В. Е. Зотеев, Р.Ю. Макаров

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ОБОБЩЕННОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ТРЕТЬЕЙ СТАДИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

(Самарский государственный технический университет)

Третья стадия ползучести, как стадия, непосредственно предшествующая разрушению, требует особого внимания и наиболее точных и совершенных методов расчета, однако нелинейность определяющих уравнений ползучести и длительной прочности затрудняет применение аналитических и повышает роль численных методов решения. В данной работе осуществляется переход от модели ползучести, нелинейной по параметрам, к линейной обобщенной регрессионной модели, описывающей связь между последовательными временными отсчетами и значениями деформации ползучести, что в дальнейшем позволит строить эффективные численные методы оценивания параметров модели третьей стадии ползучести.

В соответствии с определяющими уравнениями [1], математическая модель зависимости между деформацией ползучести p на третьей стадии, временем t и номинальным напряжением σ_0 может быть представлена в виде

$$p\left(t,\sigma_{0j}\right) = -\frac{1}{\sigma_{0j} m\alpha}\ln\left(1-\alpha mc\sigma_{0j}^{m+1}t\right), \tag{1}$$

где c и m – константы модели, при помощи которых описывается первая и вторая стадии ползучести; α – параметр модели, контролирующий процесс разупрочнения материала на деформации ползучести. Так как для третьей стадии деформации ползучести важнейшим участком моделирования является промежуток времени непосредственно перед моментом разрушения материала, когда кривая ползучести практически совпадает с вертикальной асимптотой, целесообразнее рассматривать величину прогнозируемого времени разрушения, то есть зависимость времени от деформации ползучести, уравнение которой в явном виде можно получить из выражения (1):

$$\hat{t}_{k,j} = \frac{1}{cm\sigma_{0j}^{m+1}\alpha}\left[1-\exp\left(-m\alpha\sigma_{0j}p_{k,j}\right)\right], \quad k = 0,1,2,\ldots,N_j-1, \quad j = 1,2,\ldots,M, \tag{2}$$

где M – количество кривых ползучести в эксперименте, N_j – количество точек эксперимента для j – ой кривой. В основе построения разностных уравнений, связывающих несколько последовательных значений дискретной модели

$$\hat{t}_{k,j} = \frac{1}{cm\sigma_{0j}^{m+1}\alpha}\left[1-\exp\left(-m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j k\right)\right], \qquad k = 0,1,\ldots,N_j-1, \quad j = 1,2,\ldots,M, \tag{3}$$

лежит методика, описанная и апробированная в [2–5]. Из формулы (3) имеем:

$$cm\sigma_{0j}^{m+1}\alpha\hat{t}_{k,j} = 1-\exp\left(-m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j k\right),$$

$cm\sigma_{0j}^{m+1}\alpha\hat{t}_{k-1,j} = 1-\exp\left[-m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j(k-1)\right] = 1-\exp\left(-m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j k\right)\cdot\exp\left(m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j\right),$

$cm\sigma_{0j}^{m+1}\alpha\hat{t}_{k-2,j} = 1-\exp\left[-m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j(k-2)\right] = 1-\exp\left(-m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j k\right)\cdot\exp\left(2m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j\right).$

Отсюда, переходя к разностям, можно получить соотношение вида: $\ln\dfrac{\hat{t}_{k-1,j}-\hat{t}_{k-2,j}}{\hat{t}_{k,j}-\hat{t}_{k-1,j}} = \sigma_{0j}\Delta p_j\lambda_1,\ \ k=2,3,...,N_j-1,\ \ j=1,2,...,M$, где $\lambda_1 = m\alpha$.

