высить адекватность модели экспериментальным данным и, тем самым, достоверность оценок параметров напряженно деформируемого состояния.

Литература

1. Радченко, В.П. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях/В. П. Радченко, М.Н. Саушкин М.: Машиностроение-1, 2005. – 226 с.

2. Зотеев, В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений/В. Е. Зотеев.- М.: Машиностроение, 2009.-344 с.

3. Гриневич, Е.В. Исследование полей остаточных напряжений при поверхностном упрочнении цилиндрических изделий // Прочность и долговечность элементов конструкций/Е.В. Гриневич, О.В. Колотникова – Куйбышев: КПтИ, 1983. – С. 88-97.

Д.В. Иванов, Е.А. Донец

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ БИЛИНЕЙНЫХ ARX СИСТЕМ С ПОМЕХОЙ НАБЛЮДЕНИЯ ВО ВХОДНОМ СИГНАЛЕ

(Самарский государственный университет путей сообщения)

Билинейные системы - это класс нелинейных систем с простой структурой. Билинейные системы являются простейшим обобщением линейных динамических систем: выходной сигнал зависит не только от входных и выходных сигналов, но и от произведения входного сигнала на выходной. Моделирование физических процессов с помощью билинейных систем находит применение во многих областях науки, таких как ядерная физика, электрические сети, химическая кинетика, гидродинамика и т.д. [1].

Модели ошибки уравнения (ARX модели) [2] наиболее распространенный вид моделей параметризации шума. Идентификация моделей ошибки уравнения сводится к классической задаче регрессионного анализа и может быть решена методом наименьших квадратов. Однако во многих практических задачах помеха содержится также и во входном сигнале, в этом случае классический метод наименьших квадратов не позволяет получать состоятельные оценки.

В настоящее время активно развиваются методы идентификации билинейных динамических систем, такие как инструментальные переменные [3], компенсирующий смещение метод наименьших квадратов [4], метод максимального правдоподобия [5] и методы на основе высших статистик [6]. Рекуррентные методы идентификации билинейных систем, которые могут быть получены из рекуррентных методов идентификации линейных систем приведены в [7]. В статье предложен рекуррентный алгоритм оценивания параметров билинейных ARX систем с помехой во входном сигнале на основе стохастической аппроксимации.

Пусть билинейная динамическая система описывается стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \ldots -1,0,1\ldots$:

$$z_i - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} z_{i-m} = \sum_{m=0}^{r_1} a_0^{(m)} x_{i-m} + \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3(m)} c_0^{(mk)} x_{i-m} z_{i-k} + \xi_1(i),\ w_i = x_i + \xi_2(i), \quad (1)$$

где x_i, w_i-ненаблюдаемая и наблюдаемая входные переменные;

z_i – наблюдаемая выходная переменная;

$\xi_1(i)$ - помеха в уравнении; $\xi_2(i)$ – помеха наблюдения во входном сигнале;

Пусть выполняются следующие предположения:

1^0. Множество $\widetilde{\mathrm{B}}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой, управляемой и идентифицируемой билинейной системы, является компактным.

2^0. Помехи $\{\xi_1(i)\}$ и $\{\xi_2(i)\}$ статистически не зависят между собой с

$$E\{\xi_1(i)/F_i^{(1)}\} = 0,\ E\{\xi_2(i)/F_i^{(2)}\} = 0,$$
$$E\{\xi_1^2(i)/F_i^{(1)}\} \le W_i^{(1)} < \infty,\ E\{(\xi_2^2(i)/F_i^{(2)}\} = W_i^{(2)} < \infty,$$

где $F_i^{(1)}, F_i^{(2)}$ – σ-алгебры, индуцированные семействами случайных величин $\{\xi_1(t), t \in T_i\}$ и $\{\xi_2(t), t \in T_i\}$, $T_i = \{t, t \le i, t \in \mathrm{Z}_c\}$, Z_c-множество целых чисел , $W_i^{(1)}, W_i^{(2)}$- случайные величины $E\left(W_i^{(1)}\right) \le \pi_{\xi_1}$, $E\left(W_i^{(2)}\right) \le \pi_{\xi_2}$, где E- оператор математического ожидания.

3^0. $\{\xi_1(i)\}, \{\xi_2(i)\}$ статистически не зависит от $\{x_i\}$.

4^0. Последовательности $\{x_i\}$-стационарные “белошумные” случайные сигналы с $E\{(x_i)^2\} = \sigma_x^2 > 0$. Для некоторых $\pi_x > 0$: $|x_i| < \pi_x$ п.н.

5^0. Априорно известно отношение дисперсий помех $\gamma = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$.

Рекуррентный алгоритм идентификации. Уравнение (1) может быть представлено в форме линейной регрессии:

$$y_i = \varphi_i^T \theta + \varepsilon_i, \quad (2)$$

где $\varphi_i = \left(\phi_z^T(i) \mid \phi_w^T(i) \mid \phi_{wz}^T(i)\right)^T$, $\phi_z(i) = \left(z_{i-1}, \ldots z_{i-r}\right)^T$,

$\phi_w(i) = \left(w_{i-1}, \ldots w_{i-r_1}\right)^T$,

$$\phi_{wz}(i) = \Big(w_i\, z_{i-1}, \ldots, w_i\, z_{i-r_3(0)} \mid w_{i-1} z_{i-1}, \ldots, w_{i-1} z_{i-r_3(1)} \mid \ldots$$
$$\ldots \mid w_{i-r_2} z_{i-1}, \ldots, w_{i-r_2} z_{i-r_3(r_2)}\Big)^T,$$

