оборот и актуализацию имеющейся электронной информации, а также непрерывность организационных процессов, связанных с использованием архивных документов.

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

"РАСКРАШИВАНИЕ" КАРТЫ ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ ТОЧЕК РАЗНЫХ ЦВЕТОВ С ПОМОЩЬЮ НЕЧЕТКИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

(ИПМ ДВО РАН, Владивосток)

В настоящей работе предлагается алгоритм раскраски карты по точкам с разными цветами. Этот алгоритм основан на процедуре интервального распознавания образов и на алгоритме построения нечеткого прямоугольника. Он существенно проще и компактней, чем используемая в задачах картирования процедура триангуляции многоугольников.

Ключевые слова: нечеткий прямоугольник, интервальное распознавание образов, триангуляция многоугольников.

1 Введение

В настоящей работе предлагается алгоритм раскраски карты по точкам с разными цветами. Этот алгоритм основан на построении нечетких прямоугольников. Для каждой точки строится свой внутренний и содержащий его внешний прямоугольники. Прямоугольники, относящиеся к различным точкам одного цвета либо совпадают, либо не пересекаются. Если точки относятся к разным классам, то отвечающие им внутренние прямоугольники не пересекаются. Внешние прямоугольники могут пересекаться только у точек с разным цветом. Однако функции принадлежности, отвечающие пересекающимся прямоугольникам, удается корректно согласовать. Данный алгоритм базируется на процедуре интервального распознавания образов [1] и на алгоритме построения нечеткого прямоугольника [2], основанного на идеях работ [3] - [7]. Он существенно проще и компактней, чем используемая в задачах картирования процедура триангуляции многоугольников, являющихся выпуклой оболочкой конечного набора точек.

Ключевые слова: нечеткий прямоугольник, алгоритм классификации, задача картирования.

2 Внутренние и внешние прямоугольники

Основная идея работы [1] состоит в том, что класс распознаваемых объектов разбивается на подклассы. Каждому подклассу сопоставляется внешний и вложенный в него внутренний прямоугольники. Причем прямоугольники, отвечающие разным подклассам, либо совпадают, либо не пересекаются или пересекаются на множестве нулевой Лебеговой меры. Обобщая алгоритм [1], в настоящей работе рассматривается несколько классов распознаваемых объектов.

Пусть задан конечный набор векторов $Z_1 = ((x_{1,1}, x_{2,1}), j_1), \ldots, Z_n = ((x_{1,n}, x_{2,n}), j_n),$ где $-\infty < x_{i,k} < \infty, i = 1,2,\ j_k \in \{1,\ldots,m\}, k = 1,\ldots,n.$ Координаты $x_{i,k}, i = 1,2,$ характеризуют положение точки Z_k на плоскости, а координата j_k - номер класса, к которому принадлежит эта точка (цвет этой точки).

Одномерные отрезки. Зафиксируем индекс $i,$ пусть $j_k = s,$ обозначим

$$a_{i,k} = \min(x_{i,t} : x_{i,t} \le x_{i,k},\ j_t = s; x_{i,t} \le x_{i,q} \le x_{i,k} \Rightarrow j_q = s \text{ èëè } x_{i,t} = x_{i,k},$$

$$b_{i,k} = \max(x_{i,t} : x_{i,t} \ge x_{i,k},\ j_t = s; x_{i,t} \ge x_{i,q} \ge x_{i,k} \Rightarrow j_q = s \text{ èëè } x_{i,t} = x_{i,k}.$$

Очевидно, что справедливо неравенство $a_{i,k} \le b_{i,k}.$

Теорема 1 *Отрезки* $[a_{i,k}, b_{i,k}], [a_{i,k'}, b_{i,k'}], k \ne k',$ *либо совпадают, либо имеют общую граничную точку.*

Обозначим

$$A_{i,k} = \max(x_{i,t} : j_t \ne s, x_{i,t} \le a_{i,k}), B_{i,k} = \min(x_{i,t} : j_t \ne s, x_{i,t} \ge b_{i,k}). \qquad (1)$$

