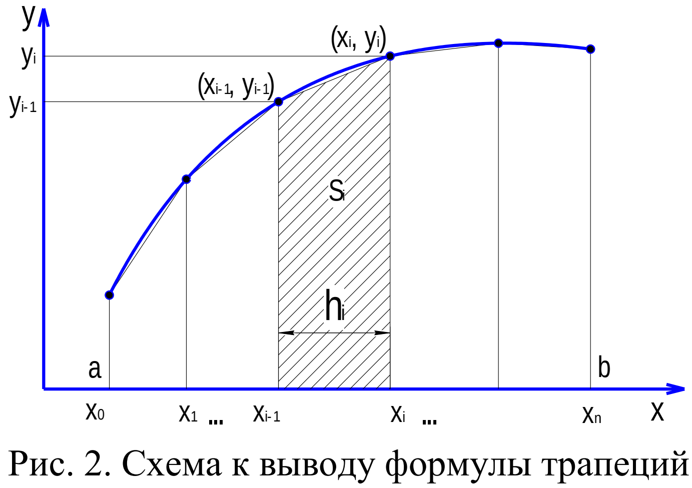

Рис. 2. Схема к выводу формулы трапеций

$(\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Формулы прямоугольников и трапеций в этом случае принимают соответственно вид:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}) = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2}\,, \qquad (9)$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\Big(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\Big). \qquad (10)$$

Описание алгоритма решения

Пример вычисления определенного интеграла (1), (2) методом трапеции (10) в MSExcel показано в Рис. 3-4

	A		B	C	D	E	F
1	Исходные данные						
2						x	y
3	Нижний предел интеграла	a=	3		X0	3	9,88751
4	Верхний предел интеграла	b=	7		X1	3,4	14,1468
5	Отрезки разбиения	n=	10		X2	3,8	19,2774
6					X3	4,2	25,3149
7					X4	4,6	32,2914
8	результат				X5	5	40,2359
9	Шаг интегрирования	h=	0,4		X6	5,4	49,1754
10	результат интегрирования	y=	177,8		X7	5,8	59,1343
11					X8	6,2	70,1357
12					X9	6,6	82,2008
13					X10	7	95,3496

Рис. 3 Решение определенного интеграла (2) методом трапеций (10)

	A		B	C	D	E	F
1	Исходные данные						
2						x	y
3	Нижний предел интеграла	a=	-1		X0	-1	1
4	Верхний предел интеграла	b=	1		X1	-0,8	1,09545
5	Отрезки разбиения	n=	10		X2	-0,6	1,18322
6					X3	-0,4	1,26491
7					X4	-0,2	1,34164
8	результат				X5	0	1,41421
9	Шаг интегрирования	h=	0,2		X6	0,2	1,48324
10	результат интегрирования	y=	3,143		X7	0,4	1,54919
11					X8	0,6	1,61245
12					X9	0,8	1,67332
13					X10	1	1,73205

Рис. 4 Решение определенного интеграла (1) методом трапеций (10)

Пример вычисления определенного интеграла (1), (2) методом прямоугольников (9) в MSExcel показано Рис. 5-6

	A	B	C	D	E	F
1	Исходные данные					
2					x	y
3	Нижний предел интеграла a=	3		X0	3	9,88751
4	Верхний предел интеграла b=	7		X1	3,4	14,1468
5	Отрезки разбиения n=	10		X2	3,8	19,2774
6				X3	4,2	25,3149
7				X4	4,6	32,2914
8	результат			X5	5	40,2359
9	Шаг интегрирования h=	0,4		X6	5,4	49,1754
10	результат интегрирования y=	198,9		X7	5,8	59,1343
11				X8	6,2	70,1357
12				X9	6,6	82,2008
13				X10	7	95,3496

Рис. 5 Решение определенного интеграла (2) методом прямоугольников(9)

1	Исходные данные					
2					x	y
3	Нижний предел интеграла a=	-1		X0	-1	1
4	Верхний предел интеграла b=	1		X1	-0,8	1,09545
5	Отрезки разбиения n=	10		X2	-0,6	1,18322
6				X3	-0,4	1,26491
7				X4	-0,2	1,34164
8	результат			X5	0	1,41421
9	Шаг интегрирования h=	0,2		X6	0,2	1,48324
10	результат интегрирования y=	3,07		X7	0,4	1,54919
11				X8	0,6	1,61245
12				X9	0,8	1,67332
13				X10	1	1,73205

Рис. 6 Решение определенного интеграла (1) методом прямоугольников(9)

Литература

1. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров [Текст]: Учеб.пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Высш. шк., 1994.–544 с.

2. Бахвалов Н.С. Численные методы[Текст]: Учеб.пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 624с.

3. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование[Текст]: Учеб.пособие / Ю.П. Боглаев. - М: Высш.шк., 1990. – 544 с.