



Следующим шагом была оптимизация параметров технических ресурсов при увеличении нагрузки на распределительный центр. Интервал прибытия грузовиков с паллетами на распределительный центр уменьшился до 15 минут, а время обработки поставок составило 16 минут. Время моделирования и оптимизация составляло 10 000 минут. Последовательность этапов оптимизации была аналогична вышеуказанной. В результате оптимизации при повышенной нагрузке на распределительный центр общее число ячеек для паллет увеличилось с 120 до 250. При этом время нахождения паллет на стеллажах составило 5.16 минут.

### Выводы

Осуществлена разработка структурной модели работы распределительного центра.

Проведена оптимизация имитационной модели работы распределительного центра за счет изменения параметров технических ресурсов. Предложенный алгоритм оптимизации позволяет сократить время нахождения паллет на стеллажах, уменьшив при этом нагрузку на технические ресурсы, и тем самым снизить затраты.

### Литература

1. Мокшин В.В., Якимов И.М. Метод формирования модели анализа сложной системы / Информационные технологии. 2011. № 5. С. 46-51.
2. И.М. Якимов, А.П. Кирпичников, В.В. Мокшин, Вестник Казанского технологического университета, 17, 4, 298-303 (2014).
3. И.М. Якимов, А.П. Кирпичников, В.В. Мокшин, Вестник Казанского технологического университета, 17, 13, 352-357 (2014).
4. В.В. Мокшин, Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, 3, 89-93 (2009).
5. Мокшин В.В., Кирпичников А.П., Якимов И.М., Захарова З.Х. Вестник Технологического университета, 20, 18, 120-126 (2017).
6. В.С. Моисеев, П.И. Тутубалин, Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, 2, 129-135 (2011).

Э.Г. Ахметшина

## СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЭРЛАНГОВСКИМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

(Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики)

Данная работа посвящена исследованию систем массового обслуживания (СМО)  $E_2/E_2/1$  с эрланговскими входными распределениями 2-го порядка и с запаздыванием во времени. Обе эти системы относятся к типу  $G/G/1$ . В теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде для общего случая.



В работе авторов [1] впервые приведены результаты по исследованию системы М/М/1 с запаздыванием во времени со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями. Результаты работы [1] позволяют развить теорию метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) также на сдвинутые гиперэкспоненциальные и эрланговские распределения. Метод спектрального разложения решения ИУЛ составляет важную часть теории систем G/G/1. Одна из форм уравнения Линдли выглядит так:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

При кратком изложении метода решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [2]. Для этого через  $A^*(s)$  и  $B^*(s)$  обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$  представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от  $s$ . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение:  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  некоторые рациональные функции от  $s$ , которые можно разложить на множители.

Для системы  $E_2/E_2/1$  законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}, \quad (1)$$

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (2)$$

Для такого общего вида задания функций (1) и (2), решения для среднего времени ожидания для системы  $E_2/E_2/1$  в классике по теории массового обслуживания [2,3] авторами не найдено и поэтому это решение находим классическим методом спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в [3]. Такой подход позволяет определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания.

Тогда, учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [5], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию.

Преобразования Лапласа функций (1) и (2) будут соответственно:

$$A^*(s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2; \quad B^*(s) = \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2.$$

Спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $E_2/E_2/1$ :

$A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 * \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1 = \\ &= \frac{16\lambda^2\mu^2 - (2\lambda - s)^2(2\mu + s)^2}{(2\lambda - s)^2(2\mu + s)^2} = \frac{-s[s^2 + 2(\mu - \lambda)s - 8\lambda\mu]}{(2\lambda - s)^2(2\mu + s)^2} \end{aligned}$$



Квадратное уравнение, полученное из числителя  $s^2 + (2\mu - \lambda)s - 8\lambda\mu = 0$  имеет отрицательный корень  $-s_1 = -(\mu - \lambda) - \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ , т.к. в случае стабильной системы  $\lambda < \mu$ , т.е.  $(\mu - \lambda) > 0$ ;  $s_3 = -(\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ .

Тогда нули числителя разложения  $\Psi_+(s) / \Psi_-(s)$ :

$s = 0$ ;  $-s_1 = -(\mu - \lambda) - \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ ;  $-s_2 = -2(\mu - \lambda)$  (два отрицательных корня и один положительный корень)  $s_3 = -(\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ . Полюсы разложения  $\Psi_+(s) / \Psi_-(s)$ :  $s = 2\lambda$ ,  $s = -2\mu$  (см. рис.1).