Очевидно, что справедливо неравенство $A_{i,k} \le B_{i,k}.$ Число $A_{i,k}$ нельзя определить формулой (1), если $x_{i,k} = \min(x_{i,t} : 1 \le t \le n),$ тогда полагаем $A_{i,k} = \min(x_{i,t} : 1 \le t \le n) = A_i.$ Аналогично, если $x_{i,k} = \max(x_{i,t} : 1 \le t \le n),$ то полагаем $B_{i,k} = \max(x_{i,t} : 1 \le t \le n) = B_i.$

Назовем отрезок $[a_{i,k}, b_{i,k}]$ внутренним отрезком, содержащим $x_{i,k},$ отрезок $[A_{i,k}, B_{i,k}]$ - внешним отрезком, содержащим $x_{i,k}, [a_{i,k}, b_{i,k}] \subseteq [A_{i,k}, B_{i,k}].$

Теорема 2 *Если* $j_k = j_{k'}, k \ne k',$ *то отрезки* $[A_{i,k}, B_{i,k}], [A_{i,k'}, B_{i,k'}]$ *либо совпадают, либо имеют общую граничную точку. Если* $j_k \ne j_{k'}, k \ne k',$ *то эти отрезки не совпадают, но могут пересекаться.*

Доказательства теорем $1,12$ основаны на элементарных логико-геометрических рассуждениях.

Прямоугольники, окружающие выделенную точку. Определим внутренний $\left[X_k\right]$ и внешний $\left(X_k\right)$ прямоугольники, окружающие точку $X_k = (x_{1,k}, x_{2,k})$ равенствами

$$\left[X_k\right] = [a_{1,k}, b_{1,k}] \otimes [a_{2,k}, b_{2,k}], \left(X_k\right) = [A_{1,k}, B_{1,k}] \otimes [A_{2,k}, A_{2,k}].$$

Теорема 3 *Внутренние прямоугольники* $\left[X_k\right], \left[X_{k'}\right], k \ne k',$ *либо совпадают, либо соприкасаются своими границами.*

Теорема 4 *Внешние прямоугольники* $\left(X_k\right), \left(X_{k'}\right), j_k = j_{k'}, k \ne k',$ *либо совпадают, либо соприкасаются своими границами.*

Утверждения теорем $3, 34$ непосредственно следуют из теорем $1,12$.

Теорема 5 *Внешние прямоугольники* $\left(X_k\right), \left(X_{k'}\right), j_k \ne j_{k'}, k \ne k',$ *не совпадают, но могут пересекаться. Причем каждая точка такого* *пересечения, содержащаяся во внутренностях этих прямоугольников, принадлежит не более чем двум различным внешним прямоугольникам.*

Зафиксируем k и положим $j_k = s.$ Используя определения внешнего и нутреннего прямоугольников, можно доказать следующие утверждения.

Лемма 1 *Множества* $(a_{1,k}, b_{1,k}) \otimes (a_{2,k}, b_{2,k}), [A_1, A_{1,k}] \otimes (a_{2,k}, b_{2,k}), [B_{1,k}, B_1] \otimes (a_{2,k}, b_{2,k}),$ $(a_{1,k}, b_{1,k}) \otimes [A_2, A_{2,k}], (a_{1,k}, b_{1,k}) \otimes [B_{2,k}, B_2]$ *содержат только точки* $X_t, 1 \le t \le n,$ *удовлетворяющие равенству* $j_t = s.$

Лемма 2 *Множества*

$(A_{1,k}, a_{1,k}) \otimes [A_2, B_2], (b_{1,k}, B_{1,k}) \otimes [A_2, B_2], [A_1, B_1] \otimes (A_{2,k}, a_{2,k}), [A_1, B_1] \otimes (b_{2,k}, B_{2,k})$ не содержат ни одной точки набора $X_t, 1 \le t \le n.$

Лемма 3 *Множества* $[A_{1,k}, a_{1,k}] \otimes [a_{2,k}, b_{2,k}], [b_{1,k}, B_{1,k}] \otimes [a_{2,k}, b_{2,k}], [a_{1,k}, b_{1,k}] \otimes [A_{2,k}, a_{2,k}], [a_{1,k}, b_{1,k}] \otimes [b_{2,k}, B_{2,k}]$ содержатся в единственном внешнем прямоугольнике $(X_k).$