$\theta_0 = \left(b_0^T \mid a_0^T \mid c_0^T\right)^T$, $b_0 = \left(b_0^{(1)} \ldots b_0^{(r)}\right)^T$, $a_0 = \left(a_0^{(1)} \ldots a_0^{(r_1)}\right)^T$,

$$c_0 = \left(c_0^{(11)} \ldots c_0^{(1 r_3(1))} \mid c_0^{(21)} \ldots c_0^{(2 r_3(2))} \mid \ldots \mid c_0^{(r_2 1)} \ldots c_0^{(r_2 r_3(r_2))}\right)^T,$$

$$\varepsilon_i = \xi_1(i) - \sum_{m=0}^{r_1} a_0^{(m)} \xi_2(i-m) - \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3(m)} c_0^{(mk)} z_{i-k} \xi_2(i-m).$$

Из предположений 1^0 и 2^0 следует, что обобщенная ошибка имеет нулевое среднее значение и ее локальная дисперсия с вероятностью 1 будет равна:

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\Big((\varepsilon_i(a_0,c_0,i))^2\Big) = \overline{\sigma}_1^2 + \overline{\sigma}_2^2 a_0^T a_0 + \overline{\sigma}_2^2\overline{\sigma}_z^2 c_0^T c_0 =$$

$$= \overline{\sigma}_2^2(\gamma + a_0^T a_0 + \overline{\sigma}_z^2 c_0^T c_0) = \overline{\sigma}_2^2\omega(a_0,c_0).$$

Определим оценку $\hat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщённых ошибок $(\varepsilon_i(a_0,c_0,i))^2$ с весом $\omega(a,c)$, т.е.

$$\min_{\theta\in\tilde{B}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(y_i - \varphi_i^T\theta\right)^2}{\gamma + a^T a + \overline{\sigma}_z^2 c^T c} = \min_{\theta\in\tilde{B}}\frac{U_N(b,a,c)}{\omega(a,c)}, \tag{3}$$

тогда, оценки неизвестного вектора θ можно получить с помощью стохастически градиентного алгоритма минимизации функции (3):

$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) - \alpha_i\nabla_\theta\left[\frac{\left(y_{i+1} - \varphi_{i+1}^T\hat{\theta}(i)\right)^2}{\gamma + \hat{a}^T(i)\hat{a}(i) + \overline{\sigma}_z^2\hat{c}^T(i)\hat{c}(i)}\right], \tag{4}$$

где α_i последовательность, удовлетворяющая условиям:

6^0. $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i = \infty,\ \alpha_i \ge \alpha_{i+1}$ и $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i^l < \infty$ at $l > 1$.

7^0. $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_1(i) < \infty,\ \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_2(i) < \infty$. п.н.

Теорема 1. *Пусть динамическая система описывается уравнениями (1) и выполняются предположения 1^0-7^0, тогда оценки, определяемые алгоритмом (4), либо $\hat{\theta}(i)\xrightarrow[i\to\infty]{}\theta_0$ п.н., либо $\hat{\theta}(i)\xrightarrow[i\to\infty]{}\infty$.*

Литература

1. Mohler R.R. Bilinear control processes: with applications to engineering, ecology, and medicine. New York: Academic Press, 1973.
2. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. – 432 с.
3. Ahmed M.S. Parameter estimation in bilinear systems by instrumental variable methods //International Journal of Control, Vol. 44(4), P. 1177-1183, 1986.
4. Ekman M. Modeling and control of bilinear systems: application to the activated sludge process. PhD thesis 2005.
5. Gabr M.M. Subba Rao T. On the identification of bilinear systems from operating records // International Journal of Control, Vol. 40(1), P.121-128, 1984.
6. Tsoulkas V., Koukoulas P., Kalouptsidis N. Identification of input-output bilinear systems using cumulants. In Proceedings of the 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Pafos, Greece, P. 1105-1108, 1999.

7. Fnaiech F., Ljung L. Recursive identification of bilinear systems // International Journal of Control Vol. 45(2), P. 453-470, 1987.

Д.В. Иванов, Л.Ю. Фролова

КРИТЕРИЙ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХОЙ НАБЛЮДЕНИЯ

(Самарский государственный университет путей сообщения)

Модели авторегрессии находят применение в цифровой обработке сигналов, эконометрике, экологии, геофизических исследованиях, системах распознавания изображений, анализе временных рядов.

При наличии аддитивной помехи в выходном сигнале МНК дает смещенные оценки параметров авторегрессии. В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем [1,2]. В [3] предложен метод нелинейных наименьших квадратов, позволяющий получать сильно состоятельные оценки параметров авторегрессии при наличии помехи в выходном сигнале, его рекуррентная модификация приведена в [4]. В статье дано обобщение метода нелинейных наименьших квадратов на случай авторегрессии дробного порядка с помехой наблюдения.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную динамическую систему дробного порядка, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \ldots -1,0,1,\ldots$:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \xi_i^{(1)}, \;\; y_i = z_i + \xi_i^{(2)}, \tag{1}$$

где $0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r$, $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, $\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}$,

$$\binom{\alpha_m}{j} = \frac{\Gamma(\alpha_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m - j + 1)},$$

z_i, y_i-ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные; x_i – наблюдаемая входная переменная; $\xi_i^{(2)}$ – помеха наблюдения в выходном сигнале;

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество $\widetilde{\mathrm{B}}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой динамической системы является компактом.

2. Случайные процессы $\left\{\xi_i^{(k)}\right\}, k = 1,2$ является мартингал-разностью и удовлетворяет следующим условиям: $E\left(\xi_i^{(k)} / F_i^{(k)}\right) = 0$, п.н., $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^2 / F_i^{(k)}\right) < \infty$ п.н. $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^4\right) < \infty$, $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^2\right) < \infty$, где $F_i^{(k)}$ – σ- алгебра,