Ю.М. Заболотнов, А.А. Лобанков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СЛАГАЕМЫМИ

(Самарский государственный аэрокосмический университет)

Целью работы является разработка метода расчета приближенно оптимального регулятора для стабилизации движения колебательной системы с гироскопическими слагаемыми. Данная задача возникает при управлении движением твердого тела относительно центра масс во многих прикладных задачах. Предполагается, что движение твердого тела близко к движению в классическом случае Лагранжа. Метод основывается на совместном применении принципа динамического программирования Беллмана и метода усреднения. Метод усреднения применяется для приближенного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана, что позволяет осуществить синтез регулятора.

Синтез регулятора в данной работе проводится для малых углов нутации, то есть невозмущенная система представляет собой линейную систему с гироскопическими членами. После преобразования системы к нормальным координатам [1] синтез управления осуществляется по квадратичному критерию оптимальности на асимптотически большом интервале времени. Обратное преобразование координат позволяет записать уравнение регулятора в исходных переменных и, тем самым, решить поставленную задачу. В качестве примера приводится аналитическое решение задачи синтеза приближенно оптимального регулятора для линейных возмущений и при медленном изменении восстанавливающего момента от силы тяжести.

Рассмотренная методика синтеза приближенно оптимального регулятора может быть применена для компенсации дестабилизирующего действия возмущающих моментов во многих прикладных задачах: при движении твердого тела в атмосфере планет [2]; для стабилизации углового движения твердого тела на тросе [3], для малых спутников с магнитной системой ориентацией [1] и др.

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки описывается классическими динамическими и кинематическими уравнениями Эйлера относительно некоторой неподвижной системы координат. Имея в виду синтез управления, стабилизирующего движение твердого тела относительно статически устойчивого положения равновесия, определим углы Эйлера определяются относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ так, как это показано на рис.1, где ψ, θ и φ - углы прецессии, нутации и собственного вращения; $Oxyz$ - связанная с твердым телом система координат; $\vec{G}$ - вектор силы тяжести; C - центр масс тела; $\Delta\vec{r}$ - радиус-вектор, определяющий положение центра масс тела относительно неподвижной точки O.

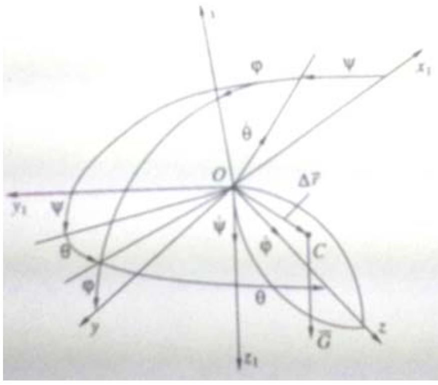

Рис. 1

Уравнения движения твердого тела записываются в комплексной форме при малых углах нутации [2]

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\bar{J}_z\omega_z\frac{d\xi}{dt} + \omega^2(r)\xi = \varepsilon F\left(r, \xi, \frac{d\xi}{dt}, \omega_z\right) + \varepsilon u, \qquad (1)$$

где $\xi = \beta + i\alpha$ - комплексный угол нутации ($|\xi| = \theta$), i - мнимая единица, ω_z - угловая скорость вращения твердого тела вокруг продольной оси, $\bar{J}_z = J_z / J$, J_z и J - моменты инерции, $\bar{J}_z = J_z / J$, $u = u_\beta + iu_\alpha$ - управление, $F\left(r, \xi, \frac{d\xi}{dt}, \omega_z\right)$ - возмущающие функции, $\omega^2(r)$ - с точностью до множителя момент от силы тяжести, r - вектор медленно изменяющихся параметров, ε - малый параметр задачи.

Решение невозмущенного уравнения (1) при $\varepsilon = 0$ можно записать в виде

$$\xi = a_1 e^{i\psi_1} + a_2 e^{i\psi_2}, \qquad (2)$$

где a_1 и a_2 - амплитуды колебаний (вещественные величины), $г_1$=$щ_1$t+$г_1(0)$ и $г_2$=$щ_2$t+$г_2(0)$ - фазы; $г_1(0), г_2(0)$ - начальные значения фаз; $\omega_{1,2} = \bar{J}_z\omega_z / 2 \pm \omega_\theta$ - частоты колебаний; $\omega_\theta = \sqrt{\bar{J}_z^2\omega_z^2 / 4 + \omega^2}$.

Ставится задача определения управления εu, обеспечивающего динамическую устойчивость движения твердого тела вокруг неподвижной точки в силу уравнения (1) и исходя из минимума квадратичного критерия оптимальности

$$I = \varepsilon\int_0^T W\left(a_1, a_2, u_\alpha, u_\beta\right)dt, \qquad (3)$$

где $W\left(a_1, a_2, u_\alpha, u_\beta\right) = b_1a_1^2 + b_2a_2^2 + c\left(u_\alpha^2 + u_\beta^2\right)$, $b_1, b_2, c > 0$ - весовые коэффициенты. Причем амплитуды колебаний определяются в силу возмущенной системы и должны удовлетворять условиям динамической устойчивости $\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt} < 0$ в каждый момент времени.

