РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С БОКОВЫМИ НАДРЕЗАМИ

(Самарский университет)

Введение. Асимптотическое поведение напряжений у вершины трещины

Актуальной задачей механики сплошных сред и, в частности, механики разрушения является аккуратное описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в линейно упругом изотропном материале. Одним из эффективных представлений поля напряжений у вершины трещины является асимптотическое разложение М. Уильямса. Асимптотическое разложение функции напряжений Эри $\chi(r,\theta)$ в ряд по собственным функциям имеет вид

$$\chi(r,\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\theta) r^{\lambda_i}, \quad (1)$$

где r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине трещины, λ_i – собственные значения, $f_i(\theta)$ – собственные функции. Тогда компоненты напряжений имеют вид

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \sum_{m=1}^{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m \; f_{m,ij}^{(k)}(\theta)\, r^{k/2-1}, \quad (2)$$

где индекс m отвечает типу нагружения функции ($m = 1$ соответствует нормальному отрыву, $m = 2$ поперечному сдвигу), $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ являются универсальными угловыми функциями [1]. Коэффициенты a_k^m являются функциями приложенных нагрузок и геометрии образца. Все разнообразие задач механики разрушения отражается в амплитудных множителях: для каждой конфигурации тела с трещиной, находящейся под действием системы нагрузок, будет своя последовательность амплитудных множителей a_k^m. Разложение (2) широко используется для описания поля напряжений в окрестности вершины трещины в линейно упругом изотропном теле.

Задача определения первых двух слагаемых для ряда М. Уильямса достаточно легко разрешима и существует большое количество аналитических решений, полученных посредством разложения М. Уильямса для различных образцов с трещинами. При этом в задачах механики долгое время принято было учитывать только первое слагаемое с амплитудным множителем a_1^1, называемым коэффициентом интенсивности напряжений, поскольку в ближайшей окрестности вершины трещины оно даёт довольно точное описание поля напряжений. В последнее десятилетие появился ряд работ, учитывающих и второе слагаемое, называемое Т-напряжением. Однако, как можно увидеть из экспериментальных и теоретических работ [2] – [4], опубликованных в самое последнее время, возникает необходимость учета большего количества слагаемых, так как при удалении от вершины трещины обнаруживается существенное несоответствие данных, полученных, например, экспериментально или с помощью комплексного представления решения, и решений, полученных с помощью разложений М. Уильямса, учитывающих только одно или два первых слагаемых. В настоящее время с развитием компьютерных технологий стало возможным применение многопараметрического асимптотического разложения, в котором удерживаются высшие приближения.

Для нахождения амплитудных множителей a_k^m можно использовать один из следующих способов: 1) экспериментально; 2) теоретически; 3) численно с помощью метода конечного элемента (МКЭ). Фотоупругость является эффективным способом нахождения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса [2]-[4], поскольку экспериментально можно определить разность главных напряжений и найти амплитудные коэффициенты с помощью оптико-механического закона. С другой стороны, закон Вертгейма приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которой в случае большого количества удерживаемых слагаемых в асимтотическом разложении М. Уильямса наталкивается на серьезные математические трудности. В силу указанных причин представляется важным и актуальным рассмотреть конфигурации образцов с трещинами, для которых имеется аналитическое решение, раскладывая которое в ряд в окрестности трещины можно получить высшие приближения в асимптотических разложениях (1) и (2), и оценить их вклад в общее поле напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины. Одной из плоских задач теории упругости, позволяющих провести такого рода оценку, является задача о растяжении линейно упругой пластины с двумя полубесконечными боковыми разрезами.

Методы теории функции комплексного переменного.

Рассмотрим бесконечную пластину с двумя полубесконечными боковыми разрезами, симметричными относительно мнимой оси (вершины разрезов располагаются на расстоянии a от мнимой оси). Пластина растягивается сосредоточенными силами величины $\boldsymbol{P}$, приложенными в точках iy_0 и $-iy_0$ (Рис. 1).

Поскольку материал пластины линейно упругий изотропный, то для решения задачи может быть использована теория функции комплексного переменного.

Комплексный потенциал $\Phi_1(z)$ в этом случае имеет вид [5]

$$\Phi_1(z) = \frac{P}{\pi}\left(f - \alpha\, y_0 \frac{\partial f}{\partial y_0}\right), f = \frac{y_0}{y_0^2 + z^2}\sqrt{\frac{y_0^2 + a^2}{a^2 - z^2}}\ , \alpha = \frac{1}{2(1-\nu)}, \tag{3}$$

здесь $z = x + iy$, ν – коэффициент Пуассона.