При $k=0$ и $k=1$ из формулы (3) соответственно получаем $\hat{t}_{0,j}=0$ и $\hat{t}_{1,j} = \dfrac{1}{cm\sigma_{0j}^{m+1}\alpha}\left[1-\exp\left(-m\alpha\sigma_{0j}\Delta p_j\right)\right],\quad j=1,2,...,M$. Из последнего соотношения имеем: $\ln\left[\exp\left(\lambda_1\sigma_{0j}\Delta p_j\right)-1\right]-\ln\hat{t}_{1,j} = \lambda_1\sigma_{0j}\Delta p_j+\lambda_2+\lambda_3\ln\sigma_{0j},\quad j=1,2,...,M$, где $\lambda_2=\ln(cm\alpha)$ и $\lambda_3 = m+1$.

Таким образом, имеем систему разностных уравнений, связывающих последовательность $\hat{t}_{k-2,j}$, $\hat{t}_{k-1,j}$ и $\hat{t}_{k,j}$ дискретных значений модели (3):

$$\begin{cases} \hat{t}_{0,j}=0; \\ \ln\left[\exp\left(\lambda_1\sigma_{0j}\Delta p_j\right)-1\right]-\ln\hat{t}_{1,j} = \lambda_1\sigma_{0j}\Delta p_j+\lambda_2+\lambda_3\ln\sigma_{0j}; \\ \ln\dfrac{\hat{t}_{k-1,j}-\hat{t}_{k-2,j}}{\hat{t}_{k,j}-\hat{t}_{k-1,j}} = \sigma_{0j}\Delta p_j\lambda_1,\ \ k=2,3,...,N_j-1;\quad j=1,2,3,...M. \end{cases} \tag{4}$$

Коэффициенты в системе разностных уравнений (4) связаны с параметрами деформации ползучести соотношениями:

$$\lambda_1 = m\alpha,\qquad \lambda_2=\ln(cm\alpha),\qquad \lambda_3=m+1, \tag{5}$$

которые позволяют по оценкам коэффициентов λ_j вычислять оценки параметров деформации ползучести. Используя соотношения $t_{k,j}=\hat{t}_{k,j}+\varepsilon_{k,j}$, $k=0,1,2,...,N_j-1,\ \ j=1,2,...,M$, где $t_{k,j}$– результаты эксперимента, значения переменной t при аргументе $\Delta p_j k$ для каждой j- той кривой; $\varepsilon_{k,j}$– естественный разброс результатов наблюдения относительно модели (3), после линеаризации по переменным $\varepsilon_{1,j}$, $\varepsilon_{k-2,j}$, $\varepsilon_{k-1,j}$ и $\varepsilon_{k,j}$, в первом приближении получаем:

$$\begin{cases} \ln \hat{t}_{1,j} = \ln\left(t_{1,j} - \varepsilon_{1,j}\right) \approx \ln t_{1,j} - \dfrac{\varepsilon_{1,j}}{t_{1,j}}, \\ \ln \dfrac{\hat{t}_{k-1,j} - \hat{t}_{k-2,j}}{\hat{t}_{k,j} - \hat{t}_{k-1,j}} = \ln \dfrac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j} - \left(\varepsilon_{k-1,j} - \varepsilon_{k-2,j}\right)}{t_{k,j} - t_{k-1,j} - \left(\varepsilon_{k,j} - \varepsilon_{k-1,j}\right)} \approx \ln \dfrac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} + \dfrac{1}{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}} \varepsilon_{k-2,j} - \\ -\dfrac{t_{k,j} - t_{k-2,j}}{\left(t_{k-1,j} - t_{k-2,j}\right)\left(t_{k,j} - t_{k-1,j}\right)} \varepsilon_{k-1,j} + \dfrac{1}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} \varepsilon_{k,j}. \end{cases} \qquad (6)$$

