М.А. Верхотуров, Г.Н. Верхотурова, С.В. Петренко

ПОИСК ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ В ОБЛАСТИ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Аннотация

Статья посвящена проблеме поиска локального экстремума для задачи размещения невыпуклых многоугольников на анизотропном материале. Область допустимых решений задается с использованием операторов конъюнкции и дизъюнкции, поиск локального экстремума осуществляется методом градиентного спуска.

1. Постановка задачи

Имеется область размещения S_0 - невыпуклый многоугольник и набор невыпуклых многоугольников $S=(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ (рис. 1). Размещением многоугольников назовем вектор $v=(v_1, v_2, \ldots, v_m)=(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m)$, где $v_i=(x_i,y_i)$ – координаты точки условного центра многоугольника S_i относительно центра многоугольника S_0. Требуется найти вектор v, минимизирующий длину l занятой части области S_0. Ориентация многоугольников фиксирована и должны выполняться следующие условия: многоугольники не должны пересекаться друг с другом и целиком находиться внутри области S_0.

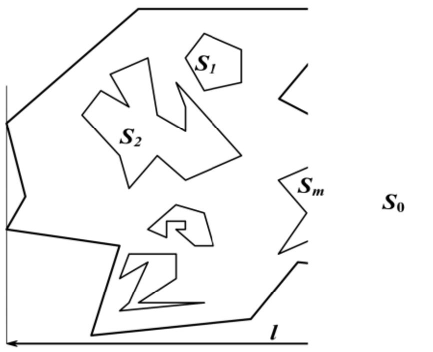

Рис. 1. Задача размещения

Глобальное решение x' задачи нахождения минимума некоторой функции $F(x)$ на области допустимых решений D определяется как: $x' = \arg\min_{D} F(x)$.

Локальное решение x'' может быть записано как $x'' = \arg\min_{D' \subset D} F(x)$, где D' – некоторая подобласть области D. Для задачи упаковки: $x=(v,l)= (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m, l)$, $F(x)=l$. Данная задача является NP-трудной. Точные методы поиска ее глобального экстремума на практике не дают решение задачи за приемлемое время даже для относительно небольшого числа многоугольников, поэтому применяются методы поиска локального экстремума. Базовые работы в этом направлении принадлежат Харьковской школе раскроя и упаковки академика Ю.Стояна [1].

2. Этапы решения задачи

Процесс решения задачи разбивается на следующие этапы:

1. построение области допустимых решений:
   - получение областей допустимого положения многоугольников относительно друг друга и области размещения;
   - описание области *D* в виде композиций объединений и пересечений неравенств;
2. нахождение локального экстремума.

2.1. Построение области допустимых решений

Для нахождения области допустимых решений *H* применяется алгоритм, предложенный в [2]. $H(A,B)$ обозначает область допустимого размещения многоугольника *B* относительно *A* или внутри *A*, если *A* – область размещения, а $h(A,B)$ – многоугольник, ограничивающий область *H*. Область допустимых решений можно определить выражением: $D=\bigcap_{i=1}^{K} H_i$, где $K=m+m(m-1)/2$ – число всех допустимых областей для всех пар многоугольников и многоугольников и области; $H_i=H(S_0,S_i)$ (i=1,2,…,m); $H_i=H(S_j,S_u)$ (j=1,2,…,m-1; u=j+1,…,m; i=m+1,…,K). Введем обозначения: $conv(A)$ – выпуклая оболочка некоторого многоугольника *A*; $f_u(v)$ – неравенство, соответствующее гиперплоскости *u*-ого ребра многоугольника T^0, размещенного в точке *v* (u=1, 2, …, k). Область внутри многоугольника T^0 представляется в виде пересечения линейных неравенств $T^0=\bigcap_{U_1^0} f_u(v) \bigcap_{r=1}^{m_1^0}\left(\bigcup_{U_r^1} f_u(v) \bigcup_{q=1}^{m_r^1}\left(\bigcap_{U_q^2} f_u(v)...\right)\right)$.