Определим отрезки

$$C^-_{1,k} = [A_1, A_{1,k}] \otimes \{A_{2,k}\}, C^+_{1,k} = [B_{1,k}, B_1] \otimes \{A_{2,k}\},$$
$$C^-_{2,k} = [A_1, A_{1,k}] \otimes \{B_{2,k}\}, C^+_{2,k} = [B_{1,k}, B_1] \otimes \{B_{2,k}\},$$
$$C^-_{3,k} = \{A_{1,k}\} \otimes [A_2, A_{2,k}], C^+_{3,k} = \{A_{1,k}\} \otimes [B_{2,k}, B_2],$$
$$C^-_{4,k} = \{B_{1,k}\} \otimes [A_2, A_{2,k}], C^+_{4,k} = \{B_{1,k}\} \otimes [B_{2,k}, B_2]$$

и множества

$$C_{p,k} = C^-_{p,k} \bigcup C^+_{p,k},\ p = 1,\ldots,4.$$

Лемма 4 *В каждом из множеств* $C_{p,k}, p = 1,\ldots,4,$ *содержится по крайней мере одна точка* X_t *набора* $\{X_1,\ldots,X_n\},$ *удовлетворяющая условию* $j_t \ne s.$

Построим теперь прямоугольники

$$R_{1,k} = [A_1, a_{1,k}] \otimes [A_2, a_{2,k}], L_{1,k} = [A_1, A_{1,k}] \otimes [A_2, A_{2,k}],$$
$$R_{2,k} = [A_1, a_{1,k}] \otimes [b_{2,k}, B_2], L_{2,k} = [A_1, A_{1,k}] \otimes [B_{2,k}, B_2],$$
$$R_{3,k} = [b_{1,k}, B_1] \otimes [A_2, a_{2,k}], L_{3,k} = [B_{1,k}, B_1] \otimes [A_2, A_{2,k}],$$
$$R_{4,k} = [b_{1,k}, B_1] \otimes [b_{2,k}, B_2], L_{4,k} = [B_{1,k}, B_1] \otimes [B_{2,k}, B_2],$$

очевидно, что справедливы включения

$$R_{p,k} \supseteq L_{p,k},\ p = 1,\ldots,4.$$

Определим также прямоугольники

$$S_{1,k} = [A_{1,k}, a_{1,k}] \otimes [A_{2,k}, a_{2,k}], S_{2,k} = [A_{1,k}, a_{1,k}] \otimes [b_{2,k}, B_{2,k}],$$
$$S_{3,k} = [b_{1,k}, B_{1,k}] \otimes [A_{2,k}, a_{2,k}], S_{4,k} = [b_{1,k}, B_{1,k}] \otimes [b_{2,k}, B_{2,k}].$$

Лемма 5 *Для любой точки* $X_t \in L_{p,k}$, $j_t \neq s$ *справедливо включение* $(X_t) \subseteq R_{p,k}$, *причем внешний прямоугольник* (X_t) *вместе с любой внутренней точкой прямоугольника* $S_{p,k}$ *содержит* $S_{p,k}$ *целиком.*

Воспользуемся леммами 1 - 5 и докажем, что внутренние точки прямоугольника $S_{p,k}$ могут принадлежать помимо (X_k) не более чем одному внешнему прямоугольнику (X_t), $j_t \neq s.$ Остановимся на случае $p = 1$, т.к. в остальных случаях это утверждение проверяется аналогично.

Пусть для любого X_t выполняется соотношение $X_t \notin L_{1,k}$, тогда прямоугольник $S_{1,k}$ принадлежит единственному внешнему прямоугольнику (X_k). Предположим, что одна из точек X_t удовлетворяет условиям $X_t \in L_{1,k}$, $j_t \neq s, (X_t) \supseteq S_{1,k}$. Если для некоторого t' выполняются неравенства $x_{1,t} \leq x_{1,t'} \leq A_{1,k}$, (выполняются неравенства $x_{2,t} \leq x_{2,t'} \leq A_{2,k}$), тогда в силу определения внешнего прямоугольника справедливо равенство $j_t = j_{t'}$. Следовательно, внешние прямоугольники $(X_t), (X_{t'})$ либо совпадают, либо имеют только общие куски границ и значит внутренние точки прямоугольника $S_{1,k}$ не содержатся в $(X_{t'})$.