Комплексное решение (3) позволяет найти всю последовательность коэффициентов a_k^m путем разложения комплексного потенциала в ряд по степеням r в окрестности вершины трещины $z = a + re^{i\theta}$ и $z = -a + re^{i\theta}$.

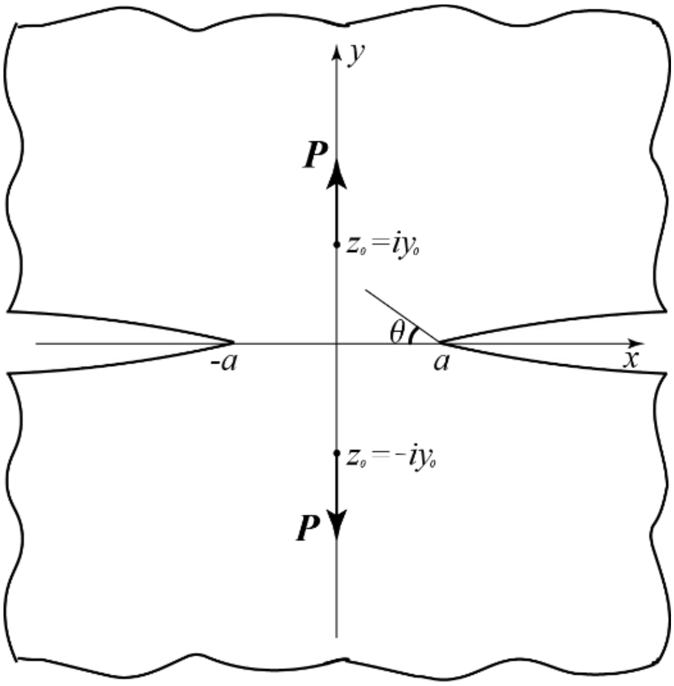
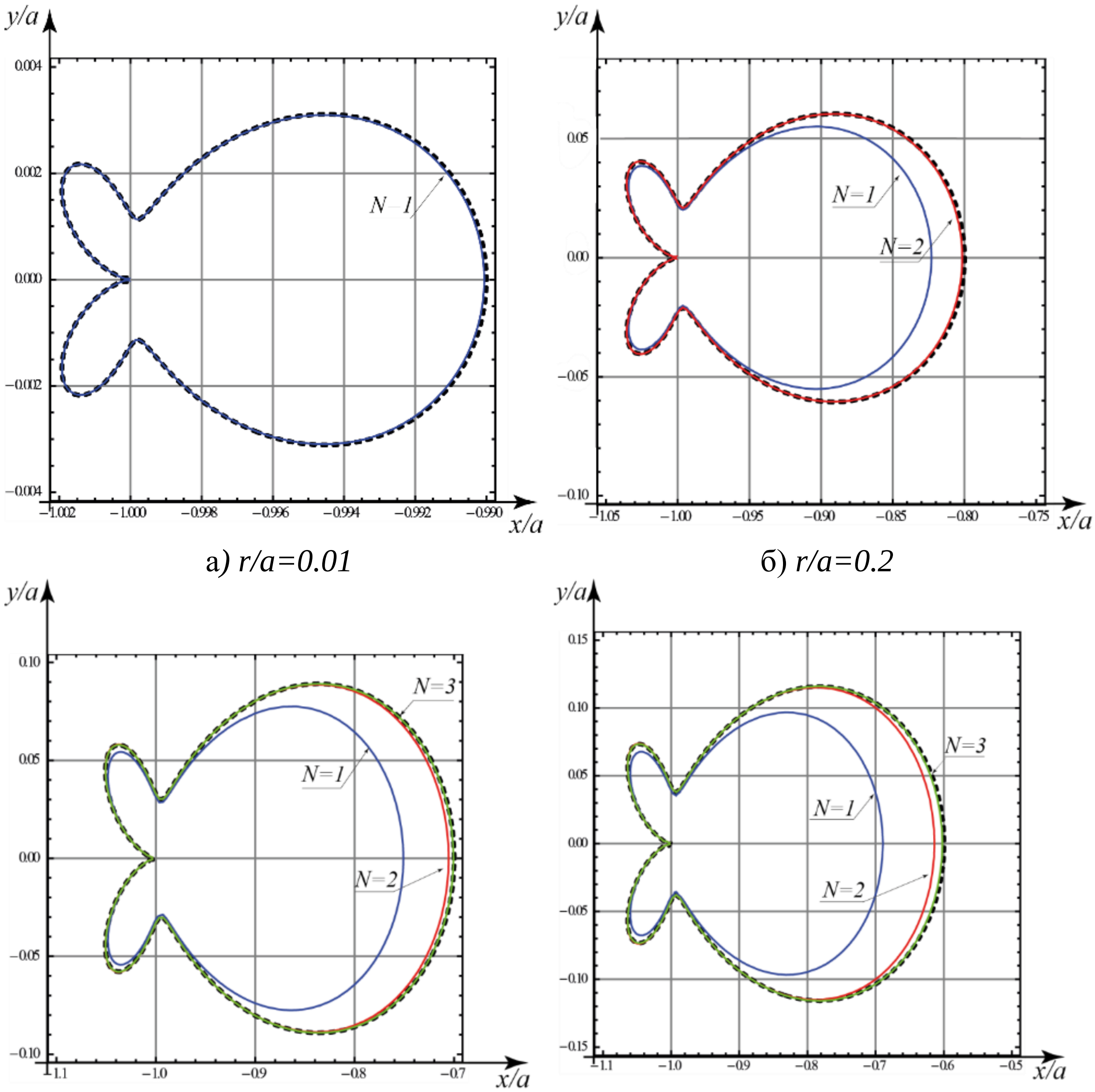