Для области вне многоугольника T^0 выражение будет иметь вид: $T^0=\bigcup_{U_1^0} f_u(v) \bigcup_{r=1}^{m_1^0}\left(\bigcap_{U_r^1} f_u(v) \bigcap_{q=1}^{m_r^1}\left(\bigcup_{U_q^2} f_u(v)...\right)\right)$. Для того, чтобы задать область допустимых решений задачи полностью, необходимо учесть тот факт, что многоугольники должны быть расположены с левой стороны от ограничивающей занятую область линии. Таким образом, выражение для области допустимых решений принимает вид: $D=\bigcap_{i=1}^{m} H_i \bigcap_{i=m+1}^{K} H_i \bigcap_{i=1}^{m}(x_i+dx_i \le l)$, где $(l - dx_i)$ (i=1, 2, .., m) определяет максимальное значение x_i для размещения многоугольника S_i с левой стороны от прямой $x=x_{\min}+l$, $x_{\min}=\min_{x\in S_0} x$; H_i (i=1, 2, .., m) представляется в виде конечного выражения следующей структуры:

$$T=\begin{cases} (T\bigcup T\bigcup ...\bigcup T) \\ (T\bigcap T\bigcap ...\bigcap T) \\ (f(x)\bigcup f(x)\bigcup ...\bigcup f(x)) \\ (f(x)\bigcap f(x)\bigcap ...\bigcap f(x)) \end{cases},$$

где $f(x)$ – линейное неравенство, определяющее одно из ребер области H_i, помещенное в точку: $x=(v,l)= (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m, l) \in R^{2m+1}$.

2.2. Поиск локального экстремума на заданной области допустимых решений

Задачу поиска локального экстремума можно формально записать как:

$$x'' = \arg\min_D cx,$$

где c = (0, 0, …, 1); D – область допустимых решений.

Для нахождения локального минимума этой задачи воспользуемся методом градиентного спуска.

Пусть x_0 – некоторое допустимое решение. Процесс решения состоит из шагов, на каждом из которых выполняется поиск вектора g и длины шага α. Следующее приближение вычисляется по формуле:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha g.$$

Для выбора направления движения используется метод «активных» неравенств [1, 3]. «Активными» для размещения x_k называются те неравенства $f(x)$, которые при $x = x_k$ превращаются в равенства. Неравенства, используемые для описания области допустимых решений можно записать в виде: $f(x) = xn + b \le 0$, где n – вектор нормали гиперплоскости в пространстве R^{2m+1}, которая соответствует данному неравенству.

Пусть F_a – множество неравенств, активных в точке x_k, N_a – множество векторов нормалей этих неравенств, тогда задача выбора направления движения принимает следующий вид: найти $g = \min(g'c)$ при условиях: $|g'|=|c|$; для активных неравенств $(x_k + g')n + b \le 0$.

Учитывая $|c|=1$ => $|g'|=1$ или $g'^2=1$, первое условие заменим более простыми $g'_i \le 1$ и $g'_i \ge -1$. Второе, с учетом $x_k n + b = f(x) = 0$, можно свести к $g'n \le 0$, $n \in N_a$. В результате получается задача линейного программирования, которую можно записать следующим образом:

$$g'=\gamma-\beta \Rightarrow \text{найти } \min(c\gamma - c\beta)$$

$$u_j = -n\gamma + n\beta,\ n \in N_a$$

$$y_i = -\gamma_i + \beta_i + 1,\ i = 1, 2, \ldots, 2m+1$$

$$z_i = \gamma_i - \beta_i + 1,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\gamma_i \ge 0,\ \beta_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Для ее решения используется симплекс-метод, начальное базисное решение которого $u = 0$, $y = 1$, $z = 1$, $\gamma = 0$ и $\beta = 0$ вытекает из формы записи задачи.

Далее находится вектор g направления изменения x_k, имеющий минимальное расхождение с вектором уменьшения функции цели, и длина шага α.

Пусть $\beta=(vn)+b$, $\gamma=(gn)$, тогда расстояние r от точки x_k вдоль единичного вектора g до гиперплоскости $x_k n+b$ определяется выражением $r=-\beta/\gamma$.

Пусть $\alpha\in[r_1,r_2]$ – обозначение диапазона $(r_1\le\alpha\le r_2)$; $\alpha\in]r_1,r_2[$ – обозначение диапазона $(\alpha\le r_1,\alpha\ge r_2)$, где r_1, $r_2\in R^1$, $r_1<r_2$.