Если $x_{1,t'} \leq x_{1,t}, x_{2,t'} \leq x_{2,t}$, то тогда либо $j_{t'} \neq j_t$ и значит внутренние точки прямоугольника $S_{1,k}$ не содержатся в $(X_{t'})$. Либо $j_{t'} = j_t$ и значит или $(X_t) = (X_{t'})$, или прямоугольники имеют только общие куски границ и значит внутренние точки прямоугольника $S_{1,k}$ не содержатся в $(X_{t'})$.

3 Построение нечеткого множества для точек одного цвета

Без ограничения общности считаем, что существуют числа $0 = J_0 < J_1 < J_2 < \ldots < J_m = n$ такие, что $P_s = \{k : j_k = s\} = \{k : J_{s-1} < k \leq J_s,\}, 1 \leq s \leq m.$ В силу теорем 3, 4 при фиксированном s множество индексов $\{k \in P_s\}$ разбивается на классы эквивалентности, элементам которых соответствуют совпадающие внутренние (и внешние) прямоугольники.

Остановимся на случае $s = 1$ и предположим, что соответствующими классами эквивалентности являются множества индексов $\{1,\ldots,k_1\}, \{k_1+1,\ldots,k_2\},\ldots,\{k_{l-1}+1,\ldots,k_l = J_1\}$. Введем следующие обозначения: $\gamma_{i,q} = a_{i,k_q}, \Gamma_{i,q} = A_{i,k_q}, \delta_{i,q} = a_{i,k_q}, \Delta_{i,q} = B_{i,k_q}$. Очевидно, что $\Gamma_{i,q} \leq \gamma_{i,q} \leq \delta_{i,q} \leq \Delta_{i,q}, i = 1,2, 1 \leq q \leq l.$

При фиксированном $q, 1 \leq q \leq l,$ определим функцию $\mu_q(X), X \in E^2$ условиями:

$$a) X \in \mathrm{B}_q, \mathrm{B}_q = [\gamma_{1,q}, \delta_{1,q}] \otimes [\gamma_{2,q}, \delta_{2,q}] \Rightarrow \mu_q(X) = 1,$$

$$b) X \notin \mathrm{A}_q, \mathrm{A}_q = [\Gamma_{1,q}, \Delta_{1,q}] \otimes [\Gamma_{2,q}, \Delta_{2,q}] \Rightarrow \mu_q(X) = 0,$$

c) пусть при выполнении условия $0 \le \lambda \le 1$ справедливо включение $X = (x_1, x_2) \in \partial G_\lambda$, где ∂G_λ – граница множества

$$G_\lambda = \bigotimes_{i=1}^{2} \left[\gamma_{i,q} + \lambda(\Gamma_{i,q} - \gamma_{i,q}), \delta_{i,q} + \lambda(\Delta_{i,q} - \delta_{i,q})\right],$$

тогда $\mu_q(X) = 1 - \lambda,$ и значит при $X \in \mathrm{A}_q \setminus \mathrm{B}_q = \bigcup_{0 \le \lambda \le 1} \partial G_\lambda$

$$\mu_q(X) = 1 - \max_{1 \le i \le 2} \max\left[x_i - \gamma_{i,q} \Gamma_{i,q} - \gamma_{i,q}, x_i - \delta_{i,q} \Delta_{i,q} - \delta_{i,q}\right]. \quad (2)$$

В силу равенства (2) получаем:

$$\mu_q(X) \le 1 - x_i - \gamma_{i,q} \Gamma_{i,q} - \gamma_{i,q}, \Gamma_{i,q} \le x_i \le \gamma_{i,q}; \mu_q(X) \le 1 - x_i - \delta_{i,q} \Delta_{i,q} - \delta_{i,q}, \delta_{i,q} \le x_i \le \Delta_{i,q}.$$
(3)

Определим теперь нечеткое множество, обозначающее вхождение вектора $X = (x_1, x_2)$ в один из построенных внешних прямоугольников $[\Gamma_{1,q}, \Delta_{1,q}] \otimes [\Gamma_{2,q}, \Delta_{2,q}], 1 \le q \le m$ [2]. В силу пересечения внешних прямоугольников только на кусках их границ, где соответствующие им функции равны нулю, можно определить функцию принадлежности этого нечеткого множества $\mu(X) = \sum_{q=1}^{l} \mu_q(X)$.