Движение твердого тела рассматривается на асимптотически большом промежутке времени $T = L/\varepsilon$, где $L < \infty$ - некоторая константа, поэтому функционал (3) изменяется на величину порядка $O(1)$.

Дифференцируя функцию (2) по времени в силу невозмущенной системы, получим

$$\frac{d\xi}{dt} = i\left(a_1\,\omega_1 e^{i\psi_1} + a_2\omega_2\,e^{i\psi_2}\right). \tag{4}$$

Рассматривая соотношения (2) и (4) как замену переменных $\left(\xi,\frac{d\xi}{dt}\right) \Rightarrow (a_1,a_2,\psi_1,\psi_2)$ и применяя метод вариации произвольных постоянных, найдем [2]

$$\frac{da_{1,2}}{dt} = \mp\frac{1}{2\omega_\theta}\left[a_{1,2}\dot{\omega}_{1,2} + a_{2,1}\dot{\omega}_{2,1}\cos(\psi_2-\psi_1) - \varepsilon\,\mathrm{Im}\left((F+u)e^{-i\psi_{1,2}}\right)\right], \tag{5}$$

$$\frac{d\psi_{1,2}}{dt} = \omega_{1,2} + \frac{1}{2\omega_\theta a_{1,2}}\left[a_{2,1}\dot{\omega}_{2,1}\sin(\psi_1-\psi_2) \mp \varepsilon\,\mathrm{Re}\left((F+u)e^{-i\psi_{1,2}}\right)\right], \tag{6}$$

где $\dot{\omega}_{1,2} = \frac{d\omega_{1,2}}{dt} = O(\varepsilon)$, так как частоты зависят от вектора r медленно изменяющихся параметров; $\mathrm{Re}(\cdot)$ и $\mathrm{Im}(\cdot)$ - действительная и мнимая части приведенных функций.

Согласно принципу динамического программирования, оптимальное управление определяется из условия [4]

$$\min_{u_\alpha,u_\beta}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \phi}\cdot\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + W(a,u_\alpha,u_\beta)\right) = 0, \tag{7}$$

где $V(a,\phi,r)$ - производящая функция, а точка $(\cdot)$ означает скалярное произведение векторов.

Выражение, стоящее под знаком минимума, представляет собой квадратичный степенной полином по компонентам управления u_α, u_β. Поэтому, взяв от этого выражения частные производные по u_α, u_β и приравняв их к нулю, нетрудно получить оптимальное управление в виде

$$u_\beta^o = \frac{1}{4c\omega_\theta}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\cos\psi_k - \frac{1}{a_k}\frac{\partial V}{\partial \psi_k}\sin\psi_k\right), \tag{8}$$

$$u_\alpha^o = \frac{1}{4c\omega_\theta}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\sin\psi_k + \frac{1}{a_k}\frac{\partial V}{\partial \psi_k}\cos\psi_k\right). \tag{9}$$

Выражения (8–9) обеспечивают минимум функционала (3) в силу положительной определенности функции $W(a_1,a_2,u_\alpha,u_\beta)$ и при надлежащем определении производящей функции V. Подставив соотношения (8–9) в выражение (7) приходим к уравнению в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial a} \cdot X\left(a, \phi, r\right) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \phi} \cdot Y\left(a, \phi, r\right) + \frac{\partial V}{\partial \phi} \cdot \omega\left(r\right) + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} +$$

$$+\varepsilon \sum_{k=1}^{2} b_k a_k^2 + U = 0 . \qquad (10)$$

Здесь $\frac{dr}{dt} = O\left(\varepsilon\right)$, $U = -\varepsilon c\left[\left(u_\alpha^o\right)^2 + \left(u_\beta^o\right)^2\right]$, где u_α^o и u_β^o определяются выражениями (8–9).

Для определения приближенного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана используется стандартный метод усреднения. В этом случае управление удается определить аналитически, то есть осуществить синтез управления.

Так, например, приближенно оптимальное управление, когда $F = 0$, имеет вид

$$u_\alpha = \frac{\sqrt{b_1} a_1 \sin\gamma_1 + \sqrt{b_2} a_2 \sin\gamma_2}{\sqrt{c\omega_\theta}}, \; u_\alpha = \frac{\sqrt{b_1} a_1 \cos\gamma_1 + \sqrt{b_2} a_2 \cos\gamma_2}{\sqrt{c\omega_\theta}} .$$

Литература

1. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. Москва. Машиностроение. 1978..
2. Заболотнов Ю. М., Любимов В.В. Вторичные резонансные эффекты при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 49-59.
3. Заболотнов Ю. М., Наумов О.Н. Движение спускаемой капсулы относительно центра масс при развертывании орбитальной тросовой системы // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 2. С. 177-187.
4. Летов А.М. Динамика полета и управление. Москва. Наука. 1969. 360 с.

Д.В. Кирш, А.В. Куприянов

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЁТОК В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва)

Введение

Кристаллическая решётка – это присущее кристаллам регулярное расположение частиц, характеризующееся периодической повторяемостью в трёх измерениях.