Теперь с учетом условий (1) построим функции  $\Psi_+(s)$  и  $\Psi_-(s)$ :

$$\Psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2}; \quad \Psi_-(s) = -\frac{(2\lambda+s)^2}{(s-s_3)}$$

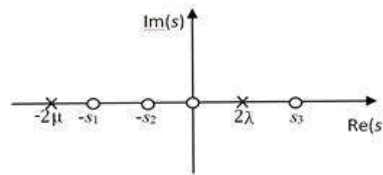


Рис.1. Нули и полюсы функции  $\Psi_+(s) / \Psi_-(s)$

На рис.1 полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками. Далее по методике спектрального разложения найдем константу К:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2}$$

Преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = s * \Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (2\mu+s)^2}{4\mu^2 s (s+s_1)(s+s_2)} \quad (3)$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s = 0$ :

$$-\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = -\frac{s_1 s_2}{4\mu^2} \times \left[ \frac{2(2\mu+s)(s+s_1)(s+s_2) - (2\mu+s)^2(2s+s_1+s_2)}{(s+s_1)^2 (s+s_2)^2} \right]_{s=0} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2} \left[ \frac{4\mu^2 (s+s_1) - 4\mu s_1 s_2}{s_1^2 s_2^2} \right]_{s=0} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu}$$

Окончательно, среднее время ожидания для системы  $E_2/E_2/1$ :

$$\bar{W} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu} \quad (4)$$

Далее рассмотрим СМО, для которой законы распределения входного потока и времени обслуживания заданы функциями плотности:

$$a(t) = 4\lambda^2 (t-t_0) e^{-2\lambda(t-t_0)}, \quad (5)$$

$$b(t) = 4\mu^2 (t-t_0) e^{-2\mu(t-t_0)} \quad (6)$$

Такую систему обозначим  $E_2^- / E_2^- / 1$ .

Спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $E_2^- / E_2^- / 1$  имеет точно такой же вид, как и для системы  $E_2 / E_2 / 1$ .

Для определения неизвестных параметров распределения  $E_2^-$  воспользуемся преобразованием Лапласа функции (5). Среднее значение интервала между



поступлениями дает первая производная от преобразования Лапласа со знаком минус в точке  $s=0$ :

$$-\left. \frac{dA^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \left[ \frac{8\lambda^2}{(2\lambda+s)^3} e^{-t_0s} + \left( \frac{2\lambda}{2\lambda+s} \right)^2 t_0 e^{t_0s} \right] \Bigg|_{s=0} = 1/\lambda + t_0. \quad \text{Отсюда} \quad \bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0. \quad (7)$$

Второй начальный момент интервала между поступлениями

$$\left. \frac{d^2 A^*(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2 \quad \text{Отсюда} \quad \bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2.$$

Определим квадрат коэффициента вариации :  $c_\lambda^2 = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2} = \frac{1}{2(1+\lambda t_0)^2}.$

$$c_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\lambda t_0)}. \quad (8)$$

Заметим, что для распределения  $E_2$ :  $\bar{\tau}_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ ,  $c_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Для времени обслуживания по закону  $E_2^-$  получим аналогичные выражения для интенсивности обслуживания  $\mu$  и коэффициента вариации  $c_\mu$ .

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0 \quad (9)$$

$$c_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\mu t_0)} \quad (10)$$

Исходя из полученных параметров распределения для системы  $E_2^-/E_2^-/1$ . время ожидания для нее определяем из выражения:

$$\bar{W} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (11)$$

В табл.1 приведены данные расчетов для системы  $E_2^-/E_2^-/1$  для малой ( $\rho=0.1$ ), средней ( $\rho=0.5$ ) и высокой нагрузки ( $\rho=0.9$ ).

В правой колонке приведены данные для системы  $E_2/E_2/1$ . Среднее время ожидания в системе с запаздыванием  $E_2^-/E_2^-/1$  меньше, чем в системе  $E_2/E_2/1$ .

Исходя из результатов можно сделать выводы:

1. Систему  $E_2^-/E_2^-/1$  с запаздыванием для анализа телетрафика можно использовать в том случае, если коэффициенты вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  меньше  $1/\sqrt{2}$ .

2. Систему  $E_2^-/E_2^-/1$  можно использовать для диапазона изменения коэффициентов вариаций интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  от 0 до  $1/\sqrt{2}$ .

3. Система  $E_2^-/E_2^-/1$  с запаздыванием на выходе обеспечивает меньшее время ожидания, чем обычная система  $E_2/E_2/1$  за счет уменьшения коэффициентов вариаций интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  в результате сдвига законов распределения на величину  $t_0 > 0$ .



Таблица 1. Результаты экспериментов для СМО  $E_2^-/E_2^-/1$  и  $E_2/E_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	Для $E_2^-/E_2^-/1$	Для $E_2/E_2/1$
0,1	0,64	0,07	0,9	0,000	0,017
	0,67	0,35	0,5	0,002	
	0,70	0,64	0,1	0,013	
	0,71	0,70	<b>0,01</b>	<b>0,016</b>	
0,5	0,39	0,07	0,9	0,001	0,390
	0,53	0,35	0,5	0,081	
	0,67	0,64	0,1	0,309	
	0,70	0,70	<b>0,01</b>	<b>0,382</b>	
0,9	0,13	0,07	0,9	0,034	4,359
	0,39	0,35	0,5	1,057	
	0,64	0,64	0,1	3,519	
	0,70	0,70	<b>0,01</b>	<b>4,271</b>	

### Литература

1. Тарасов В.Н. Бахарева Н.Ф., Блатов И.А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, И.А. Блатов // Автоматика и телемеханика – 2015. - № 11. – С.51–59.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. под редакцией В.И. Неймана. М. Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием / В.Н. Тарасов // Автоматика и телемеханика - 2018. - №12. - С.57-70.
4. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В.Н. Тарасов // Проблемы передачи информации - 2016. - №1. - С.16-26.
5. <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).