Исключаются из рассмотрения те H_i (i=m+1, m+2, …, K), выпуклые оболочки h_i которых не пересекаются лучом (x_k, g). Для каждого пересечения неравенств $\bigcap_{u\in U} xn_u+b_u\le 0$ определяется диапазон $[r_1,r_2]$: $r_1=\max\left\{\max_{u\in U:\gamma_u>0}\left\{-\frac{\beta_u}{\gamma_u}\right\},-\infty\right\}, r_2=\min\left\{\min_{u\in U:\gamma_u<0}\left\{-\frac{\beta_u}{\gamma_u}\right\},+\infty\right\}$, для объединения $\bigcup_{u\in U} xn_u+b_u\le 0$ диапазон $]r_1,r_2[$: $r_1=\max\left\{\max_{u\in U:\gamma_u<0}\left\{\frac{\beta_u}{\gamma_u}\right\},-\infty\right\}$, $r_2=\min\left\{\min_{u\in U:\gamma_u>0}\left\{\frac{\beta_u}{\gamma_u}\right\},+\infty\right\}$. Если $r_1>r_2$ => r_1=-∞, r_2=+∞.

В результате получается: $\alpha\in T'$, где $T'=\begin{cases}(T'\bigcup T'\bigcup\ldots\bigcup T')\\(T'\bigcap T'\bigcap\ldots\bigcap T')\\ [r_1,r_2]\\ ]r_1,r_2[\end{cases}$

Выполняется разбор выражения T'. Результатом каждого шага является последовательность вида: $P=(\delta_1,r_1,\delta_2,r_2,\ldots,\delta_n,r_n)$, где $r_i\in R^1$ – граница диапазона ($r_i<r_{i+1}$); δ_i – знак ≤ или ≥ (i=1, 2, …, n), которая фиксирует допустимые диапазоны α. Выбирается максимальное значение α из последовательности P.

Получив вектор направления движения и длину шага, можно рассчитать следующее приближение x_{k+1}. Процесс поиска решения прекращается, если на очередном шаге $(cg)\ge 0$.

3. Заключение

Использование предложенного метода позволяет находить локальный экстремум задачи размещения ориентированных многоугольников для любого допустимого решения. По сравнению с аналогичными подходами, основанными на идеологии активного набора, представленный метод имеет более широкие возможности получения следующего приближения за счет рассмотрения всей области допустимых решений при определении длины шага, а не ее некоторой подобласти.

Литература

1. Стоян Ю.Г., Новожилова М.В., Карташов А.В. Математическая модель и оптимизация $E_k(R^2)$ – задач размещения. Харьков. 1991. (Препр./АН УССР. Институт проблем машиностроения; № 353).
2. Bennell J.A., Song X "A comprehensive and robust procedure for obtaining the nofit polygon using Minkowski sums". 2005.
3. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.:Мир,1985. – 509с.

С.З. Владимиров, А.О. Новиков, Н.Г. Чернобровин, И.С. Черномырдин

ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ ВАКУУМНО-ВЫПАРНОЙ УСТАНОВКОЙ

(Самарский университет, ООО "Пролог")

Программа создана для автоматизации управления технологическим оборудованием ступенчатой вакуумно-выпарной установки опреснения морской воды [1].

Программное обеспечение (далее ПО) разработано в среде разработки прикладных программ для программируемых логических контроллеров (далее ПЛК) и проектирования программ для панелей управления и SCADA систем Siemens S7 TIA Portal v13.SP1. Программное обеспечение для ПЛК S7-315 написано на языках LAD и SCL.

Программное обеспечение обеспечивает:

- контроль состояния установки (уровни, температуры, давления и т.д.);
- управление механизмами установки (насосы, нагреватели, задвижки и т.д.);
- управление механизмами в ручном и автоматическом режиме;
- диагностику датчиков и механизмов.

Программное обеспечение позволяет управлять установкой как в ручном, так и в автоматическом режиме.

Ручной режим используется для пусконаладочных и ремонтных работ и позволяет управлять любым механизмом в отдельности и контролировать его состояние.

Автоматический режим является основным и обеспечивает функционирование установки в соответствии с заданным алгоритмом. Включает в себя ряд регуляторов, обеспечивающих необходимый технологический режим:

- регулирование давления исходной воды в ступени;
- подогрев исходной воды в 1-5 ступенях;
- заполнение (поддержание уровня) емкости блока вакуумирования;
- работа клапанов подачи исходной воды в 1-5 ступенях;
- работа клапанов удаления воздуха из 1-5 ступеней;
- управление откачкой дистиллята;