Подставляя формулы (6) в систему уравнений (4), имеем математическую модель, которая в форме разностных уравнений описывает результаты эксперимента $\left(p_{k,j}, t_{k,j}\right)$, $k = 0,1,2,...,N_j - 1$, $j = 1,2,...,M$. Полагая $\varepsilon_{0,j} = 0$ с учетом нулевых начальных условий $\left(p_{0,j} = 0,\ t_{0,j} = 0\right)$, получаем линейную обобщенную регрессионную модель, описывающую результаты эксперимента:

$$\begin{cases} t_{0,j} = 0; \\ \ln\left[\exp\left(\lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j\right) - 1\right] - \ln t_{1,j} = \lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j + \lambda_2 + \lambda_3 \ln \sigma_{0j} - \dfrac{\varepsilon_{1,j}}{t_{1,j}}; \\ \ln \dfrac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} = \sigma_{0j} \Delta p_j \lambda_1 - \dfrac{1}{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}} \varepsilon_{k-2,j} + \dfrac{t_{k,j} - t_{k-2,j}}{\left(t_{k-1,j} - t_{k-2,j}\right)\left(t_{k,j} - t_{k-1,j}\right)} \varepsilon_{k-1,j} - \\ -\dfrac{1}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} \varepsilon_{k,j}, \quad k = 2,3,...,N_j - 1, \quad j = 1,2,...,M. \end{cases} \qquad (7)$$

Таким образом, осуществлен переход от нелинейной математической модели (2) к линейной обобщенной регрессионной модели (7). Получены формулы, описывающие связь между параметрами исходной нелинейной математической модели третьей стадии ползучести и коэффициентами линейной обобщенной регрессионной модели, что в дальнейшем позволит строить эффективные численные методы оценивания параметров модели ползучести.

Литература

1. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушения материалов и элементов конструкций. –М.: Машиностроение – 1, 2004. – 264 с.
2. Зотеев В.Е., Заусаева М.А. Определение параметров двумерных динамических процессов на основе разностных схем / Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки, 2010, №1(20). С.154-161.
3. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация линейной динамической системы на основе стохастических разностных уравнений / Математическое моделирование, 2008, том 20, №9, С. 120-128.

4. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений – М.: Машиностроение, 2009. – 344 с.

5. Зотеев В.Е. Математические основы построения разностных уравнений для задач параметрической идентификации / Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки, 2008, №2(17). С.192-202.

В.Е. Зотеев, Е.В. Небогина

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

(Самарский государственный технический университет)

Проблема увеличения ресурса эксплуатационных сроков конструкций при различных режимах работы и снижение их материалоемкости является одной из важнейших задач, которые решает механика деформируемого твердого тела. Для решения упругопластических задач предельного состояния особенно остро стоит вопрос описания полной диаграммы упругопластического деформирования при растяжении-сжатии.

Определяющие уравнения [1], описывающие процессы неупругого деформирования, построены таким образом, что они не только отражают явления, наблюдаемые в проводимых экспериментах, но ориентированы на решение всевозможных технических задач. В то же время полное представление о процессах неупругого деформирования и разрушения материала должно быть основано не только на экспериментальных данных; необходимо учитывать сложную структуру самого материала и его свойства. Например, при построении моделей со сложными реологическими свойствами можно использовать структурные математические модели, дающие возможность описать различные нелинейные эффекты неупругого деформирования. При этом математическое описание процесса накопления повреждений в результате пластического деформирования требует достоверной оценки параметров модели на основе полной диаграммы упругопластического деформирования, построенной по результатам эксперимента.

Проблема построения математической модели процесса упругопластического деформирования на основе статистической обработки результатов эксперимента методами нелинейного оценивания [2,3] заключается в том, что решение системы определяющих уравнений [1] построено в форме неявной функциональной зависимости, содержащей под интегралом искомую функцию:

$$y(x) = \exp\left(-\gamma \int_{x_{\text{пр}}}^{x} \left(x - x_{\text{пр}}\right)^m y(x)\,dx\right)\left[\sigma_{\text{пр}} + \sqrt[n]{\frac{x - x_{\text{пр}}}{a}}\right], \qquad x \ge x_{\text{пр}}, \qquad (1)$$