4 Построение нечетких множеств для точек разного цвета на основе фона карты

В результате для каждого цвета $s, s = 1, \ldots, m,$ построено нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu^s(X)$ точки X к множеству, имеющему цвет s.

Теорема 6 *Справедливо неравенство*

$$\sum_{s=1}^{m} \mu^s(X) \le 1, \ X \in E^2, \quad (4)$$

Чтобы доказать неравенство (4) следует воспользоваться теоремой 5 и оценить функцию $\sum_{s=1}^{m} \mu^s(X)$ при $X \in S_{1,k}$, пользуясь обозначениями из доказательства этой теоремы . В этом случае

$$\sum_{s=1}^{m} \mu^s(X) = \mu^s(X) + \mu^{j_t}(X),$$

где в силу формулы (2) имеем

$$\mu^s(X) = 1 - \max_{i=1,2} x_i - a_{i,k} A_{i,k} - a_{i,k} \le 1 - x_1 - a_{1,k} A_{1,k} - a_{1,k},$$

$$\mu^{j_t}(X) = 1 - \max_{i=1,2} x_i - A_{i,k} a_{i,k} - A_{i,k} \le 1 - x_1 - A_{1,k} a_{1,k} - A_{1,k}.$$

Следовательно, в силу формул (2), (3) справедливо неравенство

$$\mu^s(X) + \mu^{j_t}(X) \le 1 - x_1 - a_{1,k} A_{1,k} - a_{1,k} + 1 - x_1 - A_{1,k} a_{1,k} - A_{1,k} = 1.$$

Завершая построение модели системы нечетких множеств, обозначим $\mu_0(X) = 1 - \sum_{s=1}^{m} \mu^s(X)$ и назовем эту неотрицательную разность функцией принадлежности нечеткого множества, характеризующего множество точек карты (плоскости), окрашенных в фоновый цвет.

5 Заключительные замечания

Нетрудно от двумерной перейти к многомерной модели раскраски карты. Для этого фактически ничего не потрубуется менять, в частности, метод доказательства теоремы 5.

Для процедуры визуализации раскраски карты достаточно раскрасить внутренние прямоугольники и контуром того же цвета указать границы внешних прямоугольников. Что же касается точек, входящих во внешние прямоугольники и не входящих во внутренние прямоугольники, то для них вычисление значений функций принадлежности проще всего производить с помощью формулы (2), не занимаясь технически достаточно сложным смешиванием различных цветов с различной интенсивностью.

Вычислительная сложность для реализации алгоритма построения внешних и внутренних прямоугольников $O(n^2.)$

В представленной в статье постановке задача о "раскраске" карты может быть использована для распознавания образов при наличии нескольких классов объектов (многомерных векторов) в обучающей выборке.

Литература

1. Tsitsiashvili G.Sh. Image recognition by multidimensional intervals// Reliability: Theory and Applications. 2013. Vol. 8. No 9. P. 21-23.

2. Tsitsiashvili G.Sh., Yu.N. Kharchenko, A.S. Losev and M.A. Osipova Interval Images Recognition and Fuzzy Sets// International Mathematical Forum. Vol. 9, 2014, no. 19, 917 - 921.

3. Zadeh L.A. Fuzzy sets// Information and Control. 1965. V. 8, № 3. P. 338-353.

4. Kaufmann A. Introduction a la theorie des sous-ensembles flous. 1973. Paris. Masson.

5. Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штойян Д. Введение в стохастическую геометрию. М.: Наука. 1989. (гл. 5, 6).

6. Chakraborty D., Ghosh, D. Analytical fuzzy plane geometry II// Fuzzy Sets and Systems. 2014. Vol. 243. P. 84–109.

7. Ефремов А.А. Новые операции над нечеткими числами и интервалами// Доклады ТУСУРа. № 1 (27). 2013, март. С. 95 – 99.