Рис.1. Геометрия пластины с боковыми надрезами.

В системе компьютерной алгебры Mathematica была разработана программа, которая позволяет вычислить любое наперед заданное количество коэффициентов асимптотического разложения (2). Что, в свою очередь, дает возможность оценить вклад высших приближений и ответить на вопрос: нужно ли учитывать высшие приближения и, если да, то сколько слагаемых в разложении следует учитывать. На Рис. 2 приведены распределения нормального напряжения σ_{11} на разных расстояниях от кончика трещины $z = -a$. Анализируя полученные представления, можно сделать вывод, что при удалении от вершины трещины действительно необходимо увеличивать количество учитываемых слагаемых в разложении М. Уильямса. Например, для достижения точности 10^{-6} на расстояниях от кончика трещины, равных $0.4\,a$, требуется учитывать девятнадцать слагаемых, при расстояниях, эквивалентных $0.1\,a$, требуется учитывать девять слагаемых, а при $0.01\,a$ требуемая точность достигается уже учетом трех слагаемых.

Выводы и обсуждение результатов. Проведенный анализ многопараметрического разложения поля напряжений и вычислительный эксперимент с удержанием различного количества слагаемых показали необходимость учета высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений. Чем больше расстояние от кончика трещины, тем больше слагаемых следует удерживать в разложении. Таким образом, при построении асимптотических решений задач, для которых отсутствуют точные аналитические решения, следует прибегать к построению многопараметрических асимптотических разложений. Проведенный анализ может быть полезен для обработки экспериментальных данных (например, в рамках метода цифровой фотоупругости).



а) *r/a=0.01* б) *r/a=0.2*

в) *r/a=0.3* г) *r/a=0.4*

Рис. 2. Линии уровня напряжений σ_{11} в окрестности вершины трещины $z = -a$ для различных расстояний $\hat{r} = r/a$.

Литература

1. Williams, M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack [Текст] / M. L. Williams // Journal of Applied Mechanics, 1957. – V. 24. – P. 109–114.

2. Hello, G. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium [Текст] / G. Hello, M.B. Tahar, J.M. Roelandt // International Journal of Solids and Structure, 2012. – V. 49. – P. 556–566.

3. Stepanova, L. V. A Photoelastic Study for Multiparametric Analysis of the Near Crack Tip Stress Field Under Mixed Mode Loading [Текст] / L. V. Stepanova,

P. S. Roslyakov, P. N. Lomakov // Procedia Structural Integrity, 2016. – V. 2. – P. 1797–1804.

4. Stepanova, L. V. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium [Текст] / L. V. Stepanova, P. S. Roslyakov // International Journal of Solids and Structures, 2016, V. 100 – 101. – P. 11– 28.

5. Tada, H. The Stress Analysis of Cracks Handbook [Текст]: монография / H.Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin. – 3rd ed. – NY: ASME Press, 2000. – 678p.

Г.П. Климашова, А.Н. Коварцев